

АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ КИНЕТИКИ КОАГУЛЯЦИИ И КОНДЕНСАЦИИ КОМПОЗИТНЫХ ЧАСТИЦ

В. Н. Пискунов

РФЯЦ-ВНИИЭФ, 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Получены следующие новые результаты для одновременно действующих процессов коагуляции и конденсации композитных частиц: сформулированы уравнения, дающие сокращенную (интегральную по примеси) информацию о кинетике формирования композитных частиц за счет коагуляции и конденсации; получены новые аналитические решения для спектров и содержания примеси в частицах смешанного состава; результаты обобщены на случай любых коэффициентов коагуляции, для которых есть аналитическое решение однокомпонентной задачи. Полученные решения целесообразно использовать для калибровки численных программ, рассчитывающих кинетику формирования композитных частиц в практически важных задачах.

Ключевые слова: дисперсные системы, коагуляция, конденсация, кинетическое уравнение, композитные частицы, аналитические решения, верификация численных программ.

Введение

Во многих задачах физики дисперсных систем сталкиваются с необходимостью описания кинетики формирования композитных частиц, состоящих из смеси различных веществ. Сюда относятся, например, процессы осаждения загрязняющих примесей на частицах аэрозольной компоненты земной атмосферы, процессы формирования кислотных осадков в атмосфере, динамика аэрозолей в облачных системах и т. д.

Важным классом задач является описание процессов формирования и распространения радиоактивных аэрозолей как в помещениях, так и в результате аварийных выбросов в атмосферу. Существует целый ряд компьютерных кодов, описывающих формирование аэрозолей при реакторных авариях, например, наиболее известный из них – MELCOR [1]. Эти компьютерные коды используют различные способы моделирования аэрозольной динамики, такие как метод конечных элементов, моментные аппроксимации, секционное приближение, метод Монте-Карло и другие численные подходы [2].

Другой, практически важной для многих видов дисперсных систем, является задача о формировании смешанных частиц, находящихся в двух

фазовых состояниях (твердом и жидком). Особенно она актуальна для изучения динамики формирования и выпадения атмосферных осадков [3]. В облачных системах при отрицательных температурах обычно имеют дело со всеми фазовыми состояниями воды: твердым (лед, град, снежинки), жидким (капли) и газообразным (пар).

При численном моделировании эффективным является сокращенное описание, когда одна из компонент (примесь) считается интегрально – через нулевой и первый моменты полного спектра [4, 5]. На практике важным является совместное описание процессов коагуляции и конденсации. Для облачных процессов это усложнение задачи является обязательным, соответствующие кинетические уравнения для многофазных систем (пар, вода, лед) сформулированы в [6, 7]. Там же получен ряд аналитических решений для систем, где примесью считается водная фракция, и капли мгновенно промерзают при коагуляционных столкновениях.

В данной работе получены более общие результаты для коагуляции и конденсации композитных частиц:

– сформулированы уравнения, дающие сокращенную (интегральную по примеси) информацию о кинетике формирования композитных частиц за счет коагуляции и конденсации;

– получены новые аналитические решения для спектров и содержания примеси в частицах смешанного состава;

– результаты обобщены на случай любых коэффициентов коагуляции, для которых есть аналитическое решение однокомпонентной задачи.

Полученные аналитические решения целесообразно использовать для калибровки численных программ [1, 5, 8, 9], рассчитывающих кинетику формирования композитных частиц в практически важных задачах. Целью тестирования являются проверка схемы расчета коагуляции композитных частиц и верификация метода расщепления по физическим процессам при одновременном моделировании коагуляции и конденсации.

1. Постановка задачи

Для получения необходимой информации об изменении состава композитных частиц в результате коагуляции необходимо пользоваться более сложным кинетическим уравнением, чем стандартное уравнение Смолуховского. Если ограничиться рассмотрением двухкомпонентных смесей, то оно выглядит для пространственно-однородного случая следующим образом [4, 10]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C(g, \alpha, t)}{\partial t} = & \\ = \frac{1}{2} \int_0^g \int_0^\alpha K(g-s, \alpha-\beta; s, \beta) C(g-s, \alpha-\beta, t) C(s, \beta, t) ds d\beta - & \\ - C(g, \alpha, t) \int_0^\infty \int_0^\infty K(g, \alpha; s, \beta) C(s, \beta, t) ds d\beta \equiv S(C; g, \alpha, t), & \end{aligned} \quad (1)$$

где $C(g, \alpha, t)$ – концентрация частиц, содержащих на момент времени t суммарную массу g и массу α какой-либо выделенной компоненты; $K(g, \alpha; s, \beta)$ – коэффициенты (ядра) коагуляции, зависящие в общем случае от размеров, плотности и состава сталкивающихся частиц. В дальнейшем будем называть активной фракцией (не путать с радиоактивным веществом – это может быть и химическая примесь) те частицы, которые содержат только примесь (например, кислоту или радиоактивное вещество), пассивной фракцией – частицы балластного вещества (например, материалы теплоносителя, грунт, водные капли и т. д.), а композитной фракцией – частицы со смешанным составом.

Для нахождения аналитических решений в случае одновременной конденсации и коагуляции

композитных частиц необходимо привести полную систему уравнений для совместного действия этих процессов. Эти уравнения сформулированы в [11, 12] применительно к фазовым переходам вода – лед, а здесь мы обобщим эту процедуру.

Массообмен частицы с паром будем характеризовать полной скоростью испарения (конденсации) $d_g = V(g, \alpha, t)$, а процесс формирования фазы α – скоростью $d_t \alpha = U(g, \alpha, t)$. За счет коагуляции происходит изменение концентраций, описываемое уравнением (1). Пользуясь введенными выше величинами V и U , легко обобщить уравнение (1) на случай, когда происходит изменение как полной массы частиц g , так и массы примеси α за счет конденсации (испарения):

$$\begin{aligned} \partial_t C(g, \alpha, t) + \partial_g [V(g, \alpha, t) C(g, \alpha, t)] + & \\ + \partial_\alpha [U(g, \alpha, t) C(g, \alpha, t)] = & \\ = S(C; g, \alpha, t) + J(g, \alpha, t), & \end{aligned} \quad (2)$$

где $J(g, \alpha, t)$ – интенсивность внешнего источника частиц. Для практического использования уравнений (2) целесообразно применить процедуру, изложенную в работах [5, 13], чтобы свести эти уравнения к цепочкам одномерных уравнений, аналогичных уравнениям Смолуховского. Введем следующие, интегральные по массе примеси величины:

$$n(g, t) = \int_0^\infty C(g, \alpha, t) d\alpha; \quad m(g, t) = \int_0^\infty \alpha C(g, \alpha, t) d\alpha.$$

При интегрировании детали распределения примеси по композитным частицам скрадываются, однако средние параметры распределения легко восстанавливаются по величинам m и n . Так, например, средняя масса примеси в частице с общей массой g будет равна $\overline{\alpha(g, t)} = m(g, t)/n(g, t)$. Иногда вклад частиц активной фракции $c(g, t)$ удобно выделить из общих концентраций (спектра) $C(g, \alpha, t)$ с помощью равенства:

$$C(g, \alpha, t) = c(g, t) \delta(g - \alpha) + c_c(g, \alpha, t),$$

где $c_c(g, \alpha, t)$ – спектр композитных частиц. Считая, что

$$K(g, \alpha; s, \beta) \cong K \left[\overline{g, \alpha(g, t)}; \overline{s, \beta(s, t)} \right] = K(g, s, t);$$

$V(g, \alpha, t) \cong V(g, \bar{\alpha}, t) \equiv v(g, t)$; $U(g, \alpha, t) \cong U(g, \bar{\alpha}, t) \equiv u(g, t)$ и интегрируя (2) от 0 до g по α (с весами 1 и α), получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} & \partial_t n(g, t) + \partial_g [v(g)n(g)] = \\ & = \frac{1}{2} \int_0^g K(g-s, s)n(g-s)n(s)ds - n(g) \int_0^\infty K(g, s)n(s)ds + \\ & \quad + J_0(g, t); \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & \partial_t m(g, t) + \partial_g [v(g)m(g)] - \\ & u(g)n(g) = \int_0^g K(g-s, s)n(g-s)m(s)ds - \\ & - m(g) \int_0^\infty K(g, s)n(s)ds + J_1(g, t), \end{aligned} \quad (4)$$

где $J_0(g, t) = \int_0^\infty J(g, \alpha, t)d\alpha$, $J_1(g, t) = \int_0^\infty J(g, \alpha, t)\alpha d\alpha$. Таким образом, полная система

уравнений для кинетики конденсации и коагуляции композитных частиц сформулирована.

В рассматриваемом нами частном случае, когда конденсируется только активная примесь, а балластное вещество (остов) только перераспределяется за счет коагуляции, следует положить $u(g, t) = v(g, t)$, что упрощает решение (3), (4). Для частиц активной фракции в этом случае имеем:

$$\begin{aligned} & \partial_t c(g, t) + \partial_g [v(g)c(g)] = \\ & = \frac{1}{2} \int_0^g K(g-s, s)c(g-s)c(s)ds - \\ & - c(g) \int_0^\infty K(g, s)n(s)ds + j(g, t), \end{aligned} \quad (5)$$

где $j(g, t)$ – интенсивность источника, подающего в систему примесь (активное вещество).

В работе [4] уравнения, аналогичные (3), (4), были получены только для коагуляции композитных частиц и в предположениях, что содержание примеси в частицах мало, а ядра K не зависят от ее концентрации. Начальная стадия процесса при этом не рассматривалась. Система (3) – (5) обобщает результаты работы [4], описывая одновременно динамику коагуляции и поглощения самой примеси (5), а также динамику процесса конденсации. Фактически выражения (3) – (5) эквивалентны исходному уравнению (2), но предложенные нами уравнения гораздо проще для численного и аналитического решения.

Частным случаем (3) – (5) являются также уравнения, используемые для описания процесса кристаллизации ледяных частиц в переохлажден-

ном облаке. В работах [6, 7] рассматривается коагуляция и конденсация облачных капель (ОК, аналог частиц примеси) и ледяных частиц (ЛЧ, аналог композитных частиц) и считается, что при слиянии частиц разных фаз сразу происходит их кристаллизация (переход в фазу ЛЧ). Для описания этого процесса достаточно ограничиться только уравнениями (3), (5), а уравнение (4) не требуется, поскольку аналогом $m(g)$ служит величина $gn(g)$.

Получим аналитические решения уравнений (3) – (5) для поведения интегральных величин. Для этого отбросим источники в кинетических уравнениях (3) – (5) и предположим, что скорость конденсации примеси пропорциональна полной массе частиц:

$$u(g, t) = v(g, t) = \beta(t)g. \quad (6)$$

В соответствии с уравнением (3) полная счетная $N(t) = \int_0^\infty n(g, t)dg$ и массовая $M(t) = \int_0^\infty gn(g, t)dg$ концентрации определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= -\frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty K(g, s)n(g)n(s)dgds; \\ M(t) &= M_0 \exp \left[\int_0^t \beta(\tau)d\tau \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Суммарная концентрация примеси в частицах $I(t) = \int_0^\infty m(g, t)dg$ определяется путем интегрирования уравнения (4):

$$I(t) = I_0 + \int_0^t \beta(\tau)M(\tau)d\tau = I_0 + [M(t) - M_0]. \quad (8)$$

Из формулы (8) видно, что массовая концентрация балластных (остовных) частиц не меняется: $M(t) - I(t) = M_0 - I_0$, как и должно быть по физическому смыслу.

В соответствии с выражением (5) счетная $v(t) = \int_0^\infty c(g, t)dg$ и массовая $\mu(t) = \int_0^\infty gc(g, t)dg$ концентрации частиц активной фракции определяются из уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dv(t)}{dt} &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty K(g, s)c(g)[c(s) - 2n(s)]dgds; \\ \frac{d\mu(t)}{dt} &= \int_0^\infty \int_0^\infty gK(g, s)c(g)[c(s) - n(s)]dgds + \beta(t)\mu(t). \end{aligned} \quad (9)$$

2. Аналитические решения для суммарного спектра и спектра активной фракции

Пользуясь результатами работ [6, 7], приведем окончательные аналитические выражения, определяющие поведение интегральных величин для модельных ядер коагуляции.

Постоянное ядро: $K(g,n) = K_c = 2$:

$$N(t) = \frac{N_0}{(1 + N_0 t)}; \quad v(t) = \frac{v_0}{(1 + N_0 t)[1 + (N_0 - v_0)t]};$$

$$\mu(t) = \frac{\mu_0 M(t)}{M_0 [1 + (N_0 - v_0)t]^2}. \quad (10)$$

Ядро, пропорциональное сумме масс частиц: $K(g,n) = K_+ = g + n$. Решение получено для экспоненциальных начальных распределений $c(g,0) = A \exp(-ag)$. Оно имеет вид [6, 7]:

$$N(t) = N_0 \exp\left[-\int_0^t M(\tau) d\tau\right];$$

$$v(t) = \frac{M(t)N(t)}{2[N_0 - N(t)]} \left[F(t) - \sqrt{F(t)^2 - G(t)} \right];$$

$$\mu(t) = \frac{v(t)}{\sqrt{F(t)^2 - G(t)}}, \quad (11)$$

где

$$F(t) \equiv \frac{aM_0 + N_0 - N(t)}{M(t)}; \quad G(t) \equiv \frac{4AM_0[N_0 - N(t)]}{M^2(t)N_0}.$$

Подчеркнем, что поведение $M(t)$ и $I(t)$ для всех ядер одинаковое:

$$M(t) = M_0 \exp\left[\int_0^t \beta(\tau) d\tau\right]; \quad I(t) = I_0 + [M(t) - M_0]. \quad (12)$$

Отметим также, что для ядер K_c и K_+ в работе [7] получены аналитические выражения для спектров $c(g,t)$, которые могут служить для дополнительной калибровки численных методик. В частности, для $K_c = 2$ и $c(g,0) = \frac{v_0^2}{\mu_0} \exp\left(-g \frac{v_0}{\mu_0}\right)$ решение следующее:

$$c(g,t) = \frac{v^2(t)}{\mu(t)} \exp\left[-g \frac{v(t)}{\mu(t)}\right].$$

Легко убедиться, что результаты (10) – (12) обобщают решения для коагуляции композитных частиц [5, 14] и для одновременной конденсации и коагуляции однокомпонентных частиц [13].

3. Аналитические решения для перераспределения примеси в композитных частицах

Пусть $u(g,t) = v(g,t) = \beta g$ и начальное условие

$$C(g, \alpha, 0) = \frac{v_0^2}{\mu_0} e^{-g \frac{v_0}{\mu_0}} \delta(g - \alpha) + \frac{\theta(g - \alpha)}{g} D e^{-g\delta}. \quad (13)$$

Первый член – примесь, второй – композит. Поскольку g – полная масса, а α – масса примеси, то $g > \alpha$. В $m(g,t)$ входит как вклад от $c(g,t)$, так и «гладкая» часть композита, т. е. уравнение (4) описывает полное распределение примеси. Показатели экспонент для всех компонентов в формуле (13) должны быть равны ($\delta = v_0/\mu_0 = N_0/M_0$), чтобы удалось получить аналитическое решение для $m(g,t)$.

Положим сначала $K = 1$. Решение уравнений (3), (4) можно получить с помощью преобразования Лапласа. Но проще сразу искать решение в форме:

$$n(g,t) = A(t) e^{-g \frac{N(t)}{M(t)}}, \quad A(t) = N^2(t)/M(t),$$

$$m(g,t) = F(t) g e^{-g \frac{N(t)}{M(t)}},$$

$$\partial_t m(g,t) + \partial_g [\beta g m(g)] - \beta g n(g) =$$

$$= 2 \int_0^g n(g-s) m(s) ds - 2 m(g) N(t), \quad (14)$$

$$g \frac{dF}{dt} + g^2 \frac{FN(N+\beta)}{M} + g 2\beta F - g^2 \frac{\beta FN}{M} - g\beta A =$$

$$= g^2 AF - g 2FN.$$

Члены с g^2 автоматически сокращаются! Уравнение для F

$$\frac{dF}{dt} + 2(N+\beta)F = \beta \frac{N^2}{M}$$

имеет решение

$$F(t) = e^{-G(t)} \left[F_0 + \beta \int_0^t \frac{N^2(s)}{M(s)} e^{G(s)} ds \right];$$

$$G(t) = 2 \int_0^t [N(s) + \beta] ds.$$

Следовательно,

$$F(t) = \frac{N^2}{M^2} \left[F_0 \left(\frac{M_0}{N_0} \right)^2 + (M - M_0) \right].$$

Данное решение можно проверить интегрально – по закону сохранения массы (12):

$$I(t) = \int_0^{\infty} m(g,t)dg = F(t) \int_0^{\infty} ge^{-g \frac{N(t)}{M(t)}} dg = F_0 \left(\frac{M_0}{N_0} \right)^2 + (M - M_0) = I_0 + [M(t) - M_0].$$

Учитывая, что решение уравнения (3) имеет для данных начальных условий вид

$$n(g,t) = \frac{N^2(t)}{M(t)} e^{-g \frac{N(t)}{M(t)}},$$

можно записать ответ в форме

$$m(g,t) = \left[1 + \frac{(I_0 - M_0)}{M(t)} \right] gn(g,t). \quad (15)$$

Аналогичный результат получается и для ядра $K(g,n) = g + n$, если иметь в виду, что $n(g,t)$ представляет собой аналитическое решение уравнения (3) для этого ядра.

Справедливы и более общие утверждения.

1. Пусть $u(g,t) = v(g,t) = \beta g$ и $n(g,t)$ представляет собой решение уравнений (3). Пусть начальные условия любые, но $m(g,0) = gF_0/A_0 n(g,0)$. Тогда уравнение (4) имеет следующее решение:

$$m(g,t) = \varphi(t)gn(g,t); \quad \varphi(t) = e^{-\beta t} \left(D + \beta \int_0^t e^{\beta s} ds \right), \quad (16)$$

где D – произвольная константа.

Доказательство сводится к прямой подстановке функции $m(g,t) = \varphi(t)gn(g,t)$ в (4) с учетом (3). Квадратичные по g члены сокращаются, а линейные приводят к уравнению $\frac{d\varphi}{dt} + \beta\varphi - \beta = 0$ с решением $\varphi(t) = e^{-\beta t} \left(D + \beta \int_0^t e^{\beta s} ds \right)$. Что и требовалось доказать.

Аналогичным образом можно доказать еще два результата, имеющих место для других скоростей конденсации примеси.

2. Пусть $v(g,t) = \beta g$, $u(g,t) = \overline{\beta \alpha(g,t)} = \beta m(g,t)/n(g,t)$ и $n(g,t)$ представляет собой решение уравнений (3). Тогда уравнение (4) имеет следующее решение:

$$m(g,t) = \varphi(t)gn(g,t); \quad \varphi(t) = D. \quad (17)$$

Смысл задачи в том, что скорость конденсации примеси пропорциональна ее содержанию в частице (а не полной массе частицы).

3. Пусть $v(g,t) = \beta g$, $u(g,t) = \overline{\gamma \alpha(g,t)} = \gamma m(g,t)/n(g,t)$ и $n(g,t)$ представляет собой решение уравнений (3). Тогда уравнение (4) имеет следующее решение:

$$m(g,t) = \varphi(t)gn(g,t); \quad \varphi(t) = De^{(\gamma-\beta)t}. \quad (18)$$

Отличие от 2 в том, что скорость конденсации примеси не только пропорциональна ее содержанию в частице, но и имеет другие характерные времена.

Уравнение (3) фактически представляет собой уравнение Смолуховского с учетом конденсации для однокомпонентных систем (что гораздо проще). А утверждения 1 – 3 позволяют получить богатый набор решений для любых ядер коагуляции в многокомпонентном случае. В частности, легко сконструировать явный вид решений (15) для ядер K_c и K_+ .

Решение (5) для чистой примеси – отдельная задача, но, например, для ядер K_c и K_+ она решена в работах [6, 7]. Поэтому можно говорить о полном решении цепочек уравнений (3)–(5) для ком-позитных частиц. Разумеется, речь идет о сокращенном (интегральном) описании на уровне моментов функции распределения примеси по частицам и для специального вида скоростей конденсации.

Заключение

Необходимо подчеркнуть довольно общий характер полученных решений. Они получены для произвольных ядер, которые имеют любые (аналитическое, численное) решения уравнений (3), (5) для однокомпонентных систем. Это существенное упрощение задачи. Достаточно разнообразны и скорости конденсации, поскольку предполагается зависимость как от полной массы частицы, так и от содержания в ней примеси. Существенное ограничение для скоростей конденсации – это линейность по полной массе (или массе примеси) частиц.

Обратимся к физическому смыслу полученных решений. Нетрудно показать, что выражения (15)–(17) можно записать в следующем общем виде:

$$\overline{m(g,t)} = m(g,t)/gn(g,t) = I(t)/M(t), \quad (19)$$

где $\overline{p(g,t)}$ – относительное массовое содержание примеси в частицы. Тем самым, окончательный ответ можно сформулировать следующим образом:

Если скорости конденсации линейны по полной массе (или массе примеси) частиц и начальное распределение относительной массы примеси по частицам равномерно, то для любых скоростей коагуляции оно останется равномерным для всех моментов времени. Другими словами: равномерное распределение $\overline{p(g,t)}$ по спектру является устойчивым по отношению к процессу коагуляции.

Дополнительно приведем еще один общий и важный результат, относящийся к кинетике коагуляции композитных частиц. В работах [12, 13] показано, что для произвольных ядер K асимптотическое поведение при $g \gg 1, t \gg 1$ величин $\overline{\alpha(g,t)}$ и $\overline{p(g,t)} = m(g,t)/g n(g,t)$ имеет вид: $\overline{\alpha(g,t)} \approx Ig/M$; $\overline{p(g,t)} \approx I/M$, т. е. в результате коагуляции примесь стремится к равномерному относительному распределению независимо от вида ядра K .

Тем самым, полученные результаты можно рассматривать как доказательство равновесности и устойчивости равномерного распределения относительной массы примеси композитных частиц $\overline{p(g,t)}$ по спектру.

Полученные аналитические решения полезны при калибровке численных программ [1, 5, 8, 9, 15], предназначенных для моделирования кинетики формирования композитных частиц в прикладных задачах, перечисленных во введении. Одной из целей такого тестирования должна быть проверка схемы расчета процесса коагуляции. Важно правильно описать перераспределение примеси по композиту в процессе формирования новых крупных частиц. Другой целью тестирования является верификация метода расщепления по физическим процессам при одновременном моделировании коагуляции и конденсации. Проверка метода расщепления на задачах с быстро растущими ядрами коагуляции и скоростями конденсации будет являться ключевым тестом.

Автор благодарит А. И. Голубева за обсуждение и полезные замечания.

Список литературы

1. Gauntt, R. MELCOR Computer Code Manuals: Primer and User's Guide, Version 1.8.5, Rev. 2, Vol. 1. 2000.

2. Palaniswamy G, Loyalka S. K. Direct simulation, Monte Carlo, aerosol dynamics: Coagulation and condensation // Annals of Nuclear Energy. 2008. Vol. 35. P. 485–494.

3. Pruppacher H. R., Klett J. D. Microphysics of cloud and precipitation. Dordrecht: Kluwer Academic Press. 1997.

4. Simons S. The coagulation and deposition of radioactive aerosols // Annals of Nuclear Energy. 1981. Vol. 8. P. 287–294.

5. Piskunov V. N., Golubev A. I., Goncharov E. A. and Ismailova N.A. Kinetic modeling of composite particles coagulation // Journal of Aerosol Science. 1997. Vol. 28, № 7. P. 1215–1231.

6. Piskunov V. N. Kinetic of particle formation in multiphase systems: Analytical solutions // Journal of Aerosol Science. 2000. Vol. 31. S576–S577.

7. Piskunov V. N., Petrov A. M. Condensation/coagulation kinetic for mixture of liquid and solid particles: analytical solutions // Journal of Aerosol Science. 2002. Vol. 33. P. 647–657.

8. Golubev A. I., Piskunov V. N., Ismailova N. A. “AERFORM” code for numerical simulation of aerosol formation kinetics // Journal of Aerosol Science. 1999. Vol. 30. S231–S232.

9. Qamar S., Warnecke G. Solving population balance equations for two-component aggregation by a finite volume scheme // Chemical Engineering Science. 2007. Vol. 62. P. 679 – 693

10. Lushnikov A.A. Evolution of coagulating systems III. Coagulating mixtures // Journal of Colloid and Interface Science. 1976. Vol. 54 (1). P. 94–101.

11. Piskunov V.N. Kinetic of precipitations formation with phase transition. Journal of Aerosol Science. 1999. Vol. 30. Suppl. 1, S233-S234.

12. Пискунов В. Н. Динамика аэрозолей. М.: Физматлит, 2010.

13. Пискунов В. Н. О кинетике коагуляции композитных частиц // ДАН. 1996. Т. 350, № 1. С. 70–73.

14. Пискунов В. Н., Голубев А. И., Гончаров Е. А., Исмаилова Н. А. Новая модель кинетики коагуляции композитных частиц // ВАИТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 1996. Вып. 3. С. 12–30.

15. Maisels A, Kruis F. E., Fissan H. Direct simulation Monte Carlo for simultaneous nucleation, coagulation, and surface growth in dispersed systems // Chemical Engineering Science. 2004. Vol. 59. P. 2231 – 2239.

Статья поступила в редакцию 18.04.2012.