УДК 539.125.523

РЕШЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ДВУХОБЛАСТНОЙ ЗАДАЧИ МИЛНА В ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА НЕЙТРОНОВ

Н. Б. Бабичев, П. С. Бондарев

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188 г. Саров Нижегородской обл.

Найдена функция распределения нейтронов в системе из двух полубесконечных однородных сред с плоской границей раздела.

Ключевые слова: Нейтронная кинетика, уравнения переноса, плотность нейтронов, функция распределения частиц, собственные значения.

Введение

В работе [1] рассмотрена нестационарная задача Милна с двумя средами, хотя бы одна из которых размножает нейтроны, и приведены итоговые формулы (их вывод сделан в работе [2]) для расчёта зависимости нейтронной плотности от координаты и времени. В работах [1, 2] речь шла только о надкритических системах, содержащих делящиеся материалы. Результаты этих работах ниже обобщены на случай двухобластных систем, состоящих из произвольных веществ, и найдена функция распределения нейтронов.

1. Постановка задачи и классификация возможных типов решений

Будем решать задачу о распределении частиц в бесконечном пространстве, заполненном двумя разными по своим свойствам однородными средами, которые разделены плоской границей (см. рисунок).

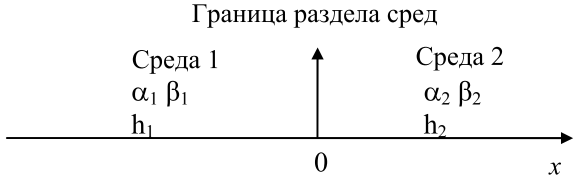

Схема плоской геометрии двухобластной задачи Милна

Примем использованные в работах [1, 2] следующие упрощающие предположения: считается, что ядра неподвижны, все нейтроны имеют одинаковую по величине скорость V; индикатриса упругого рассеяния нейтронов изотропна; влияние неупругих процессов пренебрежимо мало. Тогда исходные нестационарные кинетические уравнения для каждого вещества имеют следующий вид:

$$\frac{1}{V}\frac{\partial\psi_i(t,x,\mu)}{\partial t}+\mu\frac{\partial\psi_i(t,x,\mu)}{\partial x}+\alpha_i\psi_i(t,x,\mu)=\frac{\beta_i}{2}n_i(t,x),\ i=1,2. \qquad (1)$$

Здесь $\psi_i(t,x,\mu)$ – функция распределения частиц; $n_i(t,x)=\int_{-1}^{1}\psi_i(t,x,\mu)d\mu$ – плотность нейтронов; α_i – обратная величина среднего свободного пробега в i-м веществе, β_i – среднее число вторичных нейтронов на единицу длины пути. В общем виде для параметров α и β справедливы формулы

$$\alpha=n_{nucl}\sum_j\varphi_j\left(\sigma_{sj}+\sigma_{fj}+\sigma_{cj}\right),$$

$$\beta=n_{nucl}\sum_j\varphi_j\left(\sigma_{sj}+\nu_j\sigma_{fj}\right),$$

где n_{nucl} – плотность ядер, φ_j – концентрация ядер j-го сорта по частицам; σ_{cj}, σ_{fj}, σ_{sj} – сечения захвата нейтронов, деления ядер и упругого рассеяния; ν_j – среднее количество вторичных нейтронов, испускаемых в одном акте деления ядра j-го сорта. Величина $h=\beta/\alpha$ называется активностью среды. В случаях инертной среды, размножающей и поглощающей нейтроны сред, $h=1$, $h>1$, $h<1$ соответственно.

Уравнения вида (1) надо решать совместно с граничным условием

$$\psi_1(0,\mu)=\psi_2(0,\mu). \tag{2}$$

Начальное условие можно задать произвольным образом, так как известно (см. [6]), что независимо от начального условия функция распределения оптически толстой системы при отсутствии источников выйдет на экспоненциальный (равновесный) закон с независящим от времени пространственным распределением нейтронов

$$\psi_j(t,x,\mu)\sim\exp(\lambda t)\psi_j(x,\mu), \tag{3}$$

где λ – постоянная размножения нейтронов в системе. В случае двухобластной задачи Милна $\lambda=\max\{\lambda_{1\infty},\lambda_{2\infty}\}$, где $\lambda_{j\infty}=(\beta_j-\alpha_j)V,\ j=1,2.$ Для определенности предположим, что $\lambda_{1\infty}>\lambda_{2\infty}$. Тогда $\lambda=\lambda_{1\infty}=(\beta_1-\alpha_1)V$. Подставим функции распределения (3) в систему (1) с заменой в первом уравнении

$$x=\frac{z_1}{\alpha_1+(\lambda/V)}=\frac{z_1}{\beta_1}, \tag{4}$$

во втором –

$$x=\frac{z_2}{\alpha_2+(\lambda/V)}=\frac{z_2}{\alpha_2-\alpha_1+\beta_1}. \tag{5}$$

Тогда имеем

$$\begin{gathered}\mu\frac{\partial\psi_1(z_1,\mu)}{\partial z_1}+\psi_1(z_1,\mu)=\frac{H_1}{2}n_1(z_1),\\ \mu\frac{\partial\psi_2(z_2,\mu)}{\partial z_2}+\psi_2(z_2,\mu)=\frac{H_2}{2}n_2(z_2),\end{gathered} \tag{6}$$

где

$$H_1=1,$$

$$H_2=\frac{\beta_2}{\alpha_2-\alpha_1+\beta_1}. \tag{7}$$

В уравнениях системы (6) z_1 и z_2 – новые безразмерные переменные, которые в дальнейшем будем обозначать просто z.

Покажем, что при любых параметрах α_1, β_1, α_2, β_2 значение H_2 не больше единицы при условии, что $\lambda_{\infty1}\ge\lambda_{\infty2}$. Преобразуем выражение (7) к виду

$$H_2=\frac{h_2}{1+(h_1-1)\alpha_1/\alpha_2}=\frac{h_2}{1+(h_2-1)\lambda_{\infty1}/\lambda_{\infty2}}.$$

Если $\lambda_{\infty1}>0$, то возможны следующие три варианта:

1) обе среды размножают нейтроны $(\lambda_{\infty1}\ge\lambda_{\infty2}>0)$ и $H_2\le\dfrac{h_2}{1+(h_2-1)}=1;$

2) среда 2 является поглотителем $(h_2<1)$, тогда $\lambda_{\infty1}/\lambda_{\infty2}<0$ и

$$\frac{\lambda_{\infty1}}{\lambda_{\infty2}}(h_2-1)>0,\ H_2=\frac{h_2}{1+(h_2-1)\lambda_{\infty1}/\lambda_{\infty2}}<h_2<1;$$

3) среда 2 – инертное вещество $(h_2=1)$ и

$$H_2=\frac{1}{1+(h_1-1)\alpha_1/\alpha_2}<1.$$

Если же обе среды поглощают нейтроны ($\lambda_{\infty1}<0$ и $\lambda_{\infty2}<0$), то

$$\frac{\lambda_{\infty1}}{\lambda_{\infty2}}(h_2-1)\ge(h_2-1),$$

$$H_2=\frac{h_2}{1+(h_2-1)\lambda_{\infty1}/\lambda_{\infty2}}\le\frac{h_2}{1+(h_2-1)}=1.$$

Таким образом, нестационарная задача двух сред свелась к стационарной задаче в безразмерном z-пространстве для веществ с параметрами $H_1=1$ (инертная среда), $H_2<1$ (поглотитель нейтронов).

2. Пространственно-угловое распределение нейтронов (функция распределения). Векторные потоки

В общем виде решение уравнения

$$\mu\frac{\partial\psi(z,\mu)}{\partial z}+\psi(z,\mu)=\frac{h(z)}{2}n(z), \tag{8}$$

где $h(z)$ и $n(z)$ – известные функции, имеет вид

$$\psi(z,\mu)=\psi(a,\mu)\exp(-(z-a)/\mu)+$$
$$+\frac{1}{2\mu}\int_a^z h(z')n(z')\exp((z'-z)/\mu)dz'. \tag{9}$$

Константа a – координата некоторой точки в z-пространстве, которую нужно выбирать так, чтобы выполнялось неравенство $(z-a)/\mu>0$. Следует отметить необходимость того, чтобы $n(z)$ и $\psi(z,\mu)$ были согласованы:

$$\int_{-1}^{1}\psi(a,\mu)d\mu=n(a).$$

Физический смысл выражения (9) заключается в следующем:

– первое слагаемое – произведение прошедших через плоскость $x = a$ частиц $\psi(a,\mu)$ на множитель $\exp\left(-(z-a)/\mu\right)$, учитывающий ослабление потока нейтронов в результате взаимодействия с ядрами среды;

– второе слагаемое – возникновение новых нейтронов в слое между z и a с учетом ослабляющего множителя $\exp\left((z'-z)/\mu\right)$, где $a \le z' \le z$.

Рассмотрим частный случай уравнения (8), когда все пространство заполнено двумя однородными веществами, разделенными плоской границей

$$h(z) = \begin{cases} h_1, z < 0, \\ h_2, z > 0. \end{cases}$$

В этом случае удобно выбрать $a = 0$ для $z\mu > 0$ и $a = \pm\infty$ для $z\mu < 0$. Согласно формуле (9), для функции распределения получаем:

1) $z\mu > 0$:

$$\psi(z,\mu) = \\ = \begin{cases} \psi(0,\mu)\exp(-z/\mu) - \dfrac{h_1}{2\mu}\displaystyle\int_z^0 n_1(z')\exp\left((z'-z)/\mu\right)dz', z < 0, \\ \psi(0,\mu)\exp(-z/\mu) + \dfrac{h_2}{2\mu}\displaystyle\int_0^z n_2(z')\exp\left((z'-z)/\mu\right)dz', z > 0; \end{cases} \tag{10}$$

2) $z\mu < 0$.

Так как $\psi(-\infty,\mu > 0) = 0$ и $\psi(\infty,\mu < 0) = 0$, то

$$\psi(z,\mu) = \begin{cases} \dfrac{h_1}{2\mu}\displaystyle\int_{-\infty}^z n_1(z')\exp\left((z'-z)/\mu\right)dz', z < 0, \\ -\dfrac{h_2}{2\mu}\displaystyle\int_z^\infty n_2(z')\exp\left((z'-z)/\mu\right)dz', z > 0. \end{cases} \tag{11}$$

Чтобы найти решение системы (6), подставим плотность нейтронов из [2] в виде (20) и (21) в выражения (10) и (11), в которых заменим h_1 на единицу, а h_2 на H_2. После несложных преобразований для функции распределения $\psi(z,\mu)$ будем иметь:

$$\psi_1(z<0,\mu) = \begin{cases} -\dfrac{B}{2}\left[z-\mu-z_0+(\mu+z_0)\exp(-z/\mu)\right]+ \\ +\dfrac{B}{2\mu}\displaystyle\int_z^0 \varepsilon_1(z')\exp\left((z'-z)/\mu\right)dz' + \psi_-(|\mu|)\exp(-z/\mu), \mu < 0, \\ -\dfrac{B}{2}\left[z-\mu-z_0\right] - \dfrac{B}{2\mu}\displaystyle\int_{-\infty}^z \varepsilon_1(z')\exp\left((z'-z)/\mu\right)dz', \ \mu > 0, \end{cases} \tag{12}$$

$$\psi_2(z>0,\mu) = \begin{cases} \dfrac{BH_2}{2}\left[\dfrac{A}{1-K_2\mu}\left(\exp(-K_2 z) - \exp(-z/\mu)\right)\right]+ \\ +\dfrac{BH_2}{2\mu}\displaystyle\int_0^z \varepsilon_2(z')\exp\left((z'-z)/\mu\right)dz' + \psi_+(\mu)\exp(-z/\mu) \ \mu > 0, \\ \dfrac{BH_2}{2}\left[\dfrac{A\exp(-K_2 z)}{1-K_2\mu}\right] - \dfrac{BH_2}{2\mu}\displaystyle\int_z^\infty \varepsilon_2(z')\exp\left((z'-z)/\mu\right)dz', \ \mu < 0. \end{cases} \tag{13}$$

Формулы (12), (13) удобны для анализа особенностей пространственно-угловых распределений. Например, из выражения (12) следует, что при $z \to -\infty$ угловое распределение становится изотропным.

Векторные потоки (односторонние и полный) по определению равны

$$J_+(z) = V\int_0^1 \mu\psi(z,\mu)d\mu,$$
$$J_-(z) = V\int_{-1}^0 \mu\psi(z,\mu)d\mu; \tag{14}$$
$$J(z) = J_+(z) + J_-(z).$$

После подстановки функции распределения $\psi(z,\mu)$ в виде (10) и (11) в выражения (14) и несложных математических преобразований получаем:

1) $z > 0$:

$$J_+(z) = V\int_0^1 \mu\psi_+(\mu)e^{-\frac{z}{\mu}}d\mu + \frac{Vh_2}{2}\int_0^z E_2\left(|z'-z|\right)n_2(z')dz'; \tag{15}$$

$$J_-(z) = -\frac{Vh_2}{2}\int_z^\infty E_2\left(|z'-z|\right)n_2(z')dz'. \tag{16}$$

2) $z < 0$:

$$J_+(z) = \frac{Vh_1}{2}\int_{-\infty}^z E_2\left(|z'-z|\right)n_1(z')dz'; \tag{17}$$

$$J_-(z) = -V\int_0^1 \mu\psi_-(\mu)e^{-\frac{|z|}{\mu}}d\mu - \frac{Vh_1}{2}\int_z^0 E_2\left(|z'-z|\right)n_1(z')dz'. \tag{18}$$

В формулах (15)–(18) функция E_2 – интегральная экспонента, определенная следующим образом

$$E_l(z) = \int_1^\infty \frac{e^{-zu}}{u^l}du = \int_0^1 \mu^{l-2}e^{-\frac{z}{\mu}}d\mu.$$

Отметим, если для вычислений использовать формулы (15)–(18), то необходимо, чтобы функции ψ_+, ψ_-, n_1 и n_2 были нормированы согласованно (например, $n_1(0)=n_2(0)=1$ и $\psi_+(0)=\frac{h_1}{2}$, $\psi_-(0)=\frac{h_2}{2}$).

Заключение

В данной статье найдены функции распределения нейтронов в системах, соответствующих геометрии двухобластной задачи Милна. Задачу аналитически решить удалось, приняв односкоростное приближение. Известно, что точные аналитические решения кинетического уравнения для нейтронов можно получить только при использовании физических упрощений. Зато аналитические решения позволяют достаточно просто изучать процессы нейтронной кинетики и дают возможность проводить верификацию математических методик решения кинетического уравнения.

Отметим, что в зависимости от ядерно-физичеких свойств веществ, заполняющих пространство, получаются следующие типы решений двухобластной задачи Милна:

– в случае, когда хотя бы одна из двух полубесконечных сред размножает нейтроны, справедливо только нестационарное решение;

– если обе среды поглощают нейтроны, то возможны следующие два типа решений:

- нестационарное решение, полученное в дан-ной работе;
- известное (см., например, [3–5]) стационарное решение задачи Милна с заданным в бесконечно удаленной точке потоком;

– в том случае, когда одна среда инертна, а вторая тоже инертна либо поглощает нейтроны, нестационарное решение переходит в стационарное.

Список литературы

1. Бабичев Н. Б., Бондарев П. С., Незнамов В. П. Теория подобия в нейтронной кинетике и ее использование для решения прикладных задач РФЯЦ-ВНИИЭФ // УФН. 2011. Т. 181. Вып. 9. С. 953–963.

2. Бондарев П. С. Решение общей задачи Милна с двумя средами, хотя бы одна из которых размножает нейтроны // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2011. Вып. 1–2. С. 70–76.

3. Романов Ю. А. Точные решения односкоростного кинетического уравнения и их использование для расчета диффузионных задач (усовершенствованный диффузионный метод) // Исследования критических параметров реакторных систем / Науч. ред. П. А. Гаврилов. М.: Госатомиздат, 1960.

4. Davison B. Neutron Transport Theory. Oxford: Clarendon Press, 1957 [Дэвисон Б. Теория переноса нейтронов. М.: Атомиздат, 1960].

5. Case K. M., Zweifel P. F. Linear Transport Theory. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publ. Co., 1967 [Кейз К., Цвайфель П. Линейная теория переноса. М.: Мир, 1972].

Приложение

Пространственная зависимость нейтронной плотности

В работе [2] методом Винера–Хопфа для системы стационарных уравнений (16) с параметрами $H_1=1$, $H_2<1$ найдено угловое распределение частиц на границе раздела сред и получена зависимость плотности нейтронов от координаты.

Пусть $\psi_+(\mu)$ – угловое распределение частиц, падающих из среды 1 в среду 2; $\psi_-(|\mu|)$ – угловое распределение частиц, выходящих из среды 2 и попадающих в среду 1. Тогда, согласно [2], для углового распределения на границе и плотности нейтронов в z-пространстве имеем:

$$\psi_+(\mu)=\frac{\xi(\mu)}{2};\quad \psi_-(\mu)=\frac{H_2}{2\xi(\mu)},\tag{19}$$

$$n_1(z)=B\left[-z+z_0-\varepsilon_1(z)\right],\ z<0,\tag{20}$$

$$n_2(z)=B\left[A\exp(-K_2 z)+\varepsilon_2(z)\right],\ z>0,\tag{21}$$

где

$B=\sqrt{3(1-H_2)}$ – нормировочная константа $\left(n(0)=\int_0^1\left[\psi_+(\mu)+\psi_-(\mu)\right]d\mu=1\right)$,

$$\varepsilon_1(z)=\frac{\sqrt{1-H_2}}{2\sqrt{3}}\int_0^1\frac{\exp(z/\mu)}{\xi(\mu)}\frac{d\mu}{\left[(1-\mu\,\mathrm{artanh}\,\mu)^2+\pi^2\mu^2/4\right]},$$

$$\varepsilon_2(z)=\frac{\sqrt{1-H_2}}{2\sqrt{3}}\int_0^1\frac{\xi(\mu)\exp(-z/\mu)\,d\mu}{\left[(1-h_2\mu\,\mathrm{artanh}\,\mu)^2+h_2^2\pi^2\mu^2/4\right]},$$

$$A=\sqrt{\frac{1-H_2}{3}}\frac{2\left(1-K_2^2\right)}{H_2\left(1+K_2^2\right)\left(H_2-1+K_2^2\right)}\xi\left(K_2\right),$$

$$\xi(\mu)=\left(1+K_2\mu\right)\exp\left[\frac{\mu}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\left(\left(1-H_2x\cot x\right)/\left(1-x\cot x\right)\right)-\ln\left(1+K_2^2\cot^2 x\right)}{\mu^2\sin^2 x+\cos^2 x}dx\right],$$

$$z_0=\frac{1}{K_2}+z_{01}-z_{02},$$

$$z_{01}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{3}{\sin^2 x}-\frac{1}{1-x\cot x}\right]dx\approx 0{,}7104,$$

$$z_{02}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{3+K_2{}^2\cot^2 x}{\sin^2 x+K_2{}^2\cos^2 x}-\frac{1+\left(1-H_2\right)\cot^2 x}{1-H_2x\cot x}\right]dx.$$

$$K_2=K_2\left(H_2\right),\ H_2\frac{\operatorname{artanh}K_2}{K_2}=1.$$

С помощь замен, обратных (4) и (5), можно получить функцию $n\left(x\right)$ в x-пространстве.

Статья поступила в редакцию 02.07.2012.