УДК 530.145; 514.764.2; 530.145.7

СТАЦИОНАРНЫЕ СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ ДИРАКОВСКИХ ЧАСТИЦ В ПОЛЯХ КОЛЛАПСАРОВ

М. В. Горбатенко, В. П. Незнамов*

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Для гравитационного поля Шварцшильда с использованием самосопряженного гамильтониана с плоским скалярным произведением в широком интервале значений гравитационной константы связи впервые получены стационарные связанные состояния элементарных частиц со спином 1/2, не распадающиеся со временем. Для получения дискретного энергетического спектра введено граничное условие, при котором радиальная плотность тока рассматриваемых дираковских частиц вблизи «горизонта событий» равна нулю. Результаты могут привести к пересмотру некоторых представлений стандартной космологической модели, связанных с эволюцией Вселенной и взаимодействием коллапсаров с окружающей средой.

Ключевые слова: уравнение Дирака, гравитационное поле Шварцшильда, стационарные связанные состояния, самосопряженные гамильтонианы, энергетический спектр.

Классическое решение Шварцшильда характеризуется точечным сферически-симметричным источником гравитационного поля массой M и «горизонтом событий» (гравитационным радиусом)

$$r_0 = \frac{2GM}{c^2}. \qquad (1)$$

В формуле (1) G – гравитационная постоянная, c – скорость света. Для частицы массой m безразмерная гравитационная константа связи равна

$$\alpha = \frac{GMm}{\hbar c} = \frac{Mm}{m_p^2} = \frac{r_0}{2l_c}. \qquad (2)$$

В формуле (2) $\hbar$ – постоянная Планка, $m_p = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 2{,}2\cdot 10^{-5}$ г – планковская масса, $l_c = \frac{\hbar}{mc}$ – комптоновская длина волны.

Для электрона величине $\alpha \simeq 1$ соответствует источник с массой $M = 0{,}5\cdot 10^{15}$ кг. Источнику с массой Солнца $M_\odot \approx 2\cdot 10^{30}$ кг для частицы с массой электрона соответствует величина $\alpha \cong 4\cdot 10^{15}$.

Несмотря на явную электромагнитную аналогию в атомной физике, связанные состояния дираковских частиц в поле Шварцшильда исследовались сравнительно мало. Для гравитационного случая сложилось убеждение, что связанные состояния имеют комплексные энергии. В этом случае эти состояния экспоненциально распадаются со временем. Существование резонансных состояний Шварцшильда для массивных скалярных частиц с использованием уравнения Клейна–Гордона обсуждалось в работах [1–4]. Аналогичная проблема для дираковских массивных частиц обсуждалась в работах [5–9]. В этих работах при $\alpha \ll 1$ непосредственным решением уравнения Дирака в слабом поле Шварцшильда для действительной части энергии получен водородоподобный спектр с релятивистскими поправками.

В работах авторов [10–12] с помощью мето дов псевдоэрмитовой квантовой механики для

* E-mail: neznamov@vniief.ru

произвольных гравитационных полей, в том числе и зависящих от времени, разработан метод получения самосопряженных дираковских гамильтонианов с плоским скалярным произведением. Очевидно если такие гамильтонианы не зависят от времени и являются эрмитовыми $\left((\Psi, H\varphi)=(H\Psi,\varphi)\right)$, то при существовании квадратично интегрируемых волновых функций и при установлении соответствующих граничных условий они будут обеспечивать существование стационарных связанных состояний дираковских частиц с вещественным энергетическим спектром.

Настоящая работа посвящена определению стационарных связанных состояний дираковской частицы в поле Шварцшильда.

Ниже будем использовать систему единиц $G=\hbar=c=1$, сигнатуру

$$\eta_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}=\mathrm{diag}\left[1,-1,-1,-1\right] \qquad (3)$$

и обозначения: $\gamma^{\underline{0}}$, $\gamma^{\underline{k}}$, $k=1,2,3$ – локальные матрицы Дирака, $f=1-\dfrac{r_0}{r}$.

Тогда метрика Шварцшильда в координатах (t,r,θ,φ) будет иметь вид

$$ds^2=fdt^2-\frac{dr^2}{f}-r^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2\right). \qquad (4)$$

Самосопряженный гамильтониан H_η, соответствующий этой метрике, равен [12]

$$\begin{aligned}H_\eta=\sqrt{f}m\gamma^{\underline{0}}-i\sqrt{f}\gamma^{\underline{0}}\Big\{\gamma^{\underline{1}}\sqrt{f}\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\right)+\\+\gamma^{\underline{2}}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{2}\mathrm{ctg}\theta\right)+\gamma^{\underline{3}}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\Big\}-\frac{i}{2}\frac{\partial f}{\partial r}\gamma^{\underline{0}}\gamma^{\underline{1}}.\end{aligned} \qquad (5)$$

В (5) подразумеваются вещественные значения $f>0$.

Уравнение Дирака для стационарных состояний $\psi(r,\theta,\varphi,t)=e^{-iEt}\psi(r,\theta,\varphi)$ имеет вид

$$\begin{aligned}\gamma^{\underline{0}}E\psi(r,\theta,\varphi)=\Big\{\sqrt{f}m-i\gamma^{\underline{1}}\left[f\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\right)+\frac{r_0}{2r^2}\right]-\\-i\sqrt{f}\left[\gamma^{\underline{2}}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{2}\mathrm{ctg}\theta\right)+\gamma^{\underline{3}}\frac{1}{r\cdot\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]\Big\}\psi(r,\theta,\varphi).\end{aligned} \qquad (6)$$

Как известно, уравнение (6) допускает разделение переменных, если представить биспинор $\psi(r,\theta,\varphi)$ в виде

$$\psi(r,\theta,\varphi)=\begin{pmatrix}F(r) & \xi(\theta)\\ -iG(r) & \sigma^3\xi(\theta)\end{pmatrix}e^{im_\varphi\varphi} \qquad (7)$$

и использовать уравнение (см, например, [13])

$$\left[-\sigma^2\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{2}\mathrm{ctg}\theta\right)+i\sigma^1 m_\varphi\frac{1}{\sin\theta}\right]\xi(\theta)=i\kappa\xi(\theta). \qquad (8)$$

В равенствах (7), (8): $\xi(\theta)$ – шаровые спиноры, σ^i – двумерные матрицы Паули, m_φ – магнитное квантовое число, κ – квантовое число уравнения Дирака:

$$\kappa=\pm1,\pm2...=\begin{cases}-(l+1),\ j=l+\dfrac{1}{2},\\ l,\quad j=l-\dfrac{1}{2}.\end{cases} \qquad (9)$$

В результате получаем систему уравнений для радиальных функций $F(r),G(r)$. Запишем ее в безразмерных переменных $\varepsilon=\dfrac{E}{m}$, $\rho=\dfrac{r}{l_c}$, $\dfrac{r_0}{l_c}=2\alpha$.

$$\left(1-\frac{2\alpha}{\rho}\right)\frac{\partial F}{\partial\rho}+\left(\frac{1+\kappa\sqrt{1-\dfrac{2\alpha}{\rho}}}{\rho}-\frac{\alpha}{\rho^2}\right)F-\left(\varepsilon+\sqrt{1-\frac{2\alpha}{\rho}}\right)G=0,$$

$$\left(1-\frac{2\alpha}{\rho}\right)\frac{\partial G}{\partial\rho}+\left(\frac{1-\kappa\sqrt{1-\dfrac{2\alpha}{\rho}}}{\rho}-\frac{\alpha}{\rho^2}\right)G+\left(\varepsilon-\sqrt{1-\frac{2\alpha}{\rho}}\right)F=0.$$

(10)

Область изменения переменной ρ для функций $F(\rho),G(\rho)$ – интервал $(2\alpha,\infty)$ в соответствии с метрикой (4) и наличием выражения $\sqrt{1-\dfrac{2\alpha}{\rho}}$ в уравнениях (10).

Уравнения (10) показывают, что как и в классическом случае, квантовая механика запрещает присутствие дираковских частиц под «горизонтом событий» $r<r_0$, т. е. при $\rho<2\alpha$.

Для построения численного решения рассмотрим асимптотику системы (10).

При $\rho\to\infty$

$$\begin{aligned}F&=C_1e^{-\rho\sqrt{1-\varepsilon^2}}+C_2e^{\rho\sqrt{1-\varepsilon^2}};\\ G&=\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\left(-C_1e^{-\rho\sqrt{1-\varepsilon^2}}+C_2e^{\rho\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right).\end{aligned} \qquad (11)$$

Для обеспечения финитного движения частиц необходимо использовать лишь экспоненциально спадающие решения (11), т. е. в этом случае $C_2 = 0$.

Поскольку

$$\rho = 2\alpha \frac{r}{r_0}, \tag{12}$$

при увеличении α в численных решениях системы (10) необходимо использовать в асимптотике (11) все большие значения ρ.

При $\rho \to 2\alpha \;\; (r \to r_0)$

$$\begin{aligned} F &= \frac{A}{\sqrt{\rho - 2\alpha}} \sin\left(2\alpha\varepsilon \ln(\rho - 2\alpha) + \varphi\right), \\ G &= \frac{A}{\sqrt{\rho - 2\alpha}} \cos\left(2\alpha\varepsilon \ln(\rho - 2\alpha) + \varphi\right), \end{aligned} \tag{13}$$

где A и φ – постоянные величины.

Осциллирующие функции F и G в (13) плохо определены на «горизонте событий», но являются квадратично интегрируемыми функциями.

Для нахождения связанных состояний в системе (10) необходимо задать граничное условие при $\rho \to 2\alpha \;\; (r \to r_0)$. Требование обращения волновых функций вблизи горизонта в нуль неприемлемо в силу (13).

Условие отсутствия частиц под горизонтом может быть реализовано условием равенства нулю плотности радиальной компоненты вектора тока дираковских частиц при $\rho \to 2\alpha \;\; (r \to r_0)$.

Для метрики Шварцшильда (4) это условие можно записать в виде

$$j^{\underline{r}} = \psi^{+}\gamma^{\underline{0}}\gamma^{\underline{r}}\psi \to 0 \;\text{ при }\; \rho \to 2\alpha, \tag{14}$$

$$\gamma^{\underline{r}} = \left(\gamma^{\underline{1}}\cos\varphi + \gamma^{\underline{2}}\sin\varphi\right)\sin\theta + \gamma^{\underline{3}}\cos\theta. \tag{15}$$

С учетом (7), (13) условие (14) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} &\sin 2\left(2\alpha\varepsilon \ln(\rho - 2\alpha) + \varphi\right) \to 0 \;\text{ при }\; \rho \to 2\alpha, \\ &2\alpha\varepsilon \ln(\rho - 2\alpha) + \varphi \to \frac{\pi}{2} N, \;\; N = 0,1,2... \end{aligned} \tag{16}$$

Условие (16) определяет вещественный энергетический спектр уравнений (10) при их численном решении.

Прежде чем обсуждать результаты численно го решения системы (10), рассмотрим случай слабого гравитационного поля $2\alpha \ll 1$. В этом случае гравитационный радиус r_0 много меньше комптоновской длины волны $l_c \left(r_0 \ll l_c\right)$. Учитывая, что расстояния $r \ll l_c$ не могут значимо влиять в квантовой механике на энергетический спектр уравнений (10), будем считать, что величинами $\frac{2\alpha}{\rho}$ можно пренебречь по сравнению с единицей во всем интервале изменения ρ. Тогда уравнения (10) принимают вид

$$\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial \rho} + \frac{1+\kappa}{\rho} F - (\varepsilon + 1) G = 0, \\ &\frac{\partial G}{\partial \rho} + \frac{1-\kappa}{\rho} G + \left(\varepsilon - 1 + \frac{\alpha}{\rho}\right) F = 0. \end{aligned} \tag{17}$$

В слабых полях значения ε близки к единице и система (17) практически эквивалентна системе дираковских уравнений для кулоновского потенциала

$$\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial \rho} + \frac{1+\kappa}{\rho} F - \left(\varepsilon + 1 + \frac{\alpha}{\rho}\right) G = 0, \\ &\frac{\partial G}{\partial \rho} + \frac{1-\kappa}{\rho} G + \left(\varepsilon - 1 + \frac{\alpha}{\rho}\right) F = 0. \end{aligned} \tag{18}$$

$$U(r) = \frac{\alpha_{em}}{\rho}. \tag{19}$$

В выражении (19) α_{em} – электромагнитная постоянная тонкой структуры.

Следовательно, энергетический спектр, определяемый уравнениями (18), совпадает с главными членами разложения формулы для дискретного спектра дираковского уравнения для водородоподобных атомов с заменой α_{em} на α и может быть записан в виде

$$E_n \approx m\left(1 - \frac{\alpha^2}{2n^2}\right). \tag{20}$$

Полученный результат в случае отсутствия релятивистских поправок совпадает с результатами, полученными в [3–9].

Естественно водородоподобный спектр (20) можно получить также переходя в нерелятивистском приближении от уравнения Дирака (6) к соответствующему уравнению Шредингера.

Проведенные предварительные численные расчеты системы (10)* по определению стационарного вещественного энергетического спектра дираковской частицы с массой m в поле Шварцшильда позволяют сделать следующие выводы:

* Численную реализацию решения системы (10) осуществил М. А. Вронский. Методы решения системы (10) будут представлены в следующей работе.

1) при $\alpha \ll 1$ энергетический спектр при нечетных $N = 1, 3, 5...$ практически совпадает с водородоподобным спектром формулы (20);

2) численные релятивистские поправки для значений $\alpha = 0,05; 0,1$ и $N = 1, 3, 5...$ близки к поправкам, определенным в работе [7] в соответствии с формулой

$$\frac{\Delta E_n}{mc^2} = -\frac{3\alpha^4}{n^4}\left\{\frac{n}{l+\frac{1}{2}}\left[\left(1-\frac{1}{3}\delta_{l0}\right)+\frac{1}{12}\left(1-\delta_{l0}\right)\left(\frac{1}{\kappa}+\frac{2}{l(l+1)}\right)\right]-\frac{5}{8}\right\}; \quad (21)$$

3) численные расчеты, проведенные для интервала значений $\alpha = 10^{-2} \div 10^{2}$, показывают, что с увеличением α возрастает число сильносвязанных состояний.

Более подробный анализ численных расчетов и их результатов в широком интервале значений гравитационной константы связи будет приведен в последующей работе. Авторы также планируют в следующих работах представить результаты численных расчетов по определению стационарных связанных состояний дираковских частиц в гравитационных полях Нордстрёма–Райснера и Керра.

Основным результатом данной работы является демонстрация существования стационарных связанных состояний дираковских частиц со спином 1/2 в гравитационном поле Шварцшильда при использовании самосопряженного гамильтониана (5) и граничных условий (11), (14), (16).

Отличительная особенность полученных результатов состоит в том, что волновые функции частиц не проникают под горизонт, коллапс в стандартном понимании для связанных частиц исключен. Вместе с тем энергетические уровни при $\alpha > 1$ могут находиться достаточно глубоко, так что энергия связи может быть порядка mc^2. Результаты данной работы могут привести к пересмотру некоторых представлений стандартной космологической модели, связанных с эволюцией Вселенной и с взаимодействием коллапсаров с окружающей средой.

Авторы благодарят своих коллег М. А. Вронского и Е. Ю. Попова за полезные обсуждения.

Список литературы

1. Deruelle N., Ruffini R. // Phys. Lett. 1974. Vol. 52B. P. 437.

2. Damour T., Deruelle N., Ruffini R. // Lett. Nuov. Cim. 1976. Vol. 15. P. 257.

3. Тернов И. М., Халилов В. Р., Чижов Г. А., Гаина А. Б. // Изв. вузов СССР, Физика. 1978, № 9.

4. Гаина А. Б., Чижов Г. А. // Изв. вузов СССР, Физика. 1980, № 4. С. 120.

5. Ternov I. M., Gaina A. B., Chizhov G.A. // Sov. Phys. J. 1980. Vol. 23. P. 695–700.

6. Galtsov D. V., Pomerantseva G. V., Chizhov G.A. // Sov. Phys. J. 1983. Vol. 26. P. 743–745.

7. Ternov I. M., Gaina A.B. // Sov. Phys. J. 1988. Vol. 31 (2). P. 157–163.

8. Gaina A. B., Zaslavskii O. B. // Class. Quantum Grav. 1992. Vol. 9. P. 667–676.

9. Gaina A. B., Ionescu-Pallas N. I. // Rom. J. Phys. 1993. Vol. 38. P. 729–730.

10. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. // Phys. Rev. 2010. Vol. D 82. P. 104056.; arxiv: 1007.4631 (gr-qc).

11. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. // Phys. Rev. 2011. Vol. D 83. P. 105002.; arxiv: 1102.4067v1 (gr-qc).

12. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. // Arxiv: 1102.0844v3 (gr-qc).

13. Brill D. R., Wheeler J. A. // Rev. of Modern Physics, 1957. Vol. 29. P. 465–479.

Статья поступила в редакцию 08.06.2012.