УДК 539.14.01

КЛАСТЕРНАЯ МОДЕЛЬ АТОМНОГО ЯДРА И ВОЗБУЖДЕННЫЕ СОСТОЯНИЯ ЯДЕР ЧАСТЬ I. ПРИМЕР ПОСТРОЕНИЯ ДВУХКЛАСТЕРНОЙ МОДЕЛИ ЯДРА ^{8}Be

А. А. Садовой, А. С. Ульянов

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188 г. Саров Нижегородской обл.

Описывается алгоритм построения кластерной волновой функции на примере основного состояния ^{8}Be, который при введении генераторных и параметрических координат получен впервые. В работе также иллюстрируется развитый авторами метод вычисления различных матричных элементов и интегралов перекрытия между многонуклонными волновыми функциями с неортогональным базисом, обусловленный неэффективностью использования численных методов при вычислении многократных интегралов. Аналитические расчеты проводятся с использованием обобщенных функций. Применение для описания кластеров неортогонального базиса несколько усложняет проведение аналитических вычислений.

Ключевые слова: кластерная модель, матрица перекрытия, волновая функция ядра ^{8}Be, антисимметризация волновой функции.

Широко известны кластерные состояния в легких ядрах ($^7\mathrm{Li}=\alpha+t$, $^8\mathrm{Be}=\alpha+\alpha$, $^9\mathrm{Be}=\alpha+$ $+\alpha+n$ и т. д.). Для средних ядер более характерной является однонуклонная кластеризация. В области тяжелых ядер часто встречаются состояния, включающие кластеры из нескольких нуклонов [2]. Следует иметь в виду, что для описания двух-, трех- и четерехкластерных состояний используются различные модели, наиболее простые из которых – это модели с бесструктурными кластерами. Более сложными кластерными моделями ядра являются кластерные модели со структурными кластерами. В качестве примера укажем на модель ($4N+4N={}^8\mathrm{Be}$) бериллия ^{8}Be из двух α-частиц, каждая из которых описывается в рамках многочастичной теории ядра, например в рамках метода гиперсферических функций.

Такая многонуклонная модель развивается в рамках данной работы на примере ядра ^{8}Be. При этом она может относительно легко обобщаться на более тяжелые кластеры и на состояния трех и более кластеров путем введения необходимого числа генераторных и параметрических координат в соответствии с числом кластеров. Одним из преимуществ данной модели является возможность описания различных многокластерных состояний с единым нуклон-нуклонным потенциалом взаимодействия.

В работах [3–5] были исследованы связанные состояния из трех взаимодействующих точечных кластеров. Недостатком применяемого в данных работах метода является использование эффективных потенциалов, описывающих взаимодействие бесструктурных кластеров [6], причем число этих эффективных потенциалов велико и определяется типом вводимых кластеров.

В представленной работе в качестве примера развивается новая двухкластерная модель ядра. В ходе проведенных исследований предложен новый метод построения полностью антисимметризованных волновых функций двухкластерных систем на примере долгоживущего квазистационарного состояния ядра ^{8}Be. Предлагается использовать данный метод для расчета изомерных состояний тяжелых ядер, аналогично подходу Shneidman`a [7], описывающего ядра с $Z\geq 96$ моделью кор + альфа-частица.

Двухкластерная ВФ $_4{}^8$Be является решением уравнения Шредингера

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\sum_{i=1}^{8}\frac{\partial^2}{\partial\vec{r}_i^{\,2}}+\sum_{i>j=1}^{8}V\left(\vec{r}_i-\vec{r}_j\right)-E\right\}\Psi\left(\vec{r}_1,\vec{r}_2,...,\vec{r}_8\right)=0. \quad (1)$$

Пусть координаты $\vec{r}_i\ (i=1,...,4)$ соответствуют четырем нуклонам, образующим одну α-частицу, а $\vec{r}_j\ (i=5,...,8)$ описывают нуклоны, входящие в состав другой α-частицы.

Для описания ядра ^{8}Be как двухкластерной системы целесообразно ввести следующие коллективные переменные:

$$\rho_1^2=\sum_{i=1}^{4}r_i^2-4R_1^2,\quad \rho_2^2=\sum_{j=5}^{8}r_j^2-4R_2^2,\quad \vec{R}_1=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}\vec{r}_i,$$

$$\vec{R}_2=\frac{1}{4}\sum_{j=5}^{8}\vec{r}_j, \tag{2}$$

где $\vec{R}_1$ и $\vec{R}_2$ – координаты центров инерции первой и второй альфа-частиц соответственно.

Для составной системы из восьми нуклонов коллективную переменную можно определить так:

$$\rho^2=\sum_{i=1}^{8}r_i^2-8R^2, \tag{3}$$

где $\vec{R}=\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8}\vec{r}_i$ – координата центра инерции всей системы.

В рамках кластерной модели с учетом антисимметризации ВФ ^{8}Be можно представить в следующем виде

$$\Psi(r_i,r_j)=\hat{A}\{R(\vec{r})\varphi(\rho_1)\varphi(\rho_2)\}, \tag{4}$$

где $\varphi(\rho_1)$ и $\varphi(\rho_2)$ – ВФ альфа-кластеров, которые могут быть рассчитаны, например, в рамках модели гиперсферических функций (МГСФ), $R(\vec{r})$ – функция относительного движения двух альфа-частиц $(\vec{r}=\vec{R}_2-\vec{R}_1)$, $\hat{A}$ – оператор антисимметризации, который в работе [8] определяется следующим образом:

$$\hat{A}\Psi(\vec{r}_1,...,\vec{r}_8)=\sum_P(-1)^p P\Psi(\vec{r}_1,...,\vec{r}_8). \tag{5}$$

В этом выражении сумма берется по всевозможным перестановкам P, которые производятся над координатами $\vec{r}_1,...,\vec{r}_8$, а p – число транспозиций при перестановке P.

Используем минимальное приближение МГСФ [9, 10] для ВФ альфа-частицы

$$\varphi=\frac{\chi_0(\rho)}{\rho^4}U_0(\Omega). \tag{6}$$

Нормировка ВФ альфа-частицы:

$$\int\varphi\varphi^* dV=\int\frac{\chi_0(\rho)}{\rho^4}U_0^*(\Omega)\frac{\chi_0(\rho)}{\rho^4}U_0(\Omega)\rho^8 d\rho d\Omega=$$
$$=\int\chi_0^2(\rho)d\rho=1. \tag{7}$$

Введем генераторные координаты s_1, s_2 и параметрические координаты η_1, η_2 [8], на которые оператор антисимметризации не действует:

$$\frac{\chi_i(\rho)}{\rho^4}=\int\frac{\chi_i(\eta)}{\eta^4}\delta\left(\rho^2-\eta^2\right)d\eta^2=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int e^{is\left(\rho^2-\eta^2\right)}ds\int\frac{\chi_i(\eta)}{\eta^4}d\eta^2. \tag{8}$$

Тогда для ВФ ^{8}Be можно получить

$$\Psi=\frac{1}{(2\pi)^2}\int e^{-is_1\eta_1^2}ds_1\int e^{-is_2\eta_2^2}ds_2\int\chi(\eta_1)d\eta_1^2\int\chi(\eta_2)d\eta_2^2\cdot M, \tag{9}$$

где M определяется выражением

$$M=\hat{A}\left\{e^{is_1\rho_1^2}e^{is_1\rho_1^2}R(\vec{r})P(\Omega_1)P(\Omega_2)\right\}. \tag{10}$$

В выражении (10) $P(\Omega)$ – угловая часть ВФ альфа-частицы, представляющая собой детерминант Слейтера, составленный из базисных функций подоболочек.

Далее целесообразно использовать параметрические координаты x_1 и x_2:

$$F(\vec{R}_m)=\int F(\vec{x}_m)\delta(\vec{x}_m-\vec{R}_m)d\vec{x}_m, \tag{11}$$

где $m=1,2$. Тогда выражение (10) можно записать в следующем виде:

$$M=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec{x}_1 d\vec{x}_2\int e^{-is_1 4x_1^2}e^{-is_2 4x_2^2}R(\vec{x}_1-\vec{x}_2)\int e^{-i\vec{f}_1\vec{x}_1}d\vec{f}_1\int e^{-i\vec{f}_2\vec{x}_2}d\vec{f}_2\cdot D, \tag{12}$$

где функция D определяется таким образом:

$$D=\hat{A}\left\{e^{is_1\sum_{i=1}^{4}r_i^2+\frac{i\vec{f}_1}{4}\sum_{i=1}^{4}\vec{r}_i}\ e^{is_2\sum_{i=5}^{8}r_j^2+\frac{i\vec{f}_2}{4}\sum_{i=5}^{8}\vec{r}_j}P(\Omega_1)P(\Omega_2)\right\}, \tag{13}$$

где $P(\Omega)$ – угловые части волновых функций метода МГСФ [9].

При переходе от выражения (10) к выражению (12) используются определения (2) коллективных переменных ρ_1 и ρ_2.

Согласно [11], применяя оператор антисимметризации к выражению в фигурных скобках, можно функцию D привести к виду детерминанта 8x8 с неортогональным базисом

$$D=\begin{vmatrix}
e^{is_1r_1^2+\frac{i\vec{f}_1\vec{r}_1}{4}}\chi_{++}(1) & e^{is_1r_2^2+\frac{i\vec{f}_1\vec{r}_2}{4}}\chi_{++}(2) & \dots & e^{is_1r_8^2+\frac{i\vec{f}_1\vec{r}_8}{4}}\chi_{++}(8)\\
e^{is_1r_1^2+\frac{i\vec{f}_1\vec{r}_1}{4}}\chi_{+-}(1) & e^{is_1r_2^2+\frac{i\vec{f}_1\vec{r}_2}{4}}\chi_{+-}(2) & \dots & e^{is_1r_8^2+\frac{i\vec{f}_1\vec{r}_8}{4}}\chi_{+-}(8)\\
e^{is_1r_1^2+\frac{i\vec{f}_1\vec{r}_1}{4}}\chi_{-+}(1) & e^{is_1r_2^2+\frac{i\vec{f}_1\vec{r}_2}{4}}\chi_{-+}(2) & \dots & e^{is_1r_8^2+\frac{i\vec{f}_1\vec{r}_8}{4}}\chi_{-+}(8)\\
e^{is_1r_1^2+\frac{i\vec{f}_1\vec{r}_1}{4}}\chi_{--}(1) & e^{is_1r_2^2+\frac{i\vec{f}_1\vec{r}_2}{4}}\chi_{--}(2) & \dots & e^{is_1r_8^2+\frac{i\vec{f}_1\vec{r}_8}{4}}\chi_{--}(8)\\
e^{is_2r_1^2+\frac{i\vec{f}_2\vec{r}_1}{4}}\chi_{++}(1) & e^{is_2r_2^2+\frac{i\vec{f}_2\vec{r}_2}{4}}\chi_{++}(2) & \dots & e^{is_2r_8^2+\frac{i\vec{f}_2\vec{r}_8}{4}}\chi_{++}(8)\\
e^{is_2r_1^2+\frac{i\vec{f}_2\vec{r}_1}{4}}\chi_{+-}(1) & e^{is_2r_2^2+\frac{i\vec{f}_2\vec{r}_2}{4}}\chi_{+-}(2) & \dots & e^{is_2r_8^2+\frac{i\vec{f}_2\vec{r}_8}{4}}\chi_{+-}(8)\\
e^{is_2r_1^2+\frac{i\vec{f}_2\vec{r}_1}{4}}\chi_{-+}(1) & e^{is_2r_2^2+\frac{i\vec{f}_2\vec{r}_2}{4}}\chi_{-+}(2) & \dots & e^{is_2r_8^2+\frac{i\vec{f}_2\vec{r}_8}{4}}\chi_{-+}(8)\\
e^{is_2r_1^2+\frac{i\vec{f}_2\vec{r}_1}{4}}\chi_{--}(1) & e^{is_2r_2^2+\frac{i\vec{f}_2\vec{r}_2}{4}}\chi_{--}(2) & \dots & e^{is_2r_8^2+\frac{i\vec{f}_2\vec{r}_8}{4}}\chi_{--}(8)
\end{vmatrix}. \tag{14}$$

В этом выражении $\chi_{\mu\nu}(i)$ – спин-изоспиновые функции нуклонов.

Проиллюстрируем развитый метод на расчете матричных элементов, в том числе и интегралов перекрытия с построенными волновыми функциями с неортогональным базисом. В общем случае для двухкластерной модели необходимо выполнить интегрирование по 16 переменным. Очевидно, что численное интегрирование с учетом использования в методе обобщенных функций мало эффективно. Поэтому был развит аналитический метод вычисления подобных матричных элементов. Наиболее просто приемы аналитических вычислений можно проиллюстрировать на примере вычисления интегралов перекрытия двухкластерных волновых функций.

Матрица перекрытия в силу ортогональности спин-изоспиновых частей ВФ будет представлять детерминант следующего вида:

$$\Sigma=\begin{vmatrix}
Q_{11'} & 0 & 0 & 0 & Q_{12'} & 0 & 0 & 0\\
0 & Q_{11'} & 0 & 0 & 0 & Q_{12'} & 0 & 0\\
0 & 0 & Q_{11'} & 0 & 0 & 0 & Q_{12'} & 0\\
0 & 0 & 0 & Q_{11'} & 0 & 0 & 0 & Q_{12'}\\
Q_{21'} & 0 & 0 & 0 & Q_{22'} & 0 & 0 & 0\\
0 & Q_{21'} & 0 & 0 & 0 & Q_{22'} & 0 & 0\\
0 & 0 & Q_{21'} & 0 & 0 & 0 & Q_{22'} & 0\\
0 & 0 & 0 & Q_{21'} & 0 & 0 & 0 & Q_{22'}
\end{vmatrix}, \tag{15}$$

где $Q_{ij'}$ – интеграл перекрытия ВФ для конкретной перестановки $(s_i f_i)$ и $(s'_j f'_j)$.

Проведем диагонализацию детерминанта перекрытия, в результате чего получим следующий его вид

$$\begin{aligned}\Sigma=\left[Q_{11'}Q_{22'}-Q_{21'}Q_{12'}\right]^4=\left(Q_{11'}Q_{22'}\right)^4-\\ -4\left(Q_{11'}Q_{22'}\right)^3 Q_{21'}Q_{12'}+6\left(Q_{11'}Q_{22'}\right)^2\left(Q_{21'}Q_{12'}\right)^2-\\ -4\left(Q_{21'}Q_{12'}\right)^3 Q_{11'}Q_{22'}+\left(Q_{21'}Q_{12'}\right)^4.\end{aligned} \tag{16}$$

Аналогичным образом выражаются и МЭ потенциальной энергии [12]. Из-за громоздкости их явный вид не приводится.

Подставив кластерную ВФ в исходное многочастичное уравнение Шредингера (1) и умножив его слева на сопряженную кластерную ВФ, получим следующее интегро-дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned}\int N(r)R(r)\left(\frac{2}{A}\Delta_r-E\right)R(r)\,dr-\\ -\int W(r,r')R(r)R(r')\,dr\,dr'=0.\end{aligned} \tag{17}$$

Ядра интегральных членов N и выражаются через сумму интегралов перекрытия и МЭ потенциальной энергии. При их вычислении необходимо провести интегрирование по 16 переменным, поэтому численные методы здесь мало эффективны. В связи с этим авторами были развиты аналитические методы вычисления подобных интегралов, включающих обобщенные функции.

Как видно из явного вида матрицы перекрытия, она состоит из прямых и обменных интегралов перекрытия, которые получаются при действии оператора перестановок и являются недиагональными элементами матрицы перекрытия. Рассмотрим метод вычисления прямых интегралов перекрытия, для чего введем якобиевы координаты для каждого из кластеров ξ_i, $i=1,\dots,A_1-1$ и ξ_j, $j=1,\dots,A_2-1$, где A_1 и A_2 – число частиц в кластерах.

Элемент объема в якобиевых координатах и координатах центров масс двух кластеров можно записать

$$d\tau_{3A}=A_1^{3/2}d\vec{R}_1\prod_{i=1}^{A_1-1}d\vec{\xi}_i A_2^{3/2}d\vec{R}_2\prod_{j=1}^{A_2-1}d\vec{\xi}_j. \tag{18}$$

Перейдем к координатам относительного движения двух кластеров и движения их центров масс

$$\vec{R}=\frac{A_1}{A}\vec{R}_1+\frac{A_2}{A}\vec{R}_2,\quad \vec{r}=\vec{R}_2-\vec{R}_1. \tag{19}$$

Якобиан такой замены переменных равен единице. Элемент объема в новых координатах примет вид

$$d\tau_{3A} = A_1^{3/2} A_2^{3/2} d\vec{r} d\vec{R} \prod_{i=1}^{A_1-1} d\vec{\xi}_i \prod_{j=1}^{A_2-1} d\vec{\xi}_j. \quad (20)$$

Умножим левую и правую части выражения (20) на $\delta\left(\vec{R}\right)$, равного $\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{i\vec{p}\frac{1}{8}\sum_{j=1}^{8}\vec{r}_j} d\vec{p}.$

Таким образом можно получить

$$d\vec{r} \prod_{i=1}^{A_1-1} d\vec{\xi}_i \prod_{j=1}^{A_2-1} d\vec{\xi}_j =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2} A_1^{3/2} A_2^{3/2}} d\tau_{3A} \int e^{i\vec{p}\frac{1}{8}\sum_{j=1}^{8}\vec{r}_j} d\vec{p}. \quad (21)$$

Интегралы по $d\vec{r}$, входящие в Q_{ij}, после проведения интегрирования равны

$$\int e^{i\left(-s_i+s'_j\right)r^2 - \frac{i\left(\vec{f}_i - \vec{f}'_j\right)\vec{r}}{4} + \frac{i\vec{p}}{8}\vec{r}} Y^*_{l_i m_i}(\Omega) Y_{l_j m_j}(\Omega) d\vec{r} =$$

$$= e^{i\left(s'_1 - s_1\right)\left[\frac{\vec{f}_1 - \vec{f}'_1 - \vec{p}/2}{8\left(s'_1 - s_1\right)}\right]^2} \frac{\sqrt{\pi}}{4\left[-i\left(s'_1 - s_1\right)\right]^{3/2}}. \quad (22)$$

При учете определения кластерной ВФ (9), (12), (13) для первого слагаемого интеграла перекрытия (16) можно записать

$$\left\langle \left(Q_{11'} Q_{22'}\right)^4 \right\rangle = \int e^{is_1\eta_1^2} e^{is_1 4x_1^2} ds_1 \int e^{is_2\eta_2^2} e^{is_2 4x_2^2} ds_2 \times$$

$$\times \int \frac{\chi(\eta_1)}{\eta_1^4} d\eta_1^2 \int \frac{\chi(\eta_2)}{\eta_2^4} d\eta_2^2 \times \int e^{-is'_1\eta_1'^2} e^{-is'_1 4x_1'^2} ds'_1 \times$$

$$\times \int e^{-is'_2\eta_2'^2} e^{-is'_1 4x_1'^2} ds'_2 \int \frac{\chi(\eta'_1)}{\eta_1'^4} d\eta_1'^2 \int \frac{\chi(\eta'_2)}{\eta_2'^4} d\eta_2'^2 \times$$

$$\times \int e^{i\vec{f}_1\vec{x}_1} R\left(\vec{x}_1 - \vec{x}_2\right) e^{i\vec{f}_2\vec{x}_2} d\vec{x}_1 d\vec{x}_2 \times \int e^{-i\vec{f}'_1\vec{x}'_1} R\left(\vec{x}'_1 - \vec{x}'_2\right) e^{-i\vec{f}'_2\vec{x}'_2} d\vec{x}'_1 d\vec{x}'_2 \times$$

$$\times \frac{\pi^4}{4^8} \int \frac{e^{4i\left(s'_2 - s_2\right)\frac{\left(\vec{f}_2 - \vec{f}'_2 - \vec{p}/2\right)^2}{64\left(s_2 - s'_2\right)^2}} e^{4i\left(s'_1 - s_1\right)\frac{\left(\vec{f}_1 - \vec{f}'_1 - \vec{p}/2\right)^2}{64\left(s'_1 - s_1\right)^2}}}{\left[-i\left(s'_2 - s_2\right)\right]^6 \left[-i\left(s'_1 - s_1\right)\right]^6} d\vec{f}_1 d\vec{f}_2 d\vec{f}'_1 d\vec{f}'_2 d\vec{p}. \quad (23)$$

Для интегрирования по переменным $\vec{f}_1$ и $\vec{f}'_1$ в выражении (23) введем следующие переменные

$$\vec{y} = \vec{f}_1 - \vec{f}'_1, \quad \vec{z} = \frac{\vec{f}_1 + \vec{f}'_1}{2}, \quad J = 1. \quad (24)$$

Последующее интегрирование по $d\vec{z}$ и по $d\vec{y}$ позволяет получить

$$W_{11'} = \int \frac{e^{4i\left(s'_1 - s_1\right)\frac{\left(\vec{f}_1 - \vec{f}'_1 - \vec{p}/2\right)^2}{64\left(s'_1 - s_1\right)^2}}}{\left[-i\left(s'_1 - s_1\right)\right]^6} d\vec{f}_1 d\vec{f}'_1 =$$

$$= \frac{\pi^5}{-\sqrt{2}\left[-i\left(s'_1 - s_1\right)\right]^{9/2}} e^{-i\left[4\vec{x}_1^2\left(s'_1 - s_1\right) - \frac{\vec{p}\vec{x}_1}{2}\right]}. \quad (25)$$

Аналогичным образом можно вычислить интеграл по переменным $\vec{f}_2, \vec{f}'_2$:

$$W_{22'} = \int \frac{e^{4i\left(s'_2 - s_2\right)\frac{\left(\vec{f}_2 - \vec{f}'_2 - \vec{p}/2\right)^2}{64\left(s_2 - s'_2\right)^2}}}{\left[-i\left(s'_2 - s_2\right)\right]^6} d\vec{f}_2 d\vec{f}'_2 =$$

$$= \frac{\pi^5}{-\sqrt{2}\left[-i\left(s'_2 - s_2\right)\right]^{9/2}} e^{-i\left[4\vec{x}_2^2\left(s'_2 - s_2\right) - \frac{\vec{p}\vec{x}_2}{2}\right]}. \quad (26)$$

Полученное в итоге выражение необходимо проинтегрировать по координатам s_1 и s_2:

$$\int e^{is_1\eta_1^2} e^{is_2\eta_2^2} W_{11'} W_{22'} ds_1 ds_2 =$$

$$= \frac{\pi^{10} e^{i\frac{\vec{p}}{2}\left(\vec{x}_1 + \vec{x}_2\right)}}{2} \int \frac{e^{is_1\eta_1^2} e^{is_2\eta_2^2} e^{-i\left[4\vec{x}_1^2\left(s'_1 - s_1\right) + 4\vec{x}_2^2\left(s'_2 - s_2\right)\right]}}{\left[-i\left(s'_1 - s_1\right)\right]^{9/2} \left[-i\left(s'_2 - s_2\right)\right]^{9/2}} ds_1 ds_2. \quad (27)$$

Что дает

$$\int e^{is_1\eta_1^2} e^{is_2\eta_2^2} W_{11'} W_{22'} ds_1 ds_2 d\vec{p} =$$

$$= 2^3 (2\pi)^{3/2} \frac{\pi^{10}}{2} \left[\frac{2\pi}{\Gamma(9/2)}\right]^2 \left(\eta_1^2 + 4x_1^2\right)^{7/2} \times$$

$$\times e^{-is'_1\left(\eta_1'^2 + 4x_1^2 - \eta_1^2\right)} \left(\eta_2^2 + 4x_1^2\right)^{7/2} e^{-is'_2\left(\eta_2'^2 + 4x_1^2 - \eta_2^2\right)}. \quad (28)$$

Проведя дальнейшее интегрирование по параметрическим координатам s'_1 и s'_2, окончательно получим

$$\left\langle \left(Q_{11'} Q_{22'}\right)^4 \right\rangle = \frac{\pi^{11}}{2^2\left[\Gamma(9/2)\right]^2} \times$$

$$\times \int d\eta_1^2 \chi_1\left(\eta_1^2\right) \chi_1\left(\eta_1^2 + 4x^2\right) \int d\eta_2^2 \chi_2\left(\eta_2^2\right) \chi_2\left(\eta_2^2 + 4x^2\right) \times$$

$$\times \int d\vec{x} R^2(2\vec{x}) \frac{\left(\eta_1^2 + 4x^2\right)^{3/2}}{\eta_1^4} \frac{\left(\eta_2^2 + 4x^2\right)^{3/2}}{\eta_2^4}.$$

При $x \to 0$ из последней формулы следует, что нормировка ВФ равна 1. При $x \to \infty$ нормировочная константа равна 0 из-за отсутствия пере крытия χ_1, χ_2.

Вычисление обменных интегралов перекрытия является несколько более сложной задачей. Для вычисления обменных интегралов перекрытия вида $Q_{12'} = \langle s_1 f_1 | s_2' f_2' \rangle$ необходимо так же, как и ранее, произвести интегрирование по всем парам параметрических и генераторных координат. Проиллюстрируем это следующим выражением:

$$\left\langle Q_{12'} Q_{21'} \left(Q_{11'} Q_{22'} \right)^3 \right\rangle =$$
$$= \langle s_1 f_1 | s_2' f_2' \rangle \langle s_2 f_2 | s_1' f_1' \rangle \langle s_2 f_2 | s_2' f_2' \rangle^3 \langle s_1 f_1 | s_1' f_1' \rangle^3 =$$
$$= \left(\frac{\pi}{4} \right)^4 \int \frac{\chi(\eta_1)}{\eta_1^4} d\eta_1^2 \int \frac{\chi(\eta_2)}{\eta_2^4} d\eta_2^2 \int \frac{\chi(\eta_1)}{\eta_1'^4} d\eta_1'^2 \times \qquad (29)$$
$$\times \int \frac{\chi(\eta_1)}{\eta_2'^4} d\eta_2'^2 M.$$

где M определяется формулой

$$M = \int e^{-is_1\left(\eta_1^2 + 4x_1^2\right)} e^{-is_2\left(\eta_2^2 + 4x_2^2\right)} R\left(\vec{x}_1 - \vec{x}_2\right) d\vec{x}_1 d\vec{x}_2 \times$$
$$\times \int e^{is_1'\left(\eta_1'^2 + 4x_1'^2\right)} e^{is_2'\left(\eta_2'^2 + 4x_2'^2\right)} R\left(\vec{x}_1' - \vec{x}_2'\right) d\vec{x}_1' d\vec{x}_2' \times$$
$$\times \int \frac{ds_1}{\left[-i\left(s_1 - s_2'\right)\right]^{3/2}} \frac{ds_2}{\left[-i\left(s_2 - s_1'\right)\right]^{3/2}} \times$$
$$\times \frac{ds_1'}{\left[-i\left(s_1 - s_1'\right)\right]^{9/2}} \frac{ds_2'}{\left[-i\left(s_2 - s_2'\right)\right]^{9/2}} D\left(s_1, s_2, s_1', s_2'\right), \qquad (30)$$

а функция D определяется таким образом:

$$D\left(s_1, s_2, s_1', s_2'\right) =$$
$$= \int e^{-i\vec{f}_1\vec{x}_1} e^{i\vec{f}_1'\vec{x}_1'} e^{-i\vec{f}_2\vec{x}_2} e^{i\vec{f}_2'\vec{x}_2'} e^{i\frac{\left(\vec{f}_1 - \vec{f}_2' - \frac{\vec{p}}{2}\right)^2}{64\left(s_1 - s_2'\right)}} \times$$
$$\times e^{i\frac{\left(\vec{f}_2 - \vec{f}_1' - \frac{\vec{p}}{2}\right)^2}{64\left(s_2 - s_1'\right)}} e^{3i\frac{\left(\vec{f}_2 - \vec{f}_2' - \frac{\vec{p}}{2}\right)^2}{64\left(s_2 - s_2'\right)}} e^{3i\frac{\left(\vec{f}_1 - \vec{f}_1' - \frac{\vec{p}}{2}\right)^2}{64\left(s_1 - s_1'\right)}} \times$$
$$\times d\vec{f}_1 d\vec{f}_2 d\vec{f}_1' d\vec{f}_2' d\vec{p}. \qquad (31)$$

Интегрирование по паре переменных $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ проводится по всему пространству, поэтому можно сделать следующую трансляцию:

$$\vec{f}_1 \to \vec{f}_1 + \frac{\vec{p}}{2}, \vec{f}_2 \to \vec{f}_2 + \frac{\vec{p}}{2}. \qquad (32)$$

Далее интегрируем по $d\vec{p}$ и, сделав замену переменных

$$\vec{y}_1 = \vec{f}_1 - \vec{f}_1', \ \vec{y}_2 = \vec{f}_2 - \vec{f}_1', \quad \vec{z}_1 = \vec{f}_1' - \vec{f}_2', \ \vec{z}_2 = \vec{f}_1,$$
$$J = 1, \qquad (33)$$

получаем

$$D = 2^3 \left(2\pi\right)^{\frac{3}{2}} \delta\left(\vec{x}_1 + \vec{x}_2\right) \int e^{-i\vec{z}_2\vec{x}_1} e^{i\left(\vec{z}_2 - \vec{y}_1\right)\vec{x}_1'} \times$$
$$\times e^{-i\left(\vec{z}_2 + \vec{y}_2 - \vec{y}_1\right)\vec{x}_2} e^{i\left(\vec{z}_2 - \vec{z}_1 - \vec{y}_1\right)\vec{x}_2'} \times$$
$$\times e^{i\frac{\left(\vec{z}_1 + \vec{y}_1\right)^2}{64\left(s_1 - s_2'\right)}} e^{i\frac{\vec{y}_2^2}{64\left(s_2 - s_1'\right)}} e^{3i\frac{\left(\vec{z}_1 + \vec{y}_2\right)}{64\left(s_2 - s_2'\right)}} \times \qquad (34)$$
$$\times e^{3i\frac{\vec{y}_1^2}{64\left(s_1 - s_1'\right)}} d\vec{y}_1 d\vec{y}_2 d\vec{z}_1 d\vec{z}_2.$$

Последовательное интегрирование по переменным $\vec{z}_2$, $\vec{x}_2$ и $\vec{x}_2{}'$ дает

$$M = \int e^{-is_1\left(\eta_1^2 + 4x_1^2\right)} e^{-is_2\left(\eta_2^2 + 4x_1^2\right)} R\left(2\vec{x}_1\right) d\vec{x}_1 e^{is_1'\left(\eta_1'^2 + 4x_1'^2\right)}{}_1 \times$$
$$\times e^{is_2'\left(\eta_2'^2 + 4x_1'^2\right)} R\left(2\vec{x}_1'\right) d\vec{x}' D\left(s_1, s_2, s_1', s_2'\right) \times$$
$$\times \frac{1}{\left[-i\left(s_1 - s_2'\right)\right]^{3/2}} \frac{1}{\left[-i\left(s_2 - s_1'\right)\right]^{3/2}} \frac{1}{\left[-i\left(s_1 - s_1'\right)\right]^{9/2}} \times$$
$$\times \frac{1}{\left[-i\left(s_2 - s_2'\right)\right]^{9/2}} ds_1 ds_2 ds_1' ds_2',$$

где переобозначено

$$D\left(s_1, s_2, s_1', s_2'\right) = 2^3 \left(2\pi\right)^3 \int e^{-i\vec{z}_1\vec{x}_1'} e^{i\left(\vec{y}_2 - \vec{y}_1\right)\vec{x}_1} \times$$
$$\times e^{i\frac{\left(\vec{z}_1 + \vec{y}_1\right)^2}{64\left(s_1 - s_2'\right)}} e^{i\frac{\vec{y}_2^2}{64\left(s_2 - s_1'\right)}} e^{3i\frac{\left(\vec{z}_1 + \vec{y}_2\right)}{64\left(s_2 - s_2'\right)}} e^{3i\frac{\vec{y}_1^2}{64\left(s_1 - s_1'\right)}} d\vec{y}_1 d\vec{y}_2 d\vec{z}_1. \qquad (35)$$

Если воспользоваться разложением в ряд [9] входящих в выражение (35) функций

$$e^{2\vec{p}\vec{x} - p^2} = \pi^{3/2} \sum_{nlm} \varphi_{nlm}^{+}\left(\vec{p}\right) \psi_{nlm}\left(\vec{x}\right), \qquad (36)$$

(функции φ_{nlm}, ψ_{nlm} определены в [9]), то для функции M можно получить выражение в виде сумм степенных рядов по переменным

$$\gamma_1 = \eta_1^2 + 4x_1^2, \quad \gamma_2 = \eta_2^2 + 4x_1^2,$$
$$\gamma_1' = \eta_1'^2 + 4x_1'^2, \quad \gamma_2' = \eta_2'^2 + 4x_1'^2. \qquad (37)$$

Из-за громоздкости этого выражения, включающего более девяти сумм, оно здесь не приводится.

Полученное выражение для обменного интеграла перекрытия имеет форму, аналогичную прямому интегралу.

В представленной работе для учета антисимметризации в кластерных системах развивается новый метод построения полностью антисимметризованных волновых функций на примере рассмотрения основного состояния ядра ^{8}Be, являющегося долгоживущим квазистационарным состоянием и проявляющимся только при рассеянии α-частицы на α-частице с шириной уровня $\Gamma \sim 10$ эВ. ВФ кластеров рассчитываются по методу многомерных гиперсферических функций.

В связи с универсальностью развиваемого метода построения полностью антисимметризованных волновых функций кластерных систем, ВФ кластеров которых рассчитываются по методу МГСФ, развитыми приемами можно воспользоваться для описания систем с более сложной структурой.

В последующих работах планируется после получения аналитических выражений для матричных элементов кинетической и потенциальной энергии решить интегро-дифференциальное уравнение для функции относительного движения двух кластеров, образующих долгоживущее квазистационарное состояние.

В заключение отметим, что данная работа является теоретической основой для построения кластерных моделей различной природы и описания свойств некоторых возбужденных состояний ядер. Данная модель применима для двух, трех и большего числа кластеров. Кроме того, модель допускает наличие различного числа нуклонов в кластерах.

В отличие от феноменологических кластерных моделей, в которых используются феноменологические эффекты взаимодействия кластеров (вычисление которых является самостоятельной сложной проблемой), развитая модель для всех типов кластеров использует единые нуклон-нуклонные потенциалы. Как известно, последние наиболее полно исследованы в ядерной физике.

Конкретные численные расчеты свойств ядра ^{8}Be в рамках развитой кластерной модели будут представлены в последующих работах.

Список литературы

1. Brink D. M. Proceedings of the International School of Physics “Enrico Fermi”, Course 36, 1966.
2. Kalandarov Sh. A., Adamian G. G., et al. // Phys. Rev. 2011. Vol. C 84. P. 054607.
3. Danilin B. V., Zhukov M. V., Korsheninnikov A. A., Chulkov L. V. // Sov. J. Nucl. Phys. 1991. Vol. 53. P. 45.
4. Danilin B. V., Zhukov M. V., Ershov S. N., et al. // Phys. Rev. 1991. Vol. C 43. P. 2835.
5. Zhukov M. V., Danilin B. V., Fedorov D.V., et al. // Phys. Rep. 1993. Vol. 231. P. 151.
6. Данилин Б. В., Шульгина Н. Б., Ершов С. Н., Вааген Я. С. // Ядерная физика. 2009. Т. 72, № 8, С. 1324–1337.
7. Shneidman T. M., Adamian G. G., Antonenko N. V., Jolos R. V. Claster approach to the structure of nuclei with $Z \geq 96$ // Ядерная физика. 2007. Т. 70. № 80. С. 1497–1501.
8. Вильдермут К., Тан Я. Единая теория ядра. М.: Мир, 1980
9. Садовой А. А. Методы многомерных угловых функций в теоретической и прикладной физике. (Обзор). Арзамас-16: ВНИИЭФ, 1994.
10. Новые методы решения задачи многих тел в атомной, молекулярной и ядерной физике: Сборник научных статей / Под ред. А. А. Садового. Саров: ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 2008.
11. Kanellopulos Th. Wildermuth K. Antisimmetrization of “cluster model” wave functions and their expansion I “shell model” wave functions// Nuclear physics. 1960, Vol. 14, N. 3.
12. Мак-Вини Р., Сатклиф Б. // Квантовая механика молекул. М.: Мир, 1972.

Статья поступила в редакцию 07.06.2012.