«РОССИЙСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ЯДЕРНЫЙ ЦЕНТР – ВНИИЭФ»

# ВОПРОСЫ АТОМНОИ НАУКИ ТЕХНИКИ

СЕРИЯ:

Теоретическая и прикладная физика

ВЫПУСК 1

### ΦГУП

«РОССИЙСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ЯДЕРНЫЙ ЦЕНТР – ВНИИЭФ»

### ВОПРОСЫ АТОМНОЙ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ:

## Теоретическая и прикладная физика

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СБОРНИК

ВЫПУСК 1

Издается с 1984 г.

Саров - 2012

#### Уважаемые читатели!

Редакция н/т сборника «Вопросы атомной науки и техники» серии «Теоретическая и прикладная физика» информирует о том, что начиная со 2-го полугодия 2008 г. журнал распространяется согласно новым правилам подписки.

Теперь подписаться на сборник можно во всех отделениях связи России по каталогу Агентства «Роспечать», раздел «Периодические издания НТИ», подписной индекс 72246.

Цена одного журнала – 200 руб.

В год издается 3 выпуска.

По всем вопросам обращаться по адресу:

607188 г. Саров Нижегородской обл., пр. Мира, 37, РФЯЦ-ВНИИЭФ, ИТМФ. Редакция журнала ВАНТ, сер. «Теоретическая и прикладная физика».

Тел. (83130)7-54-96; e-mail: kul@otd68.vniief.ru

Главный редактор Ю. А. Трутнев

Редакционная коллегия:

Е. Н. Аврорин – зам. главного редактора, М. В. Горбатенко, В. П. Копышев, Н. В. Лычагина – ответственный секретарь, Б. А. Надыкто – зам. главного редактора, А. В. Певницкий, В. А. Симоненко, В. П. Соловьев, С. А. Холин

### МЕТОД РАСЧЕТА РЕСУСПЕНЗИИ, ОСНОВАННЫЙ НА СОЧЕТАНИИ ДЕТЕРМИНИРОВАННОГО И СТАТИСТИЧЕСКОГО ПОДХОДОВ

### Д. В. Цаплин, В. Н. Пискунов\*

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Представлен метод расчета процесса вторичного пылеобразования, объединяющий детерминированный и статистический подходы для описания ветрового подъема (ресуспензии) покоящихся и катящихся по поверхности частиц. Этот метод использует модель rock'n roll, основанную на статистическом подходе, ограничивая ее действие пороговым диаметром частиц, отделяющим неподвижные частицы от катящихся. Считается, что ресуспензия катящихся частиц происходит мгновенно, если действующая на них аэродинамическая подъемная сила превышает их вес. В расчетах учитывается, что крупные и слишком тяжелые частицы катятся по поверхности, не участвуя в процессе ресуспензии. На основе описанных алгоритмов выполнены расчеты, которые обнаруживают хорошее согласие результатов с экспериментом.

*Ключевые слова*: ресуспензия, взаимодействие частиц с поверхностью, спектры частиц, моделирование вторичного пылеобразования.

#### Введение

Процесс ветрового подъема частиц с подстилающих поверхностей в приповерхностный слой атмосферы (ресуспензия) играет важную роль в перераспределении загрязняющих веществ (в том числе и радиоактивных) по поверхности после их выпадения. Описание ресуспензии включает в себя широкий круг сложных детерминированных и стохастических процессов.

Существующие теоретические модели ресуспензии разбиваются на два типа [1]: квазистатические модели, которые основаны на соотношении моментов и сил, действующих на частицу в воздушном потоке, и динамические, использующие энергетический баланс частицы в потенциальной яме адгезии. Кроме того, можно выделить статистический и детерминированный подходы к описанию ресуспензии. При статистическом подходе определяется скорость ресуспензии частиц с под-

стилающей поверхности под действием турбулентного ветрового потока. В этом подходе обычно учитываются флуктуации аэродинамических сил, турбулентные пульсации и разброс сил адгезии, действующих на частицы. Примерами моделей, основанных на статистическом подходе, могут служить rock'n roll модель [2, 3] и модель, использующая турбулентные пульсации потока [4, 5].

Детерминированный подход позволяет оценить пороговую динамическую скорость трения для начала ресуспензии частиц заданного размера  $u_{th}$ . Во многих моделях [6, 7] эта пороговая скорость определяется из необходимого для начала ее качения по поверхности баланса моментов, действующих на частицу. Можно также говорить о пороговом диаметре частиц  $D_{th}$  для заданной скорости течения.

В данной работе представлен метод расчета, объединяющий детерминированный и статистиче-

<sup>\*</sup> E-mail: D. V. Tsaplin@itmf.vniief.ru

ский подходы при описании ресуспензии. Сначала из баланса моментов, действующих на частицу в вязком подслое, определяется величина порогового диаметра  $D_{th}$ . Крупные частицы с диаметром  $D > D_{th}$  начинают катиться по поверхности, поэтому они ресуспензируют мгновенно, если действующая на них аэродинамическая подъемная сила превышает вес частиц. Для оценки ресуспензии мелких частиц, остающихся неподвижными, используются скорости ресуспензии, полученные либо в модели rock'n roll либо в модели, основанной на турбулентных пульсациях. Таким образом, механизмы ресуспензии неподвижных и катящихся частиц различны, в этом состоит основное отличие предложенного метода расчета от статистических моделей [2-5]. Отметим, что слишком крупные и тяжелые частицы катятся по поверхности, не участвуя в процессе ресуспензии, и это также учитывается в расчетах.

В первом разделе предложены формулы для определения пороговых диаметра и скорости трения с использованием баланса моментов, действующих на частицу в вязком подслое, и описан алгоритм расчета ресуспензии в предлагаемом методе. На основе этого алгоритма написана программа с использованием прикладного пакета программ MATLAB, предназначенная для расчета краткосрочной ресуспензии.

Во втором разделе расчеты, выполненные по этой программе, сравниваются с экспериментальными измерениями краткосрочной ресуспензии [2]. Результаты сравнения показывают, что данный метод лучше согласуется с результатами измерений, чем обычная rock'n roll модель.

### 1. Описание модели и алгоритма расчета ресуспензии

Сначала рассмотрим модель для определения пороговых скорости трения и диаметра катящихся частиц. В этой модели рассматривается действие сил и их моментов относительно центра вращения O на частицу радиуса R, находящуюся в вязком подслое на поверхности (рис. 1).

Аэродинамическая подъемная сила  $F_L$  и вес частицы  $m_P g$  значительно меньше силы адгезии  $F_A$  и силы лобового сопротивления  $F_D$ , поэтому ими и их моментами можно пренебречь [6]. Следовательно, для качения частицы необходимо,

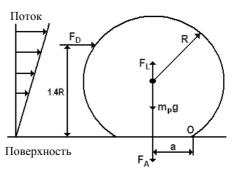


Рис. 1. Схема сил, действующих на частицу в вязком подслое

чтобы момент силы лобового сопротивления  $M_D$  превышал момент адгезии  $M_A$  (знак равенства отвечает пороговому значению):

$$M_D/M_A \ge 1. \tag{1}$$

Момент силы лобового сопротивления вычисляется из выражения [8]:

$$M_D = 1.4F_D R = 5.61 \rho_f u_*^2 D^3,$$
 (2)

где  $\rho_f$  — плотность воздуха,  $u_*$  — динамическая скорость трения, D — диаметр частицы и  $F_D$  — сила лобового сопротивления, которая определяется как [9]:

$$F_D = 2,55\pi\rho_f u_*^2 D^2. (3)$$

Момент сил адгезии определяется из произведения силы адгезии на радиус контакта частицы с поверхностью – a:

$$M_A = F_A a, \tag{4}$$

Из-за шероховатости поверхности сила адгезии имеет логнормальное распределение со средним значением  $\langle F_A \rangle$  и шириной разброса  $\sigma_A$ :

$$\varphi(F_A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{1}{F_A \ln \sigma_A} \right) \exp\left( -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\ln \left( F_A / \langle F_A \rangle \right)}{\ln \sigma_A} \right\}^2 \right). \tag{5}$$

Среднее значение силы адгезии и радиус контакта частица – поверхность оцениваются с использованием модели адгезии JKR [10]:

$$\langle F_A \rangle = r F_A^{JKR} = r 3\pi \gamma D/4,$$
 (6)

$$a = \left(\frac{3\pi\gamma D^2}{8E}\right)^{1/3},\tag{7}$$

где r – коэффициент редукции, связанный с уменьшением адгезии на шероховатой поверхности,

 $F_A^{JKR}$  — сила адгезии на гладкой поверхности,  $\gamma$  — поверхностная энергия и E — составной модуль Юнга для контакта частица — поверхность:

$$\frac{1}{E} = \frac{3}{4} \left( \frac{1 - v_1^2}{E_1} + \frac{1 - v_2^2}{E_2} \right) \tag{8}$$

 $(E_1, E_2 - \text{модули Юнга, a } v_1, v_2 - \text{коэффициенты Пуассона контактирующих материалов}).$ 

Подставляя выражения (2) и (4) в соотношение (1), получим формулу для оценки пороговой скорости трения, при которой начинается качение частиц диаметром D:

$$u_*^{th} = 0.433 \left( \frac{\left( F_A(D) \right)^3 \gamma}{\rho_f^3 E D^7} \right)^{1/6},$$
 (9)

а также выражение для порогового диаметра катящихся частиц, на которые действует поток с динамической скоростью трения  $u_*$ :

$$D_{th} = 0,489 \left( \frac{\left( F_A(D) \right)^3 \gamma}{\rho_f^3 E u_*^6} \right)^{1/7}.$$
 (10)

Крупные частицы диаметром больше  $D_{th}$  под действием потока начинают катиться по поверхности. Влиянием сил адгезии на катящиеся частицы можно пренебречь, поэтому эти частицы мгновенно покидают поверхность, если аэродинамическая подъемная сила со стороны потока  $F_L$  оказывается больше их веса, т. е.:

$$F_L > m_P g = \pi \rho_P D^3 g / 6, \qquad (11)$$

где  $m_P$  и  $\rho_P$  — масса и плотность частиц, а подъемная сила  $F_L$  определяется как [11, 12]:

$$F_L = 0.58 v^2 \rho_f (d_P^+)^4$$
 при  $d_P^+ < 1$ ; (12)  
 $F_L = 20.9 v^2 \rho_f (d_P^+/2)^{2.31}$  при  $d_P^+ > 1$ ,

где  $d_P^+ = Du_*/v$  и v — кинематическая вязкость воздуха. Слишком крупные и тяжелые частицы  $(F_L < m_P g)$  продолжают катиться по поверхности не покидая ее и, следовательно, не участвуют в процессе ресуспензии.

Для оценки ресуспензии мелких частиц размером  $D < D_{th}$  используется скорость ресуспензии, которая вычисляется из статистических моде лей [2–5]. Модель rock'n roll [2], приводит к следующему выражению интенсивности ресуспензии p (максимальной скорости ресуспензии) частиц под действием флуктуирующей аэродинамической силы:

$$\begin{split} p &= 0,00685 \left(u_*^2 \middle/ v\right), \text{ если } \left[F_A - \left(F_L \middle/ 2 + RF_D \middle/ a\right)\right] \middle/ \left[0,2 \left(F_L \middle/ 2 + RF_D \middle/ a\right)\right] \leq 0,75; \\ p &= \frac{0,00685 \left(\frac{u_*^2}{v}\right) \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\left(F_A - \left(\frac{1}{2}F_L + \frac{R}{a}F_D\right)\right) \middle/ \left(0,2 \left(\frac{1}{2}F_L + \frac{R}{a}F_D\right)\right)\right)^2\right)}{\frac{1}{2} \left\{1 + \operatorname{erf} \left(\left(F_A - \left(\frac{1}{2}F_L + \frac{R}{a}F_D\right)\right) \middle/ \left(0,2\sqrt{2} \left(\frac{1}{2}F_L + \frac{R}{a}F_D\right)\right)\right)\right\}}, \\ \text{если } \left[F_A - \left(F_L \middle/ 2 + RF_D \middle/ a\right)\right] \middle/ \left[0,2 \left(F_L \middle/ 2 + RF_D \middle/ a\right)\right] > 0,75; \end{split}$$

где  $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{x} e^{-t^{2}} dt$  — функция ошибок,  $F_{D}$  и

 $F_L$  – аэродинамические силы (3) и (12).

Выражение (13) получено из баланса сил, действующих на частицу в вязком подслое, предполагая, что аэродинамическая сила и ее производная по времени статистически независимы и имеют гауссово распределение. Отметим, что существуют варианты модели rock'n roll, использующие негауссово распределение сил [3].

Другая модель, рассматривающая подъем частиц под действием турбулентных пульсаций [4, 5], дает следующее выражение для интенсивности ресуспензии:

$$p = \frac{4,93 \cdot 10^{-5}}{v} \left( \frac{u_*^2}{u_*^{th}} \right)^2 = 2,63 \cdot 10^{-4} \frac{u_*^4}{v} \left( \frac{\rho_f ED^7}{F_A^3 \gamma} \right)^{1/3} . (14)$$

В дальнейшем будет выполнено сравнение обоих вариантов, использующих формулы (13) и (14) для интенсивности ресуспензии *p*, с экспериментальными данными по краткосрочной ресуспензии [2].

Доля частиц, унесенных потоком воздуха за время t с единицы поверхности, определяется следующей суммой:

$$N(t) = N_{im}(t) +$$

$$+ \iint_{0}^{\infty} \int_{0}^{D_{th}} p \exp(-pt) \varphi(F_A) \varphi_D(D) dD dF_A dt, \quad (15)$$

где  $N_{im}(t)$  — доля легких частиц с размерами больше  $D_{th}$ , уносимых с поверхности мгновенно после начала действия потока с динамической скоростью трения  $u_*$ , поскольку на эти частицы действует подъемная сила, превышающая их вес (11). В выражении (15) также учтено, что распределение частиц по размерам  $\phi_D(D)$  ограничено минимальным диаметром частиц  $D_{\min}$ . Если оказывается, что  $D_{th} < D_{\min}$ , то все частицы считаются катящимися и второе слагаемое в выражении (15) приравнивается нулю.

С использованием численного комплекса МАТLAB была написана программа, реализующая предложенный метод расчета ресуспензии.

В программе требуется задание следующих входных параметров: спектра частиц по размерам - $\varphi_D(D)$ , поверхностной энергии  $\gamma$  и составного модуля Юнга E для контакта частица – поверхность, параметров шероховатости поверхности (коэффициента редукции r и ширины разброса сил адгезии  $\sigma_A$ ), плотности материала частиц  $\rho_P$ , динамической скорости трения  $u_*$  и времени t, в течение которого на частицы действует поток. В результате расчетов на выходе программы получается полная доля уносимых с единицы поверхности частиц за время t потоком воздуха с постоянной скоростью трения  $u_*$ . На выходе программы можно также получить спектр уносимых частиц по размерам и другие величины, например массу вещества, поднимаемую за единицу времени с единицы поверхности в приповерхностный слой атмосферы.

### 2. Сравнение результатов

Результаты расчетов, полученные с помощью предложенного метода, сравнивались с измерениями краткосрочной ресуспензии частиц из оки-

си алюминия и графита со стеклянной поверхности в воздушном туннеле [2]. На рис. 2—4 показаны доли унесенных с поверхности частиц после 1 секунды действия потока при различной динамической скорости трения, вычисленной по формулам (13) (штрихпунктирная линия) и (14) (сплошная кривая), а также измеренной экспериментально. Дополнительно пунктирной кривой показаны расчеты по модели rock'n'roll [2].

Из рисунков видно, что расчеты, сделанные с помощью предлагаемого метода, лучше согласуются с экспериментальными данными, чем предсказания обычной модели rock'n roll. Особенно хорошее согласие с экспериментами показывают расчеты, использующие для интенсивности ресуспензии выражение (14), полученное по модели турбулентных пульсаций [4, 5].

Отметим, что предложенный метод не сводится к простому ограничению статистических моделей условием (11), поскольку ресуспензия неподвижных частиц наблюдается даже в том диапазоне скоростей трения, когда вес частиц превышает подъемную силу. Эти частицы накапливают достаточно энергии колебаний из турбулентного потока, чтобы преодолеть силы адгезии и своего веса.

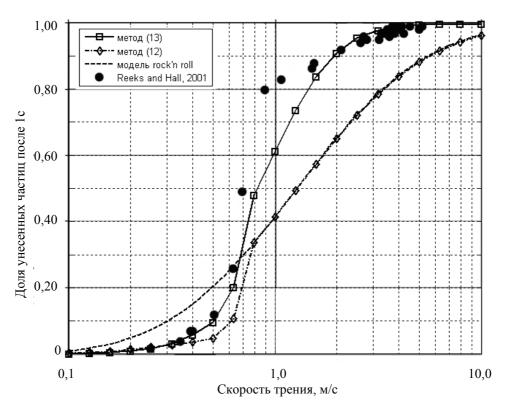


Рис. 2. Сравнение вычисленной и измеренной доли унесенных частиц из окиси алюминия номинального размера 10 мкм в зависимости от скорости трения

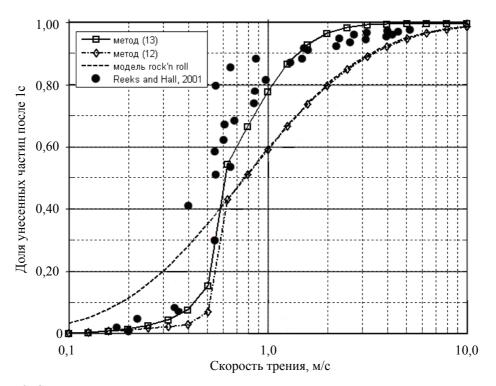


Рис. 3. Сравнение вычисленной и измеренной доли унесенных частиц из окиси алюминия номинального размера 20 мкм в зависимости от скорости трения

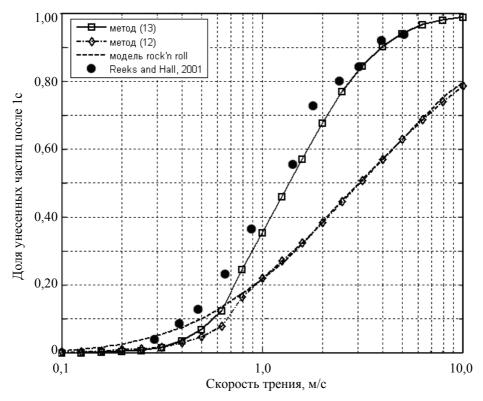


Рис. 4. Сравнение вычисленной и измеренной доли унесенных графитовых частиц номинального размера 13 мкм в зависимости от скорости трения

#### Заключение

В работе предложен метод, объединяющий детерминированный и статистический подходы к описанию ресуспензии. В предлагаемом методе учитывается различие механизмов ресуспензии покоящихся и катящихся по поверхности частиц. Для определения скорости ресуспензии мелких покоящихся частиц используются модели, основанные на статистическом подходе. Действие этого статистического механизма ограничено пороговым диаметром  $D_{th}$ , который отделяет мелкие неподвижные частицы. Такое разделение связано с тем, что катящиеся частицы не испытывают значительной адгезии со стороны поверхности в отличие от неподвижных частиц. Поэтому ресуспензия крупных катящихся частиц диаметра  $D > D_{th}$ происходит мгновенно, если действующая на них аэродинамическая подъемная сила превышает их вес. Слишком крупные и поэтому слишком тяжелые частицы катятся по поверхности, не участвуя в процессе ресуспензии.

Представлена модель для определения порогового диаметра, которая использует баланс моментов, действующих на частицу в вязком подслое. Для расчета ресуспензии мелких частиц использованы два способа: статистическая модель госк'n roll [2, 3] и модель турбулентных пульсаций [4, 5].

Описан алгоритм расчета ресуспензии в предлагаемом методе, на основе которого написана программа, использующая прикладной пакет программ МАТLАВ и предназначенная для расчета краткосрочной ресуспензии. Расчеты доли унесенных с поверхности частиц после действия потока, выполненные по этой программе, сравниваются с экспериментальными измерениями краткосрочной ресуспензии [2]. Результаты этого сравнения показывают, что данный метод лучше согласуется с результатами измерений, чем обычная госк'n roll модель. Наилучшее согласие получено по модели турбулентных пульсаций [4, 5].

Предложенный метод может использоваться в численных комплексах, предназначенных для расчета атмосферного переноса и осаждения аэрозолей, чтобы учесть перераспределение загрязняющих веществ по поверхности после их выпадения за счет вторичного пылеобразования.

### Список литературы

- 1. Ziskind G., Fichman M. and Gutfinger C. Resuspension of particulate from surfaces to turbulent flows review and analysis // J. Aerosol Sci. 1995. Vol. 26, No 4. P.613.
- 2. Reeks M. and Hall D. Kinetic models of particle resuspension in turbulent flows: Theory and measurement // J. Aerosol Sci. 2001. Vol. 32. P. 1.
- 3. Zhang F., Reeks M. and Kissane M. Particle resuspension modeling in turbulent flows. Report 11F5 at the IAC 2010, Helsinki.
- 4. Cleaver J. W. and Yates B. Mechanism of detachment of colloidal particles from a flat substrate in a turbulent flow // J. Colloid Interf. Sci. 1973. Vol. 44. P. 464.
- 5. Zhu Y., Zhao B., Zhou B., and Tan Z. A particle resuspension model in ventilation ducts // Aerosol Science and Technology 2012. Vol. 46. P. 222.
- 6. Ziskind G., Fichman M. and Gutfinger C. Adhesion moment model for estimating particle detachment from a surface // J. Aerosol Sci. 1997. Vol. 28, No 4, P. 623.
- 7. Ibrahim A., Dunn P. and Brach R. Microparticle detachment from surfaces exposed to turbulent air flow: Controlled experiments and modeling // J. Aerosol Sci. 2003. Vol. 34. P. 765.
- 8. Sharma M.M. et al. Factors controlling the hydrodynamic detachment of particles from surfaces // J. Colloid Interface Sci. 1992. Vol. 149. P. 121.
- 9. O'Neill M. E. A sphere in contact with a plane wall in a slow linear shear flow // Chem. Engng. Sci. 1968. Vol. 23. P. 1293.
- 10. Johnson K. L., Kendall K. and Roberts A. D. Surface energy and the contact of elastic solids // Proc. Roy. Soc. 1971. A. 324. P. 301.
- 11. Leighton D. and Acrivos A. The lift on a small sphere touching a plane in the presence of a simple shear flow // J. Appl. Math. Phys. 1985. Vol. 36. P. 174.
- 12. Hall D. Measurements of the mean force on a particle near a boundary in turbulent flow // J. Fluid Mech. 1988. Vol. 187. P. 451.

Статья поступила в редакцию 18.04.2012.

### АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ КИНЕТИКИ КОАГУЛЯЦИИ И КОНДЕНСАЦИИ КОМПОЗИТНЫХ ЧАСТИЦ

### В. Н. Пискунов

РФЯЦ-ВНИИЭФ, 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Получены следующие новые результаты для одновременно действующих процессов коагуляции и конденсации композитных частиц: сформулированы уравнения, дающие сокращенную (интегральную по примеси) информацию о кинетике формирования композитных частиц за счет коагуляции и конденсации; получены новые аналитические решения для спектров и содержания примеси в частицах смешанного состава; результаты обобщены на случай любых коэффициентов коагуляции, для которых есть аналитическое решение однокомпонентной задачи. Полученные решения целесообразно использовать для калибровки численных программ, рассчитывающих кинетику формирования композитных частиц в практически важных задачах.

*Ключевые слова:* дисперсные системы, коагуляция, конденсация, кинетическое уравнение, композитные частицы, аналитические решения, верификация численных программ.

#### Введение

Во многих задачах физики дисперсных систем сталкиваются с необходимостью описания кинетики формирования композитных частиц, состоящих из смеси различных веществ. Сюда относятся, например, процессы осаждения загрязняющих примесей на частицах аэрозольной компоненты земной атмосферы, процессы формирования кислотных осадков в атмосфере, динамика аэрозолей в облачных системах и т. д.

Важным классом задач является описание процессов формирования и распространения радиоактивных аэрозолей как в помещениях, так и в результате аварийных выбросов в атмосферу. Существует целый ряд компьютерных кодов, описывающих формирование аэрозолей при реакторных авариях, например, наиболее известный из них – MELCOR [1]. Эти компьютерные коды используют различные способы моделирования аэрозольной динамики, такие как метод конечных элементов, моментные аппроксимации, секционное приближение, метод Монте-Карло и другие численные подходы [2].

Другой, практически важной для многих видов дисперсных систем, является задача о формировании смешанных частиц, находящихся в двух фазовых состояниях (твердом и жидком). Особенно она актуальна для изучения динамики формирования и выпадения атмосферных осадков [3]. В облачных системах при отрицательных температурах обычно имеют дело со всеми фазовыми состояниями воды: твердым (лед, град, снежинки), жидким (капли) и газообразным (пар).

При численном моделировании эффективным является сокращенное описание, когда одна из компонент (примесь) считается интегрально — через нулевой и первый моменты полного спектра [4, 5]. На практике важным является совместное описание процессов коагуляции и конденсации. Для облачных процессов это усложнение задачи является обязательным, соответствующие кинетические уравнения для многофазных систем (пар, вода, лед) сформулированы в [6, 7]. Там же получен ряд аналитических решений для систем, где примесью считается водная фракция, и капли мгновенно промерзают при коагуляционных столкновениях.

В данной работе получены более общие результаты для коагуляции и конденсации композитных частиц:

- сформулированы уравнения, дающие сокращенную (интегральную по примеси) информацию о кинетике формирования композитных частиц за счет коагуляции и конденсации;

- получены новые аналитические решения для спектров и содержания примеси в частицах смешанного состава;
- результаты обобщены на случай любых коэффициентов коагуляции, для которых есть аналитическое решение однокомпонентной задачи.

Полученные аналитические решения целесообразно использовать для калибровки численных программ [1, 5, 8, 9], рассчитывающих кинетику формирования композитных частиц в практически важных задачах. Целью тестирования являются проверка схемы расчета коагуляции композитных частиц и верификация метода расщепления по физическим процессам при одновременном моделировании коагуляции и конденсации.

#### 1. Постановка задачи

Для получения необходимой информации об изменении состава композитных частиц в результате коагуляции необходимо пользоваться более сложным кинетическим уравнением, чем стандартное уравнение Смолуховского. Если ограничиться рассмотрением двухкомпонентных смесей, то оно выглядит для пространственно-однородного случая следующим образом [4, 10]:

$$\frac{\partial C(g,\alpha,t)}{\partial t} =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{0}^{g} \int_{0}^{\alpha} K(g-s,\alpha-\beta;s,\beta) C(g-s,\alpha-\beta,t) C(s,\beta,t) ds d\beta -$$

$$-C(g,\alpha,t) \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{\infty} K(g,\alpha;s,\beta) C(s,\beta,t) ds d\beta \equiv S(C;g,\alpha,t),$$
(1)

где  $C(g,\alpha,t)$  — концентрация частиц, содержащих на момент времени t суммарную массу g и массу  $\alpha$  какой-либо выделенной компоненты;  $K(g,\alpha;s,\beta)$  — коэффициенты (ядра) коагуляции, зависящие в общем случае от размеров, плотности и состава сталкивающихся частиц. В дальнейшем будем называть активной фракцией (не путать с радиоактивным веществом — это может быть и химическая примесь) те частицы, которые содержат только примесь (например, кислоту или радиоактивное вещество), пассивной фракцией — частицы балластного вещества (например, материалы теплоносителя, грунт, водные капли и т. д.), а композитной фракцией — частицы со смешанным составом.

Для нахождения аналитических решений в случае одновременной конденсации и коагуляции

композитных частиц необходимо привести полную систему уравнений для совместного действия этих процессов. Эти уравнения сформулированы в [11, 12] применительно к фазовым переходам вода – лед, а здесь мы обобщим эту процедуру.

Массообмен частицы с паром будем характеризовать полной скоростью испарения (конденсации)  $d_t g = V(g,\alpha,t)$ , а процесс формирования фазы  $\alpha$  – скоростью  $d_t \alpha = U(g,\alpha,t)$ . За счет коагуляции происходит изменение концентраций, описываемое уравнением (1). Пользуясь введенными выше величинами V и U, легко обобщить уравнение (1) на случай, когда происходит изменение как полной массы частиц g, так и массы примеси  $\alpha$  за счет конденсация (испарения):

$$\begin{split} \partial_t C(g,\alpha,t) + \partial_g \left[ V(g,\alpha,t) C(g,\alpha,t) \right] + \\ + \partial_\alpha \left[ U(g,\alpha,t) C(g,\alpha,t) \right] = \\ = S(C;g,\alpha,t) + J(g,\alpha,t), \end{split} \tag{2}$$

где  $J(g,\alpha,t)$  – интенсивность внешнего источника частиц. Для практического использования уравнений (2) целесообразно применить процедуру, изложенную в работах [5, 13], чтобы свести эти уравнения к цепочкам одномерных уравнений, аналогичных уравнениям Смолуховского. Введем следующие, интегральные по массе примеси величины:

$$n(g,t) = \int_{0}^{\infty} C(g,\alpha,t)d\alpha; \quad m(g,t) = \int_{0}^{\infty} \alpha C(g,\alpha,t)d\alpha.$$

При интегрировании детали распределения примеси по композитным частицам скрадываются, однако средние параметры распределения легко восстанавливаются по величинам m и n. Так, например, средняя масса примеси в частице с общей массой g будет равна  $\overline{\alpha(g,t)} = m(g,t)/n(g,t)$ . Иногда вклад частиц активной фракции c(g,t) удобно выделить из общих концентраций (спектра)  $C(g,\alpha,t)$  с помощью равенства:

$$C(g,\alpha,t) = c(g,t)\delta(g-\alpha) + c_c(g,\alpha,t),$$

где  $c_c(g,\alpha,t)$  — спектр композитных частиц. Считая, что

$$K(g,\alpha;s,\beta)\cong K\left[\,g,\overline{\alpha(g,t)}\,\,;\,\,s,\overline{\beta(s,t)}\,\right]=K(g,s,t);$$

 $V(g,\alpha,t)\cong V(g,\overline{\alpha},t)\equiv v(g,t);\ U(g,\alpha,t)\cong U(g,\overline{\alpha},t)\equiv u(g,t)$  и интегрируя (2) от 0 до g по  $\alpha$  (с весами 1 и  $\alpha$ ), получим систему уравнений:

$$\partial_{t}n(g,t) + \partial_{g}\left[v(g)n(g)\right] =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{0}^{g} K(g-s,s)n(g-s)n(s)ds - n(g) \int_{0}^{\infty} K(g,s)n(s)ds +$$

$$+ J_{0}(g,t); \qquad (3)$$

$$\partial_{t}m(g,t) + \partial_{g}\left[v(g)m(g)\right] -$$

$$u(g)n(g) = \int_{0}^{g} K(g-s,s)n(g-s)m(s)ds -$$

$$- m(g) \int_{0}^{\infty} K(g,s)n(s)ds + J_{1}(g,t), \qquad (4)$$

где

$$J_0(g,t) = \int_0^\infty J(g,\alpha,t)d\alpha, \qquad J_1(g,t) =$$

 $=\int\limits_{0}^{\infty}J(g,\alpha,t)\alpha d\alpha.$  Таким образом, полная система

уравнений для кинетики конденсации и коагуляции композитных частиц сформулирована.

В рассматриваемом нами частном случае, когда конденсируется только активная примесь, а балластное вещество (остов) только перераспределяется за счет коагуляции, следует положить u(g,t) = v(g,t), что упрощает решение (3), (4). Для частиц активной фракции в этом случае имеем:

$$\partial_{t}c(g,t) + \partial_{g}\left[v(g)c(g)\right] =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{0}^{g} K(g-s,s)c(g-s)c(s)ds -$$

$$-c(g) \int_{0}^{\infty} K(g,s)n(s)ds + j(g,t), \tag{5}$$

где j(g,t) – интенсивность источника, подающего в систему примесь (активное вещество).

В работе [4] уравнения, аналогичные (3), (4), были получены только для коагуляции композитных частиц и в предположениях, что содержание примеси в частицах мало, а ядра K не зависят от ее концентрации. Начальная стадия процесса при этом не рассматривалась. Система (3) – (5) обобщает результаты работы [4], описывая одновременно динамику коагуляции и поглощения самой примеси (5), а также динамику процесса конденсации. Фактически выражения (3) – (5) эквивалентны исходному уравнению (2), но предложенные нами уравнения гораздо проще для численного и аналитического решения.

Частным случаем (3) – (5) являются также уравнения, используемые для описания процесса кристаллизации ледяных частиц в переохлажден-

ном облаке. В работах [6, 7] рассматривается коагуляция и конденсация облачных капель (ОК, аналог частиц примеси) и ледяных частиц (ЛЧ, аналог композитных частиц) и считается, что при слиянии частиц разных фаз сразу происходит их кристаллизация (переход в фазу ЛЧ). Для описания этого процесса достаточно ограничиться только уравнениями (3), (5), а уравнение (4) не требуется, поскольку аналогом m(g) служит величина gn(g).

Получим аналитические решения уравнений (3) - (5) для поведения интегральных величин. Для этого отбросим источники в кинетических уравнениях (3) - (5) и предположим, что скорость конденсации примеси пропорциональна полной массе частиц:

$$u(g t) = v(g,t) = \beta(t) g. \tag{6}$$

В соответствии с уравнением (3) полные счетная

$$N(t) = \int\limits_0^\infty n(g,t)dg$$
 и массовая  $M(t) = \int\limits_0^\infty gn(g,t)dg$ 

концентрации определяются следующим образом:

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{1}{2} \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{\infty} K(g,s) n(g) n(s) dg ds;$$

$$M(t) = M_0 \exp\left[\int_{0}^{t} \beta(\tau) d\tau\right]. \tag{7}$$

Суммарная концентрация примеси в частицах  $I(t) = \int\limits_0^\infty m(g,t) dg \quad \text{определяется путем интегрирования уравнения (4):}$ 

$$I(t) = I_0 + \int_0^t \beta(\tau) M(\tau) d\tau = I_0 + [M(t) - M_0].$$
 (8)

Из формулы (8) видно, что массовая концентрация балластных (остовных) частиц не меняется:  $M(t) - I(t) = M_0 - I_0$ , как и должно быть по физическому смыслу.

В соответствии с выражением (5) счетная  $v(t) = \int\limits_0^\infty c(g,t) dg \quad \text{и массовая} \quad \mu(t) = \int\limits_0^\infty gc(g,t) dg$  концентрации частиц активной фракции опреде-

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{1}{2} \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{\infty} K(g,s)c(g) [c(s) - 2n(s)] dg ds;$$

ляются из уравнений:

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{\infty} gK(g,s)c(g) [c(s) - n(s)] dgds + \beta(t)\mu(t).$$

(9)

### 2. Аналитические решения для суммарного спектра и спектра активной фракции

Пользуясь результатами работ [6, 7], приведем окончательные аналитические выражения, определяющие поведение интегральных величин для модельных ядер коагуляции.

Постоянное ядро:  $K(g,n) = K_c = 2$ :

$$N(t) = \frac{N_0}{(1+N_0t)}; \quad v(t) = \frac{v_0}{(1+N_0t)[1+(N_0-v_0)t]};$$
$$\mu(t) = \frac{\mu_0 M(t)}{M_0[1+(N_0-v_0)t]^2}. \tag{10}$$

*Ядро, пропорциональное сумме масс час- тиц:*  $K(g,n) = K_+ = g + n$ . Решение получено для экспоненциальных начальных распределений  $c(g,0) = A \exp(-ag)$ . Оно имеет вид [6, 7]:

$$N(t) = N_0 \exp\left[-\int_0^t M(\tau)d\tau\right];$$

$$v(t) = \frac{M(t)N(t)}{2[N_0 - N(t)]} \left[F(t) - \sqrt{F(t)^2 - G(t)}\right];$$

$$\mu(t) = \frac{v(t)}{\sqrt{F^2(t) - G(t)}},$$
(11)

где

$$F(t) = \frac{aM_0 + N_0 - N(t)}{M(t)}; \ G(t) = \frac{4AM_0 [N_0 - N(t)]}{M^2(t)N_0}.$$

Подчеркнем, что поведение M(t) и I(t) для всех ядер одинаковое:

$$M(t) = M_0 \exp\left[\int_0^t \beta(\tau)d\tau\right]; \quad I(t) = I_0 + [M(t) - M_0].$$
(12)

Отметим также, что для ядер  $K_c$  и  $K_+$  в работе [7] получены аналитические выражения для спектров c(g,t), которые могут служить для дополнительной калибровки численных методик. В частности, для

$$K_c = 2$$
 и  $c(g,0) = \frac{v_0^2}{\mu_0} \exp\left(-g\frac{v_0}{\mu_0}\right)$  решение сле-

дующее:

$$c(g,t) = \frac{v^2(t)}{\mu(t)} \exp\left[-g\frac{v(t)}{\mu(t)}\right].$$

Легко убедиться, что результаты (10) – (12) обобщают решения для коагуляции композитных частиц [5, 14] и для одновременной конденсации и коагуляции однокомпонентных частиц [13].

### 3. Аналитические решения для перераспределения примеси в композитных частицах

Пусть  $u(g,t) = v(g,t) = \beta g$  и начальное условие

$$C(g,\alpha,0) = \frac{v_0^2}{\mu_0} e^{-g\frac{v_0}{\mu_0}} \delta(g-\alpha) + \frac{\theta(g-\alpha)}{g} D e^{-g\delta}.$$
 (13)

Первый член — примесь, второй — композит. Поскольку g — полная масса, а  $\alpha$  — масса примеси, то  $g > \alpha$ . В m(g,t) входит как вклад от c(g,t), так и «гладкая» часть композита, т. е. уравнение (4) описывает полное распределение примеси. Показатели экспонент для всех компонентов в формуле (13) должны быть равны ( $\delta = v_0/\mu_0 = N_0/M_0$ ), чтобы удалось получить аналитическое решение для m(g,t).

**Положим сначала** K = 1. Решение уравнений (3), (4) можно получить с помощью преобразования Лапласа. Но проще сразу искать решение в форме:

$$n(g,t) = A(t)e^{-g\frac{N(t)}{M(t)}}, \quad A(t) = N^{2}(t)/M(t),$$

$$m(g,t) = F(t)ge^{-g\frac{N(t)}{M(t)}},$$

$$\partial_{t}m(g,t) + \partial_{g}\left[\beta gm(g)\right] - \beta g n(g) =$$

$$= 2\int_{0}^{g} n(g-s)m(s)ds - 2 m(g) N(t), \qquad (14)$$

$$g\frac{dF}{dt} + g^2 \frac{FN(N+\beta)}{M} + g2\beta F - g^2 \frac{\beta FN}{M} - g\beta A =$$
$$= g^2 AF - g2FN.$$

Члены с  $g^2$  автоматически сокращаются! Уравнение для F

$$\frac{dF}{dt} + 2(N+\beta)F = \beta \frac{N^2}{M}$$

имеет решение

$$F(t) = e^{-G(t)} \left[ F_0 + \beta \int_0^t \frac{N^2(s)}{M(s)} e^{G(s)} ds \right];$$
$$G(t) = 2 \int_0^t \left[ N(s) + \beta \right] ds.$$

Следовательно,

$$F(t) = \frac{N^2}{M^2} \left[ F_0 \left( \frac{M_0}{N_0} \right)^2 + \left( M - M_0 \right) \right].$$

Данное решение можно проверить интегрально – по закону сохранения массы (12):

$$I(t) = \int_{0}^{\infty} m(g,t)dg = F(t) \int_{0}^{\infty} g e^{-g\frac{N(t)}{M(t)}} dg =$$

$$= F_0 \left(\frac{M_0}{N_0}\right)^2 + (M - M_0) = I_0 + [M(t) - M_0].$$

Учитывая, что решение уравнения (3) имеет для данных начальных условий вид

$$n(g,t) = \frac{N^2(t)}{M(t)} e^{-g\frac{N(t)}{M(t)}},$$

можно записать ответ в форме

$$m(g,t) = \left[1 + \frac{(I_0 - M_0)}{M(t)}\right] gn(g,t).$$
 (15)

Аналогичный результат получается и для ядра K(g,n) = g + n, если иметь в виду, что n(g,t) представляет собой аналитическое решение уравнения (3) для этого ядра.

### Справедливы и более общие утверждения.

1. Пусть  $u(g,t) = v(g,t) = \beta g$  и n(g,t) представляет собой решение уравнений (3). Пусть начальные условия любые, но  $m(g,0) = gF_0/A_0 n(g,0)$ . Тогда уравнение (4) имеет следующее решение:

$$m(g,t) = \varphi(t)gn(g,t); \quad \varphi(t) = e^{-\beta t} \left(D + \beta \int_{0}^{t} e^{\beta s} ds\right), (16)$$

где D – произвольная константа.

Доказательство сводится к прямой подстановке функции  $m(g,t) = \varphi(t)gn(g,t)$  в (4) с учетом (3). Квадратичные по g члены сокращаются, а линейные приводят к уравнению  $\frac{d\varphi}{dt} + \beta\varphi - \beta = 0$  с ре-

шением 
$$\varphi(t) = e^{-\beta t} \left( D + \beta \int_0^t e^{\beta s} ds \right)$$
. Что и требова-

лось доказать.

Аналогичным образом можно доказать еще два результата, имеющих место для других скоростей конденсации примеси.

**2.** Пусть  $v(g,t) = \beta g$ ,  $u(g,t) = \beta \alpha(g,t) = \beta m(g,t)/n(g,t)$  и n(g,t) представляет собой решение уравнений (3). Тогда уравнение (4) имеет следующее решение:

$$m(g,t) = \varphi(t)gn(g,t); \quad \varphi(t) = D. \tag{17}$$

Смысл задачи в том, что скорость конденсации примеси пропорциональна ее содержанию в частице (а не полной массе частицы).

3. Пусть  $v(g,t) = \beta g$ ,  $u(g,t) = \gamma \overline{\alpha(g,t)} = \gamma m(g,t)/n(g,t)$  и n(g,t) представляет собой решение уравнений (3). Тогда уравнение (4) имеет следующее решение:

$$m(g,t) = \varphi(t)gn(g,t); \quad \varphi(t) = De^{(\gamma-\beta)t}.$$
 (18)

Отличие от **2** в том, что скорость конденсации примеси не только пропорциональна ее содержанию в частице, но и имеет другие характерные времена.

Уравнение (3) фактически представляет собой уравнение Смолуховского с учетом конденсации для однокомпонентных систем (что гораздо проще). А утверждения 1-3 позволяют получить богатый набор решений для любых ядер коагуляции в многокомпонентном случае. В частности, легко сконструировать явный вид решений (15) для ядер  $K_c$  и  $K_+$ .

Решение (5) для чистой примеси — отдельная задача, но, например, для ядер  $K_c$  и  $K_+$  она решена в работах [6, 7]. Поэтому можно говорить о полном решении цепочек уравнений (3)—(5) для композитных частиц. Разумеется, речь идет о сокращенном (интегральном) описании на уровне моментов функции распределения примеси по частицам и для специального вида скоростей конденсации.

#### Заключение

Необходимо подчеркнуть довольно общий характер полученых решений. Они получены для произвольных ядер, которые имеют любые (аналитическое, численное) решения уравнений (3), (5) для однокомпонентных систем. Это сущес-твенное упрощение задачи. Достаточно разнообразны и скорости конденсации, поскольку предполагается зависимость как от полной массы частицы, так и от содержания в ней примеси. Существенное ограничение для скоростей конденсации — это линейность по полной массе (или массе примеси) частиц.

Обратимся к физическому смыслу полученных решений. Нетрудно показать, что выражения (15)—(17) можно записать в следующем общем виде:

$$\overline{p(g,t)} = m(g,t)/gn(g,t) = I(t)/M(t), \quad (19)$$

где  $\overline{p(g,t)}$  — относительное массовое содержание примеси в частицы. Тем самым, окончательный ответ можно сформулировать следующим образом:

Если скорости конденсации линейны по полной массе (или массе примеси) частиц и начальное распределение относительной массы примеси по частицам равномерно, то для любых скоростей коагуляции оно останется равномерным для всех моментов времени. Другими словами: равномерное распределение  $\overline{p(g,t)}$  по спектру является устойчивым по отношению к процессу коагуляции.

Дополнительно приведем еще один общий и важный результат, относящийся к кинетике коагуляции композитных частиц. В работах [12, 13] показано, что для произвольных ядер K асимптотическое поведение при g >> 1, t >> 1 величин  $\overline{\alpha(g,t)}$  и  $\overline{p(g,t)} = m(g,t)/g \ n(g,t)$  имеет вид:  $\overline{\alpha(g,t)} \approx Ig/M$ ;  $\overline{p(g,t)} \approx I/M$ , т. е. в результате коагуляции примесь стремится к равномерному относительному распределению независимо от вида ядра K.

Тем самым, полученные результаты можно рассматривать как доказательство равновесности и устойчивости равномерного распределения относительной массы примеси композитных частиц  $\overline{p(g,t)}$  по спектру.

Полученные аналитические решения полезны при калибровке численных программ [1, 5, 8, 9, 15], предназначенных для моделирования кинетики формирования композитных частиц в прикладных задачах, перечисленных во введении. Одной из целей такого тестирования должна быть проверка схемы расчета процесса коагуляции. Важно правильно описать перераспределение примеси по композиту в процессе формирования новых крупных частиц. Другой целью тестирования является верификация метода расщепления по физическим процессам при одновременном моделировании коагуляции и конденсации. Проверка метода расщепления на задачах с быстро растущими ядрами коагуляции и скоростями конденсации будет являться ключевым тестом.

Автор благодарит А. И. Голубева за обсуждение и полезные замечания.

### Список литературы

1. Gauntt, R. MELCOR Computer Code Manuals: Primer and User's Guide, Version 1.8.5, Rev. 2, Vol. 1. 2000.

- 2. Palaniswaamy G, Loyalka S. K. Direct simulation, Monte Carlo, aerosol dynamics: Coagulation and condensation // Annals of Nuclear Energy. 2008. Vol. 35. P. 485–494.
- 3. Pruppacher H. R., Klett J. D. Microphysics of cloud and precipitation. Dordrecht: Kluwer Academic Press. 1997.
- 4. Simons S. The coagulation and deposition of radioactive aerosols // Annals of Nuclear Energy. 1981. Vol. 8. P. 287–294.
- 5. Piskunov V. N., Golubev A. I., Goncharov E. A. and Ismailova N.A. Kinetic modeling of composite particles coagulation // Journal of Aerosol Science. 1997. Vol. 28, № 7. P. 1215–1231.
- 6. Piskunov V. N. Kinetic of particle formation in multiphase systems: Analytical solutions // Journal of Aerosol Science. 2000. Vol. 31. S576–S577.
- 7. Piskunov V. N., Petrov A. M. Condensation/coagulation kinetic for mixture of liquid and solid particles: analytical solutions // Journal of Aero sol Science. 2002. Vol. 33. P. 647–657.
- 8. Golubev A. I., Piskunov V. N., Ismailova N. A. "AERFORM" code for numerical simulation of aerosol formation kinetics // Journal of Aerosol Science. 1999. Vol. 30. S231–S232.
- 9. Qamar S., Warnecke G. Solving population balance equations for two-component aggregation by a finite volume scheme // Chemical Engineering Science. 2007. Vol. 62. P. 679 693
- 10. Lushnikov A.A. Evolution of coagulating systems III. Coagulating mixtures // Journal of Colloid and Interface Science. 1976. Vol. 54 (1). P. 94–101.
- 11. Piskunov V.N. Kinetic of precipitations formation with phase transition. Journal of Aerosol Science. 1999. Vol. 30. Suppl. 1, S233-S234.
- 12. Пискунов В. Н. Динамика аэрозолей. М.: Физматлит, 2010.
- 13. Пискунов В. Н. О кинетике коагуляции композитных частиц // ДАН. 1996. Т. 350, № 1. С. 70–73.
- 14. Пискунов В. Н., Голубев А. И., Гончаров Е. А., Исмаилова Н. А. Новая модель кинетики коагуляции композитных частиц // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 1996. Вып. 3. С. 12–30.
- 15. Maisels A, Kruis F. E., Fissan H. Direct simulation Monte Carlo for simultaneous nucleation, coagulation, and surface growth in dispersed systems // Chemical Engineering Science. 2004. Vol. 59. P. 2231 2239.

Статья поступила в редакцию 18.04.2012.

### К ВОПРОСУ О ПОВЫШЕНИИ ГАРАНТИЙ СОХРАННОСТИ ЯДЕРНЫХ МАТЕРИАЛОВ ПРИ ПЕРЕРАБОТКЕ ЯДЕРНОГО ТОПЛИВА

А. В. Анисин, А. А. Анищенко, И. А. Давыдов, П. В. Ермаков, С. С. Жихарев, К. В. Задорожный, К. В. Иванов, Н. М. Микийчук, Е. Е. Санталова, А. И. Сайфуллин

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Представлены обобщенная физическая и компьютерная модель, описывающая основные черты типового предприятия по переработке ядерных материалов. В качестве примера модели процесса переработки выбран так называемый PUREX-процесс. Представлены методики по измерениям количества ядерных материалов на типовом предприятии. Создана гибкая, расширяемая компьютерная модель, не требующая больших усилий для настройки на особенности конкретных предприятий. Реализованы дополнительные меры по защите и сохранности обрабатываемой информации в компьютерной модели предприятия. Разработан план тестирования созданной модели и проведено тестирование на макетных данных.

*Ключевые слова*: переработка ядерных материалов, учет ядерных материалов, компьютерная модель переработки ядерных материалов на предприятии.

Одной из важнейших практических задач ядерных государств является обеспечение надежных гарантий ядерных материалов (ЯМ) при переработке ядерного топлива. Это гарантии сохранности ядерных материалов в процессе технологии переработки ЯМ, постоянный мониторинг процесса, проведение отбора образцов из окружающей среды, реализация дополнительных мер, таких как политика сдерживания, надзор и выполнение требований системы Государственного учета и контроля ЯМ, изложенных в федеральных и отраслевых нормативных документах.

Гарантии должны обеспечиваться системой Государственного учета, контроля и физической защиты ЯМ, в рамках которых должны быть обеспечены:

- оперативное (в большинстве моментов незамедлительное) предоставление ядерной установкой объективной и полной информации по ядерным материалам в процессе их переработки;
  - мониторинг процесса переработки;
- автоматизация процесса учета ядерных материалов в ключевых точках ядерной установки и уменьшение влияния человеческого фактора при этом;

- аппаратурный контроль выхода ядерных материалов за пределы ядерной установки;
  - мониторинг окружающей среды;
- постоянные усилия по совершенствованию физической защиты ядерной установки;
- постоянная работа с персоналом ядерной установки в целях повышения гарантий сохранности ЯМ.

Одно из генеральных направлений повышения гарантий сохранности – компьютеризация ЯМ в процессе их обращения и переработки.

Представленный выше комплекс вопросов является общим для всех предприятий, имеющих в своем обращении ЯМ. В данной статье рассматривается в качестве конкретного примера предприятие по переработке ядерного топлива — типичная перерабатывающая установка, работа которой базируется на применяемом на многих действующих предприятиях PUREX процессе. Нет принципиальных отличий в подходе при рассмотрении других методов разделения, таких как СОЕХ, UREX или сухой, при рассмотрении других типов предприятий ядерно-топливного цикла.

Компьютеризация учета ЯМ в процессе их обращения требует с неизбежностью построения

компьютерной модели технологии переработки ядерного топлива, сопряженной с моделью учета ЯМ. Соответственно необходимы математическое описание основных процессов переработки, введение в программный комплекс характеристик и результатов конкретных измерений в ключевых точках измерений, обеспечение максимально точного и оперативного учета количества и изотопного состава ЯМ в целом на установке и в составных ее частях. Поскольку комплекс строится на сочетании учета потока массы и модели неопределенности измерений для типового перерабатывающего завода, предусматривается выявление аномалии в учете ЯМ. При этом программный комплекс должен обеспечить защиту и целостность обрабатываемой информации по обращению ЯМ. Естественно, модель должна быть гибкой, расширяемой и не требующей больших усилий для настройки на особенности конкретных предприятий.

При создании комплекса были учтены наработки по программному обеспечению, включающему датчики неразрушающего анализа в автоматизированных системах, по анализу работоспособности системы сбора информации в автоматизированных системах учета и контроля (СУиК), по обеспечению защиты информации.

### Краткое описание и математическая модель PUREX-процесса

Кратко опишем основные операции PUREX-процесса. Облученные топливные блоки растворяются в азотной кислоте. Полученный раствор содержит в основном растворимые нитраты урана-238 с малыми количествами нитратов урана-235, плутония и продуктов деления. Разделение урана, плутония и продуктов деления в PUREX-процессе осуществляется путем селективной экстракции определенного вида ионов органическим (30 % раствор трибутилфосфата в керосине) и водным растворителем. Для этого исходный раствор пропускают через ряд экстракционных колонн в которых производится отделение компонентов друг от друга (рис. 1).

У первого цикла экстракции две функции: отделение смеси Pu и U от продуктов деления и химических примесей и разделение Pu и U в индивидуальные потоки для дальнейшей обработки. Пер вый цикл состоит из экстракционных колонн 1A, 1B, 1С и дополнительного технологического оборудования (отстойники, сборники, приемники).

Плутоний, который был отделен от урана в первом цикле, в дальнейшем отделяется от остальных примесей и концентрируется во втором цикле селективной экстракции плутония. Этот цикл состоит из экстракционных колонн 2A, 2B, далее раствор передается для получения диоксида плутония.

Уран, из первого цикла экстракции передается на второй цикл селективной экстракции, где очищается от примесей в экстракционных колоннах 1D и 1E, и передается для получения UO<sub>2</sub>.

Математическая балансовая модель жидкостной экстракции, протекающей в экстракционных колоннах (см. рис. 1) 1A, 1B, 2A, 2B, 1C, 1D, 1E, в виде уравнений материального баланса для процессов жидкостной экстракции описана в работе [1]. Мы воспользовались уравнениями [1] применительно к процессу PUREX. Для простоты принято, что экстракция протекает не в потоковом, а в циклическом режиме, когда равновесные концентрации устанавливаются в некоторой гипотетической колонне при подаче в нее полных объемов исходного раствора, экстрагента, промывочной жидкости и др.

Для унификации введем одинаковое количество «потоков» реагентов для каждой колонны, равное 10. В понятие «поток» включены перемещаемые в установке объемы органической и водной фазы, а также объемы материала, которые невозможно изъять из колонн без остановки технологического процесса (так называемые закладки в оборудование). Используем индекс  $i = 0 \div 9$  для нумерации этих потоков в каждой из 7 колонн. При этом индексами  $i = 0 \div 4$  обозначим потоки органической фазы, индексами  $i = 5 \div 9$  – потоки водной фазы. Для всех колонн будем обозначать индексом i = 0 выходящий из колонны поток органической фазы, индексом i = 9 – выходящий поток водной фазы. Тогда в некий произвольный момент времени (в момент измерений) суммарная масса контролируемого материала (например, плутония) в каждой к-й колонне определяется как сумма контрольного материала во входящих «потоках» и закладках:

$$m_k^{\Sigma} = \sum_{i=1}^8 V_{i,k} \cdot C_{i,k},$$

где  $V_{i,k}$  — объем i-го потока,  $C_{i,k}$  — концентрация контролируемого материала в i-м потоке.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> При подготовке описания PUREX-процесса использованы материалы с <a href="http://www.osti.gov/bridge/servlets/purl/5220059-59qE14/5220059.pdf">http://www.osti.gov/bridge/servlets/purl/5220059-59qE14/5220059.pdf</a>

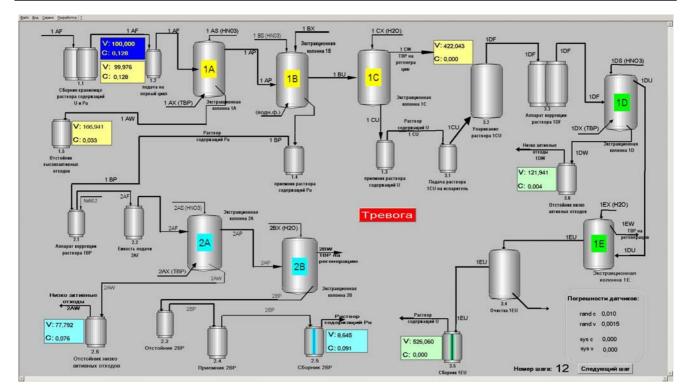


Рис. 1. Общая схема PUREX-процесса

Концентрация контролируемого материала в выходящем из k-й колонны потоке органической фазы определяется как

$$C_{0,k} = \frac{m_k^{\Sigma}}{\sum_{i=1}^{4} V_{i,k} + K_k \sum_{i=5}^{8} V_{i,k}}.$$

Концентрация контролируемого материала в выходящем из k-й колонны в потоке водной фазы определяется соответственно как

$$C_{9,k} = \frac{K_k m_k^{\Sigma}}{\sum_{i=1}^{4} V_{i,k} + K_k \sum_{i=5}^{8} V_{i,k}}.$$

В представленных соотношениях коэффициент  $K_k$  – есть коэффициент экстракции, определяемый как отношение средней концентрации компонента в водной фазе к средней концентрации компонента в органической фазе

$$K_k = \frac{[\mathbf{B}.\boldsymbol{\phi}.]}{[\mathsf{opr}.\boldsymbol{\phi}.]}.$$

Коэффициент экстракции есть сложная функция от геометрии колонны, конструкции распылителя, скоростей потока, температуры растворов и дру-

гих параметров. При использовании предлагаемой модели на конкретном предприятии необходимо получить и использовать в расчетах эмпирические значения и зависимости для коэффициентов экстракции в каждой из колонн. В наших расчетах иллюстративно использованы значения коэффициентов экстракции для каждой из экстракционных колонн, полученные в лабораторных измерениях и приведенные в работе [2].

Данная модель получает распределение одного компонента по всем объемам и потокам моделируемой установки. Для получения распределения всех делящихся и радиоактивных веществ в установке необходимо провести несколько расчетов со своими значениями исходных концентраций и коэффициентов экстракции.

### Программное обеспечение созданной компьютерной модели

Для создания компьютерной модели технологии переработки ядерного топлива и программного обеспечения (ПО) учета и контроля ядерных материалов нами были использованы следующие программные средства:

• MS Visual Studio 2008, язык программирования С++, применяемый для создания и редактирования программного кода;

- SCADA система GENESIS32 Version 9.01 GraphWorX32 Container для создания необходимых мнемосхем предприятия, отображающих процесс PUREX;
- OPCSimulator фирмы ICONICS, применяемый в качестве OPC-сервера для связи с датчиками;
- ядро системы учета и контроля ядерных материалов ACCORD-2005 [3].

Одним из принятых технических решений по использованию улучшенной технологии СУиК является использование приложения SCADA (Supervisory Control and Data Acquisition) и технологии ОРС. SCADA является одним из основных компонентов любой АСУТП, способным поставлять технологическую информацию. Технология ОРС позволяет обеспечить единый механизм доступа к первичным датчикам и исполнительным механизмам с верхнего программного уровня SCADA-системы. SCADA-система GENESIS-32 (Iconics) полностью поддерживает ОРС протокол. Таким образом, Genesis-32 — наиболее удачная для реализации верхнего программного уровня современной SCADA-системы платформа.

В своей работе для создания мнемосхемы перерабатывающего предприятия и визуализации процессов нами был использован компонент Genesis-а GraphWorX32. Это многопоточное 32-разрядное приложение, обеспечивающее возможность обмена данными с любыми серверами ОРС, предоставляющее инструменты для создания экранных форм и динамических элементов отображения, и другие преимущества.

СУиК ЯМ АССОRD-2005 создана на основе трехуровневой архитектуры. Первый уровень — база данных, обеспечивающая хранение информации, средний уровень отвечает за логику выполнения операций и последний — уровень пользовательского интерфейса. Программное обеспечение первых двух уровней выполняется на серверах, а рабочие станции имеют только программное обеспечение, реализующее интерфейс пользователя. Такое деление на уровни обеспечивает лучшую производительность и масштабируемость программного обеспечения, облегчает его сопровождение и поддержку.

В качестве базовой технологии, обеспечивающей взаимодействие компонентов системы, была использована технология DCOM компании Microsoft. Эта технология обладает многими достоинствами:

- объектной ориентированностью;
- тесной интеграцией с операционной системой;
- масштабируемостью;
- легкой настраиваемостью и др.

Ядро ACCORD-2005 представляет собой распределенный программный комплекс, состоящий из следующих компонентов:

- базы данных, работающей под управлением СУБД MS SQL Server 2000;
  - сервера бизнес-логики;
- клиентских приложений с графическим интерфейсом пользователя.

На рис. 2 представлена схема взаимодействия компонентов СУиК ACCORD-2005.

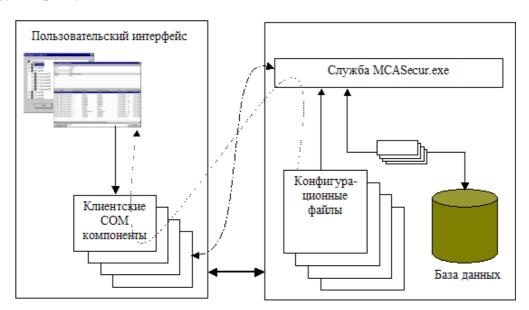


Рис. 2. Схема взаимодействия компонентов СУиК ACCORD-2005

Вся работа с базой данных осуществляется на сервере. Клиентское приложение, установленное на АРМ пользователя, прямого доступа к базе данных не имеет. Доступ к информации в БД производится службой mcasecur.exe. Информация, извлеченная из БД, форматируется сервером бизнес-логики в соответствии с описаниями объектов учета, которые хранятся на сервере в виде набора конфигурационных файлов. Та же служба mcasecur.exe предоставляет по запросам клиентов информацию о доступных пользователям операциях и о параметрах, необходимых для выполнения каждой операции. Эта информация также хранится на сервере в виде конфигурационных файлов. Компоненты пользовательского интерфейса могут наглядно представить информацию об операции пользователю, принять от него данные и инициировать выполнение операции. Фильтры предназначены для извлечения информации из БД по некоторому набору условий.

Специфика фильтров состоит в том, что иногда результатом работы фильтра является весьма большой объем выходной информации. Поэтому требуется особое внимание при решении вопросов эффективной передачи этой информации по сети. Описания фильтров и условий, по которым производится отбор для каждого фильтра, тоже хранятся на сервере в виде конфигурационных файлов и предоставляются по запросам клиентов все той же службой mcasecur.exe. Хранение информации о всевозможных объектах системы в простых текстовых файлах позволяет легко вносить существенные изменения в работу системы путем простого их редактирования.

В процессе разработки ПО:

- спроектирована структурная схема подсистемы учета и контроля ЯМ;
- запрограммирована математическая модель техпроцесса PUREX;
  - запрограммированы модели датчиков;
- создан визуализатор процесса PUREX (на базе Genesis-32);
- разработаны блоки формирования входных данных и сравнения измеряемых параметров;
- разработан протокол инициализации сетевого обмена и модуль интеграции компонентов подсистемы;
- разработан ряд новых операций, повышающих функциональность СУиК ACCORD-2005.

Посредством языка программирования Руthon были написаны операции: «Постановка контейнеров на учет», «Редактирование контейнера», «Перемещение контейнера», «Создание материала в контейнерах», «Создание материала на месте» и другие для связи СУиК ACCORD-2005 с математической моделью перерабатывающего предприятия.

Добавленная в СУиК ЯМ АССОRD-2005 операция «Создание материала на месте» создает соответствующий материал и вызывает программный модуль, формирующий все необходимые входные данные для модели PUREX. Этот программный модуль получает из разных источников информацию о материалах, содержащих ЯМ, и о материалах, не содержащих ЯМ. Данные о загружаемых материалах, содержащих ЯМ, передаются из системы АССОRD через параметры запуска программного модуля.

Данные о материалах, не содержащих ЯМ, считываются из файла. Формирователь данных отправляет полученные данные по технологии DCOM в соответствующие тэги (array\_fact и array\_contr) OPC-сервера, который расположен на другом компьютере. На диаграмме блоки данных OPC-сервера представлены серыми цилиндрами. Физически они расположены на одном компьютере.

Исполняемый модуль SENSOR.exe моделирует данные, приходящие с датчиков на реальном производстве. SENSOR.EXE запускается по сигналу от формы, визуализирующей технологический процесс PUREX предприятия. Из этого модуля выходят две группы данных: истинные значения параметров PUREX, которые необходимы для расчета следующего шага, и соответствующие значения параметров с наложенными на них погрешностями датчиков, которые передаются в соответствующий блок данных OPC-сервера.

После этого через триггер синхронизации автоматически запускается программный модуль MODEL.EXE. Имея полное представление о текущем состоянии установки в текущий момент, он сравнивает параметры установки с соответствующими измерениями датчиков. Для параметров установки, вышедших за пределы установленных порогов, формируются сигналы (указатели) «тревоги». Пороги срабатывания MODEL.EXE получает из конфигурационных файлов. Диаграмма компонентов разработанной системы представлена на рис. 3.

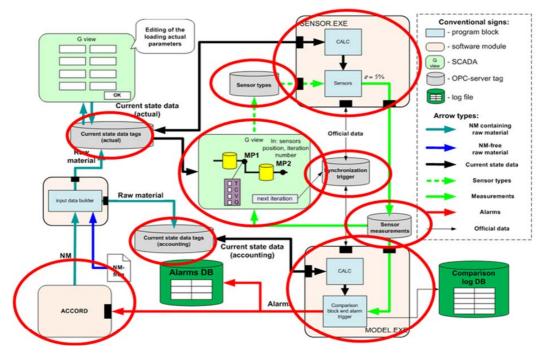


Рис. 3. Диаграмма компонентов разработанной системы

### Методы и средства измерения, рекомендованные в результате экспертных оценок

В результате проведенного экспертами ОАО «СХК» и ФГУП ПО «МАЯК» анализа имеющихся отечественных средств и методов измерений, для применения в разработанной компьютерной модели были предложены следующие:

- для измерения концентрации U и PU в растворах (гамма-абсорбционометрические, спектрофотометрические, кулонометрические, гравиметрические, рентгенофлуоресцентные, потенциометрические);
- для измерения объемов растворов в емкостях (сигнализаторы уровня, датчики-реле уровня, ультразвуковые и радиоволновые датчики уровня);
- для измерения температуры растворов (термопреобразователи различных типов);
- для измерения накоплений (спектрометрические приборы и комплексы, радиационные мониторы);

для контроля содержания ЯМ в сбросных растворах (ICP-масс-спектрометрия).

### Разработка программного обеспечения, предназначенного для обеспечения безопасности информации

Поскольку информация, циркулирующая в системах учета и контроля ЯМ и связанных с ними

системах, как правило, является конфиденциальной, вопросы безопасности информации имеют существенное значение. Созданная модель представляет собой распределенную систему взаимосвязанных программных приложений. Защищены от несанкционированного доступа хранимые в базах данных (БД) и циркулирующие между приложениями данные. Рассматривались три основных аспекта защиты ([3]):

- идентификация и аутентификация пользователя при входе в систему;
- разграничение прав доступа субъектов к данным:
  - аудит событий доступа.

Были разработаны требования по защите данных в модели, приняты основные архитектурные решения, выбраны методы их реализации. Разработано соответствующее ПО, завершена разработка подсистемы обеспечения целостности файлов и ключей реестра, входящих в состав системы. Проведены комплексная отладка и тестирование разработанных средств.

Встраиваемая в модель подсистема управления доступом осуществляет распознавание субъектов доступа и подтверждение их подлинности при входе в систему и всех обращениях к защищаемым объектам учета, а также выполняет разграничение доступа в соответствии с заданными правилами. Для проверки подлинности субъекта используется протокол Kerberos. Вместо динамической библиотеки Windows gina.dll разработана

своя динамическая библиотека, которая запрашивает у пользователя пароль на этапе начального входа в систему и запускает на исполнение одно из приложений модели. В модели предусматривается дискреционная защита, реализуемая с помощью масок доступа. Каждый пользователь может быть включен в одну или несколько групп. Доступ пользователя к объекту разрешен, если хотя бы одна группа, к которой принадлежит пользователь, содержится в списке групп, допущенных к данному объекту. Доступ пользователя к объекту запрещен, если ни одна из групп, к которой принадлежит пользователь, не содержится в списке групп, допущенных к данному объекту. Разрабатываемая в рамках модели подсистема регистрации и учета предназначена для выполнения:

- регистрации и учета изменений, защищаемых объектов;
  - аудита событий безопасности.

Все транзакции, изменяющие защищаемые объекты, записываются в специальную таблицу БД. Каждая такая запись содержит информацию о субъекте, компьютере и времени изменения. Сохраняется вся история изменений защищаемых объектов и при этом состояние БД может быть восстановлено на любой момент времени.

При проверке прав субъектов на доступ к объектам (таблицам БД, полям, записям) используются как дискреционный, так и мандатный методы доступа.

Осуществляется контроль доступа субъектов к объектам БД (файлам, таблицам, индексам, записям, полям записей, схемам, процедурам и т. п.) в соответствии с матрицей доступа по операциям выборки, модификации, вставки, удаления и т. п. Осуществляется также мандатный принцип управления доступом, при котором каждому субъекту и объекту устанавливается двойной атрибут. Первая часть атрибута — степень конфиденциальности, вторая — тематическая категория.

Доступ к объектам, имеющим дискреционную и мандатную защиту, должен быть санкционирован ими обеими. Доступ к объекту по чтению разрешен в том случае, если разрешен доступ дискреционной защитой и разрешен доступ по чтению мандатной защитой; доступ к объекту по записи разрешен в том случае, если разрешен доступ дискреционной защитой и разрешен доступ по записи мандатной защитой.

В отчетный период разработан специальный сервис (служба Windows), входящий в состав разрабатываемого ПО, который обеспечивает доступ

к информации в БД (расположенной на отдельном сервере БД) с соблюдением вышеперечисленных правил разграничения доступа.

Разработано ПО, обеспечивающее аудит (регистрацию событий по доступу субъектов к объектам системы). Степень конфиденциальности информации и наличие пользователей с разными правами требуют регистрировать следующие события:

- вход пользователей в операционную систему и выход из нее, а также события загрузки операционной системы и ее программного останова. В параметрах регистрации содержатся: время и дата события; результат попытки входа/останова;
- успешная или неуспешная, несанкционирован-ная; предъявленный идентификатор пользователя;
- вход(выход) пользователя в(из) программное приложение, а также загрузка и останов программного приложения;
- запуск(завершение) всех программ и процессов;
- доступ пользователей к объектам базы данных (СУБД, таблицам, индексам, записям и т. п.).

Ядром разработанной подсистемы контроля целостности является *программа контроля целостности*. Она «запоминает» текущее состояние выбранных файлов, значений ключей реестра и проверяет их целостность. Результаты проверок записываются в системный журнал аудита.

После комплексной отладки и тестирования средств безопасности информации была составлена программа и методика их испытаний по защите информации в системе.

Испытания включали проверки по следующим пунктам:

- транспортная инфраструктура;
- подсистема регистрации сообщений;
- физическая и логическая целостность БД;
- подсистема идентификации и аутентификации пользователей;
  - целостность системы;
  - компоненты управления доступом;
  - подсистема разграничения доступа.

В соответствии с этим, тесты были разбиты на группы, которые можно выполнять независимо друг от друга. Тестирование выполнялось на макете сети СУиК после установки на компьютеры этой сети базового и прикладного ПО системы. Для тестирования использовалась база данных, содержащая тестовые данные. Результаты испытаний оказались успешными.

#### Заключительный этап исследований

Заключительный этап исследований предусматривал, после заполнения исходной информации и отладки системы, проведение расчетов при работе установки в штатном режиме. Необходимо было убедиться, что созданный интерфейс создает удобные условия исследования технологического цикла функционирования установки, обеспечивает прозрачный режим мониторинга работы установки и ее составных частей, обеспечивает сквозной процесс учета и контроля перерабатываемых в установке ЯМ – все это, при необходимости, в режиме реального времени. Для удобства исследований, как говорилось ранее, был выбран циклический режим работы установки. Данный этап был успешно пройден. Зафиксирована ожидаемая производительность переработки ЯМ и ожидаемая погрешность нарабатываемых масс PU и U, в рамках допустимого интервала, определенного установленной дисперсией измеряемых датчиками величин.

Следующий этап исследований — расчет сценариев утраты (хищения) ЯМ из различных потоков системы. Моделировались примеры хищения из емкостей накопителей растворов в промежуточных емкостях, когда предполагается срабатывание двух и более датчиков. Рассмотрены два вида хищений: 1) хищение с разбавлением раствора до исходного объема (хищение концентрации); 2) хищение объема без последующего разбавления (хищение объема). Рассматривались варианты хищений на разных циклах переработки, разовые хищения и непрерывные в малых количествах,

при нулевой и ненулевой дисперсиях показаний датчиков.

Исходные данные по объемам и начальным концентрациям в потоках растворов подготовлены на основании информации, представленной в работе [4].

По умолчанию моделируется наличие датчиков объема и концентрации на каждом из рассчитываемых потоков. При расчетах балансов использовались только показания датчиков, установленных на входных и выходных потоках (для каждого сегмента и в целом).

В качестве иллюстрации приведены диаграммы баланса Ри в процессе его наработки (на каждом цикле система обрабатывает растворы, содержащие 12,8 г Ри)

При расчете предыдущего сценария с указанными значениями дисперсии при пороге срабатывания тревоги 3 тревожный сигнал система выдала при хищении 15 % концентрации ДМ из потока 1ВР. Что дает более чувствительный вариант системы регистрации? Используем для контроля концентрации гамма-абсорбциометр многоканальный ГАМ-2 с погрешностью измерений 1 %, для контроля объемов используем радарный уровнемер (радиоволновый) РДУ1 с погрешностью измерений 0,15 %. На рис. 5 представлен результат расчета балансов в сценарии однократного хищения 7 % концентрации ДМ на 10-м цикле из потока 1ВР.

Тревожный сигнал «Тревога» при пороге срабатывания тревоги 3 обыл выдан на шаге 11 и 12, что нашло также отражение на схеме установки (рис. 6).

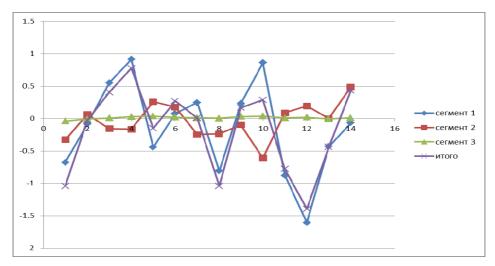


Рис. 4. Баланс массы Рu (граммы) по сегментам процесса при дисперсии датчиков, равной 5 % по концентрации и 2 % по объему, при хищении 10 % концентрации Рu на 10-м цикле и 15 % концентрации Pu на 11-м цикле

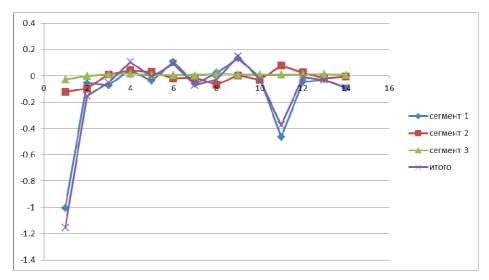


Рис. 5. Баланс ДМ (граммы) по сегментам процесса при дисперсии датчиков, равной 1 % по концентрации и 0,15 % по объему, при хищении 7 % концентрации Рu на 10-м цикле

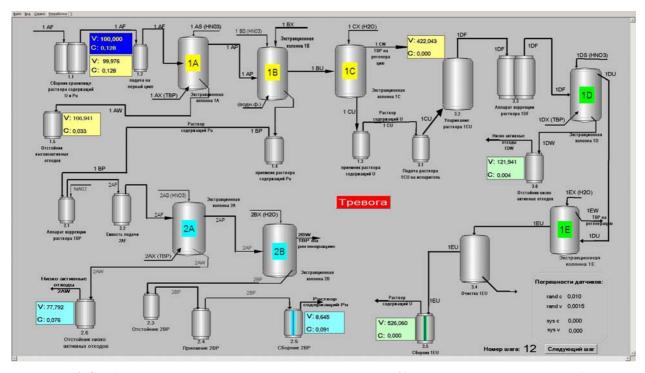


Рис. 6. Срабатывание сигнала тревоги в сценарии хищения 7 % концентрации ДМ из потока 1ВР

Из сравнения проведенных расчетов видно, что использование более чувствительных датчиков измерения концентрации и объема раствора позволило обнаруживать хищения порядка 400 мг ДМ за один цикл работы установки.

Представленная компьютерная модель, помимо численных исследований моделей аварийных ситуаций, позволяет в цифрах определить влияние точности измерений датчиков на конечную погрешность инвентаризационной разницы и ее среднеквадратичную (стандартную) погрешность

конкретного вида ЯМ за межбалансовый период. Можно также исследовать, в свою очередь, каким должен быть этот период, чтобы погрешность инвентаризационной разницы не выходила за разрешенные пределы.

### Заключение

Разработана компьютерная модель предприятия, перерабатывающего ядерное топливо. Модель описывает основные элементы технологии

переработки ядерного топлива и как составную часть содержит модель учета ЯМ в ключевых точках измерений. Рассмотрение проведено на формализованной математической модели PUREX процесса. Путем экспертных оценок выбрано передовое современное оборудование для проведения измерений на перераб атывающем предприятии и для детектирования окружающей среды. На базе построенной математической модели и ядра ACCORD-2005 создана основа модели учета ЯМ предприятия, предусматривающая использование передовых технологий в области учетных измерений. Разработанная математическая модель дополнена программным обеспечением, эмулирующим работу измерительных приборов. В итоге создано сопряженное с СУиК программное обеспечение, поддерживающее мониторинг показаний измерительных датчиков. Компьютерная модель обеспечивает защиту и целостность циркулирующей в сети информации.

Разработан набор сценариев, по которым проведено тестирование модели.

Система моделирует обнаружение различных типов утрат (хищений) и сигнализирует об этом, исходя из заданных значений возможных пороговых значений и параметров имеющегося измерительного оборудования. Она может быть использована в качестве основы для расширения возможностей учета ЯМ реального перерабатывающего предприятия и существенно повысить сохранность ЯМ. Такая система будет полезна на реальном предприятии, где вместо эмуляторов датчиков будет использоваться реальное оборудование. Разработанное ПО легко адаптировать для любого предприятия, в основе которого лежит модель процесса PUREX. Для этого нужно:

- настроить ACCORD-2005 на конкретное предприятие (изменить структуру мест и словари

посредством интерфейса пользователя, а также конфигурационные файлы),

- настроить мнемосхемы SCADA-системы,
- разработать модуль сопряжения с используемыми на предприятии конкретными датчиками.

Более того, использование в составе разработанного макета SCADA-системы и широкие возможности настройки ACCORD-2005 позволяют в короткие сроки модифицировать разработанную компьютерную модель и для других типов предприятий, в том числе для обогатительных. Для этого потребуется дополнительно построить мнемосхемы и разработать математическую модель.

Описанная модель разработана в рамках проекта МНТЦ. В работе принимали участие специалисты ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", ОАО "СХК", ФГУП "ПО "МАЯК".

### Список литературы

- 1. Дытнерский Ю. И. Процессы и аппараты химической технологии. Часть 2. Массообменные процессы и аппараты. М.: Химия, 1995.
- 2. Вайгель Ф., Кац Дж., Сиборг Г. и др. Химия актиноидов. В 3 т. Т. 2. М.: Мир, 1997.
- 3. Анищенко А. А., Иванов К. В. Разграничение доступа в автоматизированных системах учета и контроля ядерных материалов // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2008. Вып. 2. С. 66–70.
- 4. Purex process flowsheet NO. 3 in terms of pilot plant flows. by D. O. Darby. United States atomic energy commission. Technical Information Service. Oak Ridge, Tennesee. 1951.

Статья поступила в редакцию 24.05.2012.

### РЕШЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ДВУХОБЛАСТНОЙ ЗАДАЧИ МИЛНА В ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА НЕЙТРОНОВ

### Н. Б. Бабичев, П. С. Бондарев

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188 г. Саров Нижегородской обл.

Найдена функция распределения нейтронов в системе из двух полубесконечных однородных сред с плоской границей раздела.

*Ключевые слова*: Нейтронная кинетика, уравнения переноса, плотность нейтронов, функция распределения частиц, собственные значения.

#### Введение

В работе [1] рассмотрена нестационарная задача Милна с двумя средами, хотя бы одна из которых размножает нейтроны, и приведены итоговые формулы (их вывод сделан в работе [2]) для расчёта зависимости нейтронной плотности от координаты и времени. В работах [1, 2] речь шла только о надкритических системах, содержащих делящиеся материалы. Результаты этих работах ниже обобщены на случай двухобластных систем, состоящих из произвольных веществ, и найдена функция распределения нейтронов.

### 1. Постановка задачи и классификация возможных типов решений

Будем решать задачу о распределении частиц в бесконечном пространстве, заполненном двумя разными по своим свойствам однородными средами, которые разделены плоской границей (см. рисунок).

Граница раздела сред

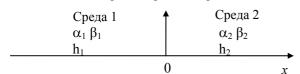


Схема плоской геометрии двухобластной задачи Милна

Примем использованные в работах [1, 2] следующие упрощающие предположения: считается,

что ядра неподвижны, все нейтроны имеют одинаковую по величине скорость V; индикатриса упругого рассеяния нейтронов изотропна; влияние неупругих процессов пренебрежимо мало. Тогда исходные нестационарные кинетические уравнения для каждого вещества имеют следующий вид:

$$\frac{1}{V} \frac{\partial \psi_{i}(t, x, \mu)}{\partial t} + \mu \frac{\partial \psi_{i}(t, x, \mu)}{\partial x} + \alpha_{i} \psi_{i}(t, x, \mu) = 
= \frac{\beta_{i}}{2} n_{i}(t, x), \quad i = 1, 2.$$
(1)

Здесь  $\psi_i(t,x,\mu)$  — функция распределения частиц;  $n_i(t,x) = \int_{-1}^1 \psi_i(t,x,\mu) d\mu \quad - \quad \text{плотность} \quad \text{нейтронов};$ 

 $\alpha_i$  — обратная величина среднего свободного пробега в i -м веществе,  $\beta_i$  — среднее число вторичных нейтронов на единицу длины пути. В общем виде для параметров  $\alpha$  и  $\beta$  справедливы формулы

$$\alpha = n_{nucl} \sum_{j} \varphi_{j} \left( \sigma_{sj} + \sigma_{fj} + \sigma_{cj} \right),$$
$$\beta = n_{nucl} \sum_{j} \varphi_{j} \left( \sigma_{sj} + v_{j} \sigma_{fj} \right),$$

где  $n_{nucl}$  — плотность ядер,  $\phi_j$  — концентрация ядер j-го сорта по частицам;  $\sigma_{cj}$ ,  $\sigma_{fj}$ ,  $\sigma_{sj}$  — сечения захвата нейтронов, деления ядер и упругого рассеяния;  $\nu_j$  — среднее количество вторичных нейтронов, испускаемых в одном акте деления ядра j-го сорта. Величина  $h = \beta/\alpha$  называется ак-

тивностью среды. В случаях инертной среды, размножающей и поглощающей нейтроны сред, h = 1, h > 1, h < 1 соответственно.

Уравнения вида (1) надо решать совместно с граничным условием

$$\psi_1(0,\mu) = \psi_2(0,\mu).$$
 (2)

Начальное условие можно задать произвольным образом, так как известно (см. [6]), что независимо от начального условия функция распределения оптически толстой системы при отсутствии источников выйдет на экспоненциальный (равновесный) закон с независящим от времени пространственным распределением нейтронов

$$\psi_i(t, x, \mu) \sim \exp(\lambda t) \psi_i(x, \mu),$$
 (3)

где  $\lambda$  — постоянная размножения нейтронов в системе. В случае двухобластной задачи Милна  $\lambda = \max\left\{\lambda_{1\infty}, \lambda_{2\infty}\right\}$ , где  $\lambda_{j\infty} = \left(\beta_j - \alpha_j\right)V$ , j = 1, 2. Для определенности предположим, что  $\lambda_{1\infty} > \lambda_{2\infty}$ . Тогда  $\lambda = \lambda_{1\infty} = \left(\beta_1 - \alpha_1\right)V$ . Подставим функции распределения (3) в систему (1) с заменой в первом уравнении

$$x = \frac{z_1}{\alpha_1 + (\lambda/V)} = \frac{z_1}{\beta_1},\tag{4}$$

во втором -

$$x = \frac{z_2}{\alpha_2 + (\lambda/V)} = \frac{z_2}{\alpha_2 - \alpha_1 + \beta_1}.$$
 (5)

Тогда имеем

$$\mu \frac{\partial \psi_{1}(z_{1}, \mu)}{\partial z_{1}} + \psi_{1}(z_{1}, \mu) = \frac{H_{1}}{2} n_{1}(z_{1}),$$

$$\mu \frac{\partial \psi_{2}(z_{2}, \mu)}{\partial z_{2}} + \psi_{2}(z_{2}, \mu) = \frac{H_{2}}{2} n_{2}(z_{2}),$$
(6)

где

$$H_1 = 1,$$

$$H_2 = \frac{\beta_2}{\alpha_2 - \alpha_1 + \beta_1}.$$
 (7)

В уравнениях системы (6)  $z_1$  и  $z_2$  — новые безразмерные переменные, которые в дальнейшем будем обозначать просто z.

Покажем, что при любых параметрах  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_2$  значение  $H_2$  не больше единицы при условии, что  $\lambda_{\infty 1} \geq \lambda_{\infty 2}$ . Преобразуем выражение (7) к виду

$$H_2 = \frac{h_2}{1 + (h_1 - 1)\alpha_1/\alpha_2} = \frac{h_2}{1 + (h_2 - 1)\lambda_{\infty 1}/\lambda_{\infty 2}}.$$

Если  $\lambda_{\infty 1} > 0$ , то возможны следующие три варианта:

1) обе среды размножают нейтроны  $\left(\lambda_{\infty 1} \geq \lambda_{\infty 2} > 0\right)$ 

$$H_2 \le \frac{h_2}{1 + (h_2 - 1)} = 1;$$

2) среда 2 является поглотителем ( $h_2 < 1$ ), тогда  $\lambda_{\infty 1}/\lambda_{\infty 2} < 0$  и

$$\frac{\lambda_{\infty 1}}{\lambda_{\infty 2}}(h_2 - 1) > 0, \quad H_2 = \frac{h_2}{1 + (h_2 - 1)\lambda_{\infty 1}/\lambda_{\infty 2}} < h_2 < 1;$$

3) среда 2 — инертное вещество  $(h_2 = 1)$  и

$$H_2 = \frac{1}{1 + (h_1 - 1)\alpha_1 / \alpha_2} < 1.$$

Если же обе среды поглощают нейтроны  $(\lambda_{\infty 1} < 0)$  и  $\lambda_{\infty 2} < 0)$ , то

$$\frac{\lambda_{\infty 1}}{\lambda_{\infty 2}} (h_2 - 1) \ge (h_2 - 1),$$

$$H_2 = \frac{h_2}{1 + (h_2 - 1)\lambda_{\infty 1}/\lambda_{\infty 2}} \le \frac{h_2}{1 + (h_2 - 1)} = 1.$$

Таким образом, нестационарная задача двух сред свелась к стационарной задаче в безразмерном z-пространстве для веществ с параметрами  $H_1 = 1$  (инертная среда),  $H_2 < 1$  (поглотитель нейтронов).

### 2. Пространственно-угловое распределение нейтронов (функция распределения). Векторные потоки

В общем виде решение уравнения

$$\mu \frac{\partial \psi(z, \mu)}{\partial z} + \psi(z, \mu) = \frac{h(z)}{2} n(z), \quad (8)$$

где h(z) и n(z) – известные функции, имеет вид

$$\psi(z,\mu) = \psi(a,\mu) \exp(-(z-a)/\mu) + \frac{1}{2\mu} \int_{z}^{z} h(z') n(z') \exp((z'-z)/\mu) dz'.$$
 (9)

Константа a — координата некоторой точки в z-пространстве, которую нужно выбирать так, чтобы выполнялось неравенство  $(z-a)/\mu > 0$ . Следует отметить необходимость того, чтобы n(z) и  $\psi(z,\mu)$  были согласованы:

$$\int_{-1}^{1} \psi(a,\mu) d\mu = n(a).$$

Физический смысл выражения (9) заключается в следующем:

— первое слагаемое — произведение прошедших через плоскость x=a частиц  $\psi(a,\mu)$  на множитель  $\exp(-(z-a)/\mu)$ , учитывающий ослабление потока нейтронов в результате взаимодействия с ядрами среды;

— второе слагаемое — возникновение новых нейтронов в слое между z и a с учетом ослабляющего множителя  $\exp\left(\left(z'-z\right)/\mu\right)$ , где  $a \le z' \le z$ .

Рассмотрим частный случай уравнения (8), когда все пространство заполнено двумя однородными веществами, разделенными плоской границей

$$h(z) = \begin{cases} h_1, z < 0, \\ h_2, z > 0. \end{cases}$$

В этом случае удобно выбрать a = 0 для  $z\mu > 0$  и  $a = \pm \infty$  для  $z\mu < 0$ . Согласно формуле (9), для функции распределения получаем:

1) 
$$z\mu > 0$$
:

$$\psi(z,\mu) = \begin{cases}
\psi(0,\mu)\exp(-z/\mu) - \frac{h_1}{2\mu} \int_{z}^{0} n_1(z')\exp((z'-z)/\mu)dz', z < 0, \\
\psi(0,\mu)\exp(-z/\mu) + \frac{h_2}{2\mu} \int_{0}^{z} n_2(z')\exp((z'-z)/\mu)dz', z > 0;
\end{cases}$$
(10)

2) 
$$z\mu < 0$$
.

Так как  $\psi(-\infty, \mu > 0) = 0$  и  $\psi(\infty, \mu < 0) = 0$ , то

$$\psi(z,\mu) = \begin{cases}
\frac{h_1}{2\mu} \int_{-\infty}^{z} n_1(z') \exp((z'-z)/\mu) dz', z < 0, \\
-\frac{h_2}{2\mu} \int_{z}^{\infty} n_2(z') \exp((z'-z)/\mu) dz', z > 0.
\end{cases}$$
(1)

Чтобы найти решение системы (6), подставим плотность нейтронов из [2] в виде (20) и (21) в выражения (10) и (11), в которых заменим  $h_{\rm l}$  на единицу, а  $h_{\rm 2}$  на  $H_{\rm 2}$ . После несложных преобразований для функции распределения  $\psi(z,\mu)$  будем иметь:

$$\psi_{1}(z<0,\mu) = \begin{cases} -\frac{B}{2} \left[z - \mu - z_{0} + (\mu + z_{0}) \exp(-z/\mu)\right] + \\ +\frac{B}{2\mu} \int_{z}^{0} \varepsilon_{1}(z') \exp((z'-z)/\mu) dz' + \psi_{-}(|\mu|) \exp(-z/\mu), & \mu < 0, \\ -\frac{B}{2} \left[z - \mu - z_{0}\right] - \frac{B}{2\mu} \int_{-\infty}^{z} \varepsilon_{1}(z') \exp((z'-z)/\mu) dz', & \mu > 0, \end{cases}$$

$$\psi_{2}(z>0,\mu) = \begin{cases}
\frac{BH_{2}}{2} \left[ \frac{A}{1-K_{2}\mu} (\exp(-K_{2}z) - \exp(-z/\mu)) \right] + \\
+ \frac{BH_{2}}{2\mu} \int_{0}^{z} \varepsilon_{2}(z') \exp((z'-z)/\mu) dz' + \psi_{+}(\mu) \exp(-z/\mu) \mu > 0, \\
\frac{BH_{2}}{2} \left[ \frac{A \exp(-K_{2}z)}{1-K_{2}\mu} \right] - \frac{BH_{2}}{2\mu} \int_{z}^{\infty} \varepsilon_{2}(z') \exp((z'-z)/\mu) dz', \quad \mu < 0.
\end{cases}$$

Формулы (12), (13) удобны для анализа особенностей пространственно-угловых распределений. Например, из выражения (12) следует, что при  $z \to -\infty$  угловое распределение становится изотропным.

Векторные потоки (односторонние и полный) по определению равны

$$J_{+}(z) = V \int_{0}^{1} \mu \psi(z, \mu) d\mu,$$

$$J_{-}(z) = V \int_{-1}^{0} \mu \psi(z, \mu) d\mu;$$

$$J(z) = J_{+}(z) + J_{-}(z).$$
(14)

После подстановки функции распределения  $\psi(z,\mu)$  в виде (10) и (11) в выражения (14) и несложных математических преобразований получаем:

1) 
$$z > 0$$

$$J_{+}(z) = V \int_{0}^{1} \mu \psi_{+}(\mu) e^{-\frac{z}{\mu}} d\mu + \frac{V h_{2}}{2} \int_{0}^{z} E_{2}(|z'-z|) n_{2}(z') dz';$$
(15)

$$J_{-}(z) = -\frac{Vh_{2}}{2} \int_{z}^{\infty} E_{2}(|z'-z|) n_{2}(z') dz'.$$
 (16)

2) 
$$z < 0$$
:

$$J_{+}(z) = \frac{Vh_{1}}{2} \int_{0}^{z} E_{2}(|z'-z|) n_{1}(z') dz'; \qquad (17)$$

$$J_{-}(z) = -V \int_{0}^{1} \mu \psi_{-}(\mu) e^{-\frac{|z|}{\mu}} d\mu - \frac{V h_{1}}{2} \int_{z}^{0} E_{2}(|z'-z|) n_{1}(z') dz'.$$
(18)

В формулах (15)–(18) функция  $E_2$  – интегральная экспонента, определенная следующим образом

$$E_l(z) = \int_{1}^{\infty} \frac{e^{-zu}}{u^l} du = \int_{0}^{1} \mu^{l-2} e^{-\frac{z}{\mu}} d\mu.$$

Отметим, если для вычислений использовать формулы (15)–(18), то необходимо, чтобы функции  $\psi_+$ ,  $\psi_-$ ,  $n_1$  и  $n_2$  были нормированы согласо-

27

ванно (например,  $n_1(0) = n_2(0) = 1$  и  $\psi_+(0) = \frac{h_1}{2}$ ,  $\psi_-(0) = \frac{h_2}{2}$ ).

#### Заключение

В данной статье найдены функции распределения нейтронов в системах, соответствующих геометрии двухобластной задачи Милна. Задачу аналитически решить удалось, приняв односкоростное приближение. Известно, что точные аналитические решения кинетического уравнения для нейтронов можно получить только при использовании физических упрощений. Зато аналитические решения позволяют достаточно просто изучать процессы нейтронной кинетики и дают возможность проводить верификацию математических методик решения кинетического уравнения.

Отметим, что в зависимости от ядернофизичеких свойств веществ, заполняющих пространство, получаются следующие типы решений двухобластной задачи Милна:

- в случае, когда хотя бы одна из двух полубесконечных сред размножает нейтроны, справедливо только нестационарное решение;
- если обе среды поглощают нейтроны, то возможны следующие два типа решений:
- нестационарное решение, полученное в дан-ной работе;
- известное (см., например, [3–5]) стационарное решение задачи Милна с заданным в бесконечно удаленной точке потоком;
- в том случае, когда одна среда инертна, а вторая тоже инертна либо поглощает нейтроны, нестационарное решение переходит в стационарное.

### Список литературы

- 1. Бабичев Н. Б., Бондарев П. С., Незнамов В. П. Теория подобия в нейтронной кинетике и ее использование для решения прикладных задач РФЯЦ-ВНИИЭФ // УФН. 2011. Т. 181. Вып. 9. С. 953–963.
- 2. Бондарев П. С. Решение общей задачи Милна с двумя средами, хотя бы одна из которых размножает нейтроны // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2011. Вып. 1–2. С. 70–76.

- 3. Романов Ю. А. Точные решения односкоростного кинетического уравнения и их использование для расчета диффузионных задач (усовершенствованный диффузионный метод) // Исследования критических параметров реакторных систем / Науч. ред. П. А. Гаврилов. М.: Госатомиздат, 1960.
- 4. Davison B. Neutron Transport Theory. Oxford: Clarendon Press, 1957 [Дэвисон Б. Теория переноса нейтронов. М.: Атомиздат, 1960].
- 5. Case K. M., Zweifel P. F. Linear Transport Theory. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publ. Co., 1967 [Кейз К., Цвайфель П. Линейная теория переноса. М.: Мир, 1972].

### Приложение

### Пространственная зависимость нейтронной плотности

В работе [2] методом Винера—Хопфа для системы стационарных уравнений (16) с параметрами  $H_1 = 1$ ,  $H_2 < 1$  найдено угловое распределение частиц на границе раздела сред и получена зависимость плотности нейтронов от координаты.

Пусть  $\psi_+(\mu)$  – угловое распределение частиц, падающих из среды 1 в среду 2;  $\psi_-(|\mu|)$  – угловое распределение частиц, выходящих из среды 2 и попадающих в среду 1. Тогда, согласно [2], для углового распределения на границе и плотности нейтронов в *z*-пространстве имеем:

$$\psi_{+}(\mu) = \frac{\xi(\mu)}{2}; 
\psi_{-}(\mu) = \frac{H_{2}}{2\xi(\mu)},$$
(19)

$$n_1(z) = B \left[ -z + z_0 - \varepsilon_1(z) \right], z < 0, \tag{20}$$

$$n_2(z) = B \left[ A \exp(-K_2 z) + \varepsilon_2(z) \right], z > 0,$$
 (21)

где 
$$B = \sqrt{3(1-H_2)} - \text{нормировочная константа } \left(n(0) = \int_{0}^{1} \left[\psi_{+}(\mu) + \psi_{-}(\mu)\right] d\mu = 1\right),$$

$$\varepsilon_{1}(z) = \frac{\sqrt{1 - H_{2}}}{2\sqrt{3}} \int_{0}^{1} \frac{\exp(z/\mu)}{\xi(\mu)} \frac{d\mu}{\left[ (1 - \mu \operatorname{artanh} \mu)^{2} + \pi^{2} \mu^{2} / 4 \right]},$$

$$\varepsilon_{2}(z) = \frac{\sqrt{1 - H_{2}}}{2\sqrt{3}} \int_{0}^{1} \frac{\xi(\mu) \exp(-z/\mu) d\mu}{\left[ (1 - h_{2}\mu \operatorname{artanh} \mu)^{2} + h_{2}^{2} \pi^{2} \mu^{2} / 4 \right]},$$

$$A = \sqrt{\frac{1 - H_2}{3}} \frac{2(1 - K_2^2)}{H_2(1 + K_2^2)(H_2 - 1 + K_2^2)} \xi(K_2),$$

$$\xi(\mu) = (1 + K_2\mu) \exp\left[\frac{\mu}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln((1 - H_2x \cot x)/(1 - x \cot x)) - \ln(1 + K_2^2 \cot^2 x)}{\mu^2 \sin^2 x + \cos^2 x} dx\right],$$

$$z_0 = \frac{1}{K_2} + z_{01} - z_{02},$$

$$z_{01} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{3}{\sin^2 x} - \frac{1}{1 - x \cot x}\right] dx \approx 0,7104,$$

$$z_{02} = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left[ \frac{3 + K_2^2 \cot^2 x}{\sin^2 x + K_2^2 \cos^2 x} - \frac{1 + (1 - H_2) \cot^2 x}{1 - H_2 x \cot x} \right] dx.$$

$$K_2 = K_2 (H_2), \ H_2 \frac{\operatorname{artanh} K_2}{K_2} = 1.$$

С помощь замен, обратных (4) и (5), можно получить функцию n(x) в x-пространстве.

Статья поступила в редакцию 02.07.2012.

### СТАЦИОНАРНЫЕ СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ ДИРАКОВСКИХ ЧАСТИЦ В ПОЛЯХ КОЛЛАПСАРОВ

М. В. Горбатенко, В. П. Незнамов\*

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Для гравитационного поля Шварцшильда с использованием самосопряженного гамильтониана с плоским скалярным произведением в широком интервале значений гравитационной константы связи впервые получены стационарные связанные состояния элементарных частиц со спином 1/2, не распадающиеся со временем. Для получения дискретного энергетического спектра введено граничное условие, при котором радиальная плотность тока рассматриваемых дираковских частиц вблизи «горизонта событий» равна нулю. Результаты могут привести к пересмотру некоторых представлений стандартной космологической модели, связанных с эволюцией Вселенной и взаимодействием коллапсаров с окружающей средой.

*Ключевые слова*: уравнение Дирака, гравитационное поле Шварцшильда, стационарные связанные состояния, самосопряженные гамильтонианы, энергетический спектр.

Классическое решение Шварцшильда характеризуется точечным сферически-симметричным источником гравитационного поля массой M и «горизонтом событий» (гравитационным радиусом)

$$r_0 = \frac{2GM}{c^2}. (1)$$

В формуле (1) G – гравитационная постоянная, c – скорость света. Для частицы массой m безразмерная гравитационная константа связи равна

$$\alpha = \frac{GMm}{\hbar c} = \frac{Mm}{m_p^2} = \frac{r_0}{2l_c}.$$
 (2)

В формуле (2)  $\hbar$  — постоянная Планка,  $m_p = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 2,2\cdot 10^{-5}\, \Gamma$  — планковская масса,  $l_c = \frac{\hbar}{mc}$  — комптоновская длина волны.

Для электрона величине  $\alpha \approx 1$  соответствует источник с массой  $M = 0.5 \cdot 10^{15} \, \mathrm{kr}$ . Источнику с

массой Солнца  $M_{\odot} \approx 2 \cdot 10^{30} \, \mathrm{kr}\,$  для частицы с массой электрона соответствует величина  $\alpha \cong 4 \cdot 10^{15}$ .

Несмотря на явную электромагнитную аналогию в атомной физике, связанные состояния дираковских частиц в поле Шварцшильда исследовались сравнительно мало. Для гравитационного случая сложилось убеждение, что связанные состояния имеют комплексные энергии. В этом случае эти состояния экспоненциально распадаются со временем. Существование резонансных состояний Шварцшильда для массивных скалярных частиц с использованием уравнения Клейна-Гордона обсуждалось в работах [1-4]. Аналогичная проблема для дираковских массивных частиц обсуждалась в работах [5–9]. В этих работах при  $\alpha \ll 1$ непосредственным решением уравнения Дирака в слабом поле Шварцшильда для действительной части энергии получен водородоподобный спектр с релятивистскими поправками.

В работах авторов [10–12] с помощью мето дов псевдоэрмитовой квантовой механики для

<sup>\*</sup> E-mail: neznamov@vniief.ru

произвольных гравитационных полей, в том числе и зависящих от времени, разработан метод получения самосопряженных дираковских гамильтонианов с плоским скалярным произведением. Очевидно если такие гамильтонианы не зависят от времени и являются эрмитовыми  $((\Psi, H\varphi) = (H\Psi, \varphi))$ , то при существовании квадратично интегрируемых волновых функций и при установлении соответствующих граничных условий они будут обеспечивать существование стационарных связанных состояний дираковских частиц с вещественным энергетическим спектром.

Настоящая работа посвящена определению стационарных связанных состояний дираковской частицы в поле Шварцшильда.

Ниже будем использовать систему единиц  $G = \hbar = c = 1$ , сигнатуру

$$\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}[1, -1, -1, -1] \tag{3}$$

и обозначения:  $\gamma^{\underline{0}}$ ,  $\gamma^{\underline{k}}$ , k=1,2,3 – локальные матрицы Дирака,  $f=1-\frac{r_0}{r}$ .

Тогда метрика Шварцшильда в координатах  $(t, r, \theta, \varphi)$  будет иметь вид

$$ds^{2} = fdt^{2} - \frac{dr^{2}}{f} - r^{2} \left( d\theta^{2} + \sin^{2}\theta d\phi^{2} \right).$$
 (4)

Самосопряженный гамильтониан  $H_{\eta}$ , соответствующий этой метрике, равен [12]

$$H_{\eta} = \sqrt{f} m \gamma^{\underline{0}} - i \sqrt{f} \gamma^{\underline{0}} \left\{ \gamma^{\underline{1}} \sqrt{f} \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) + \gamma^{\underline{2}} \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \theta \right) + \gamma^{\underline{3}} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right\} - \frac{i}{2} \frac{\partial f}{\partial r} \gamma^{\underline{0}} \gamma^{\underline{1}}.$$
 (5)

В (5) подразумеваются вещественные значения f > 0.

Уравнение Дирака для стационарных состояний  $\psi(r,\theta,\phi,t)=e^{-iEt}\psi(r,\theta,\phi)$  имеет вид

$$\gamma^{\underline{0}} E \psi(r, \theta, \varphi) = \left\{ \sqrt{f} m - i \gamma^{\underline{1}} \left[ f \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) + \frac{r_0}{2r^2} \right] - i \sqrt{f} \left[ \gamma^2 \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \theta \right) + \gamma^3 \frac{1}{r \cdot \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] \right\} \psi(r, \theta, \varphi).$$
(6)

Как известно, уравнение (6) допускает разделение переменных, если представить биспинор  $\psi(r,\theta,\phi)$  в виде

$$\psi(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} F(r) & \xi(\theta) \\ -iG(r) & \sigma^3 \xi(\theta) \end{pmatrix} e^{im_{\varphi}\varphi} \tag{7}$$

и использовать уравнение (см, например, [13])

$$\left[ -\sigma^2 \left( \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \theta \right) + i \sigma^1 m_{\phi} \frac{1}{\sin \theta} \right] \xi(\theta) = i \kappa \xi(\theta).$$
 (8)

В равенствах (7), (8):  $\xi(\theta)$  – шаровые спиноры,  $\sigma^i$  – двумерные матрицы Паули,  $m_{\phi}$  – магнитное квантовое число,  $\kappa$  – квантовое число уравнения Дирака:

$$\kappa = \pm 1, \pm 2... = \begin{cases}
-(l+1), j = l + \frac{1}{2}, \\
l, \quad j = l - \frac{1}{2}.
\end{cases}$$
(9)

В результате получаем систему уравнений для радиальных функций F(r), G(r). Запишем ее в безразмерных переменных  $\varepsilon = \frac{E}{m}, \ \rho = \frac{r}{l}, \ \frac{r_0}{l} = 2\alpha$ .

$$\left(1 - \frac{2\alpha}{\rho}\right)\frac{\partial F}{\partial \rho} + \left(\frac{1 + \kappa\sqrt{1 - \frac{2\alpha}{\rho}}}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2}\right)F - \left(\varepsilon + \sqrt{1 - \frac{2\alpha}{\rho}}\right)G = 0,$$

$$\left(1 - \frac{2\alpha}{\rho}\right) \frac{\partial G}{\partial \rho} + \left(\frac{1 - \kappa \sqrt{1 - \frac{2\alpha}{\rho}}}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2}\right) G + \left(\varepsilon - \sqrt{1 - \frac{2\alpha}{\rho}}\right) F = 0.$$
(10)

Область изменения переменной  $\rho$  для функ ций  $F(\rho), G(\rho)$  — интервал  $(2\alpha, \infty)$  в соответствии с метрикой (4) и наличием выражения  $\sqrt{1-\frac{2\alpha}{\rho}}$  в уравнениях (10).

Уравнения (10) показывают, что как и в классическом случае, квантовая механика запрещает присутствие дираковских частиц под «горизонтом событий»  $r < r_0$ , т. е. при  $\rho < 2\alpha$ .

Для построения численного решения рассмотрим асимптотику системы (10).

При  $\rho \to \infty$ 

$$F = C_1 e^{-\rho\sqrt{1-\varepsilon^2}} + C_2 e^{\rho\sqrt{1-\varepsilon^2}};$$

$$G = \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}} \left( -C_1 e^{-\rho\sqrt{1-\varepsilon^2}} + C_2 e^{\rho\sqrt{1-\varepsilon^2}} \right). \tag{11}$$

Для обеспечения финитного движения частиц необходимо использовать лишь экспоненциально спадающие решения (11), т. е. в этом случае  $C_2 = 0$ .

Поскольку

$$\rho = 2\alpha \frac{r}{r_0},\tag{12}$$

при увеличении  $\alpha$  в численных решениях системы (10) необходимо использовать в асимптотике (11) все большие значения  $\rho$ .

При 
$$\rho \to 2\alpha \ (r \to r_0)$$

$$F = \frac{A}{\sqrt{\rho - 2\alpha}} \sin(2\alpha \epsilon \ln(\rho - 2\alpha) + \varphi),$$

$$G = \frac{A}{\sqrt{\rho - 2\alpha}} \cos(2\alpha \epsilon \ln(\rho - 2\alpha) + \varphi),$$
(13)

где A и  $\phi$  – постоянные величины.

Осциллирующие функции F и G в (13) плохо определены на «горизонте событий», но являются квадратично интегрируемыми функциями.

Для нахождения связанных состояний в системе (10) необходимо задать граничное условие при  $\rho \to 2\alpha$  ( $r \to r_0$ ). Требование обращения волновых функций вблизи горизонта в нуль неприемлемо в силу (13).

Условие отсутствия частиц под горизонтом может быть реализовано условием равенства нулю плотности радиальной компоненты вектора тока дираковских частиц при  $\rho \to 2\alpha$   $(r \to r_0)$ .

Для метрики Шварцшильда (4) это условие можно записать в виде

$$j^{\underline{r}} = \psi^{+} \gamma^{\underline{0}} \gamma^{\underline{r}} \psi \to 0$$
 при  $\rho \to 2\alpha$ , (14)

$$\gamma^{\underline{r}} = \left(\gamma^{\underline{1}}\cos\varphi + \gamma^{\underline{2}}\sin\varphi\right)\sin\theta + \gamma^{\underline{3}}\cos\theta. \tag{15}$$

С учетом (7), (13) условие (14) преобразуется к виду

$$\sin 2(2\alpha \epsilon \ln(\rho - 2\alpha) + \phi) \rightarrow 0$$
 πρи  $\rho \rightarrow 2\alpha$ ,  
 $2\alpha \epsilon \ln(\rho - 2\alpha) + \phi \rightarrow \frac{\pi}{2}N$ ,  $N = 0,1,2...$  (16)

Условие (16) определяет вещественный энергетический спектр уравнений (10) при их численном решении.

Прежде чем обсуждать результаты численно го решения системы (10), рассмотрим случай слабого гравитационного поля  $2\alpha \ll 1$ . В этом случае гравитационный радиус  $r_0$  много меньше комптоновской длины волны  $l_c(r_0 \ll l_c)$ . Учитывая, что

расстояния  $r \ll l_c$  не могут значимо влиять в квантовой механике на энергетический спектр уравнений (10), будем считать, что величинами  $\frac{2\alpha}{\rho}$  можно произбрани на спектрука с одиниций по расм

но пренебречь по сравнению с единицей во всем интервале изменения  $\rho$ . Тогда уравнения (10) принимают вид

$$\frac{\partial F}{\partial \rho} + \frac{1+\kappa}{\rho} F - (\varepsilon + 1)G = 0,$$

$$\frac{\partial G}{\partial \rho} + \frac{1-\kappa}{\rho} G + \left(\varepsilon - 1 + \frac{\alpha}{\rho}\right) F = 0.$$
(17)

В слабых полях значения є близки к единице и система (17) практически эквивалентна системе дираковских уравнений для кулоновского потенциала

$$\frac{\partial F}{\partial \rho} + \frac{1+\kappa}{\rho} F - \left( \varepsilon + 1 + \frac{\alpha}{\rho} \right) G = 0,$$

$$\frac{\partial G}{\partial \rho} + \frac{1-\kappa}{\rho} G + \left( \varepsilon - 1 + \frac{\alpha}{\rho} \right) F = 0.$$
(18)

$$U(r) = \frac{\alpha_{em}}{\rho}.$$
 (19)

В выражении (19)  $\alpha_{em}$  — электромагнитная постоянная тонкой структуры.

Следовательно, энергетический спектр, определяемый уравнениями (18), совпадает с главными членами разложения формулы для дискретного спектра дираковского уравнения для водородоподобных атомов с заменой  $\alpha_{em}$  на  $\alpha$  и может быть записан в виде

$$E_n \approx m \left( 1 - \frac{\alpha^2}{2n^2} \right). \tag{20}$$

Полученный результат в случае отсутствия релятивистских поправок совпадает с результатами, полученными в [3–9].

Естественно водородоподобный спектр (20) можно получить также переходя в нерелятивистском приближении от уравнения Дирака (6) к соответствующему уравнению Шредингера.

Проведенные предварительные численные расчеты системы  $(10)^*$  по определению стационарного вещественного энергетического спектра дираковской частицы с массой m в поле Шварцшильда позволяют сделать следующие выводы:

<sup>\*</sup> Численную реализацию решения системы (10) осуществил М. А. Вронский. Методы решения системы (10) будут представлены в следующей работе.

- 1) при  $\alpha \ll 1$  энергетический спектр при нечетных N = 1, 3, 5... практически совпадает с водородоподобным спектром формулы (20);
- 2) численные релятивистские поправки для значений  $\alpha = 0.05; 0.1$  и N = 1, 3, 5... близки к поправкам, определенным в работе [7] в соответствии с формулой

$$\frac{\Delta E_n}{mc^2} = \frac{3\alpha^4}{n^4} \left\{ \frac{n}{l + \frac{1}{2}} \left[ \left( 1 - \frac{1}{3} \delta_{l0} \right) + \frac{1}{12} \left( 1 - \delta_{l0} \right) \left( \frac{1}{\kappa} + \frac{2}{l(l+1)} \right) \right] - \frac{5}{8} \right\};$$
(21)

3) численные расчеты, проведенные для интервала значений  $\alpha = 10^{-2} \div 10^2$ , показывают, что с увеличением  $\alpha$  возрастает число сильносвязанных состояний.

Более подробный анализ численных расчетов и их результатов в широком интервале значений гравитационной константы связи будет приведен в последующей работе. Авторы также планируют в следующих работах представить результаты численных расчетов по определению стационарных связанных состояний дираковских частиц в гравитационных полях Нордстрёма—Райснера и Керра.

Основным результатом данной работы является демонстрация существования стационарных связанных состояний дираковских частиц со спином 1/2 в гравитационном поле Шварцшильда при использовании самосопряженного гамильтониана (5) и граничных условий (11), (14), (16).

Отличительная особенность полученных результатов состоит в том, что волновые функции частиц не проникают под горизонт, коллапс в стандартном понимании для связанных частиц исключен. Вместе с тем энергетические уровни при  $\alpha > 1$  могут находиться достаточно глубоко, так что энергия связи может быть порядка  $mc^2$ . Результаты

данной работы могут привести к пересмотру некоторых представлений стандартной космологической модели, связанных с эволюцией Вселенной и с взаимодействием коллапсаров с окружающей средой.

Авторы благодарят своих коллег М. А. Вронского и Е. Ю. Попова за полезные обсуждения.

### Список литературы

- 1. Deruelle N., Ruffini R. // Phys. Lett. 1974. Vol. 52B. P. 437.
- 2. Damour T., Deruelle N., Ruffini R. // Lett. Nuov. Cim. 1976. Vol. 15. P. 257.
- 3. Тернов И. М., Халилов В. Р., Чижов Г. А., Гаина А. Б. // Изв. вузов СССР, Физика. 1978, № 9.
- 4. Гаина А. Б., Чижов Г. А. // Изв. вузов СССР, Физика. 1980, № 4. С. 120.
- 5. Ternov I. M., Gaina A. B., Chizhov G.A. // Sov. Phys. J. 1980. Vol. 23. P. 695–700.
- 6. Galtsov D. V., Pomerantseva G. V., Chizhov G.A. // Sov. Phys. J. 1983. Vol. 26. P. 743–745.
- 7. Ternov I. M., Gaina A.B. // Sov. Phys. J. 1988. Vol. 31 (2). P. 157–163.
- 8. Gaina A. B., Zaslavskii O. B. // Class. Quantum Grav. 1992. Vol. 9. P. 667–676.
- 9. Gaina A. B., Ionescu-Pallas N. I. // Rom. J. Phys. 1993. Vol. 38. P. 729–730.
- 10. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. // Phys. Rev. 2010. Vol. D 82. P. 104056.; arxiv: 1007.4631 (gr-qc).
- 11. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. // Phys. Rev. 2011. Vol. D 83. P. 105002.; arxiv: 1102.4067v1 (gr-qc).
- 12. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. // Arxiv: 1102.0844v3 (gr-qc).
- 13. Brill D. R., Wheeler J. A. // Rev. of Modern Physics, 1957. Vol. 29. P. 465–479.

Статья поступила в редакцию 08.06.2012.

### КЛАСТЕРНАЯ МОДЕЛЬ АТОМНОГО ЯДРА И ВОЗБУЖДЕННЫЕ СОСТОЯНИЯ ЯДЕР ЧАСТЬ І. ПРИМЕР ПОСТРОЕНИЯ ДВУХКЛАСТЕРНОЙ МОДЕЛИ ЯДРА <sup>8</sup>Be

### А. А. Садовой, А. С. Ульянов

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188 г. Саров Нижегородской обл.

Описывается алгоритм построения кластерной волновой функции на примере основного состояния <sup>8</sup>Ве, который при введении генераторных и параметрических координат получен впервые. В работе также иллюстрируется развитый авторами метод вычисления различных матричных элементов и интегралов перекрытия между многонуклонными волновыми функциями с неортогональным базисом, обусловленный неэффективностью использования численных методов при вычислении многократных интегралов. Аналитические расчеты проводятся с использованием обобщенных функций. Применение для описания кластеров неортогонального базиса несколько усложняет проведение аналитических вычислений.

 $\mathit{Ключевые\ c.noвa}$ : кластерная модель, матрица перекрытия, волновая функция ядра  $^8$ Ве, антисимметризация волновой функции.

Широко известны кластерные состояния в легких ядрах ( $^{7}$  Li =  $\alpha + t$ ,  $^{8}$  Be =  $\alpha + \alpha$ ,  $^{9}$  Be =  $\alpha +$  $+\alpha + n$  и т. д.). Для средних ядер более характерной является однонуклонная кластеризация. В области тяжелых ядер часто встречаются состояния, включающие кластеры из нескольких нуклонов [2]. Следует иметь в виду, что для описания двух-, трех- и четерехкластерных состояний используются различные модели, наиболее простые из которых - это модели с бесструктурными кластерами. Более сложными кластерными моделями ядра являются кластерные модели со структурными кластерами. В качестве примера укажем на модель  $(4N + 4N = {}^{8}\text{Be})$  бериллия  ${}^{8}\text{Be}$  из двух  $\alpha$ частиц, каждая из которых описывается в рамках многочастичной теории ядра, например в рамках метода гиперсферических функций.

Такая многонуклонная модель развивается в рамках данной работы на примере ядра <sup>8</sup> Ве. При этом она может относительно легко обобщаться на более тяжелые кластеры и на состояния трех и более кластеров путем введения необходимого числа генераторных и параметрических координат в соответствии с числом кластеров. Одним из преимуществ данной модели является возможность описания различных многокластерных

состояний с единым нуклон-нуклонным потенциалом взаимолействия.

В работах [3–5] были исследованы связанные состояния из трех взаимодействующих точечных кластеров. Недостатком применяемого в данных работах метода является использование эффективных потенциалов, описывающих взаимодействие бесструктурных кластеров [6], причем число этих эффективных потенциалов велико и определяется типом вводимых кластеров.

В представленной работе в качестве примера развивается новая двухкластерная модель ядра. В ходе проведенных исследований предложен новый метод построения полностью антисимметризованных волновых функций двухкластерных систем на примере долгоживущего квазистационарного состояния ядра  $^8$  Ве. Предлагается использовать данный метод для расчета изомерных состояний тяжелых ядер, аналогично подходу Shneidman a [7], описывающего ядра с  $Z \ge 96$  моделью кор + альфа-частица.

Двухкластерная ВФ  $_4{}^8$  Ве является решением уравнения Шредингера

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^{8} \frac{\partial^2}{\partial \vec{r_i}^2} + \sum_{i>j=1}^{8} V(\vec{r_i} - \vec{r_j}) - E \right\} \Psi(\vec{r_1}, \vec{r_2}, ..., \vec{r_8}) = 0.$$
(1)

Пусть координаты  $\vec{r_i}$  (i=1,...,4) соответствуют четырем нуклонам, образующим одну  $\alpha$ -частицу, а  $\vec{r_j}$  (i=5,...,8) описывают нуклоны, входящие в состав другой  $\alpha$ -частицы.

Для описания ядра <sup>8</sup> Ве как двухкластерной системы целесообразно ввести следующие коллективные переменные:

$$\rho_1^2 = \sum_{i=1}^4 r_i^2 - 4R_1^2, \quad \rho_2^2 = \sum_{j=5}^8 r_j^2 - 4R_2^2, \quad \vec{R}_1 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \vec{r}_i,$$

$$\vec{R}_2 = \frac{1}{4} \sum_{i=5}^8 \vec{r}_j, \tag{2}$$

где  $\vec{R}_1$  и  $\vec{R}_2$  — координаты центров инерции первой и второй альфа-частиц соответственно.

Для составной системы из восьми нуклонов коллективную переменную можно определить так:

$$\rho^2 = \sum_{i=1}^8 r_i^2 - 8R^2,\tag{3}$$

где  $\vec{R} = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^{8} \vec{r_i}$  — координата центра инерции всей системы.

В рамках кластерной модели с учетом антисимметризации ВФ  $^{8}$  Ве можно представить в следующем виде

$$\Psi(r_i, r_j) = \hat{A}\{R(\vec{r})\varphi(\rho_1)\varphi(\rho_2)\}, \qquad (4)$$

где  $\varphi(\rho_1)$  и  $\varphi(\rho_2)$  – ВФ альфа-кластеров, которые могут быть рассчитаны, например, в рамках модели гиперсферических функций (МГСФ),  $R(\vec{r})$  – функция относительного движения двух альфачастиц  $(\vec{r} = \vec{R}_2 - \vec{R}_1)$ ,  $\hat{A}$  – оператор антисимметризации, который в работе [8] определяется следующим образом:

$$\hat{A}\Psi(\vec{r}_{1},...,\vec{r}_{8}) = \sum_{p} (-1)^{p} P\Psi(\vec{r}_{1},...,\vec{r}_{8}).$$
 (5)

В этом выражении сумма берется по всевозможным перестановкам P, которые производятся над координатами  $\vec{r}_1,...,\vec{r}_8$ , а p – число транспозиций при перестановке P.

Используем минимальное приближение МГСФ [9, 10] для ВФ альфа-частицы

$$\varphi = \frac{\chi_0(\rho)}{\rho^4} U_0(\Omega). \tag{6}$$

Нормировка ВФ альфа-частицы:

$$\int \varphi \varphi^* dV = \int \frac{\chi_0(\rho)}{\rho^4} U_0^*(\Omega) \frac{\chi_0(\rho)}{\rho^4} U_0(\Omega) \rho^8 d\rho d\Omega =$$

$$= \int \chi_0^2(\rho) d\rho = 1. \tag{7}$$

Введем генераторные координаты  $s_1$ ,  $s_2$  и параметрические координаты  $\eta_1$ ,  $\eta_2$  [8], на которые оператор антисимметризации не действует:

$$\frac{\chi_{i}(\rho)}{\rho^{4}} = \int \frac{\chi_{i}(\eta)}{\eta^{4}} \delta(\rho^{2} - \eta^{2}) d\eta^{2} = 
= \frac{1}{2\pi} \int e^{is(\rho^{2} - \eta^{2})} ds \int \frac{\chi_{i}(\eta)}{\eta^{4}} d\eta^{2}.$$
(8)

Тогда для ВФ  $^{8}$ Ве можно получить

$$\Psi = \frac{1}{(2\pi)^2} \int e^{-is_1\eta_1^2} ds_1 \int e^{-is_2\eta_2^2} ds_2 \int \chi(\eta_1) d\eta_1^2 \int \chi(\eta_2) d\eta_2^2 \cdot M,$$
(9)

где M определяется выражением

$$M = \hat{A} \left\{ e^{is_1 \rho_1^2} e^{is_1 \rho_1^2} R(\vec{r}) P(\Omega_1) P(\Omega_2) \right\}. \quad (10)$$

В выражении (10)  $P(\Omega)$  – угловая часть ВФ альфа-частицы, представляющая собой детерминант Слейтера, составленный из базисных функций подоболочек.

Далее целесообразно использовать параметрические координаты  $x_1$  и  $x_2$ :

$$F(\vec{R}_m) = \int F(\vec{x}_m) \delta(\vec{x}_m - \vec{R}_m) d\vec{x}_m, \qquad (11)$$

где m = 1,2. Тогда выражение (10) можно записать в следующем виде:

$$M = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{x}_1 d\vec{x}_2 \int e^{-is_1 4x_1^2} e^{-is_2 4x_2^2} R(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \int e^{-i\vec{f}_1 \vec{x}_1} d\vec{f}_1 \int e^{-i\vec{f}_2 \vec{x}_2} d\vec{f}_2 \cdot D,$$
(12)

где функция D определяется таким образом:

$$D = \hat{A} \left\{ e^{is_1 \sum_{i=1}^{4} r_i^2 + \frac{i\vec{f}_1}{4} \sum_{i=1}^{4} r_i - is_2 \sum_{i=5}^{8} r_j^2 + \frac{i\vec{f}_2}{4} \sum_{i=5}^{8} \vec{r}_j} P(\Omega_1) P(\Omega_2) \right\},$$
(13)

где  $P(\Omega)$  – угловые части волновых функций метода МГСФ [9].

При переходе от выражения (10) к выражению (12) используются определения (2) коллективных переменных  $\rho_1$  и  $\rho_2$ .

Согласно [11], применяя оператор антисимметризации к выражению в фигурных скобках, можно функцию D привести к виду детерминанта 8x8 с неортогональным базисом

$$D = \begin{cases} e^{is_{1}\eta_{1}^{2} + \frac{i\vec{\eta}\cdot\vec{\eta}}{4}} \chi_{++}(1) & e^{is_{1}\eta_{2}^{2} + \frac{i\vec{\eta}\cdot\vec{\eta}\cdot\vec{\eta}}{4}} \chi_{++}(2) & \dots & e^{is_{1}\eta_{8}^{2} + \frac{i\vec{\eta}\cdot\vec{\eta}\cdot\vec{\eta}}{4}} \chi_{++}(8) \\ e^{is_{1}\eta_{1}^{2} + \frac{i\vec{\eta}\cdot\vec{\eta}\cdot\vec{\eta}}{4}} \chi_{+-}(1) & e^{is_{1}\eta_{2}^{2} + \frac{i\vec{\eta}\cdot\vec{\eta}\cdot\vec{\eta}}{4}} \chi_{+-}(2) & \dots & e^{is_{1}\eta_{8}^{2} + \frac{i\vec{\eta}\cdot\vec{\eta}\cdot\vec{\eta}}{4}} \chi_{+-}(8) \\ e^{is_{1}\eta_{1}^{2} + \frac{i\vec{\eta}\cdot\vec{\eta}\cdot\vec{\eta}}{4}} \chi_{-+}(1) & e^{is_{1}\eta_{2}^{2} + \frac{i\vec{\eta}\cdot\vec{\eta}\cdot\vec{\eta}}{4}} \chi_{-+}(2) & \dots & e^{is_{1}\eta_{8}^{2} + \frac{i\vec{\eta}\cdot\vec{\eta}\cdot\vec{\eta}}{4}} \chi_{-+}(8) \\ e^{is_{1}\eta_{1}^{2} + \frac{i\vec{\eta}\cdot\vec{\eta}\cdot\vec{\eta}}{4}} \chi_{--}(1) & e^{is_{1}\eta_{2}^{2} + \frac{i\vec{\eta}\cdot\vec{\eta}\cdot\vec{\eta}}{4}} \chi_{--}(2) & \dots & e^{is_{1}\eta_{8}^{2} + \frac{i\vec{\eta}\cdot\vec{\eta}\cdot\vec{\eta}}{4}} \chi_{--}(8) \\ e^{is_{2}\eta_{1}^{2} + \frac{i\vec{\eta}\cdot\vec{\eta}\cdot\vec{\eta}}{4}} \chi_{++}(1) & e^{is_{2}\eta_{2}^{2} + \frac{i\vec{\eta}\cdot\vec{\eta}\cdot\vec{\eta}}{4}} \chi_{+-}(2) & \dots & e^{is_{2}\eta_{8}^{2} + \frac{i\vec{\eta}\cdot\vec{\eta}\cdot\vec{\eta}}{4}} \chi_{+-}(8) \\ e^{is_{2}\eta_{1}^{2} + \frac{i\vec{\eta}\cdot\vec{\eta}\cdot\vec{\eta}}{4}} \chi_{-+}(1) & e^{is_{2}\eta_{2}^{2} + \frac{i\vec{\eta}\cdot\vec{\eta}\cdot\vec{\eta}}{4}} \chi_{-+}(2) & \dots & e^{is_{2}\eta_{8}^{2} + \frac{i\vec{\eta}\cdot\vec{\eta}\cdot\vec{\eta}}{4}} \chi_{-+}(8) \\ e^{is_{2}\eta_{1}^{2} + \frac{i\vec{\eta}\cdot\vec{\eta}\cdot\vec{\eta}}{4}} \chi_{-+}(1) & e^{is_{2}\eta_{2}^{2} + \frac{i\vec{\eta}\cdot\vec{\eta}\cdot\vec{\eta}}{4}} \chi_{--}(2) & \dots & e^{is_{2}\eta_{8}^{2} + \frac{i\vec{\eta}\cdot\vec{\eta}\cdot\vec{\eta}}{4}} \chi_{-+}(8) \\ e^{is_{2}\eta_{1}^{2} + \frac{i\vec{\eta}\cdot\vec{\eta}\cdot\vec{\eta}}{4}} \chi_{--}(1) & e^{is_{2}\eta_{2}^{2} + \frac{i\vec{\eta}\cdot\vec{\eta}\cdot\vec{\eta}}{4}} \chi_{--}(2) & \dots & e^{is_{2}\eta_{8}^{2} + \frac{i\vec{\eta}\cdot\vec{\eta}\cdot\vec{\eta}}{4}} \chi_{--}(8) \\ e^{is_{2}\eta_{1}^{2} + \frac{i\vec{\eta}\cdot\vec{\eta}\cdot\vec{\eta}}{4}} \chi_{--}(1) & e^{is_{2}\eta_{2}^{2} + \frac{i\vec{\eta}\cdot\vec{\eta}\cdot\vec{\eta}}{4}} \chi_{--}(2) & \dots & e^{is_{2}\eta_{8}^{2} + \frac{i\vec{\eta}\cdot\vec{\eta}\cdot\vec{\eta}}{4}} \chi_{--}(8) \\ e^{is_{2}\eta_{1}^{2} + \frac{i\vec{\eta}\cdot\vec{\eta}\cdot\vec{\eta}}{4}} \chi_{--}(1) & e^{is_{2}\eta_{2}^{2} + \frac{i\vec{\eta}\cdot\vec{\eta}\cdot\vec{\eta}}{4}} \chi_{--}(2) & \dots & e^{is_{2}\eta_{8}^{2} + \frac{i\vec{\eta}\cdot\vec{\eta}\cdot\vec{\eta}}{4}} \chi_{--}(8) \\ e^{is_{2}\eta_{1}^{2} + \frac{i\vec{\eta}\cdot\vec{\eta}\cdot\vec{\eta}}{4}} \chi_{--}(1) & e^{is_{2}\eta_{2}^{2} + \frac{i\vec{\eta}\cdot\vec{\eta}\cdot\vec{\eta}}{4}} \chi_{--}(2) & \dots & e^{is_{2}\eta_{8}^{2} + \frac{i\vec{\eta}\cdot\vec{\eta}\cdot\vec{\eta}}{4}} \chi_{--}(8) \\ e^{is_{2}\eta_{1}^{2} + \frac{i\vec{\eta}\cdot\vec{\eta}\cdot\vec{\eta}}{4}} \chi_{--}(1) & e^{is_{2}\eta_{2}^{2} + \frac{i\vec{\eta}\cdot\vec{\eta}\cdot\vec{\eta}}{4}} \chi_{--}(2) & \dots & e^{is_{2}\eta_{8}^{2} + \frac{i\vec{\eta}\cdot\vec{\eta}\cdot\vec$$

В этом выражении  $\chi_{\mu\nu}(i)$  – спин-изоспиновые функции нуклонов.

Проиллюстрируем развитый метод на расчете матричных элементов, в том числе и интегралов перекрытия с построенными волновыми функциями с неортогональным базисом. В общем случае для двухкластерной модели необходимо выполнить интегрирование по 16 переменным. Очевидно, что численное интегрирование с учетом использования в методе обобщенных функций мало эффективно. Поэтому был развит аналитический метод вычисления подобных матричных элементов. Наиболее просто приемы аналитических вычислений можно проиллюстрировать на примере вычисления интегралов перекрытия двухкластерных волновых функций.

Матрица перекрытия в силу ортогональности спин-изоспиновых частей  $B\Phi$  будет представлять детерминант следующего вида:

$$\Sigma = \begin{vmatrix} Q_{11'} & 0 & 0 & 0 & Q_{12'} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_{11'} & 0 & 0 & 0 & Q_{12'} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{11'} & 0 & 0 & 0 & Q_{12'} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{11'} & 0 & 0 & 0 & Q_{12'} \\ Q_{21'} & 0 & 0 & 0 & Q_{22'} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_{21'} & 0 & 0 & 0 & Q_{22'} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{21'} & 0 & 0 & 0 & Q_{22'} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{21'} & 0 & 0 & 0 & Q_{22'} \end{vmatrix},$$

$$(15)$$

где  $Q_{ij'}$  — интеграл перекрытия ВФ для конкретной перестановки  $(s_i f_i)$  и  $(s'_i f'_i)$ .

Проведем диагонализацию детерминанта перекрытия, в результате чего получим следующий его вид

$$\Sigma = [Q_{11'}Q_{22'} - Q_{21'}Q_{12'}]^4 = (Q_{11'}Q_{22'})^4 - 4(Q_{11'}Q_{22'})^3 Q_{21'}Q_{12'} + 6(Q_{11'}Q_{22'})^2 (Q_{21'}Q_{12'})^2 - (16) - 4(Q_{21'}Q_{12'})^3 Q_{11'}Q_{22'} + (Q_{21'}Q_{12'})^4.$$

Аналогичным образом выражаются и МЭ потенциальной энергии [12]. Из-за громоздкости их явный вид не приводится.

Подставив кластерную ВФ в исходное многочастичное уравнение Шредингера (1) и умножив его слева на сопряженную кластерную ВФ, получим следующее интегро-дифференциальное уравнение

$$\int N(r)R(r)\left(\frac{2}{A}\Delta_r - E\right)R(r)dr - \left(W(r,r')R(r)R(r')drdr' = 0.\right)$$
(17)

Ядра интегральных членов *N* и выражаются через сумму интегралов перекрытия и МЭ потенциальной энергии. При их вычислении необходимо провести интегрирование по 16 переменным, поэтому численные методы здесь мало эффективны. В связи с этим авторами были развиты аналитические методы вычисления подобных интегралов, включающих обобщенные функции.

Как видно из явного вида матрицы перекры тия, она состоит из прямых и обменных интегра лов перекрытия, которые получаются при действии оператора перестановок и являются недиагональными элементами матрицы перекрытия. Рассмотрим метод вычисления прямых интегралов перекрытия, для чего введем якобиевы координа ты для каждого из кластеров  $\xi_i$ ,  $i=1,...,A_1-1$  и  $\xi_j$ ,  $j=1,...,A_2-1$ , где  $A_1$  и  $A_2$  — число частиц в кластерах.

Элемент объема в якобиевых координатах и координатах центров масс двух кластеров можно записать

$$d\tau_{3A} = A_1^{3/2} d\vec{R}_1 \prod_{i=1}^{A_1 - 1} d\vec{\xi}_i A_2^{3/2} d\vec{R}_2 \prod_{i=1}^{A_2 - 1} d\vec{\xi}_j.$$
 (18)

Перейдем к координатам относительного движения двух кластеров и движения их центров масс

$$\vec{R} = \frac{A_1}{A}\vec{R}_1 + \frac{A_2}{A}\vec{R}_2, \quad \vec{r} = \vec{R}_2 - \vec{R}_1.$$
 (19)

Якобиан такой замены переменных равен единице. Элемент объема в новых координатах примет вид

$$d\tau_{3A} = A_1^{3/2} A_2^{3/2} d\vec{r} d\vec{R} \prod_{i=1}^{A_1 - 1} d\vec{\xi}_i \prod_{j=1}^{A_2 - 1} d\vec{\xi}_j. \quad (20)$$

Умножим левую и правую части выражения (20)

на 
$$\delta(\vec{R})$$
, равного  $\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{i\vec{p}\frac{1}{8}\sum_{j=1}^{8}\vec{r}_{j}} d\vec{p}$ .

Таким образом можно получить

$$d\vec{r} \prod_{i=1}^{A_1 - 1} d\vec{\xi}_i \prod_{j=1}^{A_2 - 1} d\vec{\xi}_j = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} A_1^{3/2} A_2^{3/2}} d\tau_{3A} \int_{e}^{i\vec{p} \frac{1}{8} \sum_{j=1}^{8} \vec{r}_j} d\vec{p}. \quad (21)$$

Интегралы по  $d\vec{r}$ , входящие в  $Q_{ii}$ , после проведения интегрирования равны

$$\int e^{i\left(-s_{i}+s'_{j}\right)r^{2}-\frac{i\left(\vec{f}_{i}-\vec{f}'_{j}\right)\vec{r}}{4}+\frac{i\vec{p}}{8}\vec{r}}Y_{l_{i}m_{i}}^{*}\left(\Omega\right)Y_{l_{j}m_{j}}\left(\Omega\right)d\vec{r}} = e^{i\left(s'_{1}-s_{1}\right)\left[\frac{\vec{f}_{1}-\vec{f}'_{1}-\vec{p}/2}{8\left(s'_{1}-s_{1}\right)}\right]^{2}}\frac{\sqrt{\pi}}{4\left[-i\left(s'_{1}-s_{1}\right)\right]^{3/2}}.$$
 (22)

При учете определения кластерной ВФ (9), (12), (13) для первого слагаемого интеграла перекрытия (16) можно записать

$$\langle (Q_{11'}Q_{22'})^4 \rangle = \int e^{is_1\eta_1^2} e^{is_14x_1^2} ds_1 \int e^{is_2\eta_2^2} e^{is_24x_2^2} ds_2 \times$$

$$\times \int \frac{\chi(\eta_1)}{\eta_1^4} d\eta_1^2 \int \frac{\chi(\eta_2)}{\eta_2^4} d\eta_2^2 \times \int e^{-is_1'\eta_1'^2} e^{-is_1'4x_1'^2} ds_1' \times$$

$$\times \int e^{-is_2'\eta_2'^2} e^{-is_1'4x_1'^2} ds_2' \int \frac{\chi(\eta_1')}{\eta_1'^4} d\eta_1'^2 \int \frac{\chi(\eta_2')}{\eta_2'^4} d\eta_2'^2 \times$$

$$\times \int e^{i\vec{f}_1\vec{x}_1} R(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) e^{i\vec{f}_2\vec{x}_2} d\vec{x}_1 d\vec{x}_2 \times \int e^{-i\vec{f}_1'\vec{x}_1'} R(\vec{x}_1' - \vec{x}_2') e^{-i\vec{f}_2'\vec{x}_2'} d\vec{x}_1' d\vec{x}_2' \times$$

$$\times \int e^{i\vec{f}_1\vec{x}_1} R(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) e^{i\vec{f}_2-\vec{f}_2'-\vec{p}/2} e^{-i\vec{f}_1'\vec{x}_1'} R(\vec{x}_1' - \vec{x}_2') e^{-i\vec{f}_2'\vec{x}_2'} d\vec{x}_1' d\vec{x}_2' \times$$

$$\times \int e^{i\vec{f}_1\vec{x}_1} R(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) e^{i\vec{f}_2-\vec{f}_2'-\vec{p}/2} e^{-i\vec{f}_1'\vec{x}_1'} R(\vec{x}_1' - \vec{x}_2') e^{-i\vec{f}_2'\vec{x}_2'} d\vec{x}_1' d\vec{x}_2' \times$$

$$\times \frac{\pi^4}{4^8} \int \frac{e^{-is_1'\eta_1'^2} e^{-is_1'4x_1'^2} e^{-is_1'\eta_1'^2} e^{-is_$$

Для интегрирования по переменным  $\vec{f}_1$  и  $\vec{f}_1'$ в выражении (23) введем следующие переменные

$$\vec{y} = \vec{f_1} - \vec{f_1}', \quad \vec{z} = \frac{\vec{f_1} + \vec{f_1}'}{2}, \quad J = 1.$$
 (24)

Последующее интегрирование по  $d\vec{z}$  и по  $d\vec{y}$  позволяет получить

$$W_{11'} = \int \frac{e^{4i(s_1'-s_1)\frac{(\vec{f}_1-\vec{f}_1'-\vec{p}/2)^2}{64(s_1'-s_1)^2}}}{\left[-i(s_1'-s_1)\right]^6} d\vec{f}_1 d\vec{f}_1' = \frac{\pi^5}{-\sqrt{2}\left[-i(s_1'-s_1)\right]^{9/2}} e^{-i\left[4\vec{x}_1^2(s_1'-s_1)-\frac{\vec{p}\vec{x}_1}{2}\right]}. (25)$$

Аналогичным образом можно вычислить интеграл по переменным  $f_2, f_2'$ :

$$W_{22'} = \int \frac{e^{4i(s_2'-s_2)\frac{(\vec{f}_2-\vec{f}_2'-\vec{p}/2)^2}{64(s_2-s_2')^2}} d\vec{f}_2 d\vec{f}_2' = \frac{\pi^5}{-\sqrt{2}\left[-i(s_2'-s_2)\right]^{9/2}} e^{-i\left[4\vec{x}_2^2(s_2'-s_2)-\frac{\vec{p}\vec{x}_2}{2}\right]}. (26)$$

Полученное в итоге выражение необходимо проинтегрировать по координатам  $s_1$  и  $s_2$ :

$$= e^{i(s'_{1}-s_{1})\left[\frac{\vec{f}_{1}-\vec{f}_{1}'-\vec{p}/2}{8(s'_{1}-s_{1})}\right]^{2}} \frac{\sqrt{\pi}}{4\left[-i(s'_{1}-s_{1})\right]^{3/2}}. \quad (22) \qquad = \frac{\pi^{10}e^{i\frac{\vec{p}}{2}(\vec{x}_{1}+\vec{x}_{2})}}{2} \int \frac{e^{is_{1}\eta_{1}^{2}}e^{is_{2}\eta_{2}^{2}}W_{11'}W_{22'}ds_{1}ds_{2}}{\left[-i(s'_{1}-s_{1})\right]^{9/2}\left[-i(s'_{2}-s_{2})\right]^{9/2}}ds_{1}ds_{2}. \quad (27)$$

Что дает

$$\int e^{is_1\eta_1^2} e^{is_2\eta_2^2} W_{11'} W_{22'} ds_1 ds_2 d\vec{p} = 
= 2^3 (2\pi)^{3/2} \frac{\pi^{10}}{2} \left[ \frac{2\pi}{\Gamma(9/2)} \right]^2 (\eta_1^2 + 4x_1^2)^{7/2} \times 
\times e^{-is_1' (\eta_1'^2 + 4x_1^2 - \eta_1^2)} (\eta_2^2 + 4x_1^2)^{7/2} e^{-is_2' (\eta_2'^2 + 4x_1^2 - \eta_2^2)}. (28)$$

Проведя дальнейшее интегрирование по параметрическим координатам  $s_1'$  и  $s_2'$ , окончательно получим

$$\left\langle \left( Q_{11'} Q_{22'} \right)^4 \right\rangle = \frac{\pi^{11}}{2^2 \left[ \Gamma \left( 9/2 \right) \right]^2} \times$$

$$\times \int d\eta_1^2 \chi_1 \left( \eta_1^2 \right) \chi_1 \left( \eta_1^2 + 4x^2 \right) \int d\eta_2^2 \chi_2 \left( \eta_2^2 \right) \chi_2 \left( \eta_2^2 + 4x^2 \right) \times$$

$$\times \int d\vec{x} R^2 \left( 2\vec{x} \right) \frac{\left( \eta_1^2 + 4x^2 \right)^{3/2}}{\eta_1^4} \frac{\left( \eta_2^2 + 4x^2 \right)^{3/2}}{\eta_2^4}.$$

 $x \to 0$  из последней формулы следует, что нормировка ВФ равна 1. При  $x \to \infty$  нормировочная константа равна 0 из-за отсутствия пере крытия  $\chi_1, \chi_2$ .

Вычисление обменных интегралов перекрытия является несколько более сложной задачей. Для вычисления обменных интегралов перекрытия вида  $Q_{12'} = \left\langle s_1 f_1 \middle| s_2' f_2' \right\rangle$  необходимо так же, как и ранее, произвести интегрирование по всем парам параметрических и генераторных координат. Проиллюстрируем это следующим выражением:

$$\left\langle Q_{12'}Q_{21'}(Q_{11'}Q_{22'})^{3} \right\rangle =$$

$$= \left\langle s_{1}f_{1} \middle| s_{2}'f_{2}' \right\rangle \left\langle s_{2}f_{2} \middle| s_{1}'f_{1}' \right\rangle \left\langle s_{2}f_{2} \middle| s_{2}'f_{2}' \right\rangle^{3} \left\langle s_{1}f_{1} \middle| s_{1}'f_{1}' \right\rangle^{3} =$$

$$= \left(\frac{\pi}{4}\right)^{4} \int \frac{\chi(\eta_{1})}{\eta_{1}^{4}} d\eta_{1}^{2} \int \frac{\chi(\eta_{2})}{\eta_{2}^{4}} d\eta_{2}^{2} \int \frac{\chi(\eta_{1})}{\eta_{1}'^{4}} d\eta_{1}'^{2} \times$$

$$\times \int \frac{\chi(\eta_{1})}{\eta_{2}'^{4}} d\eta_{2}'^{2} M.$$

$$(29)$$

где М определяется формулой

$$\begin{split} M &= \int e^{-is_{1}\left(\eta_{1}^{2}+4x_{1}^{2}\right)} e^{-is_{2}\left(\eta_{2}^{2}+4x_{2}^{2}\right)} R\left(\vec{x}_{1}-\vec{x}_{2}\right) d\vec{x}_{1} d\vec{x}_{2} \times \\ &\times \int e^{is_{1}'\left(\eta_{1}^{2}+4x_{1}^{2}\right)} e^{is_{2}'\left(\eta_{2}^{2}+4x_{2}^{2}\right)} R\left(\vec{x}_{1}'-\vec{x}_{2}'\right) d\vec{x}_{1}' d\vec{x}_{2}' \times \\ &\times \int \frac{ds_{1}}{\left[-i\left(s_{1}-s_{2}'\right)\right]^{3/2}} \frac{ds_{2}}{\left[-i\left(s_{2}-s_{1}'\right)\right]^{3/2}} \times \\ &\times \frac{ds_{1}'}{\left[-i\left(s_{1}-s_{1}'\right)\right]^{9/2}} \frac{ds_{2}'}{\left[-i\left(s_{2}-s_{2}'\right)\right]^{9/2}} D\left(s_{1},s_{2},s_{1}',s_{2}'\right), \end{split}$$

$$(30)$$

а функция D определяется таким образом:

$$D(s_{1}, s_{2}, s'_{1}, s'_{2}) =$$

$$= \int e^{-i\vec{f}_{1}\vec{x}_{1}} e^{i\vec{f}_{1}\vec{x}'_{1}} e^{-i\vec{f}_{2}\vec{x}_{2}} e^{i\vec{f}_{2}\vec{x}'_{2}} e^{i\vec{f}_{2}'\vec{x}'_{2}} e^{i\frac{(\vec{f}_{1} - \vec{f}_{2}' - \frac{\vec{p}}{2})^{2}}{64(s_{1} - s'_{2})}} \times$$

$$\times e^{i\frac{(\vec{f}_{2} - \vec{f}_{1}' - \frac{\vec{p}}{2})^{2}}{64(s_{2} - s'_{1})}} e^{3i\frac{(\vec{f}_{2} - \vec{f}_{2}' - \frac{\vec{p}}{2})^{2}}{64(s_{2} - s'_{2})}} e^{3i\frac{(\vec{f}_{1} - \vec{f}_{1}' - \frac{\vec{p}}{2})^{2}}{64(s_{1} - s'_{1})}} \times$$

$$\times d\vec{f}_{1}d\vec{f}_{2}d\vec{f}_{1}'d\vec{f}_{2}'d\vec{p}. \tag{31}$$

Интегрирование по паре переменных  $\vec{f}_1$ ,  $\vec{f}_2$  проводится по всему пространству, поэтому можно сделать следующую трансляцию:

$$\vec{f}_1 \to \vec{f}_1 + \frac{\vec{p}}{2}, \vec{f}_2 \to \vec{f}_2 + \frac{\vec{p}}{2}.$$
 (32)

Далее интегрируем по  $d\vec{p}$  и, сделав замену переменных

$$\vec{y}_1 = \vec{f}_1 - \vec{f}_1', \ \vec{y}_2 = \vec{f}_2 - \vec{f}_1', \ \vec{z}_1 = \vec{f}_1' - \vec{f}_2', \ \vec{z}_2 = \vec{f}_1,$$

$$J = 1,$$
(33)

получаем

$$D = 2^{3} \left(2\pi\right)^{\frac{3}{2}} \delta(\vec{x}_{1} + \vec{x}_{2}) \int e^{-i\vec{z}_{2}\vec{x}_{1}} e^{i(\vec{z}_{2} - \vec{y}_{1})\vec{x}'_{1}} \times \\ \times e^{-i(\vec{z}_{2} + \vec{y}_{2} - \vec{y}_{1})\vec{x}_{2}} e^{i(\vec{z}_{2} - \vec{z}_{1} - \vec{y}_{1})\vec{x}'_{2}} \times \\ \times e^{i\frac{(\vec{z}_{1} + \vec{y}_{1})^{2}}{64(s_{1} - s'_{2})}} e^{i\frac{\vec{y}_{2}^{2}}{64(s_{2} - s'_{1})}} e^{3i\frac{(\vec{z}_{1} + \vec{y}_{2})}{64(s_{2} - s'_{2})}} \times \\ \times e^{3i\frac{\vec{y}_{1}^{2}}{64(s_{1} - s'_{1})}} d\vec{y}_{1}d\vec{y}_{2}d\vec{z}_{1}d\vec{z}_{2}.$$

$$(34)$$

Последовательное интегрирование по переменным  $\vec{z}_2$ ,  $\vec{x}_2$  и  $\vec{x}_2'$  дает

$$M = \int e^{-is_1(\eta_1^2 + 4x_1^2)} e^{-is_2(\eta_2^2 + 4x_1^2)} R(2\vec{x}_1) d\vec{x}_1 e^{is_1'(\eta_1'^2 + 4x_1'^2)}_1 \times \\ \times e^{is_2'(\eta_2'^2 + 4x_1'^2)} R(2\vec{x}_1') d\vec{x}' D(s_1, s_2, s_1', s_2') \times \\ \times \frac{1}{\left[-i(s_1 - s_2')\right]^{3/2}} \frac{1}{\left[-i(s_2 - s_1')\right]^{3/2}} \frac{1}{\left[-i(s_1 - s_1')\right]^{9/2}} \times \\ \times \frac{1}{\left[-i(s_2 - s_2')\right]^{9/2}} ds_1 ds_2 ds_1' ds_2',$$

где переобозначено

$$\begin{split} &D\left(s_{1},s_{2},s_{1}',s_{2}'\right)=2^{3}\left(2\pi\right)^{3}\int e^{-i\vec{z}_{1}\vec{x}_{1}'}e^{i(\vec{y}_{2}-\vec{y}_{1})\vec{x}_{1}}\times\\ &\times e^{i\frac{(\vec{z}_{1}+\vec{y}_{1})^{2}}{64\left(s_{1}-s_{2}'\right)}}e^{i\frac{\vec{y}_{2}^{2}}{64\left(s_{2}-s_{1}'\right)}}e^{3i\frac{(\vec{z}_{1}+\vec{y}_{2})}{64\left(s_{2}-s_{2}'\right)}}e^{3i\frac{\vec{y}_{1}^{2}}{64\left(s_{1}-s_{1}'\right)}}d\vec{y}_{1}d\vec{y}_{2}d\vec{z}_{1}. \end{split} \tag{35}$$

Если воспользоваться разложением в ряд [9] входящих в выражение (35) функций

$$e^{2\vec{p}\vec{x}-p^2} = \pi^{3/2} \sum_{nlm} \phi_{nlm}^+(\vec{p}) \psi_{nlm}(\vec{x}),$$
 (36)

(функции  $\phi_{nlm}$ ,  $\psi_{nlm}$  определены в [9]), то для функции M можно получить выражение в виде сумм степенных рядов по переменным

$$\gamma_1 = \eta_1^2 + 4x_1^2, \quad \gamma_2 = \eta_2^2 + 4x_1^2, 
\gamma_1' = {\eta_1'}^2 + 4x_1'^2, \quad \gamma_2' = {\eta_2'}^2 + 4x_1'^2.$$
(37)

Из-за громоздкости этого выражения, включающего более девяти сумм, оно здесь не приводится.

Полученное выражение для обменного интеграла перекрытия имеет форму, аналогичную прямому интегралу.

В представленной работе для учета антисимметризации в кластерных системах развивается новый метод построения полностью антисимметризованных волновых функций на примере рассмотрения основного состояния ядра  $^8$  Ве, являющегося долгоживущим квазистационарным состоянием и проявляющимся только при рассеянии  $\alpha$ -частицы на  $\alpha$ -частице с шириной уровня  $\Gamma \sim 10$  эВ. ВФ кластеров рассчитываются по методу многомерных гиперсферических функций.

В связи с универсальностью развиваемого метода построения полностью антисимметризованных волновых функций кластерных систем, ВФ кластеров которых рассчитываются по методу МГСФ, развитыми приемами можно воспользоваться для описания систем с более сложной структурой.

В последующих работах планируется после получения аналитических выражений для матричных элементов кинетической и потенциальной энергии решить интегро-дифференциальное уравнение для функции относительного движения двух кластеров, образующих долгоживущее квазистационарное состояние.

В заключение отметим, что данная работа является теоретической основой для построения кластерных моделей различной природы и описания свойств некоторых возбужденных состояний ядер. Данная модель применима для двух, трех и большего числа кластеров. Кроме того, модель допускает наличие различного числа нуклонов в кластерах.

В отличие от феноменологических кластерных моделей, в которых используются феноменологические эффекты взаимодействия кластеров (вычисление которых является самостоятельной сложной проблемой), развитая модель для всех типов кластеров использует единые нуклоннуклонные потенциалы. Как известно, последние наиболее полно исследованы в ядерной физике.

Конкретные численные расчеты свойств ядра  $^8{
m Be}$  в рамках развитой кластерной модели будут представлены в последующих работах.

#### Список литературы

- 1. Brink D. M. Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi", Course 36, 1966.
- 2. Kalandarov Sh. A., Adamian G. G., et al. // Phys. Rev. 2011. Vol. C 84. P. 054607.
- 3. Danilin B. V., Zhukov M. V., Korshenin-nikov A. A., Chulkov L. V. // Sov. J. Nucl. Phys. 1991. Vol. 53. P. 45.
- 4. Danilin B. V., Zhukov M. V., Ershov S. N., et al. // Phys. Rev. 1991. Vol. C 43. P. 2835.
- 5. Zhukov M. V., Danilin B. V., Fedorov D.V., et al. // Phys. Rep. 1993. Vol. 231. P. 151.
- 6. Данилин Б. В., Шульгина Н. Б., Ершов С. Н., Вааген Я. С. // Ядерная физика. 2009. Т. 72, № 8, С. 1324–1337.
- 7. Shneidman T. M., Adamian G. G., Antonen-ko N. V., Jolos R. V. Claster approach to the structure of nuclei with  $Z \ge 96$  // Ядерная физика. 2007. Т. 70. № 80. С. 1497–1501.
- 8. Вильдермут К., Тан Я. Единая теория ядра. М.: Мир, 1980
- 9. Садовой А. А. Методы многомерных угловых функций в теоретической и прикладной физике. (Обзор). Арзамас-16: ВНИИЭФ, 1994.
- 10. Новые методы решения задачи многих тел в атомной, молекулярной и ядерной физике: Сборник научных статей / Под ред. А. А. Садового. Саров: ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 2008.
- 11. Kanellopulos Th. Wildermuth K. Antisimmetrization of "cluster model" wave functions and their expansion I "shell model" wave functions// Nuclear physics. 1960, Vol. 14, N. 3.
- 12. Мак-Вини Р., Сатклиф Б. // Квантовая механика молекул. М.: Мир, 1972.

Статья поступила в редакцию 07.06.2012.

#### К МЕТОДИКЕ ПОЛУЧЕНИЯ ВНЕШНЕТРАЕКТОРНЫХ ДАННЫХ В АЭРОБАЛЛИСТИЧЕСКОМ ЭКСПЕРИМЕНТЕ

С. И. Герасимов<sup>1,3</sup>, В. И. Костин<sup>1</sup>, В. А. Кикеев<sup>2</sup>, М. А. Хайруллин<sup>1</sup>

<sup>1</sup>ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ»; <sup>2</sup>НГТУ им Р. Е. Алексеева; <sup>3</sup>СарФТИ НИЯУ МИФИ

Оценивается возможность применения современных цифровых камер для решения задач ВТ ФГИ путем использования полупрофессиональной съемочной аппаратуры средней сложности и стоимости (Canon EOS-IDs и Kodak DCS Pro SLR/n). Для создания на основе этих камер ЦФСП требовалось: модернизировать цифровые неметрические камеры для фотосъемки в ОИК с близкого расстояния и обеспечить возможность проведения аттестации технических характеристик; адаптировать камеры в точный инструмент фотограмметрических измерений: разработать методическое и программноматематическое обеспечение фотограмметрической калибровки; произвести метрологическую аттестацию камер путем фотограмметрической калибровки технических характеристик; разработать вспомогательное оборудование, произвести монтаж, настройку и юстировку по уточнению координат положения и угловой ориентации камер ЦФСП в системе координат ОИК; выполнить экспериментальные исследования применения ЦФСП в реальных условиях использования при осуществлении ВТ ФГИ.

При создании ЦФСП: были разработаны рабочий макет фотограмметрического калибровочного стенда и метод калибровки камер, при котором фотографирование поля опорных точек каждой отдельной камерой производится независимо с 4 точек пространства; выполнена фотограмметрическая калибровка и паспортизация цифровых неметрических камер; произведена сборка оснастки и технологического оборудования, монтаж, настройка и юстировка ЦФСП; осуществлена экспериментальная проверка ЦФСП в плановых испытаниях в ряде аэробаллистических экспериментов в ОИК; выполнены оценки точности ВТ ФГИ, в том числе и сопоставление полученных результатов с данными штатной системы аналогового стереопоста.

Ключевые слова: аэробаллистический эксперимент, внешнетраекторные данные.

Решение современных задач экспериментальной аэробаллистики нуждается в точных внешнетраекторных данных как исходных материалах для определения аэродинамических характери стик. Для соответствия этим задачам к оптическому измерительному комплексу аэробаллистического тира [1] предъявляются все более высокие требования. Постепенное вытеснение из современного съемочного процесса аналоговой фотоаппаратуры цифровыми камерами, принявшее в настоящее время необратимый характер, обуславливает модернизацию оптико-измерительного комплекса (ОИК) путем замены морально и физически устаревших традиционных средств внешне-

траекторной регистрации — широкоугольных камер  $A\Phi A$ -41/100 на современную цифровую фотоаппаратуру.

#### Доработка и адаптация цифровых неметрических камер применительно к использованию в ОИК

#### Общие замечания

Основное требование к неметрическим цифровым камерам типа Canon EOS-IDs, которыми планируется оснастить оптический измерительный комплекс ОИК, – обеспечение внешнетраек-

торных фотограмметрических измерений, не уступающих по точности используемым штатным оптическим средствам — фотограмметрическим камерам  $A\Phi A$ -41/100.

В том виде, в каком эти камеры выпускаются промышленностью, они не могут быть использованы в ОИК для производства фотограмметрических съемок с близкого расстояния. Отвечая профессиональному уровню, но не фотограмметрическому назначению, неметрические цифровые камеры являются камерами с переменным фокусным расстоянием, в то время как для создания стационарных цифровых фотограмметрических стереопостов (ЦФСП) в ОИК требуются камеры с фиксированным фокусом. Здесь возникает ряд проблем, связанных с превращением неметрической камеры в инструмент для точных фотограмметрических измерений. Это - доработка и адаптация камер применительно к задачам и условиям их использования.

Доработка и адаптация включают два основных этапа:

- юстировку камеры, в процессе которой определяется и устанавливается эквивалентное фокусное расстояние, т. е. наилучшая фокусировка камеры, соответствующая наилучшему наблюдаемому зрительно разрешению, с последующей фиксацией промежуточного положения фокусировки объектива в камере;
- фотограмметрическую калибровку камеры,
   в процессе которой осуществляется метрологическая аттестация камеры, при которой определяются индивидуальные фотограмметрические карактеристики цифровой камеры, превращающие ее в точный инструмент фотограмметрических измерений.

#### Доработка цифровых фотокамер

Применительно к условиям использования цифровых камер в ОИК целью модернизации является фокусировка камеры на близкое расстояние с учетом выбора оптимальных значений переднего и заднего плана границ резкости. После фокусировки объектива в данном положении производилась его жесткая фиксация. Для этого, с помощью специально подобранного ленточного уплотнительного кольца (рис. 1,*a*), устранялись зазоры и люфты между оправой объектива и подвижным фокусировочным элементом (фокусировочной линзой).

С целью предотвращения расфокусировки камеры, из-за случайных механических или динамических воздействий на камеру, на объектив насаживалась цилиндрическая оправа (рис.  $1,\delta$ ), блокирующая смещение и вращение фокусировочного кольца объектива.

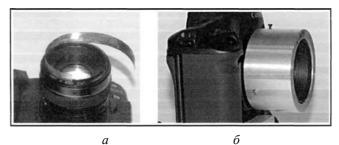


Рис. 1. Фиксация объектива камеры после перефокусировки: а — уплотнительная лента-кольцо; б — цилиндрическая оправа для блокировки смещения объектива

Обеспечение постоянства фокусировки камеры для заданных условий съемки обуславливает возможность проведения фотограмметрической калибровки. При этом гарантируется неизменность (постоянство во времени) фотограмметрических параметров цифровой камеры.

#### Фотограмметрическая калибровка цифровых камер

Фотограмметрическая калибровка представляет собой процесс аттестации цифровой фотокамеры, в результате которого определяются ее индивидуальные технические характеристики. Эти характеристики включают геометрические константы, известные под названием элементов внутреннего ориентирования.

При калибровке должна быть получена количественная информация об объективе и его связи с фокальной плоскостью фотокамеры, рассчитано такое значение фокусного расстояния, которое обеспечивает наилучшее распределение радиальной дисторсии применительно к предполагаемому использованию фотокамеры.

Вопрос калибровки цифровых камер практически легко решается, хотя следует отметить достаточно высокую трудоемкость этого процесса. Если при калибровке фотокамера должна строго ориентироваться относительно фотографируемых точек, то усложняется оборудование, но упрощаются методы математической обработки результатов измерений. Наоборот, при минимальных требованиях к ориентированию камеры, оборудова-

ние максимально упрощается, но усложняются методы математической обработки результатов измерений.

Немаловажными аспектами калибровки являются: точность используемого оборудования; методика и оценка точности выполненных измерений, и обработка их результатов.

При калибровке, как минимум, должны быть определены:

- эквивалентное калиброванное фокусное расстояние, соответствующее наилучшей фокусировке фотоаппарата, зафиксированной при его юстировке;
- главная точка снимка  $x_0$   $y_0$  (точка нулевой дисторсии).
  - средняя радиальная дисторсия  $\Delta r$ ,

Для юстировки и калибровки разработан способ, основанный на фотографировании системы геодезических опорных точек, пространственные координаты которых известны. Предложена технология, обладающая тем преимуществом, что фотосъемка опорных точек, выполняемая одной и той же камерой, осуществляется независимо с 4 точек пространства. Разработана компьютерная программа совместной математической обработки 4 снимков методом наименьших квадратов (МНК), которая позволяет получать метрически достоверные фотограмметрические параметры калибровки с возможностью их использования для высокоточных внешнетраекторных измерений параметров движения ОИ в аэробаллистических экспериментах в ОИК. В качестве инструмента для организации и осуществления процесса фотосъемки опорных точек был разработан специальный калибровочный стенд [2].

# Расчет параметров фокусировки для фотограмметрической съемки с близкого расстояния

При аэробаллистических испытаниях моделей в ОИК фотосъемку производят с относительно малого (близкого) расстояния, поэтому необходимо установить оптическую сопряженность между объектом и его изображением. Для расчета глубины резкости изображения в определенном диапазоне расстояний до объекта, необходимо знать минимальное расстояние до объекта, при котором его изображение на снимке получится достаточно резким для измерительных целей. Это расстояние D до точки на оптической оси фотокамеры (сфо-

кусированной на «бесконечность»), начиная от которого и до бесконечности все предметы на изображении при заданном максимальном диаметре  $\delta$  кружка нерезкости получаются резкими, называется гиперфокальным.

Это расстояние определяется по формуле

$$D = \frac{f^2}{\delta} \frac{d}{f},\tag{1}$$

где  $\delta$  — допустимый диаметр кружка нерезкого изображения точки; f — фокусное расстояние объектива фотокамеры, сфокусированной на бесконечность; d/f — относительное отверстие объектива фотокамеры.

Формула (1) показывает, что при съемке с малых расстояний резкость изображения можно повысить диафрагмированием. Увеличение кружка нерезкости δ влияет на измерительную точность снимка. Однако если измерения на снимках производят по маркированным точкам, то величина нерезкости сказывается в меньшей степени, поскольку, хотя края марки и изображаются несколько нерезкими, визирование на центр при измерениях выполняется почти с одинаковой точностью.

Предельно допустимая величина нерезкости обусловлена разрешающей способностью объектива фотокамеры. Так, для объектива EF 50 mm 1,4 USM, которым оснащена фотокамера Canon EOS IDs, разрешающая способность объектива ~ 20 мм<sup>-1</sup>, что соответствует в линейной мере 0,05 мм. Опыт работ показывает, что при измерении по маркированным точкам нерезкость порядка 0,05 мм допустима, поэтому при расчетах принимаем 0,05 мм. Тогда гиперфокальное расстояние, рассчитанное по формуле (1) при относительном отверстии объектива d/f = 1/8, будет равно D = 6,25 м, а глубина резкости будет простираться от D = 6.25 м до бесконечности. Глубину резкости изображаемого пространства  $\Delta Z$  при съемке можно вычислить по значению гиперфокального расстояния

$$\Delta Z = 2Z_0^2 D/(D^2 - Z_0^2), \tag{2}$$

где  $Z_0$  — отстояние до плоскости наводки на резкость; D — гиперфокальное расстояние, определяемое формулой (1) при заданном значении диаметра  $\delta$  кружка нерезкости. Границы глубины резкости можно вычислить по формулам

$$Z_{\min} = Z_0(D + f)/(D + Z_0) \approx DZ_0/(D + Z_0),$$
 (3)

$$Z_{\text{max}} = Z_0(D + f)/(D - Z_0) \approx DZ_0/(D - Z_0).$$
 (4)

Расчеты по формулам (1) – (4) для определения глубины и границ резкости приведены в табл. 1.

Таблипа 1

Допустимый кружок нерезкости б, мм	$f_{\text{объектива}} = 50$ мм; $d/f$ -1 / 8					
	Гиперфокальное расстояние $D$ , м	Границы резкости, м				
0,05		передняя $Z_{\min}$	задняя $Z_{ m max}$			
	6,25	2,9	40,0			

Следует иметь в виду, что в расчетах расстояние фокусировки  $Z_0 = 5,5$  м выбрано исходя из высоты оси полета (оси стрельбы) ОИ в ОИК, совпадающей с центром зоны регистрации стереопоста ( $Y \approx 2,33$  м). Фактически же наблюдаемая высота полета в среднем колеблется в пределах 1,5-1,9 м, за редким исключением. С учетом этого расчет фокусировки для нижней и верхней камеры наиболее целесообразно производить для расстояний  $Z_0 = 5,3$  м и 5,7 м соответственно, либо повышать ось стрельбы до  $Y \approx 2,33$  м для сохранения симметрии схемы регистрации и оптимизации подсветки модели.

Передняя граница резкости обеспечивает приемлемую глубину пространства для размещения опорных точек в зоне стереопоста в диапазоне отстояний по оси Z от 2,9 до 5,1 м, слева от оси полета ОИ, необходимых для повышения точности и надежности процесса юстировки стереопоста.

#### Фокусировка и фиксация объектива цифровой камеры

Известно, что объектив, имеющий хорошее качество изображения, может дать плохие результаты при съемке, если он недостаточно точно выставлен в камере. Положение объектива относительно плоскости снимка (в данном случае относительно плоскости светочувствительной матрицы камеры) для съемки на любую дистанцию должно быть строго определенное, поэтому возникает потребность в способе установки и проверки фокусировки объектива на заданную дистанцию. Как показали исследования, использование электронных средств автофокусировки камеры, способа ручной фокусировки через видоискатель, либо дистанционной шкалы на переходной оправе объектива, не обеспечивает наилучшей резкости изображения. Поэтому юстировка фотокамеры по выбору точного положения объектива осуществлялась при помощи дополнительной дистанционной шкалы, временно устанавливаемой на оправу объектива. Шаг штрихов шкалы задавался минимально возможным [2].

Процесс фокусировки заключался в том, что на требуемой дистанции фокусировки  $Z_0 = 5,4$  м выставлялась предметная шкала, либо штриховая мира и производилось ее фотографирование при пошаговом изменении положения объектива, задаваемого по штрихам дополнительной дистанционной шкалы. Каждый из полученных снимков оценивался в компьютере по резкости предметной шкалы и выбирался снимок с наилучшей резкостью. По штриху дистанционной шкалы, на котором был получен данный снимок, устанавливалось и фиксировалось положение объектива в фотокамере, которое указывало на соответствие заданной дистанции фокусировки при наилучшей резкости изображения.

#### Калибровочный стенд

Для экспериментальных исследований при отработке методики фотограмметрической калибровки цифровых камер создан рабочий макет калибровочного стенда. Основное назначение калибровочного стенда, кроме решения задач фокусировки осуществление жесткой фиксации объектива камеры в промежуточном положении. Этим самым достигается постоянство фокусного расстояния камеры, отъюстированной на заданное расстояние, а также обеспечивается необходимая для заданных условий съемки глубина резкости изображения, с гарантией неизменности (сохранности во времени) фотограмметрических параметров калибровки: фокусного расстояния камеры, координат главной точки и радиальной дисторсии объектива [2].

Технологическое оборудование стенда включает:

- систему из 70 опорных геодезических точек, равномерно расположенных в плоскости стенда по 4 взаимно пересекающимся направлениям (рис. 2);
- геодезическую систему опорных реперов и точек установки геодезических средств измерений для координирования опорных точек;
- специальную направляющую для установки и продольного смещения калибруемых камер при выборе требуемой дистанции фокусировки.

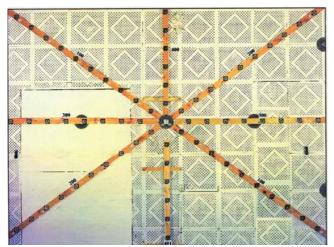


Рис. 2. Рабочий макет калибровочного стенда (изображение поля опорных геодезических точек)

Для однозначного решения задачи определения элементов как внутреннего ориентирования, так и внешнего ориентирования камеры в составе стенда предусмотрены также регулируемые подставки (штативы) для дополнительной установки 3–4 опорных точек на переднем плане.

Практически полноценный калибровочный стенд должен иметь систему из не менее 150 опорных точек для равномерного распределения по полю снимка и порядка 5–9 точек в ближнем плане.

Одной из наиболее сложных и важных задач при подготовке калибровочного стенда к проведению работ по метрологической аттестации камер, является обеспечение высокоточных ( $\pm 0,1-0,3\,$  мм) пространственных геодезических измерений координат опорных точек, принимаемых за истинные при последующих вычислениях результатов фотограмметрической калибровки камер.





Рис. 3. Геодезические средства угломерно-дальномер-ных измерений: а — электронный тахеометр; б — уголковый отражатель

Для этого используются прецизионные геодезические средства измерений – электронный тахеометр (рис. 3) и другие вспомогательные устройства, а

также соответствующая методика измерений, основанная на многократных (не < 3) приемах измерений, с осреднением и оценкой точности получения результатов.

#### Получение калибровочных снимков

Для получения калибровочных снимков используется пространственное поле опорных точек калибровочного стенда, располагаемых на конечном расстоянии от фотокамеры, которой производится их фотографирование. Исследуемая камера устанавливается последовательно в каждой из 4 точек фотографирования и ориентируется в центр калибровочного стенда так, чтобы в ее поле зрения попало максимально возможное количество опорных точек. Во всех случаях расстояние от фотокамеры до опорных точек должно быть не меньше расстояния до его переднего фронта резкости, чтобы четкость изображения точек в фокальной плоскости соответствовала разрешающей способности объектива камеры.

При выполнении калибровки все элементы оптической системы, зафиксированные при юстировке, и установочные параметры камеры (величина действующего отверстия) должны находиться в эксплуатационном положении, какое предполагается при производственном использовании камеры.

Экспериментально определяется оптимальная подсветка опорных точек и обеспечивается возможность получения требуемой выдержки.

Во время фотографирования фиксируются:

- обозначение каждого получаемого снимка;
- результаты геодезической привязки точек фотографирования (с точностью до  $\pm$  10–50 мм);
  - углы ориентации  $\upsilon$ ,  $\varphi$ ,  $\gamma$  фотокамеры ( $\pm 1^{\circ}-5^{\circ}$ ).

#### Фотограмметрическая обработка калибровочных снимков. Система координат цифрового фотоснимка

В цифровой фотограмметрии, базирующейся на цифровых изображениях, носителем информации является пиксел. Поэтому в отличие от аналогового фотоснимка, представляемого в непрерывном виде, цифровое изображение представляется в дискретном (цифровом) виде, а световые лучи, попадающие от объекта съемки через объек-

тив на фокальную плоскость цифровой камеры, регистрируются не на пленке, а с помощью датчиков камеры. Размеры пикселя зависят от разрешения цифровой камеры и определяют измерительные возможности цифрового снимка.

Цифровое изображение можно представить в виде двухмерной матрицы G по размерам, заданным коэффициентом прямоугольности, с элементами g(m, n), которые меняются одновременно с изменением координат изображения x, y. Число пикселей и соответствующее им число пар координат конечно, а не непрерывно, как на фотоснимке. Поэтому координаты в цифровом изображении могут быть только дискретными. Место каждого элемента в матрице G определяется по координатам изображения:

$$x = x_0 + m\Delta x$$
,  $y = y_0 + n\Delta y$ ,

где m = 0, 1, 2,...M; n = 0, 1, 2, ...N;  $\Delta x;$   $\Delta y -$  интервалы между соседними точками изображения (размер пикселя),  $x_0, y_0$  — начало отсчета координат.

На практике принимается  $\Delta x = \Delta y$  и N = M. Для элементов g(m,n), соответствующих одному пикселю матрицы G, применимы только дискретные величины.

Матрицу G, элементами которой являются значения g(m,n), можно представить следующим образом:

Матрица G является точным цифровым изображением снимаемого объекта. Каждому ее элементу соответствует один пиксель. Величина g(m,n), отнесенная к конкретному пикселю, обозначает его положение в матрице G, а сама матрица является носителем прямоугольной системы координат хуг цифрового снимка. Любая точка на цифровом снимке, в том числе и главная точка  $X_0$ ,  $Y_0$ , может быть определена в этой системе координатами любого пикселя. При задании системы координат можно использовать два способа. В первом способе начало отсчета координат измеряется на цифровом изображении в центральном пикселе. Тогда координаты главной точки, как точки симметрии для учета дисторсии, будут задаваться как смещения от центрального пикселя по осям х и у. Во втором способе в качестве точки начала отсчета координат измеряется левый нижний пиксель изображения, а координаты главной точки задаются как смещения от левого нижнего пикселя по осям х и у. Эти смещения рассчитываются по данным фотограмметрической калибровки камеры. С точки зрения пользователя удобнее всего работать в системе координат x, y, связанной с левым нижним пикселем изображения [2].

#### Измерение координат цифрового снимка

Полученные калибровочные снимки обрабатывались с помощью фотограмметрического программного обеспечения «Photomod BT ФГИ» [3] (рис. 4), предназначенного для съема координатной информации с цифровых изображений. Измерение координат снимков осуществлялось оператором путем отождествления и наведения

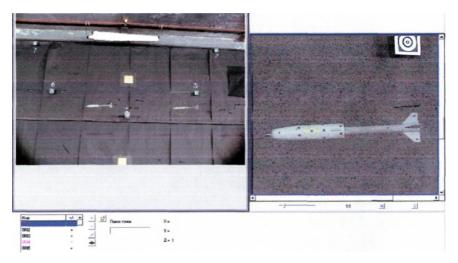


Рис. 4. Окно ПО Photomod ВТ ФГИ «Измерение точек»

измерительного маркера (курсора) последовательно на изображения всех реперных точек. ПО «Photomod BT ФГИ» обеспечивает высокую (субпиксельную) точность измерения координат с погрешностью, меньшей, чем разрешение элемента изображения камеры (не хуже 2 мкм).

При измерениях использовался второй способ выбора начала отсчета координат в левом нижнем пикселе изображения. По каждой камере измерялось от 4 до 12 снимков (1–3 снимка с каждой точки фотографирования). На этих материалах осуществлялись отработка методики фотограмметрической калибровки и вычисление параметров внутреннего ориентирования камер.

#### Математическое описание задачи калибровки

Процесс калибровки предполагает, что получаемые калибровочные снимки строго соответствуют внутренним связкам лучей камеры.

Получаемая координатная информация — совокупность данных из измерений фотокоординат опорных точек на калибровочных снимках, опорная координатная информация геодезических измерений, предварительных калибровок камеры, обрабатывается по специальной программе. В результате обработки аналитически определяются параметры как внутреннего, так и внешнего ориентирования камеры.

Параметрами внутреннего ориентирования являются координаты центра проектирования в системе координат фотоснимка, т. е. положение главной точки, фокусное расстояние и коэффициенты дисторсии. А параметры внешнего ориентирования определяют связь системы координат фотоснимка и выбранной внешней системы координат.

В качестве внешней системы координат и параметров внешнего ориентирования камеры: координат центра проектирования (Xs, Ys, Zs); угла наклона v, угла отклонения v и угла разворота v системы координат цифрового снимка, выбрана условная геодезическая система координат калибровочного стенда v0 началом в правой точке базиса, v0 которого осуществляются геодезические измерения координат (v1 v1 v2 v1, поля опорных точек.

Условные уравнения, используемые при калибровке и связывающие между собой точные значения исходной координатной информации с определяемыми параметрами, имеют вид

$$\begin{vmatrix} x \\ y \\ f_{\kappa} \end{vmatrix} = K \cdot \begin{vmatrix} X_{\Phi} \\ Y_{\Phi} \\ Z_{\Phi} \end{vmatrix}$$
 (5)

где x, y — неискаженные координаты изображений опорных точек на снимке;  $f_{\kappa}$  — калиброванное фокусное расстояние камеры; K — коэффициент пропорциональности;

$$\begin{vmatrix} X_{\phi} \\ Y_{\phi} \\ Z_{\phi} \end{vmatrix} = A \cdot \begin{vmatrix} X_{\Gamma} - X_{S} \\ Y_{\Gamma} - Y_{S} \\ Z_{\Gamma} - Z_{S} \end{vmatrix}$$
 (6)

 $X_{\Phi}$   $Y_{\Phi}$   $Z_{\Phi}$  — пространственные фотограмметрические координаты опорных точек в системе координат камеры;  $X_{\Gamma}$ ,  $Y_{\Gamma}$ ,  $Z_{\Gamma}$  — координаты опорных точек в условной системе геодезических измерений;  $X_s$ ,  $Y_s$ ,  $Z_s$  — координаты точки фотографирования; A — матрица направляющих косинусов, устанавливающая угловую связь между координатами  $X_{\Phi}$   $Y_{\Phi}$   $Z_{\Phi}$  и x, y.

Исключив из формулы (5) коэффициент пропорциональности K, получим уравнения

$$x = f_{\kappa} X_{\phi} / Z_{\phi},$$
  

$$y = f_{\kappa} Y_{\phi} / Z_{\phi},$$
(7)

которые представляют собой используемые в фотограмметрии уравнения коллинеарности.

Поскольку измерения по снимку отнесены к началу координат, а не к главной точке, то

$$x' = x - x_0, y' = y - y_0,$$
 (8)

где x', y' — координаты, отнесенные к главной точке, но не исправленные за дисторсию; x, y — измеренные и осредненные координаты в системе координат снимка;  $x_0$ ,  $y_0$  — неизвестные или приближенно известные координаты главной точки.

Радиальная дисторсия  $\Delta r$  может быть представлена относительно неизвестного значения фокусного расстояния, например, в виде

$$\Delta r = k_1 r^1 + k_2 r^2 + k_3 r^3 + \dots$$
 (9)

где r — радиальное расстояние от точки изображения до главной точки. При этом

$$r = \sqrt{x^{/2} + y^{/2}} = \sqrt{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)}.$$
 (10)

Поскольку  $\Delta x' = (x'/r) \, \Delta r \,$  и  $\Delta y' = (y'/r) \, \Delta r,$  где  $\Delta x'$  и  $\Delta y'$  – поправки к x' и y , то

$$x = x' + \Delta x' = x' + \frac{x'}{r} \Delta r = x' \left( 1 + \frac{\Delta r}{r} \right);$$

$$y = y' + \Delta y' = y' + \frac{y'}{r} \Delta r = y' \left( 1 + \frac{\Delta r}{r} \right).$$
(11)

После подстановки (8) и (9) в (11) получим

$$x = (x - x_0)(1 + k_1 + k_2r + k_3r^2 + ...);$$
  

$$y = (y - y_0)(1 + k_1 + k_2r + k_3r^2 + ...).$$
 (12)

Уравнения (12) могут быть подставлены в (5), после чего получим

$$(x_i - x_0)(1 + k_1 + k_2r + k_3r^2 + ...) + f_{\kappa}X_{\Phi}/Z_{\Phi};$$
 (13)  
 $(y_i - y_0)(1 + k_1 + k_2r + k_3r^2 + ...) + f_{\kappa}Y_{\Phi}/Z_{\Phi}.$ 

Эти уравнения могут быть записаны в форме условных уравнений для *i-*й опорной точки

$$v_{xi} = (x_i - x_0)(1 + k_1 + k_2 r + k_3 r^2 + ...) + f_{\kappa} \cdot X_{\phi} / Z_{\phi} = 0;$$
(14)

Уравнения (14) должны быть линеаризованы, для чего положим

$$f_{k} = f_{k}^{0} + \delta f_{k}, k_{1} = k_{1}^{0} + \delta k_{1}, X_{s} = X_{s}^{0} + \delta X_{s}, \upsilon = \upsilon^{0} + \delta_{\upsilon};$$

$$x_{0} = x_{0}^{0} + \delta x_{0}, k_{2} = k_{2}^{0} + \delta k_{2}, Y_{s} = Y_{s}^{0} + \delta Y_{s}, \phi = \phi^{0} + \delta_{\phi};$$

$$y_{0} = y_{0}^{0} + \delta y_{0}, k_{3} = k_{3}^{0} + \delta k_{3}, Z_{s} = Z_{s}^{0} + \delta Z_{s}, \gamma = \gamma^{0} + \delta_{\gamma},$$

$$(15)$$

а также

$$x_i = x_i^0 + 9x_i;$$
  
$$y_i = y_i^0 + 9y_i,$$

где верхний значок «нуль» указывает на измеренные или приближенные значения величин; через  $\delta$  обозначены поправки к приближенным значениям, а через  $\vartheta$  — поправки к измеренным значениям координат изображений опорных точек.

После подстановки (14) в (13) и разложения в ряд Тейлора получают уравнения, которые для упрощения, ввиду громоздкости написания, приводятся в матричной форме. Эти уравнения для всех *т* опорных точек имеют вид

$$9 + B\delta = \varepsilon$$
,

где

Уравнения составляются для каждой опорной точки, координаты которой были измерены на фотоснимке. Эти уравнения решаются относительно дифференциальных поправок ( $\delta f_k$ ,  $\delta x_0,...$   $\delta \gamma_0$ ), которые придаются к приближенным значениям  $(f_k^0, x_k^0, \dots, y_k^0)$ , в результате чего получается следующее приближение. Необходимо отметить, что начальное и каждое последующее приближенное значение коэффициентов  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$  удовлетворяет уравнениям, а окончательные значения коэффициентов эквивалентны последним дифференциальным поправкам к ним. Решение последовательными приближениями продолжается до тех пор, пока поправки δ (за исключением коэффициентов к) не станут достаточно малы или пока весовая сумма квадратов остаточных невязок s (16) не стабилизируется.

Поскольку всегда будут иметься избыточные данные, т. е. число уравнений будет больше числа неизвестных, применяется строгое решение по способу МНК под условием минимума суммы квадратов величин

$$s = \vartheta^T \sigma^{-1} \vartheta, \tag{16}$$

где  $\sigma$  — ковариационная матрица для m опорных точек.

Грубые ошибки в измерении координат изображений опорных точек являются обычным источником затруднений при уравнивании. Поэтому все измерения с большими остаточными невязками должны быть исключены, после чего уравнивание следует повторить.

Для того чтобы определить фокусное расстояние и функцию дисторсии для некоторого желательного распределения (например, чтобы абсолютные величины максимальной положительной и отрицательной поправок были равны), следует найти расстояние r, при котором поправки равны нулю. Наиболее просто это делается графически. Затем вычисляются

$$f_k = f_k \left( \frac{r'}{r' + \Delta r'} \right), \Delta f_k = \left( \frac{-\Delta r'}{r' + \Delta r'} \right) \approx f_k \left( \frac{-\Delta r}{r} \right),$$

где  $\Delta r^{\prime}$  — ранее полученное значение дисторсии для расстояния  $r^{\prime}$ .

#### Результаты фотограмметрической калибровки цифровых камер

По методике, описанной выше, выполнена фотограмметрическая калибровка и получены параметры внутреннего ориентирования (фокусное расстояние, координаты главной точки и дисторсия) цифровых неметрических камер:

- Canon EOS-IDs, разрешение 4063x2703 (11,4 Мп), фокусное расстояние 50 мм, формат кадра 23,8x35,8 мм;

<u>- Kodak DCS Pro,</u> разрешение 4500х3000 (13,5 Mп), фокусное расстояние 50 мм, формат кадра 23,7х35,5 мм.

Пример результата калибровки показан на рис. 5 в виде формы разработанного формуляра. Калибровка выполнялась только для промежуточного значения фокусного расстояния, соответствующего расстоянию до плоскости наводки на резкость  $Z_0 = 5,4$  м.

Качество или точность определения параметров согласования при выполнении калибровки характеризуется окончательными величинами отклонений расчетных координат опорных точек от их измеренных значений (остаточными невязками), которые в целом не превышают случайных погрешностей измерения координат снимков. Дисторсия определялась по четырем осям (практически по всей площади кадра) и оказалась очень большой на периферии кадра. Так, например, для камеры Kodak DCS Pro №22399 — до 45 пикселов (354 мкм).

Проведенные оценки показали, что для полной калибровки камеры требуется три конвергентных снимка или более. Направления съемки для этих снимков ни в коем случае не должны лежать в одной плоскости. При трех съемках они должны образовывать, например, грани, лежащие на пересечениях возникающей равносторонней пирамиды.

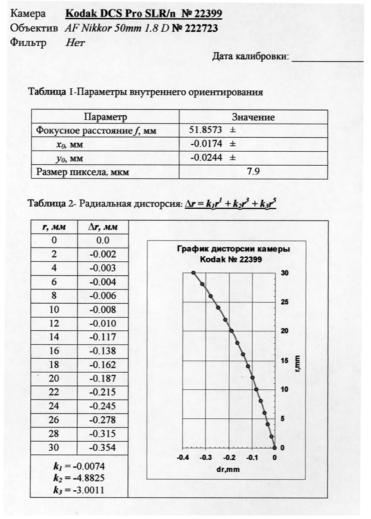


Рис. 5. Паспорт фотограмметрической калибровки цифровой камеры

### Разработка элементов конструкции для монтажа и крепления камер

Одним из требований, предъявляемых к установке камеры в проектное (рабочее) положение — жесткость крепления, обеспечивающая неизменность пространственной ориентации камеры во времени. Используемые цифровые камеры, как правило, имеют пластмассовый корпус с отдельными элементами металлических (алюминиевых) вставок. Обеспечить жесткий захват такой камеры весьма проблематично. Для решения данной проблемы были разработаны и изготовлены конструктивные элементы специальной оснастки:

- платформы-ложементы (рис. 6), обеспечивающие жесткую фиксацию корпуса, освобождая тем самым его от возможных деформаций при установке камеры по месту использования;
- стальные боксы-сейфы для размещения камер (рис. 7), выполняющие одновременно роль защиты камеры от физического воздействия во время опыта, а также ее сохранения от несанкционированного доступа; в нижней части боксов сосредоточены адаптер питания и блок управления затвором камеры.

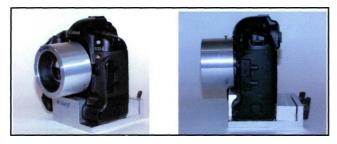


Рис. 6. Камера на платформе-ложементе

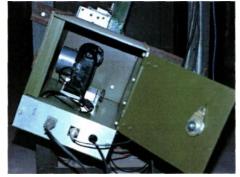


Рис. 7. Размещение камеры в боксе-сейфе

#### Монтаж оборудования стереопоста

Экспериментальный вариант стереопоста в составе 4 цифровых фотокамер был смонтирован

в зоне расположения штатного аналогового стереопоста (AC) без нарушения его дальнейшего функционирования. Боксы вместе с установленными в них камерами жестко крепились к металлоконструкции штатного AC-5 (см. рис. 8, выделены зеленым цветом) и ориентировались в пространстве измерительной трассы ОИК.



Рис. 8. Общий вид экспериментального ЦФСП

Две камеры Canon EOS-IDs были смонтированы на вертикальном базисе фермы-стойки крепления штатных АФА, а две другие камеры — Kodak Pro SLR/n — на горизонтальном базисе швеллера помоста для обслуживания камер АФА. В этом смысле, стабильность положения камер, располагаемых на горизонтальном базисе, недостаточно надежно. В центре стереопоста установлен бокс технологического пульта управления, аналогичный боксу-сейфу для размещения камер. В нем размещены кабели питания и управления камерами, а также концентратор Kramer VS-8FW, обеспечивающий доступ ко всем 4-м камерам при вы полнении настроек и скачивании опытной фото-информации в портативный компьютер.

#### Юстировка стереопоста

По завершении монтажа ЦФСП, подключения линий электропитания и управления цифровых камер, были проведены соответствующие пусконаладочные работы и выполнена юстировка по определению параметров внешнего ориентирования камер с целью «встраивания» стереопоста в систему координат измерительной трассы ОИК. Для юстировки в зоне АС была организована сеть настенных и выносимых на передний план опорных геодезических точек, с обеспечением высокоточной привязки (± 0,3–0,5 мм) в системе координат измерительной трассы ОИК. В отличие от штатной методики юстировки, основанной на створно-нивелирных измерениях, здесь была при-

менена методика с использованием электронного тахеометра.

Большие затруднения в постановке и проведении котировочных работ были связаны с организацией создания опорных точек (контрольных марок), которая была далека от совершенства по причине временного обустройства цифрового стереопоста, отсутствия необходимого конструктивного оформления контрольных марок. Использовались импровизированные контрольные марки, изготовленные из подручных материалов. Вторая проблема заключалась в создании дополнительной створной линии для организации точек базиса съемки для установки и центрирования электронного тахеометра в ограниченном пространстве коридора створной линии.

В перспективе качество юстировки стереопостов ОИК может быть существенно улучшено и усовершенствовано путем внедрения и использования современных лазерных технологий (на базе лазерного трекера). Это позволит значительно сократить время, требуемое для выполнения юстировки. Результаты юстировки могут быть получены в течение рабочего дня и, появляется возможность выполнения юстировки непосредственно перед проведением аэробаллистических испытаний.

### Результаты экспериментальных исследований ЦФСП

Результаты исследований по разработке и созданию стереопоста: принципиальные положения схемы регистрации, технология, методика калибровки камер и вышолнения внешнетраекторных фотограмметрических измерений были проверены и использованы в производственных условиях применения.

В качестве примера на рис. 9 приведены фрагменты цифровой съемки, выполненной в одном из опытов.

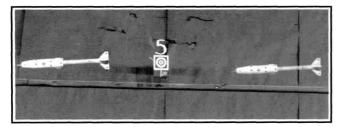


Рис. 9. Фрагмент цифровой фотосъемки в опыте

Для оценки точностных характеристик использования ЦФСП при решении задач ВТ ФГИ в производственных условиях применения проведен анализ опытной информации, который заключался в фотограмметрической и математической обработке цифровых снимков стереопоста, полученных в нескольких опытах. Методика обработки была одинакова для всех опытов. Координатная (фотограмметрическая) обработка снимков проводилась с использованием программного обеспечения Photomod BT ФГИ (см. рис. 4). Для каждого снимка измерялись фотокоординаты опорных точек геодезического обоснования и координаты реперных марок на боковой поверхности испытываемой аэродинамической модели. С помощью программного обеспечения «АСНИ Филин» (разработка ВНИИЭФ) проводилось уточнение параметров внешнего ориентирования камер в опыте. При обработке использовались параметры фотограмметрической калибровки (фокусное расстояние, координаты главной точки и коэффициенты радиальной дисторсии), полученные на этапе аттестации камер в условиях калибровочного стенда. Используя полученные данные, вычислялись внешнетраекторные параметры движения: пространственные линейные (X,Y,Z) и угловые  $(v,\phi,\gamma)$ координаты модели в опыте.

В табл. 2 приведены экспериментальные оценки результатов ВТ ФГИ параметров движения модели, полученных в опытах цифровым стереопостом и, для сравнения, — результаты измерений штатным пятым постом аэробаллистического тира АС-5.

Как видно из анализа таблицы, полученные в опытах точности ВТ ФГИ характеризуются среднеквадратическими погрешностями, равными 0,1-0,4 мм по линейным координатам и  $0,1^{\circ}-0,7^{\circ}$  по угловым координатам.

По отношению к измерениям, выполненным традиционными средствами штатного фотопо ста АС-5, наблюдается практически полное совпадение результатов при значительно меньших, в 1,5–2,0 раза, погрешностях. Это свидетельствует о том, что методика ВТ ФГИ, основанная на использовании цифровых фотокамер, наиболее эффективна, но требует предварительной юстировки и прецизионной фотограмметрической калибровки камер, входящих в состав цифрового стереопоста.

Таблица 2

# Внешнетраекторные фотограмметрических измерения параметров движения ОИ в трех опытах

Средства	Положение	X	У	Z	υ	φ	γ			
регистрации	ОИ	М			град					
Опыт 1										
АП-5	2	38,504	1,502	0,102	-3,6	1,7	209,4			
ЦФСП	2	38,502	1,501	0,102	-3,6	2Д	211,5			
АП-5	3	40,008	1,467	0,104	-3,6	2,1	209,3			
ЦФСП	3	40,010	1,467	0,102	-3,5	1,8	207,9			
Опыт 2										
АП-5	2	38,807	1,904	0,053	-3,9	-2,0	341,3			
ЦФСП	2	38,806	1,905	0,053	-3,9	-1,9	342,1			
АП-5	3	40,316	1,893	0,056	-4,5	-1,8	341,5			
ЦФСП	3	40,315	1,893 0,055 -4,5 -1,7		-1,7	342,1				
Опыт 3										
АП-5	2	38,350	2,151	-0,032	2,0	1,6	513,3			
ЦФСП	2	38,349	2,152	-0,032	1,9	1,7	512,5			
АП-5	3	39,851	2,146	-0,032	1,2	1,4	520,5			
ЦФСП	3	39,849	2,148	-0,032 1,3 1,5		1,5	519,9			
Опыт 4										
АП-5	2	38,358	2,161	0,383	-3,6	-3,1	265,4			
ЦФСП	2	38,356	2,161	0,382	-3,6	-3,0	265,0			
АП-5	3	39,862	2,151 0,395 -3,6		-2,7	276,4				
ЦФСП	3	39,859	2,151 0,394 -3,7		-2,5	277,5				

#### Спсиок литературы

- 1. Герасимов С. И., Файков Ю. И., Холин С. А. Кумулятивные источники света. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2011.
- 2. Герасимов С. И., Калмыков П. Н., Костин В. И. Получение внешнетраекторных данных в аэробаллистическом эксперименте: Сборник статей XX Юбилейной Всероссийской научно-

технической школы-семинара «Обработка, передача и отображение информации о быстропротекающих процессах». М.: РПА «АПР», 2009.

3. Система «Photomod BT  $\Phi$ ГИ». Программа «Photomod AT». Руководство пользователя. М.: Ракурс, 2006.

Статья поступила в редакцию 07.06.2012.

## ВОЗДЕЙСТВИЕ ГИПЕРЗВУКОВЫХ ПОТОКОВ НА ШАРЫ ИЗ РАЗЛИЧНЫХ МАТЕРИАЛОВ В СВОБОДНОМ ПОЛЕТЕ

С. И. Герасимов<sup>1,3</sup>, В. А. Кикеев<sup>2</sup>, В. Е. Лысенков<sup>1</sup>, С. И. Осеева К. В. <sup>1</sup>, Тотышев<sup>1</sup>, А. П. Фомкин<sup>1</sup>

 $^{1}$ ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ»;  $^{2}$ НГТУ им Р. Е. Алексеева;  $^{3}$ СарФТИ НИЯУ МИФИ

Представлены результаты визуализации поведения различных конструкционных материалов (сплавов, композитных материалов) при воздействии гиперзвукового потока в условиях наземного аэробаллистического эксперимента. Указанные материалы свидетельствуют о широких возможностях аэробаллистического метода /1/ в исследованиях аэрофизических процессов разрушения материалов в условиях свободного полета (полет в невозмущенной атмосфере без влияния поддерживающих устройств и т.п.) с гиперзвуковой скоростью, в частности, исследования метеорных явлений применительно к проблеме метеорной опасности.

Ключевые слова: аэробаллистический эксперимент, коэффициент сопротивления.

Объектами испытаний являлись шары, изготовленные из:

- высокопрочного сплава BP, диаметром10,4 мм и массой 11,5 г (опыты 1–3, 6);
- псевдосплава ВНЖ, диаметром 10,4 мм и массой 10,5 г (опыт 4);
- тугоплавкого материала с добавлением никеля, диаметром 10,4 мм и массой 11,3 г (опыт 5);
- тугоплавкого материала W, диаметром 9,5 мм и массой 8,6 г (опыты 7–9).

Фотографии объектов представлены на рис. 1.

Испытания проводились путем отстрела метаемого объекта в свободный полет с начальной скоростью  $3,77 \le V_0 \le 6,34$  км/с из легкогазовой

установки ЛГУ-16, внешний вид которой представлен на рис. 2. На начальном участке полета происходило разделение модели с поддоном и отсечение поддона и дульного выхлопа, далее методом рентгенографии на расстоянии  $X_{\rm PA1}\approx 6$  м от среза ствола ЛГУ осуществлялся контроль целостности метаемого объекта и регистрация текущих обводов объекта испытаний (ОИ). Три дополнительных рентгеновских аппарата для регистрации текущих обводов ОИ размещались на измерительном участке аэробаллистического тира (АБТ) [1] на расстоянии  $X_{\rm PA2}\approx 90$  м,  $X_{\rm PA3}\approx 126$  м,  $X_{\rm PA4}\approx 144$  м (рис. 3).





Рис. 1. Два шара в поддонах перед опытами: из высокопрочного сплава ВР диаметром 10,4 мм — слева, из тугоплавкого материала W диаметром 9,5 мм — справа (фотографии с разных ракурсов)





б



Рис. 3. Внутренний вид измерительного участка АБТ

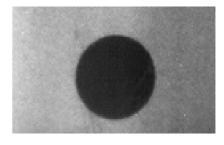
Регистрация оптических эффектов, сопровождающих полет ОИ, осуществлялась камерой АФА-41/100, установленной в начале измерительного участка АБТ в угон, и комбинированного фотопоста (КФП) на базе электронно-оптического комплекса для скоростной регистрации серии изображений быстропротекающего процесса "NANOGATE - Frame 4". Одна из камер комбинированного фотопоста вела съемку в отраженном свете, что одновременно обеспечивало получение изображения объекта и теневого спектра его

обтекания, а вторая – в теневом режиме (получение теневого спектра обтекания ОИ). В некоторых опытах обе камеры вели съемку в отраженном свете.

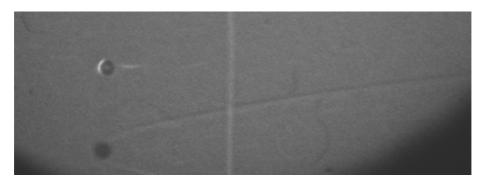
Данные рентгеновской регистрации текущих обводов ОИ и оптической регистрации эффектов, сопровождающих полет ОИ при гиперзвуковых скоростях, полученные с помощью камер КФП и камеры АФА, установленной в угон, представлены на рис. 4–12 (на рентгеновских изображениях движение слева направо, на фотоизображениях – справа налево).



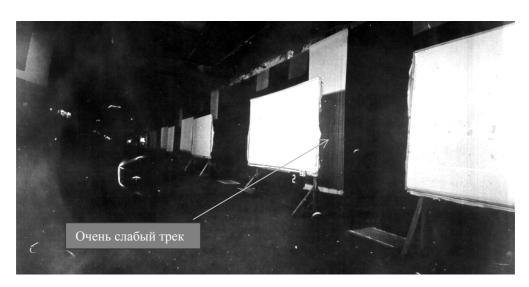
 $PA1 - X \approx 6 \text{ м}, V \approx 3,76 \text{ км/c}$ 



 $PA2 - X \approx 90 \text{ м}, \ V \approx 2,68 \text{ км/c}$ 

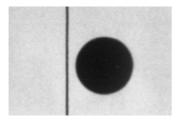


б) снимок с фотокамеры КФП, работающей в отраженном свете ( $X \approx 45 \text{ м}$ )



в) фотография с камеры АФА, установленной в угон ( $X \approx 45 \text{ м}$ )

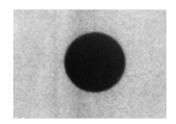
Рис. 4. Опыт 1.  $V_0 \approx 3,86$  км/с



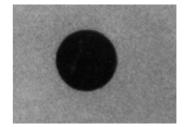
 $PAI - X \approx 6$  м,  $V \approx 4,96$  км/с



 $PA3 - X \approx 126 \text{ м}, V \approx 3,05 \text{ км/c}$ 

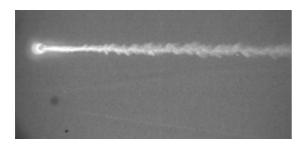


 $PA2 - X \approx 90 \text{ м}, V \approx 3,54 \text{ км/c}$ 

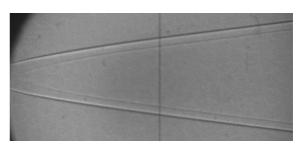


 $PA4 - X \approx 144 \text{ м}, V \approx 2,84 \text{ км/с}$ 

а) рентгенограммы

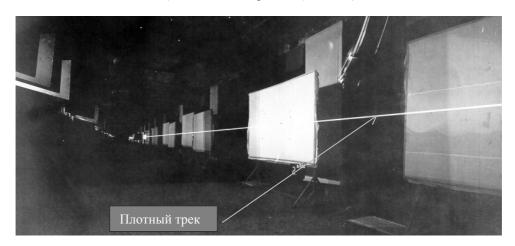


снимок с фотокамеры, работающей в отраженном свете



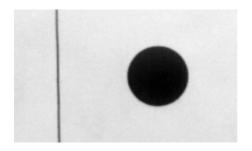
снимок с фотокамеры, работающей в теневом режиме

б) снимки с камер КФП ( $X \approx 45 \text{ м}$ )



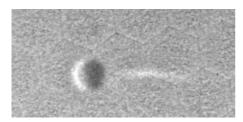
в) фотографии с камеры АФА, установленной в угон

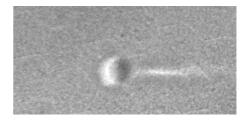
Рис. 5. Опыт №2.  $V_0 \approx 5{,}07$  км/с (а, б);  $V_0 \approx 4{,}94$  км/с (в)



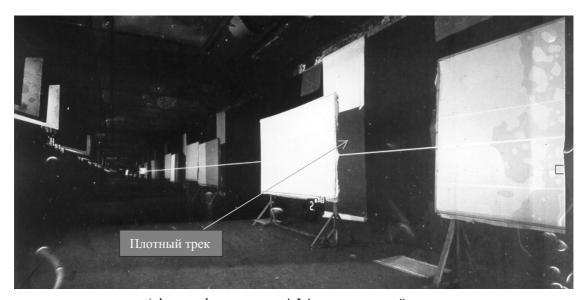
 $PA1 - X \approx 6 \text{ m}, V \approx 4,58 \text{ km/c}$ 

а) рентгенограмма



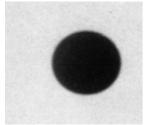


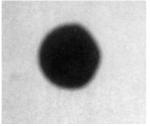
б) снимки с фотокамер КФП (обе камеры КФП работали в отраженном свете),  $X \approx 45 \, \, \mathrm{m}$ 

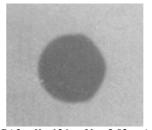


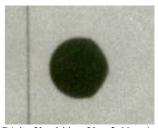
в) фотографии с камеры АФА, установленной в угон

Рис. 6. Опыт 3.  $V_0 \approx 4{,}70 \text{ км/c}$ 



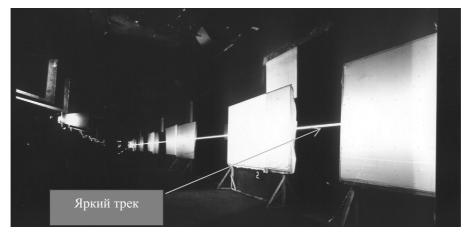




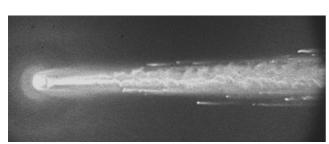


 $PA1 - X \approx 6 \text{ m}, V \approx 5,15 \text{ km/c}$ 

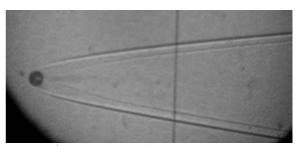
 $PA2 - X \approx 90 \text{ m}, V \approx 3,50 \text{ km/c}$   $PA3 - X \approx 126 \text{ m}, V \approx 2,92 \text{ km/c}$   $PA4 - X \approx 144 \text{ m}, V \approx 2,66 \text{ km/c}$ 



б) фотография с камеры АФА в угон



снимок с фотокамеры, работающей в отраженном свете



снимок с фотокамеры, работающей в теневом режиме

в) снимки с фотокамер КФП ( $X \approx 45 \text{ м}$ )



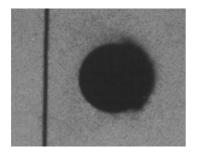
снимок с фотокамеры АФА ФП10 (низ)  $X \approx 90$ –96 м



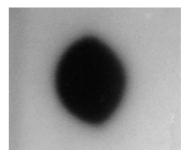
снимок с фотокамеры АФА ФП12 (верх)  $X \approx 108 - 114$  м

г) снимки с фотокамер АФА штатных фотопостов АБТ

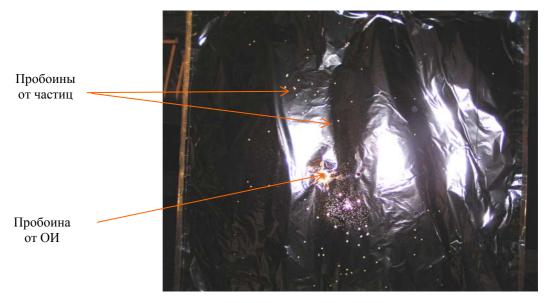
Рис. 7. Опыт 6.  $V_0 \approx 15,96$  км/с (а, б);  $V_0 \approx 15,97$  км/с (в, г)



 $PA1 - X \approx 6$  м,  $V \approx 5,76$  км/с



 $PA2 - X \approx 90 м$ 

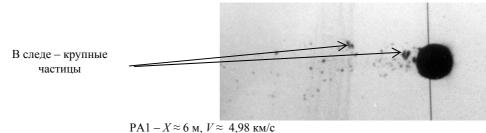


б) фотография контактного датчика КД4 после опыта ( $X \approx 40 \text{ м}$ )

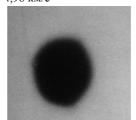


в) фотография с камеры АФА, установленной в угон ( $X \approx 45 \text{ м}$ )

Рис. 8. Опыт 4.  $V_0 \approx 5,86$  км/с



 $PA2 - X \approx 90 \text{ м}, V \approx 3.09 \text{ км/c}$ 

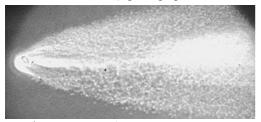


 $PA3 - X \approx 126 \text{ M}, V \approx 2,46 \text{ km/c}$ 



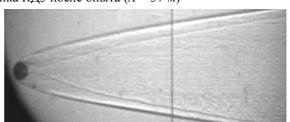
Пробоина от ОИ

б) фотография контактного датчика КДЗ после опыта ( $X \approx 37 \text{ м}$ )



Пробоины от частиц

снимок с фотокамеры, работающей в отраженном свете



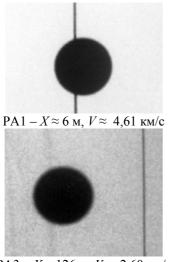
снимок с фотокамеры, работающей в теневом режиме

в) снимки с фотокамер КФП ( $X \approx 45$  м)

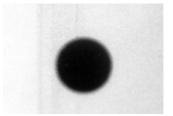


г) снимок с фотокамера АФА, установленной в угон ( $X \approx 45 \text{ м}$ )

Рис. 9. Опыт 5.  $V_0 \approx 5{,}11$  км/с (а, б);  $V_0 \approx 5{,}11$  км/с (в)



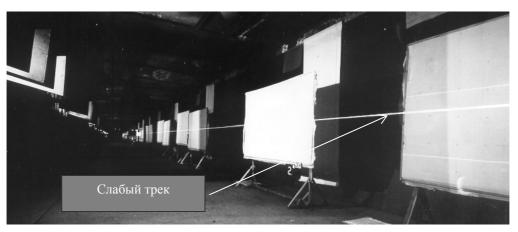
 $PA3 - X \approx 126 \text{ м}, V \approx 2,60 \text{ км/c}$ 



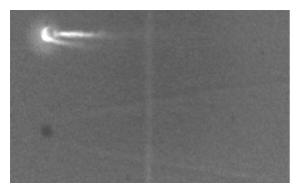
 $PA2 - X \approx 90 \text{ м}, \ V \approx 3,10 \text{ км/c}$ 

 $PA4 - X \approx 144 \text{ м}, V \approx 2,39 \text{ км/с}$ 

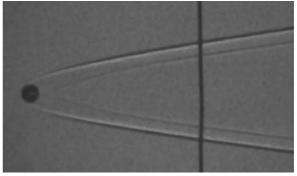
а) рентгенограммы



б) фотография с камеры АФА, установленной в угон ( $X \approx 45 \text{ м}$ )



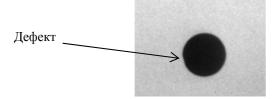
снимок с фотокамеры, работающей в отраженном свете



снимок с фотокамеры, работающей в теневом режиме

в) снимки с фотокамер КФП (X  $\approx$  45 м)

Рис. 10. Опыт 7.  $V_0 \approx 4,73$  км/с



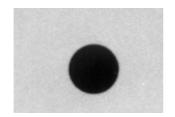
 $PA1 - X \approx 6 \text{ m}, V \approx 6.34 \text{ km/c}$ 

а) рентгенограмма



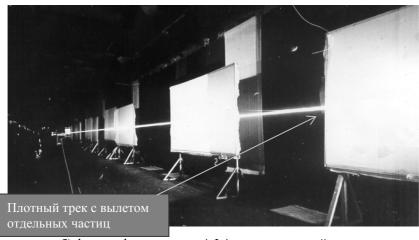
б) фотография с камеры АФА, установленной в угон

Рис. 11. Опыт 8.  $V_0 \approx 6{,}45$  км/с

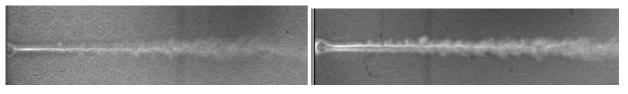


 $PA1 - X \approx 6 \text{ м}, V \approx 5,69 \text{ км/c}$ 

а) рентгенограмма



б) фотография с камеры АФА, установленной в угон



в) снимки с фотокамер КФП (обе камеры работали в теневом режиме)

Рис. 12. Опыт 9.  $V_0 \approx 5,84$  км/с

Шарики из высокопрочного сплава ВР (вольфрам – 73 %, рений – 27 %): – в диапазоне начальных скоростей полета ОИ до 5,07 км/с стойки к аэротермомеханическому разрушению; – при скоростях 5,27 км/с полета зафиксирован унос материала с лобовой поверхности ОИ, сопровождающийся изменением геометрии и массы объекта.

Шарики из псевдосплава ВНЖ (Ni–Fe – 2,5 %):

– при начальной скорости полета ОИ 5,86 км/с зафиксировано интенсивное разрушение материала с вылетом частиц вперед по потоку, аналогичная картина наблюдалась в экспериментах, проведенных ранее с шариками такого же диаметра, изготовленными из ВНЖ-90, при начальных скоростях полета более 4,2 км/с.

Шарики из тугоплавкого материала с добавлением никеля:

 – при начальной скорости полета около 5,11 км/с зафиксировано разрушение материала с выбросом материала частиц вперед по потоку.

Шарики из тугоплавкого материала:

- при начальной скорости полета 4,73 км/с разрушения материала не зафиксировано;
- при начальной скорости полета 5,84 км/с
   и выше зафиксирован процесс аэротермомеханического разрушения материала с вылетом его частиц вперед по потоку.

Получение внешнетраекторных измерений и их последующая обработка осуществлялись в соответствии с принятыми методиками. Зависимости коэффициента силы лобового сопротивления  $C_x(M)$  от числа Маха для шаров, изготовленных из разных конструкционных материалов, представлены на рис. 13, 14.

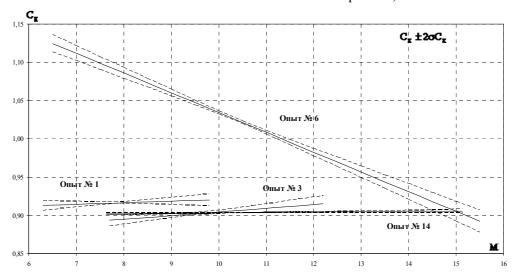


Рис. 13. Зависимость коэффициента силы лобового сопротивления от числа Маха для шарика из сплава ВР

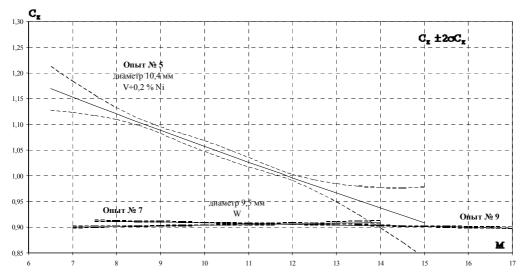


Рис. 14. Зависимость коэффициента силы лобового сопротивления от числа Маха для шарика из тугоплавкого материала

Зависимость коэффициента силы лобового сопротивления  $C_x(M)$  для сферы при отсутствии уноса материала ОИ соответствуют "классическим" представлениям, например [2], и практически постоянна в пределах погрешности эксперимента во всем реализованном скоростном диапазоне. В опытах 5 и 6 зависимости  $C_x(M)$  имеют больший градиент, что является косвенным доказательством наличия аэротермомеханического разрушения конструкционных материалов ОИ, сопровождающегося существенными изменениями геометрии и массы ( $\sim 10$ –15 %) – см. также рентенограммы этих экспериментов.

#### Список литературы

- 1. Герасимов С. И., Файков Ю. И., Холин С. А. Кумулятивные источники света. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2011.
- 2. Бейли Б., Хайт Ф. Коэффициент сопротивления сферы в широком диапазоне чисел Маха и Рейнольдса. 1972. № 11. С. 56–62.

Статья поступила в редакцию 08.06.2012.

#### СОДЕРЖАНИЕ

#### **CONTENTS**

Цаплин Д. В., Пискунов В. Н.		Tsaplin D. V., Piskunov V. N.	
Метод расчета ресуспензии, основанный на соче-		The calculating method of resuspension based on	
тании детерминированного и статистического		the combination deterministic and statistical	
подходов	3	approaches	3
Пискунов В. Н.		Piskunov V. N.	
Аналитические решения для кинетики коагуля-		Analytical solutions for coagulation and condensa-	
ции и конденсации композитных частиц	9	tion kinetics of composite particles	9
Анисин А. В., Анищенко А. А., Давыдов И. А.,		Anisin A. V., Anischenko A. A., Davydov I. A.,	
Ермаков П. В., Жихарев С. С., Задорож-		Ermakov P. V., Zhikharev S. S., Zadorozhny K. V.,	
ный К. В., Иванов К. В., Микийчук Н. М.,		Ivanov K. V., Mikiychuk N. M., Santalova E. E.,	
Санталова Е. Е., Сайфуллин А. И.		Saifullin A. I.	
К вопросу о повышении гарантий сохранности		On the issue of improving nm safety guarantees in	
ядерных материалов при переработке ядерного		nuclear fuel processing	15
топлива	15	1 6	
		Babichev N. B., Bondarev P. S.	
Бабичев Н. Б., Бондарев П. С.		Solution of transient two-region milne's problem in	
Решение нестационарной двухобластной задачи		neutron transfer theory	25
милна в теории переноса нейтронов	25	·	
		Gorbatenko M. V., Neznamov V. P.	
Горбатенко М. В., Незнамов В. П.		Stationary bound states of dirac particles in collapsar	
Стационарные связанные состояния дираковских		fields	30
частиц в полях коллапсаров	30		
		Sadovoy A. A., Ul'yanov A. S.	
Садовой А. А., Ульянов А. С.		The atomic nucleus cluster model and exited states	
Кластерная модель атомного ядра и возбужден-		of nuclei. part i. an example of the nucleus two-	
ные состояния ядер. Часть І. пример построения		cluster model of be <sup>8</sup> construction	34
двухкластерной модели ядра <sup>8</sup> Ве	34		
		Gerasimov S. I., Kostin V. I., Kikeev V. A.,	
Герасимов С. И., Костин В. И., Кикеев В. А.,		Khairullin M. A.	
Хайруллин М. А.		To free trajectory data recording technique	40
К методике получения внешнетраекторных дан-	40		
ных в аэробаллистическом эксперименте	40	Gerasimov S. I., Kikeev V. A., Lysenkov V. E.,	
		Oseeva S. I., Totychev K. V., Fomkin A. P.	
Герасимов С. И., Кикеев В. А., Лысенков В. Е.,		Hypersonic flow influence on spheres from different	
Осеева С. И., Тотышев К. В., Фомкин А. П.		materials in free flight	52
Воздействие гиперзвуковых потоков на шары из	50		
различных материалов в свободном полете	52		

Редактор H.  $\Pi$ . Mишкина Компьютерная подготовка оригинала-макета H. B. Mишкина

Подписано в печать 09.08.2012 Формат  $60 \times 84$  1/8 Офсетн. печ. Усл. печ. л. 8,4. Уч.-изд. л. 8,3 Тираж 200 экз. Зак. тип. 925-2012 8 статей Индекс 3657

Отпечатано в ИПК ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ» 607188, г. Саров Нижегородской области

### ISSN 0234-0763 **ВОПРОСЫ АТОМНОЙ НАУКИ И ТЕХНИКИ**

Серия:

### ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ ФИЗИКА

2012. Вып. 1. 1-64

#### ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ

К авторским оригиналам, передаваемым для издания, предъявляются следующие требования:

- 1. Экземпляр статьи должен быть отпечатан на одной стороне листа формата A4 шрифтом Times New Roman 12 пунктов через 2 интервала, левое поле 3 см. Статья сопровождается дискетой 3,5' (zip100, zip250, cd-r/rw, USB Flash Drive) с электронным вариантом текста (шрифт 11 пунктов через 1 интервал) в редакторе Word for Windows версии 97. Статья должна быть составлена в следующем порядке: УДК; название статьи; инициалы и фамилии авторов; аннотация (не более 10 строк); ключевые слова все вышеперечисленное на русском и английском языках; текст; список литературы; пронумерованные рисунки и подписи (на отдельном листе); таблицы с нумерационным и тематическим заголовками, каждая таблица на отдельном листе, а в электронном виде представляется отдельным файлом. Кавычки в тексте ставятся при английской раскладке клавиатуры («...»). Название файла должно состоять из фамилии первого автора и краткого названия статьи.
- 2. Файлы иллюстраций должны быть представлены отдельно в виде файлов, в формате TIFF (.TIF) или JPEG (.JPG) (максимальное качество) с разрешением не менее 250 точек на дюйм (dpi или inch). Название файла иллюстрации должно включать фамилию первого автора и порядковый номер рисунка в статье, например: Dzyuba\_03.tif. Не допускается представлять иллюстрации, созданные с использованием внутренних инструментов Word.
- 3. При написании статьи следует использовать общепринятые термины, единицы измерения и условные обозначения. Все употребляемые авторами обозначения должны быть определены при их первом появлении в тексте. Необходимо обращать внимание на написание прописных и строчных букв: латинские буквы (A, I, d, h и т. п.) набираются курсивом, греческие буквы  $(\alpha, \beta, \gamma)$ , названия функций (sin, cos, exp), химических элементов  $(H_2O, H_2C_5OH)$  и единиц измерения (см,  $MBT/cm^2$ , с) прямым (обычным) шрифтом. Символы  $(\Re, \wp, \otimes \in \text{ и т. п.})$  следует оговаривать на полях рукописи. Обозначения матриц и векторов набираются полужирным шрифтом прямо.
- 4. Формулы создаются в виде целых математических выражений в формульном редакторе Word или редакторе Math Type 5.2 и нумеруются в круглых скобках. Нумерация формул должна быть сплошной по статье (не по разделам), нумерация типа (2а), (2б) нежелательна. Нумеровать следует только те формулы и уравнения, на которые есть ссылка в последующем изложении.
- 5. Ссылки на литературу в тексте даются по порядку, арабскими цифрами в квадратных скобках. Список литературы составляется в той же последовательности, в которой приводятся ссылки на литературу в тексте. Библиографические ссылки оформляются по следующим правилам:
- для книг: фамилии и инициалы авторов, название книги, место издания, издательство (без кавычек), год (для трудов конференций город, страна, год);
- для статей в журнале: фамилии и инициалы авторов, название статьи, название журнала (без кавычек), год, том, выпуск, страницы;
- для авторефератов диссертаций: фамилия и инициалы автора, название автореферата диссертации, степень, место защиты (город) и год;
  - для препринтов: фамилии и инициалы авторов, название препринта, место издания, год и номер;
- для патентов: вид патентного документа (А.с. или Пат.), его номер, название страны, выдавшей документ, индекс международной классификации изобретения, название издания, в котором опубликована формула изобретения, год и номер издания;
- для электронных источников полный электронный адрес (включая дату обращения к источнику), позволяющий обратиться к публикации.

При необходимости в заголовке библиографической ссылки на работу четырех и более авторов могут быть указаны имена всех авторов или первых трех с добавлением слов «и др.». В списке литературы инициалы должны стоять после фамилий.

6. В конце текста (перед списком литературы) указывается контактная информация обо всех авторах статьи: фамилия, имя, отчество (полностью), место работы, должность, телефон, e-mail и по желанию автора – домашний почтовый адрес.

Все материалы по статьям должны направляться по адресу: 607188, г. Саров Нижегородской обл., пр. Мира, 37, РФЯЦ-ВНИИЭФ, ИТМФ, в редакцию журнала ВАНТ, сер. «Теоретическая и прикладная физика». Тел. (83130) 2-77-01. E-mail: Nadykto@vniief.ru