УДК 530.145.7;514.764.2;530.145.7

ФИЗИЧЕСКАЯ НЕЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ МЕТРИКИ ШВАРЦШИЛЬДА И МЕТРИК ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОГО НЕЗАРЯЖЕННОГО ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ, ДОПУСКАЮЩИХ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПРОБНЫМИ ЧАСТИЦАМИ «ГОРИЗОНТОВ СОБЫТИЙ»

М. В. Горбатенко, В. П. Незнамов

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Квантово-механический анализ показывает физическую неэквивалентность метрики Шварцшильда, запрещающей классическим частицам пересекать «горизонт событий», и метрик, разрешающих частицам пересекать гравитационный радиус (метрики Эддингтона – Финкельштейна, Пенлеви – Гуллстранда, Финкельштейна – Леметра, Крускала). В первом случае возможно существование стационарных состояний дираковских частиц с вещественным энергетическим спектром, во втором случае для всех указанных метрик существуют лишь комплексные уровни энергии частиц со спином 1/2, распадающиеся со временем. Результаты могут привести к пересмотру некоторых представлений стандартной космологической модели, связанных с эволюцией Вселенной и с взаимодействием коллапсаров с окружающей средой.

Ключевые слова: решения общей теории относительности, «горизонты событий», дираковские гамильтонианы, связанные состояния пробных частиц со спином 1/2, комплексные уровни энергии.

1. Введение

В настоящее время для сферически-симметричных коллапсаров с точечными массами известны четыре основных решения общей теории относительности (ОТО). Это – решение Шварцшильда [1], решение Райсснера – Нордстрема [2], решение Керра [3], решение Керра – Ньюмена [4].

Классическое решение Шварцшильда характеризуется точечным сферически-симметричным источником гравитационного поля массой M и «горизонтом событий» (гравитационным радиусом)

$$r_0 = \frac{2GM}{c^2}. \tag{1}$$

В формуле (1) G – гравитационная постоянная, c – скорость света. В классическом случае частица достигает «горизонта событий» за бесконечное время.

Для частицы массой m безразмерная гравитационная константа связи равна*

$$\alpha = \frac{GMm}{\hbar c} = \frac{Mm}{m_p^2} = \frac{r_0}{2l_c}. \tag{2}$$

В формуле (2) $\hbar$ – постоянная Планка, $m_p = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 2\cdot 10^{-5}$ г – планковская масса, $l_c = \frac{\hbar}{mc}$ – комптоновская длина волны.

В отличие от констант взаимодействия в Стандартной модели физики элементарных частиц в гравитационном случае константа связи α может легко достигать очень больших значений. Для электрона величине $\alpha \approx 1$ соответствует источник гравитации массой $M = 0,5\cdot 10^{15}$ кг. Тогда, например, гравитационное взаимодействие электрона с источником $M = M_{\odot} \simeq 2\cdot 10^{30}$ кг определяется величиной $\alpha \simeq 4\cdot 10^{15}$.

В настоящее время в центрах галактик известны коллапсары с массой, достигающей миллиардов солнечных масс. В этом случае электрон будет гравитационно взаимодействовать с такими объектами с величиной $\alpha \simeq 10^{25}$.

В решении Райсснера–Нордстрема точечный сферический симметричный источник Шварцшильда обладает электрическим зарядом Q. Решение Керра соответствует вращающемуся источнику Шварцшильда с угловым моментом $\mathbf{J} = \frac{r_0}{2}\mathbf{a}$. В решении Керра – Ньюмена вращающийся источник Керра обладает электрическим зарядом Q.

* E-mail: neznamov@vniief.ru

В отличие от решения Шварцшильда для решений Райсснера–Нордстрема, Керра и Керра–Ньюмена характерно существование двух «горизонтов событий»: внешнего и внутреннего. По-прежнему классическая частица может достичь внешнего «горизонта событий» лишь за бесконечное время $(t \to \infty)$.

Кроме перечисленных выше решений ОТО существуют метрики, полученные координатными преобразованиями основных метрик и допускающие пересечение классическими частицами «горизонтов событий» за конечное время.

Для поля Шварцшильда можно отметить следующие решения: метрика Эддингтона–Финкельштейна [5], [6], метрика Пенлеви–Гуллстранда [7], метрика Леметра–Финкельштейна [6], метрика Крускала [8].

Для поля Керра отметим решение Дорана [9].

Несмотря на явную электромагнитную аналогию в атомной физике, связанные состояния дираковских частиц в полях коллапсаров исследовались сравнительно мало. Для гравитационного случая сложилось убеждение, что связанные состояния частиц имеют комплексные энергии. В этом случае эти состояния экспоненциально распадаются со временем. Существование резонансных состояний в поле Шварцшильда для массивных скалярных частиц с использованием уравнения Клейна–Гордона обсуждалось в работах [10–13]. Аналогичная проблема для дираковских массивных частиц обсуждалась в работах [14–18]. В этих работах, в частности, при $\alpha << 1$ непосредственным решением уравнения Дирака в слабом поле Шварцшильда для действительной части энергии получен водородоподобный спектр с релятивистскими поправками. В работе [19] авторы рассмотрели проблему связанных состояний в поле Шварцшильда, используя метрику Пенлеви–Гуллстранда. В работе получены энергетические спектры с комплексными значениями энергии для величин $\alpha << 1$, а также для значений $\alpha \sim 1$. При $\alpha << 1$ для действительной части энергии также получен водородоподобный спектр с другими, по сравнению с работой [16], релятивистическими поправками.

В работах [20–22] с помощью методов псевдоэрмитовой квантовой механики для произвольных гравитационных полей, в том числе зависящих от времени, разработан метод получения самосопряженных дираковских гамильтонианов с плоским скалярным произведением волновых функций.

Из одночастичной квантовой механики следует, что при существовании эрмитовости гамильтониана, при наличии квадратично-интегрируемых волновых функций и при установлении соответствующих граничных условий самосопряженные гамильтонианы, не зависящие от времени, должны обеспечивать существование стационарных связанных состояний частиц с вещественным энергетическим спектром. Данная работа посвящена исследованию возможности существования таких состояний дираковских частиц в центрально-симметричных незаряженных гравитационных полях коллапсаров.

2. Анализ возможности существования связанных состояний частиц со спином 1/2 в центрально-симметричном гравитационном поле

Ниже будем использовать систему единиц $\hbar = c = 1$, сигнатуру

$$\eta_{\underline{\alpha}\underline{\beta}} = \mathrm{diag}\left[1, -1, -1, -1\right] \tag{3}$$

и обозначения $\gamma^{\alpha}, \gamma^{\underline{\alpha}}$ соответственно для мировых и локальных матриц Дирака.

Первоначально приведем для метрики Шварцшильда и для ряда метрик, полученных из шварцшильдовской точными координатными преобразованиями, самосопряженные гамильтонианы, определенные в работе [22].

2.1. Метрика Шварцшильда в координатах (t, r, θ, φ)

$$ds^2 = f_s dt^2 - \frac{dr^2}{f_s} - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right), \quad f_s = 1 - \frac{r_0}{r}; \tag{4}$$

В формуле (4) из условия $q_{00} > 0$ мы подразумеваем значения $f_s > 0$.

Самосопряженный гамильтониан

$$H_{\eta} = \sqrt{f_s} m\gamma^{\underline{0}} - i\sqrt{f_s}\gamma^{\underline{0}}\left\{\gamma^{\underline{1}}\sqrt{f_s}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right) + \gamma^{\underline{2}}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{2}\mathrm{ctg}\theta\right) + \gamma^{\underline{3}}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right\} - \frac{i}{2}\gamma^{\underline{0}}\gamma^{\underline{1}}\frac{\partial f_s}{\partial r}. \tag{5}$$

2.2. Метрика Эддингтона-Финкельштейна

$$ds^2 = f_s dt^2 - 2\frac{r_0}{r}dtdr - f_{E-F}dr^2 - \\ - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right), \qquad (6)$$

$$f_{E-F} = 1 + \frac{r_0}{r}.$$

Самосопряженный гамильтониан

$$H_\eta = \frac{\gamma^0 m}{\sqrt{f_{E-F}}} - i\gamma^0\gamma^1\frac{1}{f_{E-F}}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} + \frac{r_0}{r^2}\frac{1}{f_{E-F}}\right) - \\ - i\gamma^0\gamma^2\frac{1}{\sqrt{f_{E-F}}}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{2}\mathrm{ctg}\theta\right) - \\ - i\gamma^0\gamma^3\frac{1}{\sqrt{f_{E-F}}}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \\ + i\frac{r_0}{r}\frac{1}{f_{E-F}}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} - \frac{1}{2rf_{E-F}}\right). \qquad (7)$$

2.3. Метрика Пенлеви – Гуллстранда

$$ds^2 = f_s dt^2 - 2\sqrt{\frac{r_0}{r}}dtdr - \\ - dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right). \qquad (8)$$

Самосопряженный гамильтониан

$$H_\eta = \gamma^0 m - i\gamma^0\left\{\gamma^1\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right) + \gamma^2\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{2}\mathrm{ctg}\theta\right) + \\ + \gamma^3\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right\} + i\sqrt{\frac{r_0}{r}}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{3}{4}\frac{1}{r}\right)\Bigg). \qquad (9)$$

2.4. Метрика Финкельштейна – Леметра

$$ds^2 = dt^2 - \frac{dr^2}{f_{F-L}^{2/3}} - f_{F-L}^{4/3}r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right), \\ f_{F-L} = \frac{3}{2r_0}(r - t). \qquad (10)$$

Самосопряженный гамильтониан H_η:

$$H_\eta = \gamma^0 m - i\gamma^0\gamma^1 f_{F-L}^{1/3}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right) - \\ - i\gamma^0\gamma^2\frac{1}{f_{F-L}^{2/3}}\frac{1}{r_0}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{2}\mathrm{ctg}\theta\right) - \\ - i\gamma^0\gamma^3\frac{1}{f_{F-L}^{2/3}}\frac{1}{r_0\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} - \frac{i}{2}\gamma^0\gamma^1\frac{\partial f_{F-L}^{1/3}}{\partial r}. \qquad (11)$$

2.5. Метрика Крускала

$$ds^2 = d\tau^2 - f_k dr^2 - \frac{1}{4}f_k r_0^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right);$$

$$\frac{\tau}{r_0} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{r^2}{r_0^2}\right)^{3/2}(\pi - \chi + \sin\chi); \qquad (12)$$

$$f_k = \left(1 + \frac{r^2}{r_0^2}\right)(1 - \cos\chi)^2.$$

Самосопряженный гамильтониан

$$H_\eta = \gamma^0 m - i\gamma^0\gamma^1\frac{1}{\sqrt{f_k}}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right) - \\ - i\gamma^0\gamma^1\frac{2}{\sqrt{f_k}}\frac{1}{r_0}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{2}\mathrm{ctg}\theta\right) - \\ - i\gamma^0\gamma^3\frac{2}{\sqrt{f_k}}\frac{1}{r_0\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} - \frac{i}{2}\gamma^0\gamma^1\frac{\partial f_k^{-1/2}}{\partial r}. \qquad (13)$$

Для метрик Финкельштейна – Леметра и Крускала временная координата совпадает с собственным временем. Гамильтонианы H_η для этих метрик зависят от времени, и поэтому стационарные связанные состояния отсутствуют.

Далее анализ возможности существования связанных состояний будем проводить для метрик со стационарными гамильтонианами (5), (7), (9) с представлением волновой функции в виде

$$\psi(\mathbf{r}, t) = e^{-iEt}\psi(\mathbf{r}). \qquad (14)$$

2.6. Разделение переменных

Уравнение Дирака со стационарными гамильтонианами (5), (7), (9) допускает разделение переменных, если биспинор $\psi(\mathbf{r}) = \psi(r, \theta, \varphi)$ определить в виде

$$\psi(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} F(r) & \xi(\theta) \\ -iG(r) & \sigma^3\xi(\theta) \end{pmatrix} e^{im_\varphi\varphi} \qquad (15)$$

и использовать следующее уравнение (см., например, [23]):

$$\left[-\sigma^2\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{2}\mathrm{ctg}\theta\right) + i\sigma^1 m_\varphi\frac{1}{\sin\theta}\right]\xi(\theta) = i\kappa\xi(\theta). \qquad (16)$$

В равенствах (15), (16): $\xi(\theta)$ – сферические гармоники для спина 1/2, σ^i – двумерные матрицы

Паули, m_φ – магнитное квантовое число, κ – квантовое число уравнения Дирака:

$$\kappa = \pm 1, \pm 2 ... = \begin{cases} -(l+1), j = l + 1/2, \\ l, \quad j = l - 1/2. \end{cases} \quad (17)$$

В выражении (17) j, l – квантовые числа полного и орбитального момента дираковской частицы соответственно.

$\xi(\theta)$ можно представить в виде [24]

$$\xi(\theta) = \begin{pmatrix} {}_{-1/2}Y_{jm_\varphi}(\theta) \\ {}_{1/2}Y_{jm_\varphi}(\theta) \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^{m_\varphi + 1/2} \sqrt{\frac{1}{4\pi} \frac{(j - m_\varphi)!}{(j + m_\varphi)!}} \begin{pmatrix} \cos\theta/2 & \sin\theta/2 \\ -\sin\theta/2 & \cos\theta/2 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \left(\kappa - m_\varphi + \dfrac{1}{2}\right) P_l^{m_\varphi - 1/2}(\theta) \\ P_l^{m_\varphi + 1/2}(\theta) \end{pmatrix}. \quad (18)$$

В (18) $P_l^{m_\varphi \pm 1/2}(\theta)$ – присоединенные полиномы Лежандра.

В результате разделения переменных мы получаем для рассматриваемых метрик системы уравнений для радиальных функций $F(r)$, $G(r)$. Далее эти уравнения будем записывать в безразмерных переменных $\varepsilon = \dfrac{E}{m}$, $\rho = \dfrac{r}{l_c}$, $\dfrac{r_0}{l_c} = 2\alpha$.

2.7. Уравнения и асимптотика для радиальных волновых функций

2.7.1. Метрика Шварцшильда в координатах (t, r, θ, φ)

Система уравнений для радиальных вещественных функций $F(\rho), G(\rho)$ имеет вид:

$$\left(1 - \frac{2\alpha}{\rho}\right)\frac{dF}{d\rho} + $$

$$+ \left(\frac{1 + \kappa\sqrt{1 - \dfrac{2\alpha}{\rho}}}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2}\right) F - \left(\varepsilon + \sqrt{1 - \frac{2\alpha}{\rho}}\right) G = 0, \quad (19)$$

$$\left(1 - \frac{2\alpha}{\rho}\right)\frac{dG}{d\rho} + $$

$$+ \left(\frac{1 - \kappa\sqrt{1 - \dfrac{2\alpha}{\rho}}}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2}\right) G + \left(\varepsilon - \sqrt{1 - \frac{2\alpha}{\rho}}\right) F = 0. \quad (19)$$

Областью определения переменной ρ для функций $F(\rho)$, $G(\rho)$ является интервал $(2\alpha, \infty)$ в соответствии с метрикой (4). Уравнения (19) показывают, что, как и в классическом случае, квантовая механика запрещает присутствие дираковских частиц под «горизонтом событий» $r < r_0$, т. е. $\rho < 2\alpha$.

Рассмотрим асимптотику решений системы (19). При $\rho \to \infty$

$$\begin{aligned} F &= C_1 e^{-\rho\sqrt{1-\varepsilon^2}} + C_2 e^{\rho\sqrt{1-\varepsilon^2}}, \\ G &= \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\left(-C_1 e^{-\rho\sqrt{1-\varepsilon^2}} + C_2 e^{\rho\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right). \end{aligned} \quad (20)$$

Для обеспечения финитного движения дираковских частиц необходимо использовать лишь экспоненциально убывающие решения (20), т. е. в этом случае $C_2 = 0$.

При $\rho \to 2\alpha$ $(r \to r_0)$

$$\begin{aligned} F &= \frac{A}{\sqrt{\rho - 2\alpha}} \sin\left(2\alpha\varepsilon \ln(\rho - 2\alpha) + \varphi\right), \\ G &= \frac{A}{\sqrt{\rho - 2\alpha}} \cos\left(2\alpha\varepsilon \ln(\rho - 2\alpha) + \varphi\right), \end{aligned} \quad (21)$$

где A и φ – постоянные величины.

Осциллирующие функции F и G в (21) плохо определены на «горизонте событий» и расходятся при $\rho \to 2\alpha$. Для обеспечения квадратичной интегрируемости рассматриваемых функций необходимо сужение их области определения до интервала $[\rho_{\min}, \infty)$, где $\rho_{\min} > 2\alpha$.

Гамильтониан (5) является эрмитовым для всей области определения ρ.

Это можно показать, используя общее условие эрмитовости дираковских гамильтонианов во внешних гравитационных полях, доказанное в работе [20].

$$\oint ds_k\left(\sqrt{-g}\,j^k\right)=0 \qquad (22)$$

Для сферически-симметричного поля Шварцшильда условие (21) сводится к

$$4\pi\rho^2 j^1\left(\rho\to\infty\right)+4\pi\rho^2 j^1\left(\rho\to 2\alpha\right)=0\,. \qquad (23)$$

По определению радиальная плотность тока дираковских частиц равна

$$j^1=\psi^+\gamma^{\underline{0}}\gamma^1\psi\,. \qquad (24)$$

Для поля Шварцшильда и тетрад в калибровке Швингера [22]

$$\gamma^1=f_s^{1/2}\gamma^{\underline{1}}. \qquad (25)$$

После перехода в η-представление [20–22], в котором представлен гамильтониан (5), получаем

$$j^1=\psi_\eta^+ f_s\gamma^{\underline{0}}\gamma^{\underline{1}}\psi_\eta\,, \qquad (26)$$

где $\psi=\eta^{-1}\psi_\eta,\ \ \eta^{-1}=f_s^{1/4}$.

Далее используем функции (15) в виде

$$\psi_\eta\left(\rho,\theta,\varphi\right)=\frac{1}{\rho}\frac{1}{\sqrt{f_s}}\begin{pmatrix} f\left(\rho\right) & \xi\left(\theta\right)\\ -ig\left(\rho\right) & \sigma^3\xi\left(\theta\right)\end{pmatrix}. \qquad (27)$$

В результате радиальная плотность тока равна

$$j^1=-\frac{2}{\rho^2}f\left(\rho\right)g\left(\rho\right)\left[\xi^+\left(\theta\right)\sigma^2\xi\left(\theta\right)\right]. \qquad (28)$$

С учетом явного вида сферических гармоник для спина $1/2$

$$\xi^+\left(\theta\right)\sigma^2\xi\left(\theta\right)=0\,, \qquad (29)$$

что доказывает эрмитовость гамильтониана (5).

Таким образом, при введении физически разумного граничного условия вблизи «горизонта событий» $\left(\rho=\rho_{\min}\right)$ система уравнений (19) будет обладать стационарным вещественным энергетическим спектром связанных состояний частиц со спином $1/2$.

2.7.2. Метрика Эддингтона – Финкельштейна

Система уравнений для радиальных волновых функций $F\left(\rho\right),G\left(\rho\right)$ имеет вид:

$$\left(1-\frac{2\alpha}{\rho}\right)\frac{dF}{d\rho}+\left(\frac{1-\frac{2\alpha}{\rho}}{\rho}+\frac{\frac{\kappa}{\sqrt{f_{E-F}}}}{\rho}+\frac{1}{f_{E-F}}\frac{\alpha}{\rho^2}\right)F-$$
$$-i\frac{2\alpha}{\rho}\left(\varepsilon-\frac{1}{\sqrt{f_{E-F}}}\right)F+\frac{1}{f_{E-F}}\frac{\alpha}{\rho^2}G-$$
$$-\frac{2\alpha}{\rho^2}\frac{\kappa}{\sqrt{f_{E-F}}}G-i\left(\varepsilon+\frac{1}{\sqrt{f_{E-F}}}\right)G=0; \qquad (30)$$

$$\left(1-\frac{2\alpha}{\rho}\right)\frac{dG}{d\rho}+\left(\frac{1-\frac{2\alpha}{\rho}}{\rho}-\frac{\frac{\kappa}{\sqrt{f_{E-F}}}}{\rho}+\frac{1}{f_{E-F}}\frac{\alpha}{\rho^2}\right)G-$$
$$-i\frac{2\alpha}{\rho}\left(\varepsilon+\frac{1}{\sqrt{f_{E-F}}}\right)G+\frac{1}{f_{E-F}}\frac{\alpha}{\rho^2}F+$$
$$+\frac{2\alpha}{\rho^2}\frac{\kappa}{\sqrt{f_{E-F}}}F-i\left(\varepsilon-\frac{1}{\sqrt{f_{E-F}}}\right)F=0. \qquad (30)$$

В (30) $f_{E-F}=1+\dfrac{2\alpha}{\rho}$.

Асимптотика функций $F\left(\rho\right)$, $G\left(\rho\right)$ при $\rho\to\infty$ совпадает с асимптотикой (20) для метрики Шварцшильда.

В работах [19, 24] для метрики Эддингтона–Финкельштейна и Пенлеви–Гуллстранда областью определения переменной ρ выбирался интервал $\left[0,\infty\right)$. Волновые функции $F\left(\rho\right),G\left(\rho\right)$ могут быть отличны от нуля во всей области определения ρ, поэтому дираковская частица для данных метрик может пересекать «горизонт событий». Квантовая механика в этом случае согласуется с классическим рассмотрением. Гравитационный радиус для уравнений (30), (38) является регулярной особой точкой, на которой устанавливается определенное соотношение между значениями функций $F\left(\rho=2\alpha\right)$ и $G\left(\rho=2\alpha\right)$. Из уравнений (30) следует, что при $\rho\to 0$

$$F\left(\rho\right)\sim\frac{1}{\rho},\qquad G\left(\rho\right)\sim\frac{1}{\rho}. \qquad (31)$$

При таком поведении волновых функций при $\rho \to 0$ исходный гамильтониан (7) является неэрмитовым

$$(\psi, H\varphi) \neq (H\psi, \varphi). \tag{32}$$

Действительно, для данной метрики и тетрад в калибровке Швингера [22]

$$\gamma^1 = \left(1+\frac{2\alpha}{\rho}\right)^{-1/2}\left(-\frac{2\alpha}{\rho}\gamma^{\underline{0}}+\gamma^{\underline{1}}\right) \tag{33}$$

$$\eta^{-1} = \left(1+\frac{2\alpha}{\rho}\right)^{-1/4} \tag{34}$$

$$j^1 = \psi_\eta^+\left(1+\frac{2\alpha}{\rho}\right)^{-1}\left(-\frac{2\alpha}{\rho}+\gamma^{\underline{0}}\gamma^{\underline{1}}\right)\psi_\eta. \tag{35}$$

При $\rho \to \infty$ выражение $4\pi\rho^2 j^1$ стремится к нулю, учитывая асимптотику (20) с $C_2 = 0$.

При $\rho \to 0$ выражение $4\pi\rho^2 j^1$ является конечным.

$$4\pi\rho^2 j^1 =$$

$$= 4\pi\rho^2\left[-\frac{2\alpha}{\rho}\frac{1}{1+\frac{2\alpha}{\rho}}\left(F^2(\rho)+G^2(\rho)\right)\xi^+(\theta)\xi(\theta) - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{1+\frac{2\alpha}{\rho}}2F(\rho)G(\rho)\xi^+(\theta)\sigma^2\xi(\theta)\right]. \tag{36}$$

Второе слагаемое в (36) согласно (29), (31) равно нулю, первое слагаемое с учетом (31) является конечным. Условие эрмитовости (22), (23) для метрики Эддингтона – Финкельштейна не выполняется.

В этом случае стационарных связанных состояний дираковских частиц не существует. Могут существовать лишь комплексные уровни энергии, распадающиеся со временем.

Недостатком выбранной в [19, 24] области определения $\rho \in [0, \infty)$ является включение подобласти $0 \le \rho \le 2\alpha$, где нарушается условие Гильберта: $g_{00} > 0$. Однако и для суженной области определения $\rho \in (2\alpha, \infty)$, при $\rho \to 2\alpha$ в формуле (36) первое слагаемое остается конечным, поскольку поведение радиальных волновых функций вблизи «горизонта событий» в численных расчетах [19, 24] является регулярным. То есть и в этом случае условие эрмитовости гамильтониана (7) не выполняется и стационарные связанные состояния частиц со спином 1/2 не существуют.

2.7.3. Метрика Пенлеви – Гуллстранда

Исходный гамильтониан (9) привлекателен по форме. Он содержит часть, связанную со свободным движением и часть, связанную с гравитационным взаимодействием

$$H_I = i\sqrt{\frac{r_0}{r}}\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{3}{4}\frac{1}{r}\right). \tag{37}$$

Система уравнений для радиальных волновых функций $F(\rho), G(\rho)$ имеет вид:

$$\begin{aligned}
&\left(1-\frac{2\alpha}{\rho}\right)\frac{dF}{d\rho}+\left\{\frac{1+\kappa}{\rho}-\frac{3}{4}\frac{2\alpha}{\rho^2}+i(1-\varepsilon)\sqrt{\frac{2\alpha}{\rho}}\right\}F - \\
&\quad -\left\{1+\varepsilon+i\sqrt{\frac{2\alpha}{\rho}}\frac{\frac{1}{4}-\kappa}{\rho}\right\}G = 0; \\
&\left(1-\frac{2\alpha}{\rho}\right)\frac{dG}{d\rho}+\left\{\frac{1-\kappa}{\rho}-\frac{3}{4}\frac{2\alpha}{\rho^2}-i(1+\varepsilon)\sqrt{\frac{2\alpha}{\rho}}\right\}G - \\
&\quad -\left\{1-\varepsilon-i\sqrt{\frac{2\alpha}{\rho}}\frac{\frac{1}{4}+\kappa}{\rho}\right\}F = 0.
\end{aligned} \tag{38}$$

Асимптотика функций $F(\rho), G(\rho)$ при $\rho \to \infty$ совпадает с асимптотикой (20) для метрики Шварцшильда. В работах [19, 24] функции $F(\rho), G(\rho)$ определены на интервале $[0, \infty)$. В этом случае дираковская частица для данной метрики может находиться как внутри, так и вне «горизонта событий».

Из уравнений (38) следует, что при $\rho \to 0$

$$\begin{aligned} F(\rho) &\sim \frac{1}{\rho^{3/4}}; \\ G(\rho) &\sim \frac{1}{\rho^{3/4}}. \end{aligned} \tag{39}$$

Аналогично п. 2.7.2 можно показать, что исходный гамильтониан (9) является неэрмитовым. Стационарных связанных состояний дираковских частиц для данной метрики не существует. В работе [20] авторы численным решением уравнения Дирака для метрики Пенлеви–Гуллстранда подтвердили этот вывод, получив комплексные уровни энергии, распадающиеся со временем.

Аналогичный вывод об отсутствии стационарных связанных состояний дираковских частиц получается и для суженной области определения $\rho \in (2\alpha, \infty)$ без подобласти под «горизонтом событий» $0 \le \rho \le 2\alpha$, где нарушается условие Гильберта $(g_{00} > 0)$.

3. Заключение

Проведенный квантовомеханический анализ показывает отсутствие стационарных связанных состояний дираковских частиц для метрик центрально симметричных гравитационных полей, полученных координатными преобразованиями метрики Шварцшильда и позволяющих классическим частицам пересекать «горизонт событий».

Решениями уравнения Дирака для рассматриваемых метрик могут быть лишь нестационарные комплексные уровни энергии.

Метриками, где возможно существование стационарных вещественных уровней энергии связанных состояний дираковских частиц, являются классическая метрика Шварцшильда в координатах (t, r, θ, φ), а также метрики Шварцшильда в изотропных [25] и гармонических [26] координатах.

Для этих метрик отсутствует возможность пересечения классическими и квантовыми частицами «горизонта событий».

Авторы благодарят за большую техническую помощь в подготовке статьи А. Л. Новоселову.

Список литературы

1. Schwarzschild K. Sitzber. Deut. Akad. Wiss. Berlin. 1916. P. 189–196.

2. Reissner H. // Ann. Phys. 1916. Vol. 50. P. 106. Nordstrem C., Proc. K. Akad. Wet. Amsterdam. 1918. Vol. 20. P. 1238.

3. Kerr R. P. // Phys. Rev. Lett. 1963. Vol. 11. P. 237.

4. Newman E. T., Couch E., Chinnapared K., Exton A., Prakash A. and Torrence R. // J. Math. Phys. 1965. Vol. 6. P. 918.

5. Eddington A. S. // Nature 1924. Vol. 113. P. 192.

6. Finkelstein D. // Phys. Rev. 1958. Vol. 110. P. 965.

7. Painleve P. Acad C. R. // Sci. (Paris). 1921. Vol. 173. P. 677.

Gullstrand A. // Arxiv. Mat. Astron. Fys. 1922. Vol. 16. P. 1.

8. Kruskal M. // Phys. Rev. 1960. Vol. 119. P. 1743.

9. Doran C. J. L. // Phys. Rev. 2000. Vol. D 61(6). P. 067503.

10. Deruelle N., Ruffini R. // Phys. Lett. 1974. Vol. 52B, P. 437.

11. Damour T., Deruelle N., Ruffini R. // Lett. Nuov. Cim. 1976. Vol. **15**. P. 257.

12. Ternov I. M., Khalilov V. P., Chizhov G. A., Gaina A. B. Proceedings of Soviet Higher Educational Institutions, Physics. 1978. No. 9 (in Russian).

13. Gaina A. B., Chizhov G. A. Proceedings of Soviet Higher Educational Institutions, Physics, No. 4, 120, 1980 (in Russian).

14. Ternov I. M., Gaina A. B., Chizhov G. A. // Sov. Phys. J. 1980. Vol. 23, P. 695–700,

15. Galtsov D. V., Pomerantseva G. V., Chizhov G. A. // Sov. Phys. J. 1983. Vol. 26. P. 743–745.

16. Ternov I. M., Gaina A. B. // Sov. Phys. J. 1988. Vol. 31 (2). P. 157–163.

17. Gaina A. B., Zaslavskii O. B. // Class. Quantum Grav. 1992. Vol. 9. P. 667–676.

18. Gaina A. B., Ionescu-Pallas N. I. // Rom. J. Phys. 1993. Vol. 38. P. 729–730.

19. Lasenby A., Doran C., Pritchard J., Caceres A. and Dolan S. // Phys. Rev. 2005. Vol. D 72. P. 105014.

20. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. // Phys. Rev. 2010. Vol. D 82. P. 104056; arxiv: 1007.4631 (gr-qc).

21. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. // Phys. Rev. 2011. Vol. D 83. P. 105002; arxiv: 1102.4067v1 (gr-qc).

22. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. Arxiv: 1102.0844v3 (gr-qc).

23. Brill D. R, Wheeler J. A. // Rev. of Modern Physics. 1957. Vol. 29. P. 465–479.

24. Dolan S. R. Trinity Hall and Astrophysics Group, Cavendish Laboratory. Dissertation, 2006.

25. Лайтман А., Пресс В., Прайс Р., Тюкольски С. Сборник задач по теории относительности и гравитации. М.: Мир, 1979.

Lightman A., Press W., Price R. and Teukolsky S. Problem Book in Relativity and Gravutation (Princeton University Press, Princeton, NJ. 1975).

Obukhov Yu. N. // Phys. Rev. Lett. 2001. Vol. 86. P. 192: Forschr. Phys. 2002. Vol. 50. P. 711.

26. Логунов А. А., Мейвиришвили М. А. Релятивистская теория гравитации. М.: Наука, 1989.

Статья поступила в редакцию 12.11.2012