УДК 539.1.01

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ КОНФОРМНОЙ ГЕОМЕТРОДИНАМИКИ

М. В. Горбатенко*

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, Саров Нижегородской обл.

Изложен алгоритм постановки задачи Коши для уравнений общей теории относительности с конформно-инвариантным тензором энергии-импульса. Алгоритм относится к гармоническим координатам в такой пространственно-временной области, в которой отлична от нуля 00-компонента обратного метрического тензора. Приведены рабочие формулы, позволяющие составить компьютерную программу, находить и исследовать решения исходных уравнений путем численного моделирования.

Ключевые слова: конформная геометродинамика, задача Коши без связей на начальные данные.

1. Введение. ОТО и КГД

Под уравнениями ОТО будем понимать уравнения

$$R_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R=T_{\alpha\beta}\,, \tag{1}$$

в которых стоящий в правой части тензор $T_{\alpha\beta}$ может быть как равным, так и не равным нулю. Будут использоваться стандартные обозначения, принятые в работе [1] и сигнатура $(-+++)$. Буквы греческого алфавита принимают значения 0, 1, 2, 3, а латинского алфавита – значения 1, 2, 3. Тензоры Римана и Риччи по определению равны

$$R^{\lambda}{}_{\sigma\alpha\beta}=\begin{pmatrix}\lambda\\ \beta\sigma\end{pmatrix}_{,\alpha}-\begin{pmatrix}\lambda\\ \alpha\sigma\end{pmatrix}_{,\beta}+\begin{pmatrix}\lambda\\ \alpha\varepsilon\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon\\ \beta\sigma\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda\\ \beta\varepsilon\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon\\ \alpha\sigma\end{pmatrix}, \tag{2}$$

$$R_{\alpha\beta}\equiv R^{\lambda}_{\alpha\lambda\beta}\,. \tag{3}$$

Символы Кристоффеля определяются как

$$\begin{pmatrix}\lambda\\ \alpha\beta\end{pmatrix}=\frac{1}{2}g^{\lambda\varepsilon}\left(g_{\varepsilon\beta,\alpha}+g_{\alpha\varepsilon,\beta}-g_{\alpha\beta,\varepsilon}\right). \tag{4}$$

Компоненты обратного метрического тензора $g^{\alpha\beta}$ при условии $\det(g_{\alpha\beta})\equiv g\neq 0$ однозначно определяются из соотношений

$$g^{\alpha\varepsilon}g_{\varepsilon\beta}=\delta^{\alpha}_{\beta}\,. \tag{5}$$

Уравнения конформной геометродинамики (КГД) имеют вид

$$R_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R=T^{CGD}_{\alpha\beta}\,, \tag{6}$$

где

$$T^{CGD}_{\alpha\beta}=-2A_{\alpha}A_{\beta}-g_{\alpha\beta}A^2-2g_{\alpha\beta}A^{\mu}{}_{;\mu}+A_{\alpha;\beta}+A_{\beta;\alpha}+g_{\alpha\beta}\lambda\,. \tag{7}$$

* E-mail: gorbatenko@vniief.ru

Здесь A_α – вектор, который будем называть вектором Вейля, λ – некоторая не равная нулю скалярная функция, точка с запятой обозначает дифференцирование с символами Кристоффеля (4). Уравнения КГД инвариантны относительно преобразований

$$g_{\alpha\beta} \to g^*{}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}\, e^{2\sigma(x)}, \quad A_\alpha \to A^*{}_\alpha = A_\alpha - \frac{\partial\sigma(x)}{\partial x^\alpha}, \quad \lambda \to \lambda^* = \lambda\, e^{-2\sigma(x)}, \tag{8}$$

в которых $\sigma(x)$ – произвольная скалярная функция. Преобразования (8) обычно называются конформными.

Уравнения КГД могут быть записаны также в виде

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = -2A_\alpha A_\beta - g_{\alpha\beta} A^2 - 2 g_{\alpha\beta} A^\mu{}_{;\mu} + A_{\alpha;\beta} + A_{\beta;\alpha} + g_{\alpha\beta}\lambda, \tag{9}$$

или в эквивалентном виде

$$R_{\alpha\beta} = -2A_\alpha A_\beta + 2 g_{\alpha\beta} A^2 + g_{\alpha\beta} A^\mu{}_{;\mu} + A_{\alpha;\beta} + A_{\beta;\alpha} - g_{\alpha\beta}\lambda. \tag{10}$$

2. Что должно быть определено по результатам численного моделирования?

Полевые функции КГД, подлежащие определению по результатам численного моделирования, перечислены в табл. 1. Общее число искомых функций равно 15.

Таблица 1

Полевые функции КГД, подлежащие определению по результатам численного моделирования

Обозначение функции	Смысл функции	Количество полевых функций
$g_{\alpha\beta}\left(t, x^1, x^2, x^3\right)$	Компоненты метрического тензора	10
$A_\alpha\left(t, x^1, x^2, x^3\right)$	Компоненты вектора Вейля	4
$\lambda\left(t, x^1, x^2, x^3\right)$	Лямбда-член	1

Уравнения КГД (9) представляют собой систему 10 нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных от четырех переменных для полевых функций, указанных в табл. 1.

Для уравнений КГД имеется свобода выбора системы координат как и в случае уравнений ОТО. Инвариантность (8) приводит к необходимости выбора условия, фиксирующего калибровку.

Помимо начальных данных Коши (ДК) для выполнения численного моделирования необходимо задать граничные условия.

3. Данные Коши

При постановке задачи Коши необходимо указать те функции (данные Коши), которые задаются в начальный момент времени и по которым восстанавливаются искомые полевые функции. В качестве таких функций в данной работе будет использоваться совокупность 20 функций, перечисленных в табл. 2. Результаты рассмотрения должны подтвердить непротиворечивость сделанного выбора ДК с общей схемой постановки задачи Коши.

Таблица 2

ДК для уравнений КГД

ДК, задаваемые в начальный момент	Число независимых ДК
$g_{mn}\left(t_0,x^1,x^2,x^3\right)$	6
$g_{mn,0}\left(t_0,x^1,x^2,x^3\right)$	6
$g_{00}\left(t_0,x^1,x^2,x^3\right)$	1
$g_{0k}\left(t_0,x^1,x^2,x^3\right)$	3
$A_0\left(t_0,x^1,x^2,x^3\right)$	1
$A_k\left(t_0,x^1,x^2,x^3\right)$	3

В момент $t_0+\varepsilon$ (ε – малая величина) ДК находятся по ДК в момент t_0 с помощью разложений

$$g_{mn}\left(t_0+\varepsilon,x\right)=g_{mn}\left(t_0,x\right)+\varepsilon\, g_{mn,0}\left(t_0,x\right)+\frac{1}{2}\varepsilon^2\, g_{mn,00}\left(t_0,x\right)+\ldots, \tag{11}$$

$$g_{mn,0}\left(t_0+\varepsilon,x\right)=g_{mn,0}\left(t_0,x\right)+\varepsilon\, g_{mn,00}\left(t_0,x\right)+\ldots, \tag{12}$$

$$g_{00}\left(t_0+\varepsilon,x\right)=g_{00}\left(t_0,x\right)+\varepsilon\, g_{00,0}\left(t_0,x\right)+\ldots, \tag{13}$$

$$g_{0k}\left(t_0+\varepsilon,x\right)=g_{0k}\left(t_0,x\right)+\varepsilon\, g_{0k,0}\left(t_0,x\right)+\ldots, \tag{14}$$

$$A_0\left(t_0+\varepsilon,x\right)=A_0\left(t_0,x\right)+\varepsilon\, A_{0,0}\left(t_0,x\right)+\ldots, \tag{15}$$

$$A_k\left(t_0+\varepsilon,x\right)=A_k\left(t_0,x\right)+\varepsilon\, A_{k,0}\left(t_0,x\right)+\ldots. \tag{16}$$

В (11)–(16) буквой x обозначена совокупность координат x^1,x^2,x^3. Из (11)–(16) следует, что для каждого момента времени t_0 задача Коши должна содержать уравнения для нахождения

$$\begin{gathered} g_{00,0}\left(t_0,x^1,x^2,x^3\right),\, g_{0k,0}\left(t_0,x^1,x^2,x^3\right),\, g_{mn,00}\left(t_0,x^1,x^2,x^3\right), \\ A_{0,0}\left(t_0,x^1,x^2,x^3\right),\, A_{k,0}\left(t_0,x^1,x^2,x^3\right). \end{gathered} \tag{17}$$

Кроме того, уравнения КГД должны позволять вычислять по ДК функцию $\lambda\left(t_0,x^1,x^2,x^3\right)$.

Замечание: дифференцирование ДК на пространственноподобной гиперповерхности по переменным x^1,x^2,x^3 не увеличивает число ДК, поскольку для нахождения производных по таким переменным достаточно знать только сами ДК.

4. Обратный метрический тензор

Компоненты обратного метрического тензора $g^{\alpha\beta}$ при условии $\det(g_{\alpha\beta})\equiv g\neq 0$ однозначно определяются из соотношений (5) и представляют собой функции от компонент метрического тензора с нижними индексами $g_{\alpha\beta}$. Один из способов нахождения этой функциональной зависимости состоит в использовании символов альтернирования $\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$, $\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}$, определяемых следующим образом:

$$\varepsilon_{0123}=+1,$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}=\begin{cases} 1, & \text{если комбинация } (\alpha\beta\mu\nu) \text{ имеет ту же четность, что и } (0123), \\ -1, & \text{если четности комбинаций } (\alpha\beta\mu\nu) \text{ и } (0123) \text{ различны,} \\ 0, & \text{если среди индексов } (\alpha\beta\mu\nu) \text{ имеются совпадающие.} \end{cases} \tag{18}$$

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon^{0123} = -1, \\
&\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} = \begin{cases} -1, & \text{если комбинация } (\alpha\beta\mu\nu) \text{ имеет ту же четность, что и } (0123), \\ 1, & \text{если четности комбинаций } (\alpha\beta\mu\nu) \text{ и } (0123) \text{ различны}, \\ 0, & \text{если среди индексов } (\alpha\beta\mu\nu) \text{ имеются совпадающие.} \end{cases}
\end{aligned} \tag{19}
$$

Если алгебраические дополнения к каждому из элементов метрического тензора $g_{\alpha\beta}$ обозначить как

$$
A^{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{6}\varepsilon^{\alpha\mu\nu\rho}\varepsilon^{\beta\sigma\lambda\tau} g_{\mu\sigma} g_{\nu\lambda} g_{\rho\tau}\,, \tag{20}
$$

то компоненты обратного метрического тензора $g^{\alpha\beta}$ могут быть вычислены по формуле

$$
g^{\alpha\beta} = A^{\alpha\beta}/g\,. \tag{21}
$$

Так, например,

$$
g^{00} = \frac{1}{g}\det\left(g_{mn}\right) = \frac{1}{g}\det \begin{array}{|c|c|c|} \hline g_{11} & g_{12} & g_{31} \\ \hline g_{12} & g_{22} & g_{23} \\ \hline g_{31} & g_{23} & g_{33} \\ \hline \end{array} = \frac{1}{g}\left\{ g_{11}g_{22}g_{33} + 2g_{12}g_{23}g_{31} - g_{11}g_{23}^2 - g_{22}g_{31}^2 - g_{33}g_{12}^2 \right\}, \tag{22}
$$

где

$$
g = -\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} g_{0\alpha} g_{1\beta} g_{2\mu} g_{3\nu}\,. \tag{23}
$$

5. Условия де Дондера

Введем величину

$$
\Gamma^{\alpha} \equiv g^{\mu\nu}\begin{pmatrix}\alpha \\ \mu\nu\end{pmatrix}. \tag{24}
$$

Будем говорить, что используются гармонические координаты, если введенная соотношением (24) величина равна нулю,

$$
\Gamma^{\lambda} \equiv g^{\mu\nu}\begin{pmatrix}\lambda \\ \mu\nu\end{pmatrix} = 0\,. \tag{25}
$$

Условия (25) записываются иногда еще в двух эквивалентных вариантах, а именно:

$$
g^{\mu\nu} g_{\varepsilon\mu,\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g_{\mu\nu,\varepsilon} = 0\,, \tag{26}
$$

$$
\left(\sqrt{-g}\; g^{\lambda\varepsilon}\right)_{,\varepsilon} = 0\,. \tag{27}
$$

Полагая в (26) индекс $\varepsilon = 0$, $\varepsilon = k$, получаем:

$$
g^{00} g_{00,0} = F^{[1]}\left(g_{mn}, g_{mn,0}, g_{00}, g_{0k}\right). \tag{28}
$$

$$
g^{00} g_{0k,0} = F_k^{[2]}\left(g_{mn}, g_{mn,0}, g_{00}, g_{0k}\right)\,. \tag{29}
$$

Здесь $F^{[1]}, F_k^{[2]}$ – некоторые функции от аргументов, указанных в круглых скобках. В явной форме:

$$
g^{00} g_{00,0} = F^{[1]}\left(g_{mn}, g_{mn,0}, g_{00}, g_{0k}\right) = -2g^{pq} g_{0p,q} - 2g^{0m} g_{00,m} + g^{pq} g_{pq,0}\,. \tag{30}
$$

$$
\begin{aligned}
&g^{00} g_{0k,0} = F_k^{[2]}\left(g_{mn}, g_{mn,0}, g_{00}, g_{0k}\right) = \\
&= -g^{pq} g_{kp,q} - g^{0m} g_{k0,m} - g^{0m} g_{km,0} + \frac{1}{2} g^{00} g_{00,k} + \frac{1}{2} g^{pq} g_{pq,k} + g^{0m} g_{0m,k}\,.
\end{aligned} \tag{31}
$$

Условия гармоничности, записанные в форме соотношений (30), (31), представляют собой соотношения для нахождения первых производных по времени $g_{00,0}$ и $g_{0k,0}$ через компоненты метрики g_{mn}, g_{00}, g_{0k} и $g_{mn,0}$, т. е. через подмножество ДК из табл. 2. Соотношения (30), (31) являются точными.

6. Пространственные и временные компоненты символов Кристоффеля

Записываем символы Кристоффеля (4) с разделением временной и пространственных компонент.

$$\left.\begin{aligned}
&\begin{pmatrix}0\\00\end{pmatrix}=\frac{1}{2}g^{00}g_{00,0}+g^{0p}g_{0p,0}-\frac{1}{2}g^{0p}g_{00,p}\,,\\
&\begin{pmatrix}0\\0k\end{pmatrix}=\frac{1}{2}g^{00}g_{00,k}+\frac{1}{2}g^{0p}g_{kp,0}+\frac{1}{2}g^{0p}\left[g_{0p,k}-g_{0k,p}\right],\\
&\begin{pmatrix}0\\mn\end{pmatrix}=\frac{1}{2}g^{00}\left[g_{0n,m}+g_{0m,n}-g_{mn,0}\right]+\frac{1}{2}g^{0p}\left[g_{pn,m}+g_{mp,n}-g_{mn,p}\right].
\end{aligned}\right\}\tag{32}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\begin{pmatrix}k\\00\end{pmatrix}=\frac{1}{2}g^{0k}g_{00,0}+\frac{1}{2}g^{kp}\left[2g_{0p,0}-g_{00,p}\right],\\
&\begin{pmatrix}k\\0m\end{pmatrix}=\frac{1}{2}g^{kp}g_{mp,0}+\frac{1}{2}g^{0k}g_{00,m}+\frac{1}{2}g^{kp}\left[g_{0p,m}-g_{0m,p}\right],\\
&\begin{pmatrix}k\\mn\end{pmatrix}=\frac{1}{2}g^{0k}g_{mn,0}+\frac{1}{2}g^{0k}\left[g_{0n,m}+g_{0m,n}\right]+\frac{1}{2}g^{kp}\left[g_{pn,m}+g_{mp,n}-g_{mn,p}\right].
\end{aligned}\right\}\tag{33}$$

7. Символы Кристоффеля с учетом условий де Дондера

В выражениях для символов Кристоффеля (32), (33) заменяем производные $g^{00}g_{00,0}$ и $g^{00}g_{0k,0}$ с использованием соотношений (30) и (31). Получаем:

$$\left.\begin{aligned}
&\begin{pmatrix}0\\00\end{pmatrix}=\frac{1}{2}F^{[1]}\left(g_{mn},g_{mn,0},g_{00},g_{0k}\right)+\frac{g^{0p}}{g^{00}}F_k^{[2]}\left(g_{mn},g_{mn,0},g_{00},g_{0k}\right)-\frac{1}{2}g^{0p}g_{00,p}\,,\\
&\begin{pmatrix}0\\0k\end{pmatrix}=\frac{1}{2}g^{00}g_{00,k}+\frac{1}{2}g^{0p}g_{kp,0}+\frac{1}{2}g^{0p}\left[g_{0p,k}-g_{0k,p}\right],\\
&\begin{pmatrix}0\\mn\end{pmatrix}=\frac{1}{2}g^{00}\left[g_{0n,m}+g_{0m,n}-g_{mn,0}\right]+\frac{1}{2}g^{0p}\left[g_{pn,m}+g_{mp,n}-g_{mn,p}\right].
\end{aligned}\right\}\tag{34}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\begin{pmatrix}k\\00\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\frac{g^{0k}}{g^{00}}F^{[1]}\left(g_{mn},g_{mn,0},g_{00},g_{0k}\right)+\frac{g^{kp}}{g^{00}}F_p^{[2]}\left(g_{mn},g_{mn,0},g_{00},g_{0k}\right)-\frac{1}{2}g^{kp}g_{00,p}\,,\\
&\begin{pmatrix}k\\0m\end{pmatrix}=\frac{1}{2}g^{kp}g_{mp,0}+\frac{1}{2}g^{0k}g_{00,m}+\frac{1}{2}g^{kp}\left[g_{0p,m}-g_{0m,p}\right],\\
&\begin{pmatrix}k\\mn\end{pmatrix}=\frac{1}{2}g^{0k}g_{mn,0}+\frac{1}{2}g^{0k}\left[g_{0n,m}+g_{0m,n}\right]+\frac{1}{2}g^{kp}\left[g_{pn,m}+g_{mp,n}-g_{mn,p}\right].
\end{aligned}\right\}\tag{35}$$

Из (34), (35) следует, что в гармонических координатах все символы Кристоффеля являются функциями от подмножества ДК, приведенных в табл. 2.

8. Калибровочное условие Лоренца

В качестве калибровочного условия, фиксирующего свободу выбора масштаба для измерения длин, используем условие Лоренца

$$A^{\varepsilon}{}_{;\varepsilon} = 0 . \tag{36}$$

Воспользовавшись (24), условие (36) можем записать в виде

$$g^{\mu\nu} A_{\mu,\nu} = \Gamma^{\varepsilon} A_{\varepsilon} . \tag{37}$$

Выделение пространственных и временных компонент приводит к

$$g^{00} A_{0,0} = -g^{0m} A_{m,0} - g^{pq} A_{p,q} - g^{0m} A_{0,m} + \Gamma^{\varepsilon} A_{\varepsilon} . \tag{38}$$

Подстановка в соотношение (38) условия де Дондера (25) приводит к следующему выражению для $g^{00} A_{0,0}$:

$$g^{00} A_{0,0} = F^{[3]}\left(g_{mn}, g_{00}, g_{0k}, A_0, A_k\right). \tag{39}$$

Здесь

$$F^{[3]}\left(g_{mn}, g_{00}, g_{0k}, A_0, A_k\right) \equiv -g^{0m} A_{m,0} - g^{pq} A_{p,q} - g^{0m} A_{0,m} . \tag{40}$$

9. Леммы Лихнеровича

Достаточно полный анализ уравнений ОТО с точки зрения постановки задачи Коши проведен Лихнеровичем в [3, 4]*. Этого анализа мы и будем придерживаться в данной работе. Важную роль в нем играют две известные леммы, доказанные Лихнеровичем в [3, с. 31]. Здесь мы приведем их без доказательства в форме, представленной в работе [6, с. 183–186], адаптируя лишь обозначения к используемым в данной работе. Затем применим подход Лихнеровича к уравнениям КГД.

Пусть $W_{\alpha\beta}$ – какое-нибудь симметричное тензорное поле и

$$\overset{*}{W}_{\alpha\beta} \equiv W_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} W . \tag{41}$$

<u>Лемма 1</u>. Если $g^{00} \neq 0$, то смешанные компоненты W^{α}_{β} связаны с компонентами $\overset{*}{W}_{mn}$ и W^{0}_{α} линейным соотношением

$$W^{\alpha}_{\beta} = A^{\alpha mn}_{\beta} \overset{*}{W}_{mn} + B^{\alpha\nu}_{\beta} W^{0}_{\nu} , \tag{42}$$

где коэффициенты $A^{\alpha mn}_{\beta}$, $B^{\alpha\nu}_{\beta}$ являются линейной и квадратичной функциями тензора $g^{\mu\nu}$, деленного на g^{00}.

<u>Лемма 2</u>. Пусть Ω_4 – область пространства-времени с $g^{00} \neq 0$ и пусть Ω_3 – трехмерное подпространство, определяемое уравнением $x^0 = 0$. Тогда три следующих утверждения математически эквивалентны:

$$\left.\begin{aligned}
&(A) \quad W_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_4; \\
&(B) \quad \overset{*}{W}_{mn} = 0 \quad \text{и} \quad W^{0}_{\alpha} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_4; \\
&(C) \quad \overset{*}{W}_{mn} = 0 \quad \text{и} \quad W^{\nu}_{\alpha;\nu} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_4 \quad \text{при} \quad W^{0}_{\alpha} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_3 .
\end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Заметим, что леммы справедливы для произвольного тензора $W_{\alpha\beta}$. В нашем случае под $W_{\alpha\beta}$ будем понимать тензор

$$W_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R + 2A_{\alpha} A_{\beta} + g_{\alpha\beta} A^2 + 2 g_{\alpha\beta} A^{\varepsilon}{}_{;\varepsilon} - A_{\alpha;\beta} - A_{\beta;\alpha} - \lambda g_{\alpha\beta} . \tag{44}$$

При этом

* На русском языке изложение теории Лихнеровича имеется в книге [5].

$$\overset{*}{W}_{\alpha\beta} \equiv W_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} W = R_{\alpha\beta} + 2A_\alpha A_\beta - 2g_{\alpha\beta} A^2 - g_{\alpha\beta} A^\varepsilon{}_{;\varepsilon} - A_{\alpha;\beta} - A_{\beta;\alpha} + \lambda g_{\alpha\beta}. \tag{45}$$

Уравнения геометродинамики (6) в терминах тензора $W_{\alpha\beta}$ записываются как

$$W_{\alpha\beta} = 0. \tag{46}$$

На основании *леммы 2* эти же уравнения могут быть записаны как

$$\overset{*}{W}_{mn} = 0; \quad W_k^0 = 0; \quad W_0^0 = 0. \tag{47}$$

Последней формой записи уравнений мы и будем пользоваться в последующих разделах.

10. Запись тензора Риччи с учетом условия де Дондера

Записываем тензор Риччи с выделением вторых производных и с использованием соотношений (24)

$$R_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left[g_{\alpha\mu,\beta\nu} + g_{\beta\mu,\alpha\nu} - g_{\mu\nu,\alpha\beta} - g_{\alpha\beta,\mu\nu} \right] - \begin{pmatrix} \mu \\ \alpha\beta \end{pmatrix} g_{\mu\nu} \Gamma^\nu + \begin{pmatrix} \sigma \\ \alpha\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \beta\nu \end{pmatrix} g^{\mu\nu} g_{\sigma\varepsilon}. \tag{48}$$

Соотношение (48) является точным. Из (48) получаем:

$$R = g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} g_{\alpha\mu,\beta\nu} - g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} g_{\alpha\beta,\mu\nu} - g_{\mu\nu} \Gamma^\mu \Gamma^\nu + \begin{pmatrix} \sigma \\ \alpha\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \beta\nu \end{pmatrix} g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} g_{\sigma\varepsilon}. \tag{49}$$

В гармонических координатах выражения (48), (49) принимают следующий вид:

$$R_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left[g_{\alpha\mu,\beta\nu} + g_{\beta\mu,\alpha\nu} - g_{\mu\nu,\alpha\beta} - g_{\alpha\beta,\mu\nu} \right] + \begin{pmatrix} \sigma \\ \alpha\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \beta\nu \end{pmatrix} g^{\mu\nu} g_{\sigma\varepsilon}. \tag{50}$$

$$R = g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} g_{\alpha\mu,\beta\nu} - g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} g_{\alpha\beta,\mu\nu} + \begin{pmatrix} \sigma \\ \alpha\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \beta\nu \end{pmatrix} g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} g_{\sigma\varepsilon}. \tag{51}$$

11. Выделение в тензоре Риччи пространственных и временных компонент

Исходим из соотношений (50) и (51). Получаем:

$$R_{00} = -\frac{1}{2} g^{pq} g_{pq,00} + g^{pq} g_{0p,0q} - \frac{1}{2} g^{pq} g_{00,pq} + \begin{pmatrix} \sigma \\ 0\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 0\nu \end{pmatrix} g^{\mu\nu} g_{\sigma\varepsilon}. \tag{52}$$

$$\begin{aligned} R_{0k} = {} & \frac{1}{2} g^{0p} g_{kp,00} - \frac{1}{2} g^{0p} g_{0k,0p} - \frac{1}{2} g^{0p} g_{0p,0k} + \frac{1}{2} g^{pq} g_{0p,kq} + \\ & + \frac{1}{2} g^{pq} g_{kp,0q} - \frac{1}{2} g^{pq} g_{pq,0k} - \frac{1}{2} g^{pq} g_{0k,pq} + \frac{1}{2} g^{0p} g_{00,kp} + \begin{pmatrix} \sigma \\ 0\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon \\ k\nu \end{pmatrix} g^{\mu\nu} g_{\sigma\varepsilon}. \end{aligned} \tag{53}$$

$$\begin{aligned} R_{mn} = {} & -\frac{1}{2} g^{00} g_{mn,00} + \frac{1}{2} g^{00} g_{m0,n0} + \frac{1}{2} g^{00} g_{n0,m0} + \frac{1}{2} g^{0p} g_{mp,n0} + \frac{1}{2} g^{0p} g_{np,m0} - g^{0p} g_{mn,0p} + \\ & + \frac{1}{2} g^{0p} g_{m0,np} + \frac{1}{2} g^{pq} g_{mp,nq} + \frac{1}{2} g^{0p} g_{n0,mp} + \frac{1}{2} g^{pq} g_{np,mq} - \frac{1}{2} g^{00} g_{00,mn} - \\ & - g^{0p} g_{0p,mn} - \frac{1}{2} g^{pq} g_{pq,mn} - \frac{1}{2} g^{pq} g_{mn,pq} + \begin{pmatrix} \sigma \\ m\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon \\ n\nu \end{pmatrix} g^{\mu\nu} g_{\sigma\varepsilon}. \end{aligned} \tag{54}$$

$$
\begin{aligned}
R = {} & -g^{00}g^{pq}g_{pq,00}+g^{0p}g^{0q}g_{pq,00}+\\
& +2g^{00}g^{pq}g_{0p,0q}-2g^{0p}g^{0q}g_{0p,0q}+2g^{0k}g^{pq}g_{kp,0q}-2g^{0k}g^{pq}g_{pq,0k}+\\
& +g^{0k}g^{pq}g_{0p,kq}-\frac{1}{2}g^{00}g^{pq}g_{00,pq}-g^{0k}g^{pq}g_{0k,pq}+g^{0k}g^{0p}g_{00,kp}+\\
& +\frac{1}{2}g^{0p}g^{mn}g_{m0,np}+\frac{1}{2}g^{pq}g^{mn}g_{mp,nq}+\frac{1}{2}g^{0p}g^{mn}g_{n0,mp}+\frac{1}{2}g^{mn}g^{pq}g_{np,mq}-\\
& -\frac{1}{2}g^{00}g^{mn}g_{00,mn}-g^{0p}g^{mn}g_{0p,mn}-\frac{1}{2}g^{pq}g^{mn}g_{pq,mn}-\frac{1}{2}g^{pq}g^{mn}g_{mn,pq}+\\
& +2g^{0k}\begin{pmatrix}\sigma\\0\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon\\k\nu\end{pmatrix}g^{\mu\nu}g_{\sigma\varepsilon}+g^{00}\begin{pmatrix}\sigma\\0\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon\\0\nu\end{pmatrix}g^{\mu\nu}g_{\sigma\varepsilon}+g^{mn}\begin{pmatrix}\sigma\\m\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon\\n\nu\end{pmatrix}g^{\mu\nu}g_{\sigma\varepsilon}.
\end{aligned}
\tag{55}
$$

12. Выделение в тензорах W_0^0, W_k^0 пространственных и временных компонент

$$
\begin{aligned}
W_k^0 = {} & +\frac{1}{2}g^{00}g^{pq}g_{kp,0q}-\frac{1}{2}g^{00}g^{pq}g_{pq,0k}+\frac{1}{2}g^{0p}g^{0q}g_{pq,k0}-\frac{1}{2}g^{0p}g^{0q}g_{kp,q0}+\frac{1}{2}g^{00}g^{pq}g_{0p,kq}-\\
& -\frac{1}{2}g^{00}g^{pq}g_{0k,pq}+\frac{1}{2}g^{00}g^{0p}g_{00,kp}+\frac{1}{2}g^{0m}g^{0p}g_{m0,kp}+\frac{1}{2}g^{0m}g^{pq}g_{mp,kq}+\frac{1}{2}g^{0p}g^{0m}g_{k0,mp}+\\
& +\frac{1}{2}g^{pq}g^{0m}g_{kp,mq}-\frac{1}{2}g^{00}g^{0m}g_{00,mk}-g^{0p}g^{0m}g_{0p,mk}-\frac{1}{2}g^{pq}g^{0m}g_{pq,mk}-\frac{1}{2}g^{0m}g^{pq}g_{mk,pq}+\\
& +g^{0m}\begin{pmatrix}\sigma\\m\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon\\k\nu\end{pmatrix}g^{\mu\nu}g_{\sigma\varepsilon}+g^{00}\begin{pmatrix}\sigma\\0\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon\\k\nu\end{pmatrix}g^{\mu\nu}g_{\sigma\varepsilon}+2g^{00}A_0A_k-g^{00}A_{0,k}+g^{00}\begin{pmatrix}0\\0k\end{pmatrix}A_0+\\
& +g^{00}\begin{pmatrix}p\\0k\end{pmatrix}A_p-g^{00}A_{k,0}+g^{00}\begin{pmatrix}0\\0k\end{pmatrix}A_0+g^{00}\begin{pmatrix}p\\0k\end{pmatrix}A_p+g^{0p}\left\{2A_kA_p-A_{k;p}-A_{p;k}\right\}.
\end{aligned}
\tag{56}
$$

$$
\begin{aligned}
W_0^0 = {} & +\frac{1}{2}g^{00}g^{pq}\boxed{g_{0p,0q}}-\frac{1}{2}g^{0p}g^{0q}\boxed{g_{0p,0q}}-\frac{1}{2}g^{0k}g^{pq}g_{kp,0q}+\frac{1}{2}g^{0k}g^{pq}g_{pq,0k}-\frac{1}{2}g^{00}g^{pq}g_{00,pq}+\\
& +\frac{1}{2}g^{0k}g^{pq}g_{0p,kq}-\frac{1}{2}g^{0k}g^{pq}g_{0k,pq}-\frac{1}{2}g^{0k}g^{pq}g_{0p,kq}+\frac{1}{4}g^{00}g^{pq}g_{00,pq}+\frac{1}{2}g^{0k}g^{pq}g_{0k,pq}-\\
& -\frac{1}{2}g^{0p}g^{mn}g_{m0,np}-\frac{1}{2}g^{mn}g^{pq}g_{np,mq}+\frac{1}{4}g^{00}g^{mn}g_{00,mn}+\frac{1}{2}g^{0p}g^{mn}g_{0p,mn}+\frac{1}{2}g^{pq}g^{mn}g_{mn,pq}-\\
& -\frac{1}{2}g^{mn}\begin{pmatrix}\sigma\\m\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon\\n\nu\end{pmatrix}g^{\mu\nu}g_{\sigma\varepsilon}-\frac{1}{2}g^{00}\begin{pmatrix}\sigma\\0\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon\\0\nu\end{pmatrix}g^{\mu\nu}g_{\sigma\varepsilon}-\frac{1}{2}g^{mn}\begin{pmatrix}\sigma\\m\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon\\n\nu\end{pmatrix}g^{\mu\nu}g_{\sigma\varepsilon}+\\
& +g^{00}\begin{pmatrix}\sigma\\0\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon\\0\nu\end{pmatrix}g^{\mu\nu}g_{\sigma\varepsilon}+2g^{00}A_0A_0-2g^{00}\boxed{A_{0,0}}+2g^{00}\begin{pmatrix}0\\00\end{pmatrix}A_0+2g^{00}\begin{pmatrix}k\\00\end{pmatrix}A_k+\\
& +2g^{0k}A_0A_k-g^{0k}\left\{A_{0,k}-\begin{pmatrix}0\\0k\end{pmatrix}A_0-\begin{pmatrix}p\\0k\end{pmatrix}A_p\right\}-g^{0k}\left\{\boxed{A_{k,0}}-\begin{pmatrix}0\\0k\end{pmatrix}A_0-\begin{pmatrix}p\\0k\end{pmatrix}A_p\right\}+A^2-\lambda
\end{aligned}
\tag{57}
$$

13. Уравнения $W_k^0=0;\ W_0^0=0$

Приравниваем нулю выражения (56) и (57). В первом случае получаем следующее уравнение на нахождение $g^{00}A_{k,0}$:

$$
\begin{aligned}
g^{00}A_{k,0} \equiv F_k^{[4]}\left(g_{mn}, g_{mn,0}, g_{00}, g_{0k}, A_0, A_k\right) = &+\frac{1}{2}g^{00}g^{pq}g_{kp,0q} - \frac{1}{2}g^{00}g^{pq}g_{pq,0k} + \frac{1}{2}g^{0p}g^{0q}g_{pq,k0} - \\
&-\frac{1}{2}g^{0p}g^{0q}g_{kp,q0} + \frac{1}{2}g^{00}g^{pq}g_{0p,kq} - \frac{1}{2}g^{00}g^{pq}g_{0k,pq} + \frac{1}{2}g^{00}g^{0p}g_{00,kp} + \frac{1}{2}g^{0m}g^{0p}g_{m0,kp} + \\
&+\frac{1}{2}g^{0m}g^{pq}g_{mp,kq} + \frac{1}{2}g^{0p}g^{0m}g_{k0,mp} + \frac{1}{2}g^{pq}g^{0m}g_{kp,mq} - \frac{1}{2}g^{00}g^{0m}g_{00,mk} - g^{0p}g^{0m}g_{0p,mk} - \\
&-\frac{1}{2}g^{pq}g^{0m}g_{pq,mk} - \frac{1}{2}g^{0m}g^{pq}g_{mk,pq} + g^{0m}\begin{pmatrix}\sigma\\ m\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon\\ k\nu\end{pmatrix}g^{\mu\nu}g_{\sigma\varepsilon} + g^{00}\begin{pmatrix}\sigma\\ 0\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon\\ k\nu\end{pmatrix}g^{\mu\nu}g_{\sigma\varepsilon} + \\
&+2g^{00}A_0A_k - g^{00}A_{0,k} + g^{00}\begin{pmatrix}0\\ 0k\end{pmatrix}A_0 + g^{00}\begin{pmatrix}p\\ 0k\end{pmatrix}A_p + g^{00}\begin{pmatrix}0\\ 0k\end{pmatrix}A_0 + g^{00}\begin{pmatrix}p\\ 0k\end{pmatrix}A_p + \\
&+g^{0p}\left\{2A_kA_p - A_{k;p} - A_{p;k}\right\}.
\end{aligned}
\tag{58}
$$

Во втором случае четыре члена, помещенные в рамках, заменяем с использованием соотношений (31), (39) и (58). После этого соотношение (59) становится алгебраическим уравнением для определения функции λ. Таким образом приходим к уравнению

$$
\begin{aligned}
\lambda \equiv F_k^{[5]}\left(g_{mn}, g_{mn,0}, g_{00}, g_{0k}, A_0, A_k\right) = &\frac{1}{2}g^{00}g^{pq}\boxed{g_{0p,0q}} - \frac{1}{2}g^{0p}g^{0q}\boxed{g_{0p,0q}} - \frac{1}{2}g^{0k}g^{pq}g_{kp,0q} + \\
&+\frac{1}{2}g^{0k}g^{pq}g_{pq,0k} - \frac{1}{2}g^{00}g^{pq}g_{00,pq} + \frac{1}{2}g^{0k}g^{pq}g_{0p,kq} - \frac{1}{2}g^{0k}g^{pq}g_{0k,pq} - \frac{1}{2}g^{0k}g^{pq}g_{0p,kq} + \\
&+\frac{1}{4}g^{00}g^{pq}g_{00,pq} + \frac{1}{2}g^{0k}g^{pq}g_{0k,pq} - \frac{1}{2}g^{0p}g^{mn}g_{m0,np} - \frac{1}{2}g^{mn}g^{pq}g_{np,mq} + \frac{1}{4}g^{00}g^{mn}g_{00,mn} + \\
&+\frac{1}{2}g^{0p}g^{mn}g_{0p,mn} + \frac{1}{2}g^{pq}g^{mn}g_{mn,pq} - \frac{1}{2}g^{mn}\begin{pmatrix}\sigma\\ m\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon\\ n\nu\end{pmatrix}g^{\mu\nu}g_{\sigma\varepsilon} - \frac{1}{2}g^{00}\begin{pmatrix}\sigma\\ 0\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon\\ 0\nu\end{pmatrix}g^{\mu\nu}g_{\sigma\varepsilon} - \\
&-\frac{1}{2}g^{mn}\begin{pmatrix}\sigma\\ m\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon\\ n\nu\end{pmatrix}g^{\mu\nu}g_{\sigma\varepsilon} + g^{00}\begin{pmatrix}\sigma\\ 0\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon\\ 0\nu\end{pmatrix}g^{\mu\nu}g_{\sigma\varepsilon} + 2g^{00}A_0A_0 - 2g^{00}\boxed{A_{0,0}} + 2g^{00}\begin{pmatrix}0\\ 00\end{pmatrix}A_0 + \\
&+2g^{00}\begin{pmatrix}k\\ 00\end{pmatrix}A_k + 2g^{0k}A_0A_k - g^{0k}\left\{A_{0,k} - \begin{pmatrix}0\\ 0k\end{pmatrix}A_0 - \begin{pmatrix}p\\ 0k\end{pmatrix}A_p\right\} - g^{0k}\left\{\boxed{A_{k,0}} - \begin{pmatrix}0\\ 0k\end{pmatrix}A_0 - \begin{pmatrix}p\\ 0k\end{pmatrix}A_p\right\} + A^2.
\end{aligned}
\tag{59}
$$

14. Уравнения $\overset{*}{W}_{mn} = 0$

Следуя предписаниям *леммы 2*, записываем уравнения $\overset{*}{W}_{mn} = 0$ с учетом условий гармоничности и калибровочного условия.

$$
R_{mn} + 2A_mA_n - 2g_{mn}A^2 - A_{m;n} - A_{n;m} + \lambda g_{mn} = 0. \tag{60}
$$

Подставляем в (60) выражение (54) для R_{mn}:

$$
\begin{aligned}
g^{00}g_{mn,00} = &g^{00}\boxed{g_{m0,n0}} + g^{00}\boxed{g_{n0,m0}} + g^{0p}g_{mp,n0} + g^{0p}g_{np,m0} - 2g^{0p}g_{mn,0p} + \\
&+g^{0p}g_{m0,np} + g^{pq}g_{mp,nq} + g^{0p}g_{n0,mp} + g^{pq}g_{np,mq} - g^{00}g_{00,mn} - 2g^{0p}g_{0p,mn} - g^{pq}g_{pq,mn} - \\
&-g^{pq}g_{mn,pq} + 2\begin{pmatrix}\sigma\\ m\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon\\ n\nu\end{pmatrix}g^{\mu\nu}g_{\sigma\varepsilon} + 4A_mA_n - 4g_{mn}A^2 - 2A_{m;n} - 2A_{n;m} + 2\boxed{\lambda}g_{mn}.
\end{aligned}
\tag{61}
$$

После замены трех членов в выражении (61), помещенных в рамках, на выражения (31) и (59) уравнение (61) становится уравнением для определения $g^{00}g_{mn,00}$.

15. Последовательность операций при проведении численных расчетов

Согласно разделу 2, корректная постановка задачи Коши предполагает наличие для каждого момента времени t_0 уравнений для нахождения величин (17). Уравнения для нахождения указанных величин перечислены в табл. 3.

Таблица 3

Уравнения для нахождения величин (17) и величины $\lambda\left(t_0, x^1, x^2, x^3\right)$

Искомая функция	Уравнение (соотношение) для нахождения искомых функций
$g_{00,0}\left(t_0, x^1, x^2, x^3\right)$	(30) Из условия гармоничности координат
$g_{0k,0}\left(t_0, x^1, x^2, x^3\right)$	(31) Из условия гармоничности координат
$A_{0,0}\left(t_0, x^1, x^2, x^3\right)$	(39) Из калибровочного условия
$A_{k,0}\left(t_0, x^1, x^2, x^3\right)$	(58) Из условия $W_k^0 = 0$
$\lambda\left(t_0, x^1, x^2, x^3\right)$	(59) Алгебраическое уравнение, вытекающее из условия $W_0^0 = 0$
$g_{mn,00}\left(t_0, x^1, x^2, x^3\right)$	(61) Из условия $\overset{*}{W}_{mn} = 0$

С учетом приведенных выше результатов порядок нахождения 15 полевых функций, указанных в табл. 1, может быть следующим:

- выбирается 3-мерная пространственноподобная поверхность в качестве начальной поверхности, соответствующей начальному моменту времени t_0;
- на начальной поверхности задаются ДК, перечисленные в табл. 2, т. е. функции $g_{mn}\left(t_0, x^1, x^2, x^3\right)$, $g_{mn,0}\left(t_0, x^1, x^2, x^3\right)$, $g_{00}\left(t_0, x^1, x^2, x^3\right)$, $g_{0k}\left(t_0, x^1, x^2, x^3\right)$, $A_0\left(t_0, x^1, x^2, x^3\right)$, $A_k\left(t_0, x^1, x^2, x^3\right)$;
- проверяется неравенство $g^{00}\left(t_0\right) \neq 0$. Если неравенство выполняется, то производятся действия, перечисленные ниже;
- по ДК из соотношения (59) (т.е. из условия $W_0^0 = 0$) находится значение $\lambda\left(t_0, x^1, x^2, x^3\right)$;
- производные по времени $g_{mn,00}\left(t_0, x^1, x^2, x^3\right)$, $g_{00,0}\left(t_0, x^1, x^2, x^3\right)$, $g_{0k,0}\left(t_0, x^1, x^2, x^3\right)$, $A_{0,0}\left(t_0, x^1, x^2, x^3\right)$, $A_{k,0}\left(t_0, x^1, x^2, x^3\right)$ находятся в следующем порядке:
  - $g_{00,0}\left(t_0, x^1, x^2, x^3\right)$ – из условия де Дондера (30);
  - $g_{0k,0}\left(t_0, x^1, x^2, x^3\right)$ – из условия де Дондера (31);
  - $A_{k,0}\left(t_0, x^1, x^2, x^3\right)$ – из условия (58) (т. е. из условия $W_k^0 = 0$);
  - $A_{0,0}\left(t_0, x^1, x^2, x^3\right)$ – из калибровочного условия (39);
  - $g_{mn,00}\left(t_0, x^1, x^2, x^3\right)$ – из уравнений (61);
- с помощью найденных производных по времени вычисляются ДК на момент $t_0 + \Delta t$. Вычисления производятся с использованием разложений Тейлора типа (11)–(16);
- после нахождения ДК находится значение λ на момент $t_0 + \Delta t$ из условия $W_0^0 = 0$;
- далее делается переход к моменту $t_0 + 2\Delta t$ и т. д.

Число функций в схеме с гармоническими координатами составляет 15, а число ДК в общей сложности составляет 20.

Помимо начальных ДК для выполнения численного моделирования необходимо задать граничные условия. При этом может быть использовано какое-нибудь из известных точных решений. Например, приведенные в работе [2] решения де Ситтера, Фридмана, Юкавы.

Обратим внимание на то, что вывод о постановке задачи Коши применим только в отношении уравнений КГД с ненулевой функцией λ. Если в уравнениях выбросить эту функцию, то на начальной гиперповерхности данные Коши не могут быть свободными, они должны удовлетворять определенному соотношению, носящему характер связи и вытекающему из условия $\lambda = 0$.

16. Форма представления результатов численного моделирования

Изложенные в предыдущем разделе операции по проведению численных расчетов позволяют построить 15 функций

$$g_{\alpha\beta}(t,x), \quad A_{\alpha}(t,x), \quad \lambda(t,x). \tag{62}$$

Эти функции являются искомыми, их нахождение и является целью численного моделирования.

Зная функции (62), можно вычислить ряд функционалов, имеющих обычный физический смысл. К числу таких функционалов относятся плотность энергии, давление, плотность сохраняющегося заряда, энтропия, температура, коэффициент теплопроводности, коэффициент вязкости, изэнтропическая скорость звука, уравнение состояния и др. Термодинамические величины находятся по формулам, приведенным в ряде работ по КГД (см., например, [2] и приведенные там ссылки).

Следствиями уравнений КГД являются уравнения Навье–Стокса для вязкой теплопроводной сплошной среды. Представление результатов моделирования в форме уравнения Навье–Стокса может позволить выяснить вопрос о том, какой вид материи описывает тензор $T_{\alpha\beta}^{CGD}$ в данной области 4-мерного пространства-времени. Заметим, однако, что в общем случае тензор $T_{\alpha\beta}^{CGD}$ не гарантирует выполнение таких свойств сплошной среды, как положительность плотности энергии, давления, выполнимость второго начала термодинамики о возрастании энтропии и т. д. Выяснение области применимости результатов численного моделирования уравнений КГД к объяснению того или иного физического процесса представляется нам отдельной нетривиальной задачей, обсуждать которую целесообразно по мере появления результатов численного моделирования.

Еще одним классом информации, который может быть полезен при выяснении физического смысла КГД, состоит из инвариантов пространства Вейля таких, как

$$\left(W_{\alpha\beta\mu\nu}W^{\alpha\beta\mu\nu}\right), \quad \left(W_{\alpha\beta\mu\nu}\overset{*}{W}{}^{\alpha\beta\mu\nu}\right), \quad \left(F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right), \quad \left(F_{\alpha\beta}\overset{*}{F}{}^{\alpha\beta}\right). \tag{63}$$

Здесь через величины со звездочками помечены дуальные величины, вычисляемые с помощью полностью антисимметричного тензора.

17. Классы задач для численного моделирования

Для численного моделирования решений уравнений КГД необходимо прежде всего составить компьютерную программу решения уравнений КГД в форме (9) вместе с условиями гармоничности (30), (31) и калибровочным условием (39). Естественно, в составе программы должны быть вспомогательные подпрограммы для вычисления метрического тензора с верхними индексами, символов Кристоффеля по формулам (34), (35), правил суммирования и выполнения ряда других сопутствующих операций.

Численное моделирование целесообразно начать с простейших задач. К их числу следует отнести сферически-симметричную задачу, положив в ней все компоненты метрики равными соответствующим компонентам в решении де Ситтера, за исключением одной из компонент – компоненты $g_{00}(t_0,x)$. Компоненту $g_{00}(t_0,x)$ можно задать, например, в виде

$$g_{00}\left(t_0,x\right)=\begin{cases}1-0{,}1\cos^2\left(\pi\dfrac{r}{r_0}\right), & 0<r<r_0,\\ 1, \quad r_0<r.\end{cases} \tag{64}$$

Меняя параметры задачи, можно, по-видимому, исследовать эволюцию возникновения черных дыр или чего-то иного, что издалека принимается за черные дыры.

Более общей формой сферически-симметричной задачи могла бы явиться задача о кумуляции. В этом случае помимо функции (64) необходимо задать еще и величину $g_{00,0}\left(t_0,x\right)$ так, чтобы эта величина была направлена к центру.

Еще один класс задач, представляющих физический интерес, – это задача о пространственно-временном формировании решения типа Юкавы (см. [2]).

18. Обсуждение

Результаты работы состоят из двух частей. Во-первых, доказана возможность постановки задачи Коши для уравнений ОТО с конформно-инвариантным тензором энергии-импульса в гармонических координатах. В этих координатах общая схема постановки задачи Коши близка к той, которая развита в работе [7] применительно к синхронной системе координат. И здесь и тогда постановка задачи Коши базируется на двух леммах Лихнеровича [3, 4]. Гарантия корректности постановки задачи Коши позволяет организовывать нахождение решений уравнений КГД путем численного моделирования.

Во-вторых, в работе приведен полный набор рабочих формул, необходимых для составления программы по численному моделированию.

Анализ физического смысла возможных результатов численного моделирования и специфики многообразных нелинейных эффектов остались за рамками данной работы. По этому вопросу ограничимся лишь замечанием о том, что программа, позволяющая находить решения уравнений КГД, могла бы стать тем инструментом, с помощью которого можно было бы моделировать феномены, ассоциируемые с черными дырами, двойными звездными системами, спиральными галактиками и т. д.

Список литературы

1. Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Гравитация. Т. 1–3. М.: Мир, 1977.

2. Горбатенко М. В. Конформная геометродинамика. Том I. Динамические уравнения и точные решения. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2012.

3. Lichnerowicz A. Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme. Paris, 1955.

4. Lichnerowicz A. Applications of Nonlinear Partial Differential Equations in Mathematical Physics. Proc. of Symposia in Appl. Maths. Vol. 17, Providence, 1965. P. 189.

5. Захаров В. Д. Гравитационные волны в теории тяготения Эйнштейна. М.: Наука, 1972.

6. Синг Дж. Л. Общая теория относительности. М.: ИЛ, 1963.

7. Горбатенко М. В., Романов Ю. А. Задача Коши для уравнений, описывающих динамику пространства аффинной связности // Вопросы атомной науки и техники. Сер.: Теоретическая и прикладная физика. 1997. Вып. 2. С. 34–37.

Статья поступила в редакцию 15.10.2012