

## ИССЛЕДОВАНИЕ ГРАВИТАЦИОННОГО ПЕРЕМЕШИВАНИЯ В ПРИСУТСТВИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

С. И. Глазырин, М. Ю. Егужова, В. А. Жмайло, В. П. Стаценко, Ю. В. Янилкин

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Численно исследуется задача о турбулентном гравитационном перемешивании в присутствии магнитного поля для идеальной МГД. Граница раздела двух жидкостей изначально плоская, а магнитное поле задается параллельным плоскости раздела. Развивающаяся неустойчивость приводит к образованию области турбулентного перемешивания и замешивает среднюю плотность вещества и магнитное поле. В результате исследования получены как влияние магнитного поля на область перемешивания, так и влияние области перемешивания на магнитное поле. Последнее описано и с помощью предложенной полуфеноменологической модели.

*Ключевые слова:* МГД-турбулентность, гравитационное перемешивание, прямое численное моделирование, полуэмпирические модели.

### 1. Введение

Задача гравитационного перемешивания в плазме с магнитным полем встречается в огромном количестве фундаментальных задач и приложений, таких как турбулентное динамо [1], аккреция на компактные объекты [2], остатки сверхновых [3], магнитные потоки, вырывающиеся из солнечной фотосферы, [4], петаваттные импульсные установки и Z-пинчи [5–7]. При этом некоторые вопросы до сих пор остаются без ответа. В первую очередь это связано с турбулизацией течения при перемешивании. В данной работе рассматривается МГД-случай перемешивания в идеально проводящей жидкости. Данная задача представляет интерес и добавляет нетривиальные эффекты по сравнению с немагнитным случаем по следующим причинам: во-первых, поле само влияет на перемешивание, во-вторых, магнитное поле заморожено в вещество и следует плотности, но в отличие от последней является векторной величиной. В результате подобию средних значений плотности и магнитного поля не выполняется. Идеальная проводимость рассмотрена для того, чтобы исследовать турбулентную диффузию магнитного поля в чистом виде.

Нас интересуют следующие вопросы:

- каково влияние поля на развитие зоны турбулентного перемешивания (ТП), на рост зоны ТП, энергию турбулентных пульсаций, профили различных величин;
- в чем состоит влияние турбулентности на параметры магнитного поля (турбулентная диффузия, генерация дополнительных компонент, среднеквадратичные флуктуации поля);
- возможность описания процесса перемешивания с помощью МГД-варианта  $k-\varepsilon$  модели с использованием результатов 3D численного моделирования.

### 2. Постановка задачи

Рассмотрим следующую задачу. Две несмешивающиеся идеальные жидкости разных плотностей  $\rho_1$  и  $\rho_2$  занимают полупространства  $z < 0$  и  $z > 0$  соответственно (рис. 1). Магнитное поле задается изначально параллельным границе раздела,  $B \parallel OY$ . Сила тяжести направлена вертикально ( $g \parallel OZ$ ). Во всем объеме давление выбирается так, чтобы задать равновесие:

$$\begin{aligned} z < 0: & \quad h = p_0 - \rho_1 |g|z, \\ z > 0: & \quad p = p(z=0+\varepsilon) - \rho_2 |g|z, \\ z = 0: & \quad p(z=0+\varepsilon) = p_0 + \frac{B_1^2}{8\pi} - \frac{B_2^2}{8\pi}. \end{aligned} \quad (1)$$

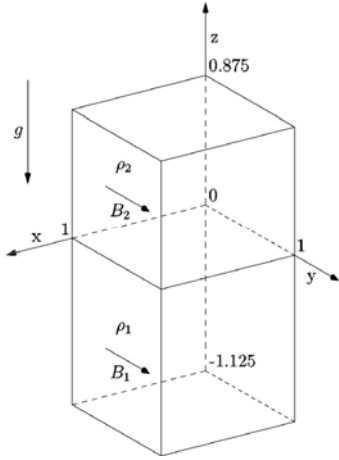


Рис. 1. Начальная постановка

Давление в центре удовлетворяет условию  $p_0 \gg \rho gL$ , в результате скорости движения  $v \ll c_s$ , и течение становится близким к несжимаемому (используемый код сжимаемый, а данный метод позволяет привести результаты близко к несжимаемому расчету). Начальное возмущение задаем в виде белого шума в тонкой полосе:

$$0 < z < \Delta z_0: \quad \rho = \rho_2 + \delta\rho. \quad (2)$$

Если говорить о масштабах задаваемых величин, то

$$A_t = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\delta\rho}{\rho_2} = \frac{1}{10}. \quad (3)$$

Для характеристики магнитного поля используем следующую безразмерную комбинацию

$$\xi \equiv \frac{B}{\sqrt{8\pi(\rho_2 - \rho_1)gL}}. \quad (4)$$

Она показывает отношение средней магнитной энергии к потенциальной. Расчеты были проведены со следующим диапазоном значений  $\xi$ :

$$\xi \in [3 \cdot 10^{-3}; 2, 2]. \quad (5)$$

Ниже будем различать однородный вариант задания магнитного поля:  $B_1 = B_2$  и неоднородный  $B_1 \neq 0, B_2 = 0$ . Численное моделирование проводилось с помощью 3D сжимаемого гидрокода ТРЭК [8]. Все расчеты выполнены на сетке  $200 \times 200 \times 400$  ячеек в геометрической области  $L \times L \times 2L$ .

### 3. Результаты расчетов

Для начала рассмотрим влияние магнитного поля на возникающую турбулентность. 2D срезы плотности для разных  $\xi$  представлены на рис. 2. Хорошо видно, что при увеличении поля течение «двумеризуется» и критической точкой перехода является  $\xi \sim 1$ . Эти результаты легко понять, если рассмотреть критерий скорости роста малых возмущений на границе двух веществ с магнитным полем [10]:

$$\delta\rho \sim e^{ik_x x + ik_y y - i\omega t}, \quad (6)$$

$$\omega^2 = -gk \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} + \frac{(B_1 k)^2}{4\pi(\rho_1 + \rho_2)} + \frac{(B_2 k)^2}{4\pi(\rho_1 + \rho_2)}. \quad (7)$$

Видно, что магнитное поле подавляет возмущения с  $k > k_{cr}$ , где критическая длина волны  $k_{cr}$  определяется из условия  $\omega^2 = 0$ . Например, для однородного поля

$$k_{cr} = \frac{2\pi(\rho_2 - \rho_1)g}{B^2}. \quad (8)$$

В результате достаточно сильное поле приведет к подавлению роста возмущений, параллельных полю. Также из соотношения (7) видно, что для введенной безразмерной величины выполняется

$$\xi = \text{const} \frac{B}{B_{cr}}, \quad B_{cr} = \sqrt{8\pi(\rho_2 - \rho_1)gL}. \quad (9)$$

где значение константы различается для однородного и неоднородного поля. В согласии с формулой (7) из расчетов получается, что поле подавляет мелкие пульсации и приводит к анизотропии компонент турбулентной энергии  $\overline{(v'_x)^2} \sim \overline{(v'_z)^2} \gg \overline{(v'_y)^2}$ .

Рассмотрим влияние магнитного поля на скорость роста зоны перемешивания. В немагнитном случае зависимость ширины зоны от времени имеет вид

$$\Delta z = \alpha A_t g t^2, \quad (10)$$

где параметр  $\alpha \sim 0,04$ . В магнитном случае это соотношение может не сохраниться: либо изменится  $\alpha$ , либо зависимость от времени  $\Delta z \sim t^2$ . Проведенные расчеты показывают справедливость формулы (10). Полученная в расчете функция  $\sqrt{\Delta z}(t)$  представлена на рис. 3.

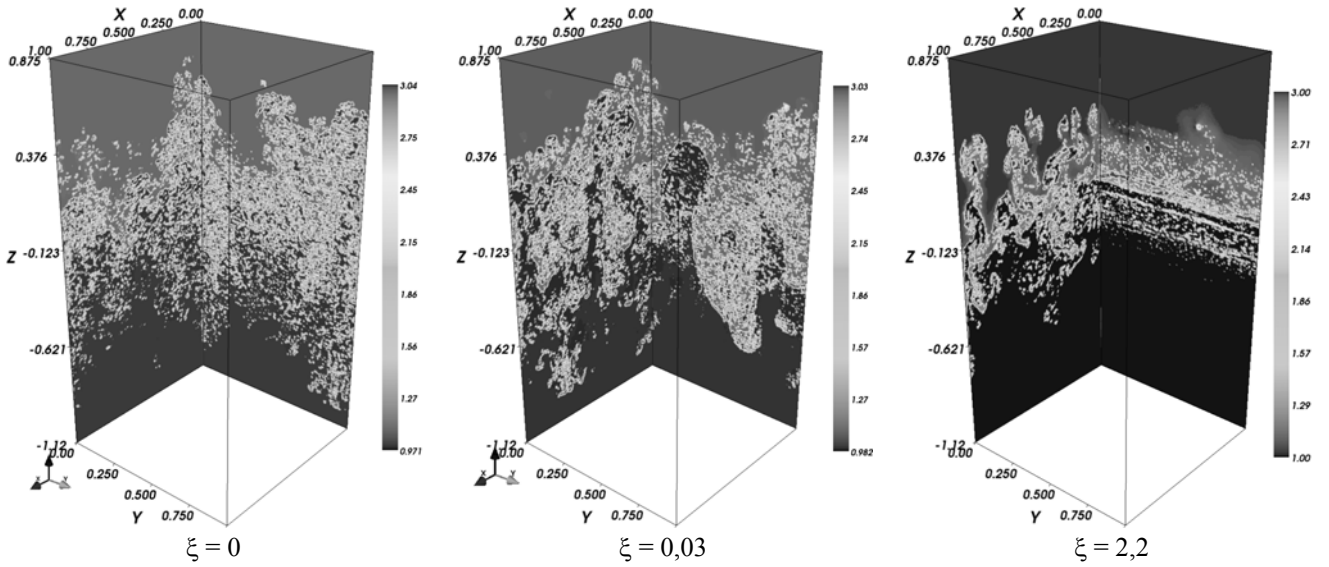


Рис. 2. Двумерные срезы плотности для расчетов с различным магнитным полем

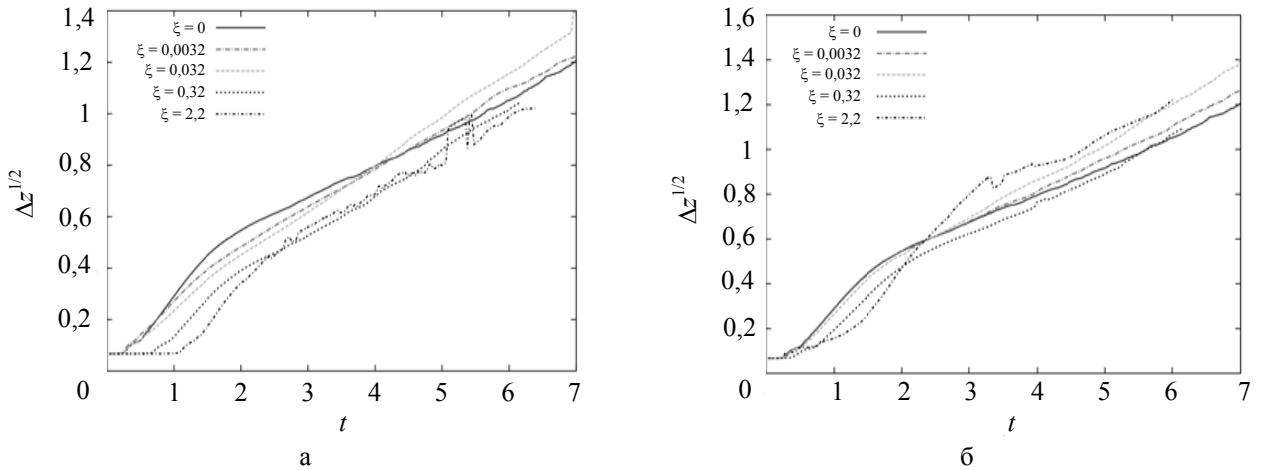


Рис. 3. Зависимости ширины зоны от времени: а – однородное поле; б – неоднородное поле

В результате видно, что коэффициент  $\alpha$  сохраняет свое значение и не меняется с магнитным полем. Единственный наблюдаемый эффект магнитного поля заключается в задержке развития зоны перемешивания на начальной стадии  $t \leq 1$ , что также согласуется с выражением (7).

Для определения турбулентных пульсаций используем однородность величин в горизонтальных плоскостях. Тогда осреднение любой величины  $A$  определяется как

$$\bar{A}(z, t) \equiv \frac{1}{L^2} \int A(x, y, z, t) dx dy. \quad (11)$$

Пульсация величины

$$A'(x, y, z, t) = A(x, y, z, t) - \bar{A}(z, t). \quad (12)$$

Энергия турбулентных пульсаций имеет следующую зависимость от времени:

$$E_{turb} = \int \frac{\rho v'^2}{2} dV \sim L^2 \sim (gt^2)^2. \quad (13)$$

Указанное соотношение  $E_{turb} \sim L^2$  выполняется во всех случаях. Интерес представляет коэффициент пропорциональности в данном выражении. Нормированная турбулентная энергия представлена на рис. 4.

Видно, что коэффициент пропорциональности не зависит от величины магнитного поля. При этом в неоднородном случае нормированная кинетическая энергия на начальном этапе развития неустойчивости значительно возрастает с возрастанием величины поля. Этот эффект связан с тем, что в уравнении для кинетической турбулентной энергии присутствует член, зависящий от производной поля:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\overline{u'^2}}{2} \right) = \dots + \overline{u'_i b'_j} \partial_j B_i + \dots, \quad (14)$$

и для неоднородного случая сильная неоднородность поля резко поднимает значения турбулентной энергии. Интересно то, что в дальнейшем, несмотря на этот начальный подскок, наблюдается универсальное поведение, не зависящее от величины поля.

Рассмотрим теперь влияние турбулентности на эволюцию магнитного поля. В неоднородном случае происходит процесс турбулентной диффузии поля. При этом профили поля на качественном уровне хорошо повторяют профили плотности (см. рис. 5). На самом деле присутствует некото-

рое количественное отличие (см. ниже про развитие  $k-\varepsilon$  модели).

В однородном поле турбулентность генерирует возмущения (рис. 6,а) амплитуда которых будет описана ниже в полуфеноменологической модели. Также происходит генерация других компонент магнитного поля – рис. 6,б.

Турбулентная магнитная энергия сохраняет поведение, аналогичное соотношению (13) в случае, если есть универсальность распределения выделяющейся энергии между магнитной и кинетической, т. е.

$$E_{turbm} = \int \frac{\overline{b'^2}}{8\pi} dV \sim L^2 \sim (gt^2)^2. \quad (15)$$

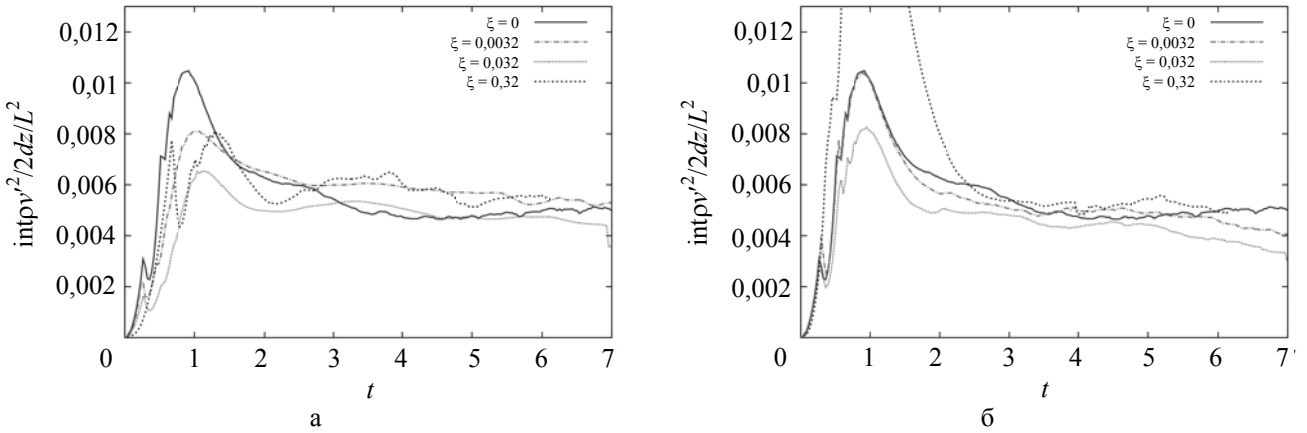


Рис. 4. Зависимость нормированной турбулентной энергии от времени: а – однородное поле; б – неоднородное поле

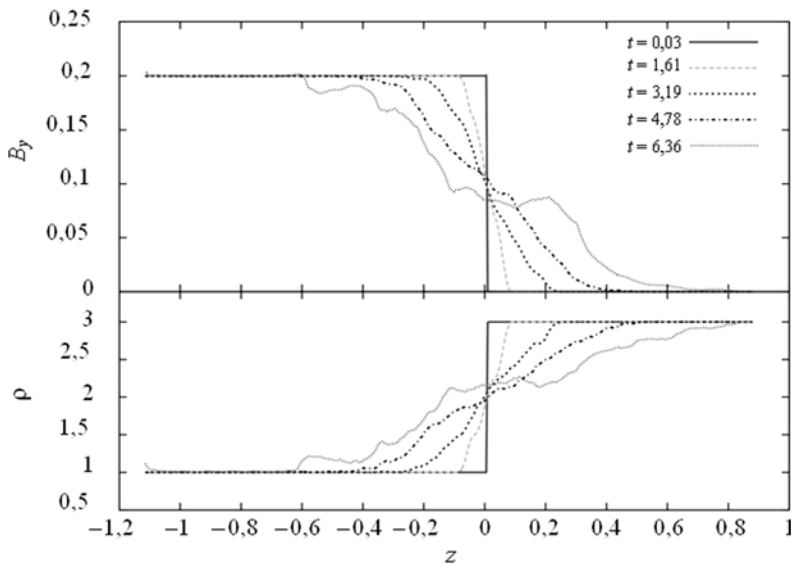


Рис. 5. Последовательные профили усредненных магнитного поля и плотности для расчета с  $\xi = 0,3$ , неоднородное поле

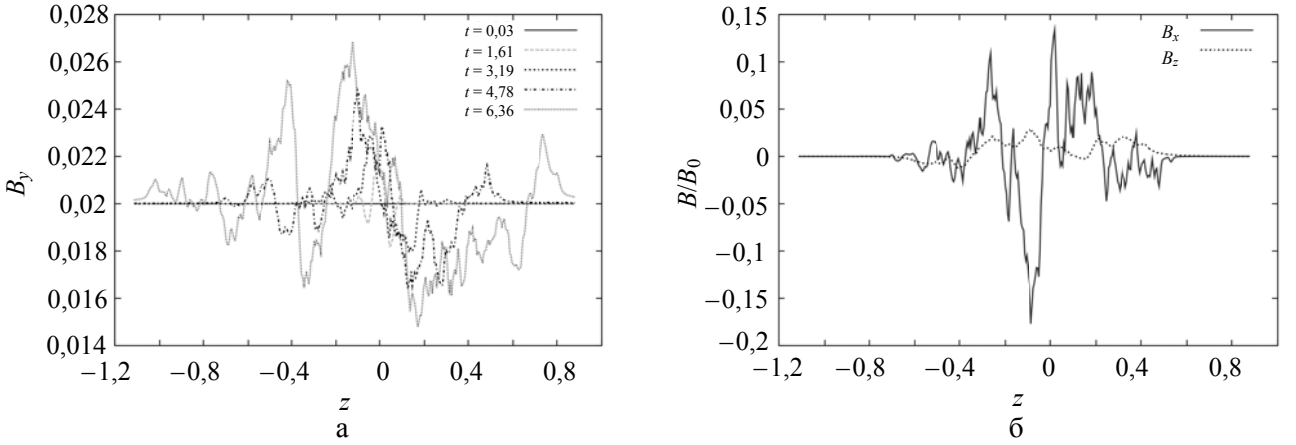


Рис. 6. Последовательные профили усредненного магнитного поля и плотности для расчета с  $\xi = 0,03$ , однородное поле

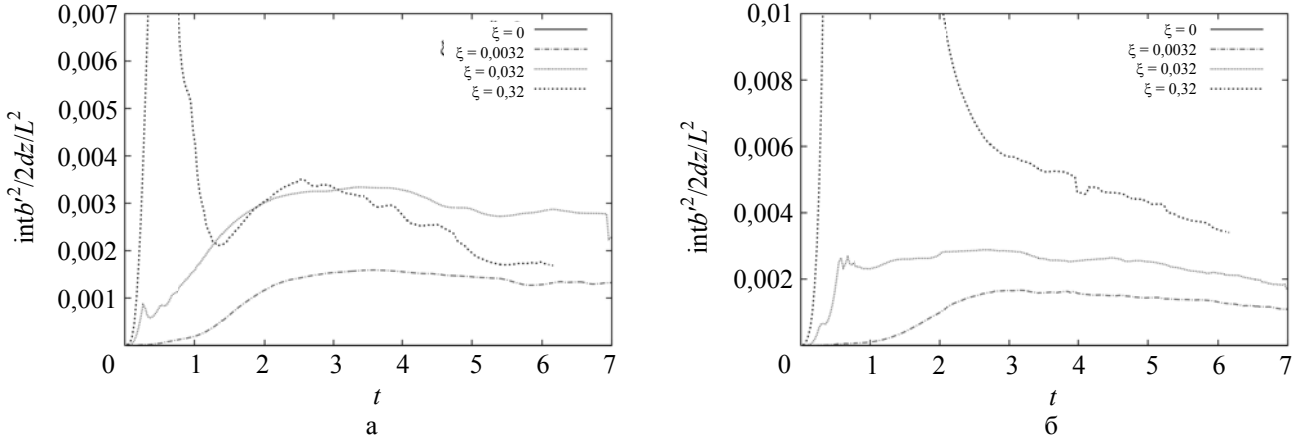


Рис. 7. Зависимость нормированной турбулентной магнитной энергии от времени: а – однородное поле; б – неоднородное поле

На рис. 7 представлена нормированная магнитная турбулентная энергия. Сразу видна некоторая разница с такими же результатами для кинетической энергии. Во-первых, наблюдается зависимость энергии поля с ростом величины поля – коэффициент при энергии растет с  $|B|$ . Во-вторых, в расчете с полем  $\xi = 0,32$  коэффициент не выходит на стационарное значение. Это означает, что либо пульсации при таком поле медленно выходят на теоретическое предсказание, либо теоретическое предсказание  $E_{turbm} \sim L^2$  в данном случае нарушается.

#### 4. Построение полуфеноменологической модели

Рассмотрим класс двухпараметрических моделей  $k - \varepsilon$ . В этих моделях  $k$  – турбулентная кинетическая энергия,  $\varepsilon$  – диссипация турбулентной энергии. В этих терминах определяется турбулентная диффузия

$$D = c_D \frac{k^2}{\varepsilon}. \quad (16)$$

Тогда, например, для эволюции усредненной плотности в гравитационном перемешивании можно написать

$$\partial_t \rho = \partial_z (c_\alpha D \partial_z \rho). \quad (17)$$

В работе [9] предложено автомодельное решение уравнений  $k-\varepsilon$  модели (без магнитного поля). Выпишем полученный аналитический результат для коэффициента диффузии из этой работы. Параметр автомодельности для задачи

$$\chi = \frac{z}{Ag t^2}. \quad (18)$$

После решения уравнений в автомодельном виде в рамках некоторых предположений [9] получаем

$$D(t, z) = c_D \frac{k^2}{\varepsilon} \equiv d(\chi) g^2 t^3, \quad (19)$$

$$d(\chi) = \frac{2A^2}{c_\alpha Z} \left\{ \left( \chi_1 - \frac{1}{Z} \right) e^{Z(\chi_1 - \chi)} - \chi + \frac{1}{Z} \right\}. \quad (20)$$

Здесь  $\chi_1$  – нижняя граница зоны перемешивания,  $A$  – число Атвуда,  $Z$  – переменная константа модели. В результате сравнения этого решения с прямым численным моделированием данной работы, получаются следующие оптимальные значения констант полуэмпирической модели  $c_D = 0,12$ ,  $c_\alpha = 1,7$ .

Рассмотрим вопрос об эволюции магнитного поля. Усредненное уравнение выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \text{rot}[V \times B] + \text{rot} E_M, \quad (21)$$

где обозначено  $E_M \equiv \overline{v' \times b'}$ . В работах [11–13] представлено обобщение  $k-\varepsilon$  модели на магнитный случай для моделирования задач возникновения динамо. Будем называть его моделью

Yoshizawa–Hamba (YH) и применим эти результаты к нашей задаче. Турбулентный член в уравнении для магнитного поля выглядит следующим образом:

$$E_M = \alpha B - \beta \text{rot} B + \gamma \text{rot} V. \quad (22)$$

Для гравитационного перемешивания предполагаем упрощение:

$$V = 0, \quad \alpha = 0, \quad \beta = C_\beta \frac{k^2}{\varepsilon}, \quad \gamma = 0, \quad (23)$$

тогда для магнитного поля уравнение превращается в диффузионное уравнение

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -\text{rot}(\beta \text{rot} B). \quad (24)$$

Введем параметр, показывающий относительную диффузию плотности и поля:

$$\eta \equiv \frac{D_{\rho t}}{D_{Bt}} = \frac{c_\alpha c_D}{C_\beta}. \quad (25)$$

Слабое поле не влияет на гидродинамические характеристики течения, поэтому используем результат (20) для определения  $k^2/\varepsilon$ . После сравнения с результатами 3D расчетов по ТРЭК для модели YH получается оптимальное значение (см. рис. 8,а)

$$\eta_{YH \text{ optim}} = 4,0. \quad (26)$$

В разной величине диффузии в зоне турбулентного перемешивания проявляется количественное отличие эволюции магнитного поля и плотности. При этом границы зоны для этих величин совпадают.

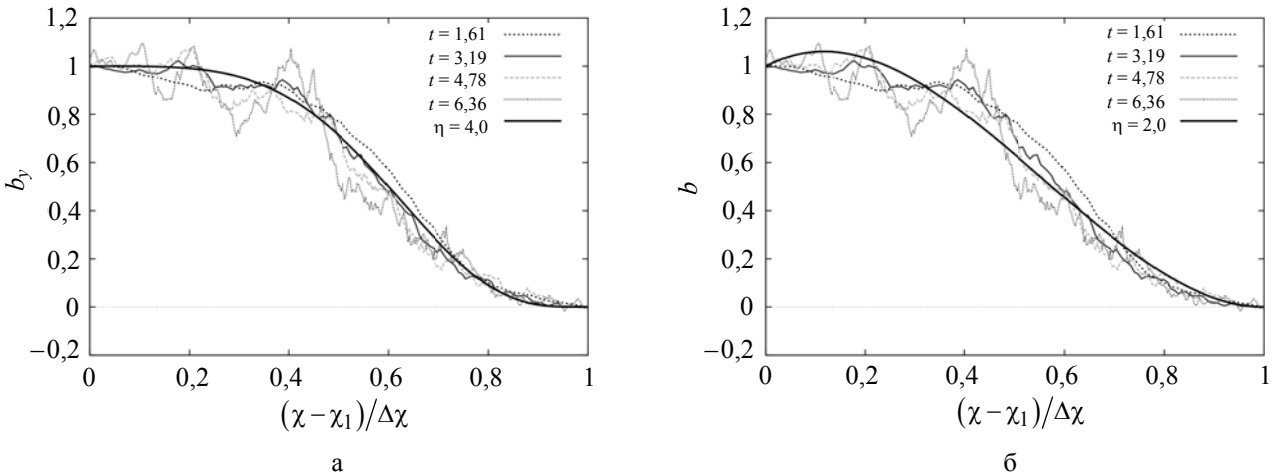


Рис. 8. Сравнение полуфеноменологических моделей с несколькими моментами численного расчета  $\xi = 0,03$ : а – модель YH; б – модель Стаценко

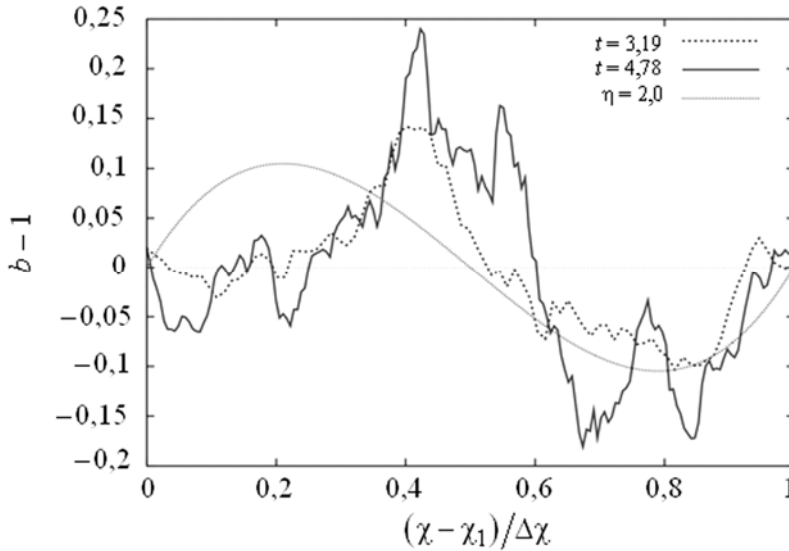


Рис. 9. Сравнение полуфеноменологической модели Стаценко с несколькими моментами численного расчета  $\xi = 0,03$  с начальным однородным полем

Один из авторов данной работы В. П. Стаценко указал на неаккуратность усреднения, приводящего к соотношению (21). Уточненная версия для случая турбулентного перемешивания выглядит следующим образом (будем этот результат называть модель Стаценко):

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \text{rot}[u \times B] - \text{rot}\left(\rho D_{Bt} \text{rot}\left\{\frac{B}{\rho}\right\}\right), \quad u = \frac{\overline{\rho' u'}}{\rho}. \quad (27)$$

Для данной модели из численного моделирования получается оптимальный коэффициент (см. рис. 8,б)

$$\eta_{\text{Stats optim}} = 2,0. \quad (28)$$

Модель Стаценко предсказывает не наблюдаемый эффект роста поля в области  $\chi \approx \chi_1$  (в этой области формально нарушается справедливость модели), но при этом в отличие от модели УН описывает возникновение возмущений и их амплитуду для однородной постановки задачи (рис. 9).

## 5. Заключение

В результате проведенных исследований можно заключить, что магнитное поле приводит к задержке роста зоны турбулентного перемешивания на начальной стадии, а сильное поле приводит также к «двумеризации» течения. Эти эффекты хорошо объясняются дисперсионным соотношением для малых возмущений границы раздела двух сред. Развитие турбулентности приводит

к диффузии и генерации дополнительных компонент магнитного поля. Эти эффекты описываются с помощью модифицированной  $k - \varepsilon$  модели, с коэффициентами диффузии, определенными из проведенных 3D расчетов. Оказывается, что диффузия плотности и магнитного поля соответственно  $D_{\rho t} = 0,20k^2/\varepsilon$ ,  $D_{Bt} = \eta^{-1}D_{\rho t}$ , где коэффициент  $\eta = 2$  или 4 в зависимости от используемой модели.

## Список литературы

1. Вайнштейн С. И., Зельдович Я. Б., Рузмайкин А. А. Турбулентное динамо в астрофизике. М.: Наука, 1980.
2. Litwin C., Brown E. F., Rosner R. // *Astrophys. J.* 2001. Vol. 554. P. 788.
3. Jun B.-I., Norman M. L. // *Astrophys. J.* 1996. Vol. 472. P. 245.
4. Isobe H., Miyagoshi T. et al. // *Nature.* 2005. Vol. 434. P. 478.
5. Sinars D. B. et al. // *Phys. Rev. Lett.* 2010. Vol. 105. P. 185001.
6. Matzen M. K. et al. // *Plasma Phys. Controlled Fusion.* 1999. Vol. 41. A175.
7. Slutz S. A. et al. // *Phys. Plasmas.* 2010. Vol. 17. 056303.
8. Стадник А. Л., Шанин А. А., Янилкин Ю. В. // ВАНТ. Сер. ММФП. 1994. Вып. 4. С. 71.
9. Гужова А. Р., Павлушин А. С., Стаценко В. П. // ВАНТ. Сер. ТПФ. 2005. Вып. 3. С. 37–48.

10. Chandrasekhar S. Hydrodynamic and Hydro-magnetic Stability. Oxford: Oxford University Press, 1961.

11. Yoshizawa A., Hamba F. A turbulent dynamo model for the reversed field pinches of plasma // Phys. Fluids. 1988. Vol. 31. P. 2276–2284.

12. Hamba F. One-dimensional calculation of a turbulent dynamo model for reversed field pinches // Phys. Fluids B. 1990. Vol. 2. P. 3064–3073.

13. Yoshizawa A., Itoh S.-I, Itoh K. Plasma and Fluid Turbulence: Theory and Modelling. Bristol and Philadelphia: Institute of Physics Publishing, 2002.

Статья поступила в редакцию 15.11.2012