

СТАЦИОНАРНЫЕ СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ ДИРАКОВСКИХ ЧАСТИЦ В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ ШВАРЦШИЛЬДА

М. А. Вронский, М. В. Горбатенко, Н. С. Колесников,
В. П. Незнамов¹, Е. Ю. Попов, И. И. Сафронов

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Для гравитационного поля Шварцшильда с использованием самосопряженного гамильтониана с плоским скалярным произведением при любых значениях гравитационной константы связи впервые обоснованы и получены в численных расчетах стационарные связанные состояния элементарных частиц со спином $1/2$, не распадающиеся со временем. Для получения дискретного энергетического спектра введено граничное условие, при котором компоненты вектора плотности тока рассматриваемых дираковских частиц равны нулю вблизи «горизонта событий». При малых значениях константы связи энергетический спектр близок к водородоподобному. По результатам работы можно сделать предположение о существовании нового типа коллапсаров, для которых отсутствует механизм излучения по Хокингу. С точки зрения космологии неизлучающие реликтовые коллапсары нового типа при малых значениях гравитационной константы связи $\alpha \ll 1$ могут проявлять себя лишь через гравитацию и, таким образом, являются хорошими кандидатами для носителей «темной материи».

Ключевые слова: уравнение Дирака, гравитационное поле Шварцшильда, стационарные связанные состояния, самосопряженные гамильтонианы, энергетический спектр.

Введение

В настоящее время для сферически- и аксиально-симметричных электрически заряженных и незаряженных коллапсаров с точечной массой известны четыре основных решения общей теории относительности (ОТО). Это – решение Шварцшильда [1], решение Райсснера – Нордстрёма [2], решение Керра [3], решение Керра – Ньюмена [4].

Классическое решение Шварцшильда характеризуется точечным сферически-симметричным источником гравитационного поля массой M и радиусом «горизонта событий» (гравитационным радиусом)

$$r_0 = \frac{2GM}{c^2}. \quad (1)$$

В формуле (1) G – гравитационная постоянная, c – скорость света. В классическом случае частица по часам удаленного наблюдателя достигает «горизонта событий» за бесконечное время.

Для частицы массой m безразмерная гравитационная константа связи равна

$$\alpha = \frac{GMm}{\hbar c} = \frac{Mm}{m_p^2} = \frac{r_0}{2l_c}. \quad (2)$$

В формуле (2) \hbar – постоянная Планка, $m_p = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 2 \cdot 10^{-5}$ г – планковская масса, $l_c = \frac{\hbar}{mc}$ – комптоновская длина волны.

В отличие от констант взаимодействия в Стандартной модели физики элементарных частиц в гравитационном случае константа связи α может достигать очень больших значений. Для электрона величине $\alpha \approx 1$ соответствует источник гравитации с массой $M = 0,5 \cdot 10^{15}$ кг. Тогда, например, гравитационное взаимодействие электрона с источником $M = M_\odot = 2 \cdot 10^{30}$ кг определяется величиной $\alpha \approx 4 \cdot 10^{15}$.

¹ E-mail: neznamov@vniief.ru

В настоящее время в центрах галактик известны коллапсары с массой, достигающей миллиардов солнечных масс. В этом случае электрон будет гравитационно взаимодействовать с такими объектами с величиной $\alpha \approx 10^{25}$.

В решении Райсснера – Нордстрёма точечный сферический симметричный источник Шварцшильда обладает электрическим зарядом Q . Решение Керра соответствует вращающемуся источнику Шварцшильда с угловым моментом $\mathbf{J} = M\mathbf{c}\bar{a}$. В решении Керра – Ньюмена вращающийся источник Керра обладает электрическим зарядом Q .

В отличие от решения Шварцшильда для решений Райсснера – Нордстрёма, Керра и Керра – Ньюмена характерно существование двух «горизонтов событий»: внешнего и внутреннего. По-прежнему классическая частица может достичь внешнего «горизонта событий» лишь за бесконечное время ($t \rightarrow \infty$).

Кроме перечисленных выше решений ОТО существуют метрики, полученные координатными преобразованиями основных метрик и допускающие пересечение классическими частицами «горизонтов событий» за конечное время.

Для поля Шварцшильда можно отметить следующие решения: метрика Эддингтона – Финкельштейна [5, 6], метрика Пенлеви – Гуллстранда [7], метрика Леметра – Финкельштейна [6], метрика Крускала [8].

Для поля Керра отметим решение Дорана [9].

Несмотря на явную электромагнитную аналогию в атомной физике, связанные состояния дираковских частиц в полях коллапсаров исследовались сравнительно мало. Для гравитационного случая сложилось убеждение, что связанные состояния частиц имеют комплексные энергии. В этом случае эти состояния экспоненциально распадаются со временем. Существование резонансных состояний в поле Шварцшильда для массивных скалярных частиц с использованием уравнения Клейна – Гордона обсуждалось в работах [10–13]. Аналогичная проблема для дираковских массивных частиц обсуждалась в работах [14–18]. В этих работах, в частности, при $\alpha \ll 1$ непосредственным решением уравнения Дирака в слабом поле Шварцшильда для действительной части энергии получен водородоподобный спектр с релятивистскими поправками. В работе [19] авторы рассмотрели проблему связанных состояний в поле Шварцшильда, используя метрику Пенлеви – Гуллстранда. В работе получены энергетические спектры с комплексными значениями энергии для величин $\alpha \ll 1$, а также

для значений $\alpha \sim 1$. При $\alpha \ll 1$ для действительной части энергии также получен водородоподобный спектр с другими, чем в работе [16], релятивистическими поправками.

В работах [20–22] с помощью методов псевдоэрмитовой квантовой механики для произвольных гравитационных полей, в том числе зависящих от времени, разработан метод получения самосопряженных дираковских гамильтонианов с плоским скалярным произведением волновых функций.

Из одночастичной квантовой механики следует, что при существовании эрмитовости гамильтониана, при наличии квадратично интегрируемых волновых функций и при установлении соответствующих граничных условий самосопряженные гамильтонианы, не зависящие от времени, должны обеспечивать существование стационарных связанных состояний частиц с вещественным энергетическим спектром. Данная работа посвящена исследованию таких состояний дираковских частиц в поле Шварцшильда.

1. Анализ возможности существования связанных состояний частиц со спином 1/2 в центрально симметричном гравитационном поле Шварцшильда

Ниже будем использовать систему единиц $\hbar = c = 1$, сигнатуру

$$\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}[1, -1, -1, -1] \quad (3)$$

и обозначения $\gamma^\alpha, \gamma^\alpha$ – соответственно для мировых и локальных матриц Дирака.

Первоначально приведем для метрики Шварцшильда стационарный самосопряженный дираковский гамильтониан, определенный в работе 22.

Метрика Шварцшильда

$$ds^2 = f_s dt^2 - \frac{dr^2}{f_s} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (4)$$

$$f_s = 1 - \frac{r_0}{r};$$

В (4) мы подразумеваем действительные значения $f_s > 0$.

Самосопряженный гамильтониан H_η

$$H_\eta = \sqrt{f_s} m \gamma^0 - i \sqrt{f_s} \gamma^0 \left\{ \gamma^1 \sqrt{f_s} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) + \gamma^2 \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \text{ctg} \theta \right) + \gamma^3 \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\} - \frac{i}{2} \gamma^0 \gamma^1 \frac{\partial f_s}{\partial r}. \quad (5)$$

1.1. Разделение переменных

Уравнение Дирака со стационарным гамильтонианом (5) допускает разделение переменных, если биспинор $\psi_\eta(\mathbf{r}, t) = \psi_\eta(r, \theta, \varphi)e^{-iEt}$ определить в виде

$$\psi_\eta(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} F(r) & \xi(\theta) \\ -iG(r) & \sigma^3 \xi(\theta) \end{pmatrix} e^{im_\varphi \varphi} \quad (6)$$

и использовать следующее уравнение (см., например, [23]):

$$\left[-\sigma^2 \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \text{ctg} \theta \right) + i\sigma^1 m_\varphi \frac{1}{\sin \theta} \right] \xi(\theta) = i\kappa \xi(\theta) \quad (7)$$

В равенствах (6), (7): $\xi(\theta)$ – сферические гармоники для спина 1/2, σ^i – двумерные матрицы Паули, m_φ – магнитное квантовое число, κ – квантовое число уравнения Дирака:

$$\kappa = \pm 1, \pm 2, \dots = \begin{cases} -(l+1), & j = l+1/2 \\ l, & j = l-1/2 \end{cases} \quad (8)$$

В (8) j, l – квантовые числа полного и орбитального момента дираковской частицы, соответственно.

$\xi(\theta)$ можно представить в виде [24]:

$$\begin{aligned} \xi(\theta) &= \begin{pmatrix} -_{1/2} Y_{jm_\varphi}(\theta) \\ _{1/2} Y_{jm_\varphi}(\theta) \end{pmatrix} = \\ &= (-1)^{m_\varphi+1/2} \sqrt{\frac{1}{4\pi} \frac{(j-m_\varphi)!}{(j+m_\varphi)!}} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} (\kappa - m_\varphi + 1/2) P_l^{m_\varphi-1/2}(\theta) \\ P_l^{m_\varphi+1/2}(\theta) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (9)$$

В (9) $P_l^{m_\varphi \pm 1/2}(\theta)$ – присоединенные полиномы Лежандра.

В результате разделения переменных получаем уравнения для вещественных радиальных функций $F(r), G(r)$. Далее эти уравнения будем записывать в безразмерных переменных

$$\varepsilon = \frac{E}{m}, \quad \rho = \frac{r}{l_c}, \quad \frac{r_0}{l_c} = 2\alpha.$$

1.2. Уравнения и асимптотика для радиальных волновых функций

Система уравнений для вещественных радиальных функций $F(\rho), G(\rho)$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{2\alpha}{\rho} \right) \frac{dF}{d\rho} + \left(\frac{1+\kappa \sqrt{1-\frac{2\alpha}{\rho}}}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right) F - \left(\varepsilon + \sqrt{1-\frac{2\alpha}{\rho}} \right) G &= 0, \\ \left(1 - \frac{2\alpha}{\rho} \right) \frac{dG}{d\rho} + \left(\frac{1-\kappa \sqrt{1-\frac{2\alpha}{\rho}}}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right) G + \left(\varepsilon - \sqrt{1-\frac{2\alpha}{\rho}} \right) F &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Областью определения переменной ρ для функций $F(\rho), G(\rho)$ является интервал $(2\alpha, \infty)$ в соответствии с метрикой (4) и с присутствием в уравнениях (10) выражения $\sqrt{1-\frac{2\alpha}{\rho}}$. Уравнения (10) показывают, что, как и в классическом случае, квантовая механика запрещает присутствие дираковских частиц под «горизонтом событий» $r < r_0$, т. е. $\rho < 2\alpha$.

Рассмотрим асимптотику решений системы (10). При $\rho \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} F &= C_1 e^{-\rho \sqrt{1-\varepsilon^2}} + C_2 e^{\rho \sqrt{1-\varepsilon^2}}, \\ G &= \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}} \left(-C_1 e^{-\rho \sqrt{1-\varepsilon^2}} + C_2 e^{\rho \sqrt{1-\varepsilon^2}} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Для обеспечения финитного движения дираковских частиц необходимо использовать лишь экспоненциально убывающие решения (11), т. е. в этом случае $C_2 = 0$.

При $\rho \rightarrow 2\alpha$ ($r \rightarrow r_0$)

$$\begin{aligned} F &= \frac{A}{\sqrt{\rho-2\alpha}} \sin(2\alpha\varepsilon \ln(\rho-2\alpha) + \varphi), \\ G &= \frac{A}{\sqrt{\rho-2\alpha}} \cos(2\alpha\varepsilon \ln(\rho-2\alpha) + \varphi), \end{aligned} \quad (12)$$

где A и φ – постоянные величины.

Осциллирующие функции F и G в (12) плохо определены на «горизонте событий» и расходятся при $\rho \rightarrow 2\alpha$. Для обеспечения квадратичной интегрируемости рассматриваемых функций необходимо сужение их области определения до интервала $[\rho_{\min}, \infty)$, где $\rho_{\min} > 2\alpha$.

Гамильтониан (5) является эрмитовым для всей области определения ρ . Это можно показать, используя общее условие эрмитовости дираковских гамильтонианов во внешних гравитационных полях, доказанное в работе [20].

$$\oint ds_k \left(\sqrt{-g} j^k \right) = 0. \quad (13)$$

Для сферически-симметричного поля Шварцшильда условие (13) сводится к

$$4\pi\rho^2 j^1(\rho \rightarrow \infty) + 4\pi\rho^2 j^1(\rho \rightarrow 2\alpha) = 0. \quad (14)$$

По определению радиальная плотность тока дираковских частиц равна

$$j^1 = \Psi^+ \gamma^0 \gamma^1 \Psi. \quad (15)$$

Для поля Шварцшильда и тетрад в калибровке Швингера [22]

$$\gamma^0 = f_s^{-1/2} \gamma^0, \quad \gamma^1 = f_s^{1/2} \gamma^1, \quad \gamma^2 = \frac{1}{r} \gamma^2, \quad \gamma^3 = \frac{1}{r \sin \theta} \gamma^3.$$

После перехода в η -представление [20,21,22], в котором представлен гамильтониан (5), получаем

$$j^1 = \Psi_\eta^+ f_s \gamma^0 \gamma^1 \Psi_\eta, \quad (17)$$

где $\Psi = \eta^{-1} \Psi_\eta$, $\eta^{-1} = f_s^{1/4}$.

Далее используем функции (6) в виде

$$\Psi_\eta(\rho, \theta, \varphi) = \frac{1}{\rho} \frac{1}{\sqrt{f_s}} \begin{pmatrix} f(\rho) & \xi(\theta) \\ -ig(\rho) & \sigma^3 \xi(\theta) \end{pmatrix} e^{im_\varphi \varphi}. \quad (18)$$

В результате радиальная плотность тока равна

$$j^1 = -\frac{2}{\rho^2} f(\rho) g(\rho) \left[\xi^+(\theta) \sigma^2 \xi(\theta) \right]. \quad (19)$$

С учетом явного вида сферических гармоник (9)

$$\xi^+(\theta) \sigma^2 \xi(\theta) = 0, \quad (20)$$

что доказывает эрмитовость гамильтониана (5).

Таким образом, при введении физически разумного граничного условия вблизи «горизонта событий» ($\rho = \rho_{\min}$) система уравнений (10) будет обладать стационарным вещественным энергетическим спектром связанных состояний частиц со спином 1/2.

2. Определение стационарных связанных состояний дираковских частиц в поле Шварцшильда

2.1. Слабое гравитационное поле

В этом случае гравитационный радиус r_0 много меньше комптоновской длины волны l_c ($r_0 \ll l_c$).

Учитывая, что расстояния $r \ll l_c$ не могут значимо влиять в квантовой механике на энергетический спектр уравнений (10), будем считать, что величинами $\frac{2\alpha}{\rho}$ можно пренебречь по сравнению с единицей во всем интервале изменения ρ . Тогда уравнения (10) принимают вид

$$\frac{\partial F}{\partial \rho} + \frac{1+\kappa}{\rho} F - (\varepsilon+1)G = 0, \quad (21)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \rho} + \frac{1-\kappa}{\rho} G + \left(\varepsilon - 1 + \frac{\alpha}{\rho} \right) F = 0. \quad (16)$$

В слабых полях значение ε близко к единице и слагаемым $\frac{\alpha}{\rho} F$ во втором уравнении системы (21)

пренебрегать нельзя. Решение системы (21) близко к решению системы дираковских уравнений для кулоновского потенциала

$$U(\rho) = \frac{\alpha_{em}}{\rho}, \quad (22)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \rho} + \frac{1+\kappa}{\rho} F - \left(\varepsilon + 1 + \frac{\alpha_{em}}{\rho} \right) G = 0, \quad (23)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \rho} + \frac{1-\kappa}{\rho} G + \left(\varepsilon - 1 + \frac{\alpha_{em}}{\rho} \right) F = 0.$$

В выражениях (22), (23) α_{em} – электромагнитная постоянная тонкой структуры.

Следовательно, энергетический спектр, определяемый уравнениями (21), близок к спектру дираковского уравнения для водородоподобных атомов с заменой α_{em} на α и может быть записан в виде.

$$E_n \approx m \left(1 - \frac{\alpha^2}{2n^2} \right). \quad (24)$$

Полученный результат в случае отсутствия релятивистских поправок совпадает с результатами, полученными в [14–18].

Естественно, водородоподобный спектр (24) можно получить также, переходя в нерелятивистском приближении от уравнения Дирака с гамильтонианом (5) к соответствующему уравнению Шредингера.

2.2. Граничное условие вблизи «горизонта событий»

Для численного определения спектра связанных состояний в системе (10) необходимо задать граничное условие при $\rho \rightarrow 2\alpha$ ($r \rightarrow r_0$). Требование обращения волновых функций вблизи горизонта в нуль невыполнимо из-за вида функций (12).

Обратимся снова к виду и значениям компонент плотности тока дираковских частиц при $\rho \rightarrow 2\alpha$ ($r \rightarrow r_0$).

С учетом (9), (16)–(18)

$$j^r \equiv j^1 = -\frac{2}{\rho^2} f(\rho)g(\rho) \left[\xi^+(\theta) \sigma^2 \xi(\theta) \right] = 0, \quad (25)$$

$$j^\theta \equiv j^2 = \frac{2}{\rho^3 \sqrt{f_s}} f(\rho)g(\rho) \left[\xi^+(\theta) \sigma^1 \xi(\theta) \right] \neq 0, \quad (26)$$

$$j^\varphi \equiv j^3 = -\frac{i}{\rho^3 \sin \theta} \frac{1}{\sqrt{f_s}} f(\rho)g(\rho) \left[\xi^+(\theta) (\sigma^3 \sigma^3 - \sigma^3 \sigma^3) \xi(\theta) \right] = 0. \quad (27)$$

При равенстве нулю компонент j^r и j^φ , θ – компонента тока неограниченно растет при $\rho \rightarrow 2\alpha$.

Отсюда естественным граничным условием вблизи «горизонта событий» является ограничение θ -компоненты дираковского тока при $\rho = \rho_{\min}$. С учетом вида функций (6), (9), (12), (18) простейшим ограничением является условие

$$f(\rho_{\min})g(\rho_{\min}) = 0. \quad (28)$$

С учетом (18), (12) условие (28) преобразуется к виду

$$\sin 2(2\alpha \varepsilon \ln(\rho_{\min} - 2\alpha) + \varphi) = 0. \quad (29)$$

$$2\alpha \varepsilon \ln(\rho_{\min} - 2\alpha) + \varphi = \frac{\pi}{2} N, \quad N = \pm 1, 3, 5 \dots \quad (30)$$

Четные значения N , при которых также удовлетворяется условие (29), в численных расчетах при определении дискретных уровней энергии не используются из-за ряда физических соображений, изложенных ниже в п. 2.3.

Условие (30) определяет вещественный энергетический спектр уравнений (10) при их численном решении.

2.3. Методы и результаты численного решения системы дираковских уравнений для радиальных волновых функций в поле Шварцшильда

2.3.1. Численные методы определения собственных значений и собственных функций уравнения Дирака в поле Шварцшильда

Для функций $f(\rho) = \sqrt{\rho(\rho - 2\alpha)} F(\rho)$, $g(\rho) = \sqrt{\rho(\rho - 2\alpha)} G(\rho)$ (см. (6), (18)) система уравнений (10) записывается в виде

$$\begin{cases} (1 - 2\alpha/\rho) \frac{df}{d\rho} + \frac{\kappa \sqrt{1 - 2\alpha/\rho}}{\rho} f - (\varepsilon + \sqrt{1 - 2\alpha/\rho}) g = 0, \\ (1 - 2\alpha/\rho) \frac{dg}{d\rho} - \frac{\kappa \sqrt{1 - 2\alpha/\rho}}{\rho} g + (\varepsilon - \sqrt{1 - 2\alpha/\rho}) f = 0 \end{cases} \quad (31)$$

с граничными условиями

$$\frac{f(\rho_{\max})}{g(\rho_{\max})} = -\sqrt{\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}}, \quad (32)$$

$$f(\rho_{\min})g(\rho_{\min}) = 0.$$

Эту задачу можно решать несколькими способами. Мы рассмотрим два из них. Первый – это численное решение системы (31) «назад», начиная с некоторого ρ_{\max} , для которого полагаем установившимся асимптотическое поведение (11) (естественным выбором ρ_{\max} является выполнение условия $\rho_{\max} \sqrt{1 - \varepsilon^2} \gg 1$). Далее, выбираются те ε , для которых решения удовлетворяют граничному условию вблизи горизонта. Второй способ состоит во введении новой гладкой функции – «фазы», совпадающей с точностью до $k\pi$ ($k = 1, 2, 3 \dots$) с $\arctg(f/g)$. Известно (см., например, [25]), что для этой функции можно написать замкнутое дифференциальное уравнение, при этом асимптотическое условие (11) и условие в ρ_{\min} легко переписывается в терминах фазы.

Уравнение для фазы имеет следующий вид

$$\frac{d\Phi}{ds} = 2\alpha \left(\varepsilon \frac{s+1}{s} + \sqrt{\frac{s+1}{s}} \cos 2\Phi \right) - \kappa \frac{1}{\sqrt{s(s+1)}} \sin 2\Phi. \quad (33)$$

В (33) введено обозначение $s = \frac{\rho}{2\alpha} - 1$; интервал изменения s : $(0, \infty)$.

В численных расчетах при $s \rightarrow 0$ удобно ввести новую переменную

$$t = 2\alpha\varepsilon \ln(\rho - 2\alpha). \quad (34)$$

Тогда $s(t) = \frac{1}{2\alpha} e^{\frac{t}{2\alpha\varepsilon}}$ и уравнение (33) для переменной t имеет вид

$$\frac{d\Phi(s(t))}{dt} = 1 + s(t) + \sqrt{s(t)(1+s(t))} \frac{\cos 2\Phi}{\varepsilon} - \frac{\kappa}{2\alpha\varepsilon} \sqrt{\frac{s(t)}{1+s(t)}} \sin 2\Phi. \quad (35)$$

В (35); интервал изменения t : $(-\infty, \infty)$.

Асимптотическое условие (11), (32) в терминах фазы равно

$$\Phi(s \rightarrow \infty) = -\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}. \quad (36)$$

Граничное условие (32), (29) при $\rho \rightarrow 2\alpha$ или $t \rightarrow -\infty$ уже фактически записано как условие для фазы:

$$\sin 2(t + \varphi) = 0 \text{ при } t \rightarrow -\infty. \quad (37)$$

Изложение методов численного решения как системы уравнений (31), так и уравнений для фазы (33), (35) приведено в Приложении.

Кратко остановимся на технологии определения энергетического спектра рассматриваемых уравнений Дирака в численных расчетах.

Численное решение системы (31) и уравнений для фазы (33), (35) проводится обратным способом от $\rho_{\max}(s_{\max})$ до $\rho_{\min}(t_{\min})$. ρ_{\max} удовлетворяет условию $\rho_{\max} \sqrt{1-\varepsilon^2} \gg 1$; t_{\min} определяется заданной точностью.

Из уравнения (35) следует, что при $t \rightarrow -\infty$ $\Phi = \varphi + t$, где φ при заданных $\alpha, \kappa, \varepsilon$ является постоянной величиной. Мерой точности может быть степень приближения фазы в расчетах к прямой $\varphi + t$.

Далее применяем граничное условие (37)

$$\sin 2(\varphi + t_{\min}) = 0, \quad (38)$$

$$(\sin \varphi \cos t_{\min} + \cos \varphi \sin t_{\min})(\cos \varphi \cos t_{\min} - \sin \varphi \sin t_{\min}) = 0. \quad (39)$$

Для выполнения (39) пусть $\cos \varphi = 0$, тогда условие (38) выполняется, если

$$\cos \varphi = 0, \quad \sin 2t_{\min} = 0. \quad (40)$$

Условие (38) также выполняется, если

$$\sin \varphi = 0, \quad \sin 2t_{\min} = 0. \quad (41)$$

Однако использование второго условия (41) приводит в численных расчетах к нефизическим уровням энергии (например, при значениях $\alpha \ll 1$ в расчетах существуют сильносвязанные состояния с $\varepsilon \ll 1$).

Кроме того, возникает расщепление водородоподобных уровней при $\alpha \ll 1$, что не соответствует предельному переходу к значениям

$$E_n = mc^2 \left(1 - \frac{\alpha^2}{2n^2} \right)$$

с аналитическими релятивистскими поправками, полученными в работе 16.

Исходя из этого, ниже использовались лишь условия (40).

Итак, при достижении в расчетах заданной точности приближения фазы к прямой $\varphi + t$ определяются t_{\min} и искомый энергетический спектр

$$\varphi(\alpha, \kappa, \varepsilon_N) = \frac{\pi}{2} N, \quad N = \pm 1, 3, 5... \quad (42)$$

Второе условие в (40) всегда можно выполнить, продолжив расчеты до ближайшего нуля $\sin 2t_{\min}$. При этом в пределах заданной точности постоянная φ не изменяется.

2.3.2. Результаты численных расчетов решений уравнения Дирака в поле Шварцшильда

2.3.2.1. Численное определение энергетического спектра. При решении системы уравнений (31) или эквивалентных ей уравнений для фазы (33), (35) при заданных значениях α и квантового числа κ (8) можно получить численные зависимости $\varphi(\varepsilon)$. Обозначим через ε_0 нижний энергетический уровень при фиксированных значениях α и κ . При малых значениях α зависимости $\varphi(\varepsilon)$ при $\varepsilon < \varepsilon_0$ носят растущий и ступенчатый характер; при $\varepsilon < \varepsilon_0$ фаза изменяется слабо $\left(\Delta\Phi < \frac{\pi}{2} \right)$. При возрастании α зависимости $\varphi(\varepsilon)$ становятся все более и более гладкими.

При возрастании α и достижении $\alpha = \alpha_{\text{кр}}$ максимум зависимости $\varphi(\varepsilon)$ становится равным $N \frac{\pi}{2}$. Это означает, что данному максимуму соот-

ветствует нижайший энергетический уровень $\varepsilon = \varepsilon_0^{\text{кр}}$.

При дальнейшем увеличении α максимум фазы смещается в сторону больших значений $-\varepsilon$, увеличиваясь по своей величине.

Фактически для всех значений α при $\varepsilon \sim 0$ значение фазы близко к нулю.

На рис. 1, а, б, в, г приведены описанные выше характерные зависимости $\varphi(\varepsilon)$, рассчитанные для значения $\kappa = -1$.

После применения к зависимости $\varphi(\varepsilon)$ граничного условия (40) получаем искомый дискретный энергетический спектр.

На рис. 1, а, б, в, г несколько низших энергетических уровней отмечены пересечением фазовых кривых $\varphi(\varepsilon)$ с горизонтальными линиями

$$N \frac{\pi}{2} \quad (N = \pm 1, 3, 5 \dots).$$

Описанное выше поведение зависимости $\varphi(\varepsilon)$ приводит к специфическим особенностям в зависимостях $\varepsilon_n(\alpha, \kappa)$.

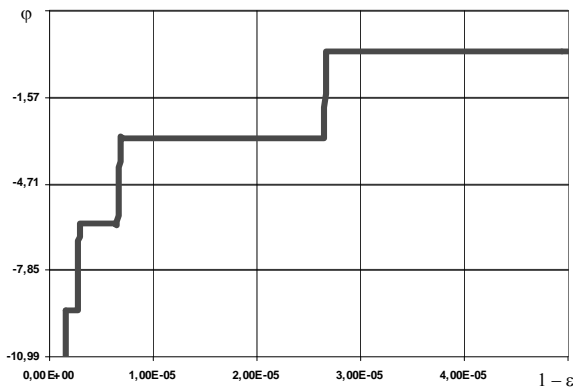
Из рис. 1 видно, что энергия связанной дираковской частицы заметно уменьшается с ростом α . После достижения $\varepsilon = \varepsilon^{\text{кр}}$ энергия частицы скачкообразно уменьшается с дальнейшим плавным уменьшением при возрастании α .

В области максимума зависимости $\varphi(\varepsilon)$ между уровнями энергии возникает заметная «энергетическая пустыня» (см. рис. 1, в).

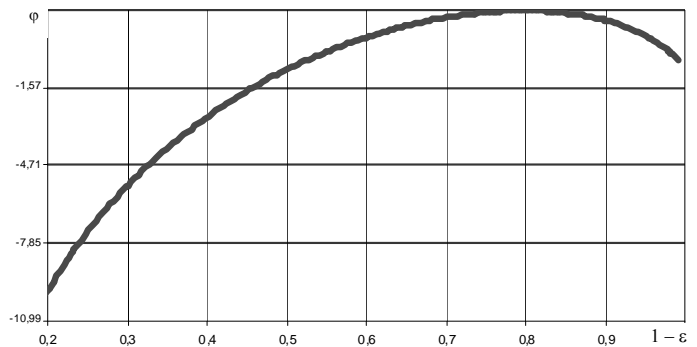
Из рис. 1, г видно также, что при $\alpha \geq 10$ возникает заметное число уровней с энергией связи, близкой к полной энергии частицы $\varepsilon = 1 (E = m)$.

Далее перейдем к конкретным результатам расчетов. Для значений $\alpha \ll 1$ в [14–18] установлено, что энергетический спектр должен быть близок к водородоподобному.

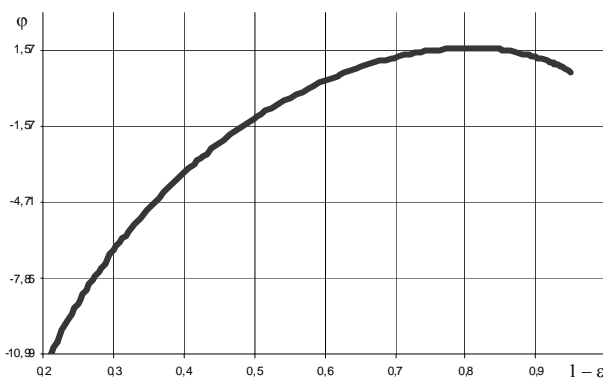
В работе [16] вычислены также релятивистские поправки к водородоподобному спектру.



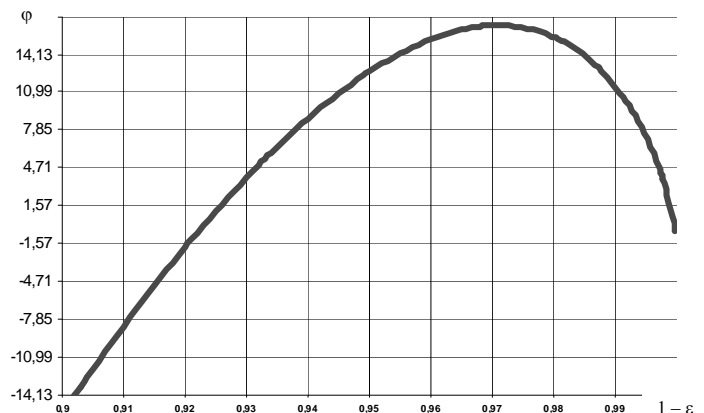
а



б



в



г

Рис. 1. Поведение фазы при значениях $\alpha = 1/137$ (а); $\alpha = 2,65$ (б); $\alpha = 3$ (в); $\alpha = 150$ (г)

В результате при $\alpha \ll 1$ спектр частицы со спином $1/2$ в поле Шварцшильда определяется формулой

$$\varepsilon_n = 1 - \frac{\alpha^2}{2n^2} - \frac{3\alpha^4}{n^4} \times \left\{ \frac{n}{l+1/2} \left[\left(1 - \frac{1}{3} \delta_{l0} \right) + \frac{1}{12} (1 - \delta_{l0}) \left(\frac{1}{\kappa} + \frac{2}{l(l+1)} \right) \right] - \frac{5}{8} \right\} \quad (43)$$

Выражение (43) показывает, что в отличие от атома водорода гравитационное поле снимает вырождение уровней с одинаковыми j , но разными l .

В табл. 1 для значений $\alpha = 0,01; 0,05; 0,1$ приведены аналитические величины $1 - \varepsilon_n^{an}$ для некоторых значений n и κ , определенные из выражения (43). Там же приведены аналогичные значения $1 - \varepsilon_n^{num}$, определенные в численных расчетах. С точностью до долей процента видно хорошее согласие между численными и аналитическими значениями ε_n .

При увеличении α энергетический спектр начинает отклоняться от водородоподобного.

На рис. 2 приведены энергетические спектры для трех низших уровней энергии в состоянии с нулевым орбитальным моментом ($1S_{1/2}, 2S_{1/2}, 3S_{1/2}$). С увеличением α наблюдается монотонное увеличение энергии связи.

Однако при дальнейшем увеличении константы связи α низший уровень энергии скачкообразно уменьшается по своей величине. Так, при достижении значения $\alpha_{кр} \approx 2,65$ наблюдается скачок на $\Delta E \approx 0,35m$, изображенный на рис. 3. При дальнейшем увеличении α нижний уровень энергии монотонно стремится к нулю. Заметим, что все уровни, лежащие выше $1S_{1/2}$ состояния, при увеличении α также испытывают такие же изменения. Наличие скачков в уровнях энергии при определенных значениях константы связи носит закономерный характер и обязано поведению $\varphi(\varepsilon)$ (достижение $\varphi^{max} = N \frac{\pi}{2}$ при $\varepsilon = \varepsilon^{kp}$).

Таблица 1

Численные и аналитические значения величин $1 - \varepsilon_n$ для $\alpha = 0,01; 0,05; 0,1$
(аналитические значения – обычный шрифт, численные значения – жирный шрифт)

α	$n=1$ $\kappa=-1$ ($j=1/2$) ($l=0$)	$n=2$ $\kappa=-1$ ($j=1/2$) $l=0$	$n=1$ $\kappa=-1$ ($j=1/2$) $l=0$	$n=2$ $\kappa=+1$ ($j=1/2$) $l=1$	$n=3$ $\kappa=+1$ ($j=1/2$) $l=1$
$\alpha = 0,01$	5.0021E-05 5.0040E-05	1.25038E-05 1.2427E-05	5.5568E-06 5.5133E-06	1.2502E-05 1.2428E-05	5.5561E-06 5.5139E-06
$\alpha = 0,05$	1.26633E-03 1.2675E-03	3.14893E-04 3.1487E-04	1.3967E-04 1.3947E-04	3.1359E-04 3.1316E-04	1.3929E-04 1.3899E-04
$\alpha = 0,1$	5.2125E-03 5.2866E-03	1.288E-03 1.2970E-03	5.6805E-04 5.7021E-04	1.2674E-03 1.2691E-03	5.6189E-04 5.6197E-04

α	$n=2$ $\kappa=-2$ $j=3/2$ $l=1$	$n=3$ $\kappa=-2$ $j=3/2$ $l=1$	$n=3$ $\kappa=+2$ $j=3/2$ $l=2$	$n=3$ $\kappa=-3$ $j=5/2$ $l=2$
$\alpha = 0,01$	1.2501E-05 1.2486E-05	5.5561E-06 5.5134E-06	5.5558E-06 5.5139E-06	5.5558E-06 5.5729E-06
$\alpha = 0,05$	3.134E-04 3.1327E-04	1.3923E-04 1.3883E-04	1.3904E-04 1.3870E-04	1.3902E-04 1.3904E-04
$\alpha = 0,1$	1.2643E-03 1.2606E-03	5.6086E-04 5.5911E-04	5.58E-04 5.5746E-04	5.5769E-04 5.5772E-04

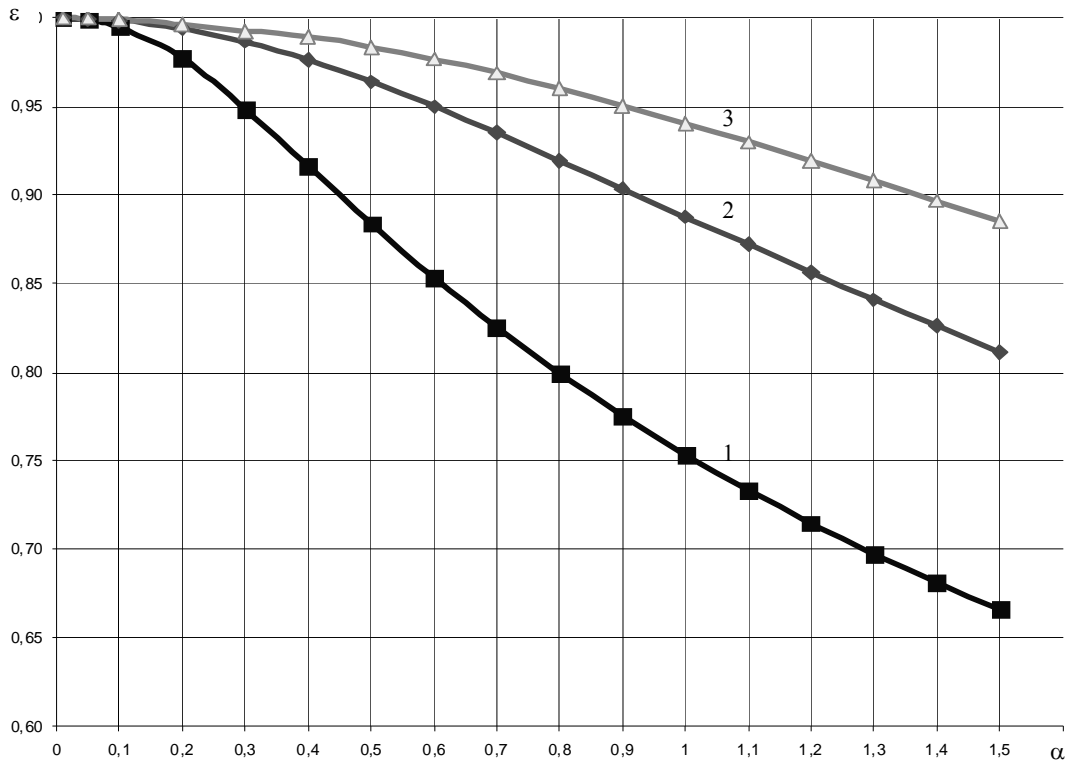


Рис. 2. Энергетические спектры для $1S_{1/2}$, $2S_{1/2}$, $3S_{1/2}$ состояний: 1 – $n = 1$; 2 – $n = 2$; 3 – $n = 3$

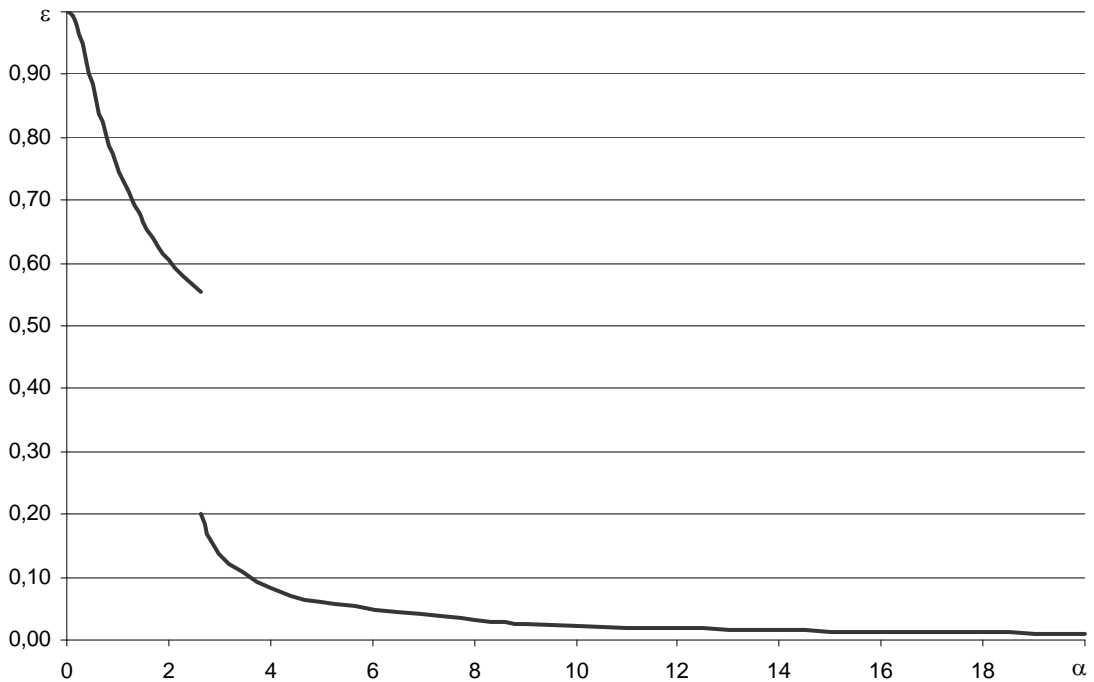


Рис. 3. Зависимость $\epsilon(\alpha)$ для $1S_{1/2}$ состояний

При анализе спектров энергий, полученных численным решением системы (31) и уравнений (33), (35) для различных значений κ , обнаружился ряд необычных особенностей. На рис. 4 приведены графики собственных значений энергии как функции α для различных значений κ . Неожиданным является поведение графиков при $\kappa = -2$ и $\kappa = 4$. Эти функции имеют минимум при $\alpha \approx 0,35$ и $\alpha \approx 0,77$ соответственно.

На рис. 5 приведены зависимости $\varphi(\varepsilon)$ для значений $\kappa = -2, \alpha = 0,4$ и $\kappa = -2, \alpha = 0,5$. Видно, что в отличие от поведения фазы в большинстве проведенных расчетов в данном случае максимум фазы при $\alpha = 0,4$ больше, чем в расчете с $\alpha = 0,5$. В результате низший уровень энергии при $\alpha = 0,4$ заметно меньше, чем при $\alpha = 0,5$. В дальнейшем,

по крайней мере, до значений $\alpha \approx 0,1$ поведение зависимости $\varphi(\varepsilon)$ приобретает стандартный характер. Аналогичное поведение зависимости $\varphi(\varepsilon)$ при $\alpha = 0,8-0,9$ проявляется и в расчетах с $\kappa = 4$.

Обращает на себя внимание тот факт, что, по крайней мере, в интервале $\alpha \in (0,1-1)$ низшим уровнем энергии является состояние с наибольшим рассчитанным полным моментом ($j = 9/2, l = 4$), при этом состояние ($j = 7/2, l = 4$) лежит гораздо выше и при $\alpha = 1$ различие в энергиях этих двух состояний достигает почти $0,8m$. Почти такое же расщепление испытывают уровни с одинаковыми j , но разными l .

На рис. 6 показан рост с увеличением α числа сильносвязанных $S_{1/2}$ - состояний в интервале значений $\varepsilon = (0,1-0)$.

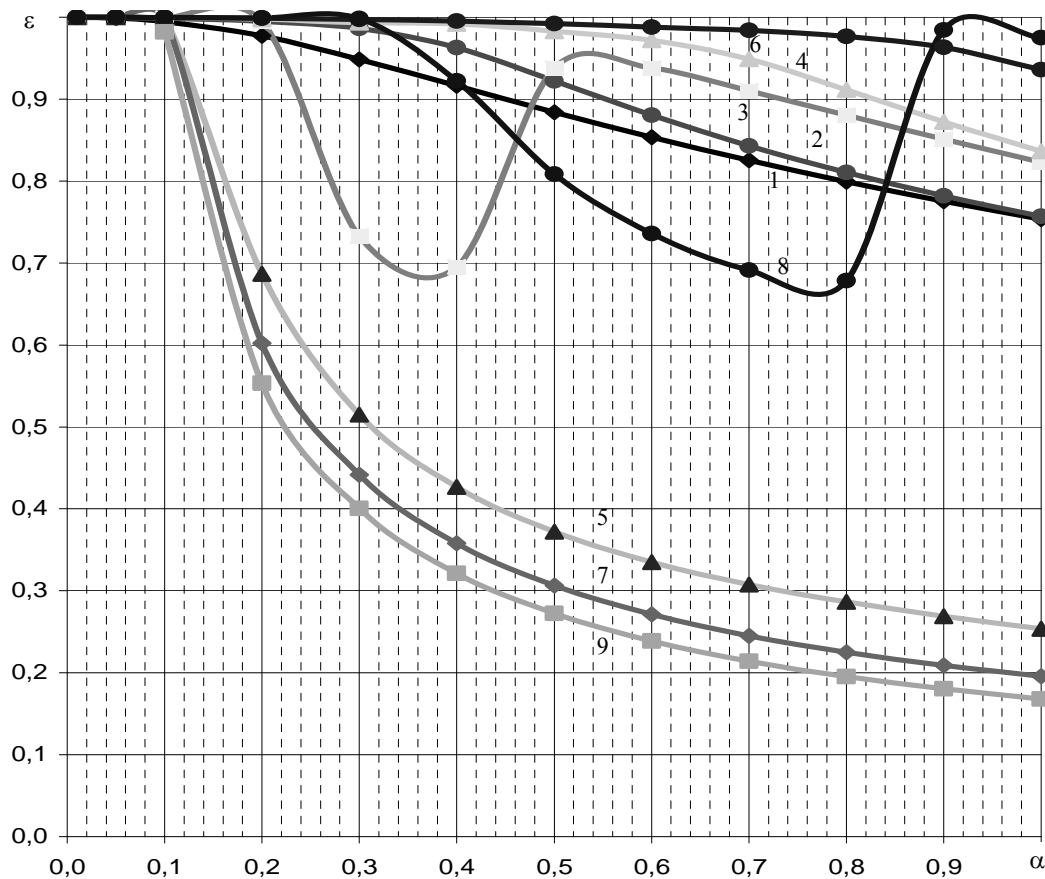


Рис. 4. Зависимости $\varepsilon(\alpha)$ для низших уровней энергии и различных значений κ : 1 – $\kappa = -1$ ($l = 0, j = 1/2$); 2 – $\kappa = 1$ ($l = 1, j = 1/2$); 3 – $\kappa = -2$ ($l = 1, j = 3/2$); 4 – $\kappa = 2$ ($l = 2, j = 3/2$); 5 – $\kappa = -3$ ($l = 2, j = 5/2$); 6 – $\kappa = 3$ ($l = 3, j = 5/2$); 7 – $\kappa = -4$ ($l = 3, j = 7/2$); 8 – $\kappa = 4$ ($l = 4, j = 7/2$); 9 – $\kappa = -5$ ($l = 4, j = 9/2$)

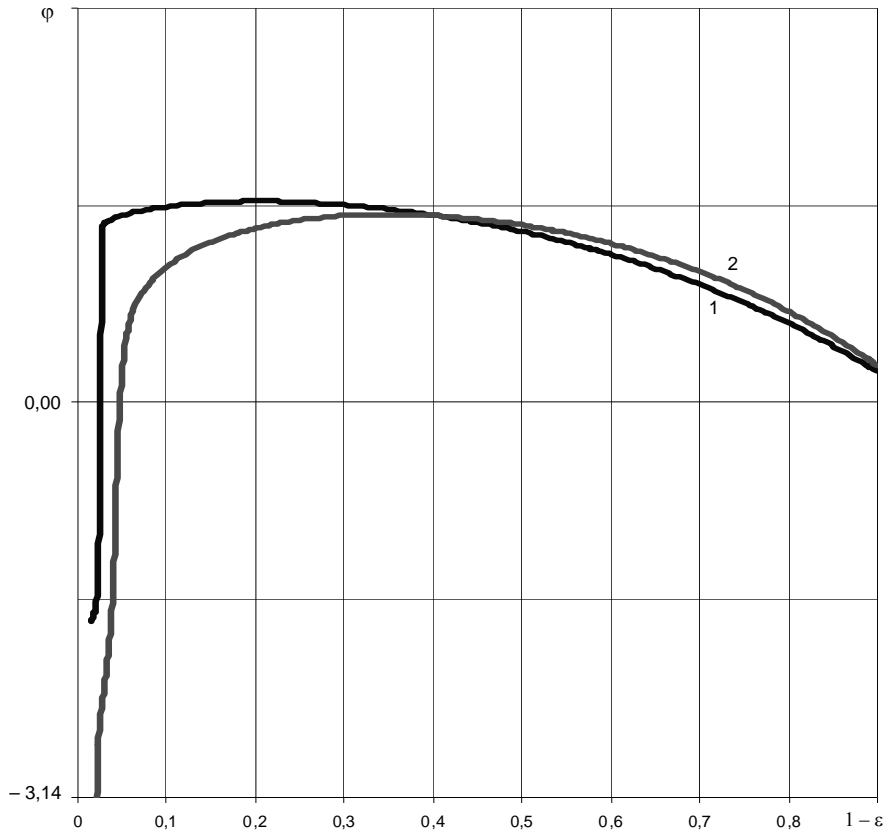


Рис. 5. Поведение фазовых кривых при $\alpha = 0,4$, $\kappa = -2$ (кривая 1) и $\alpha = 0,5$, $\kappa = -2$ (кривая 2)

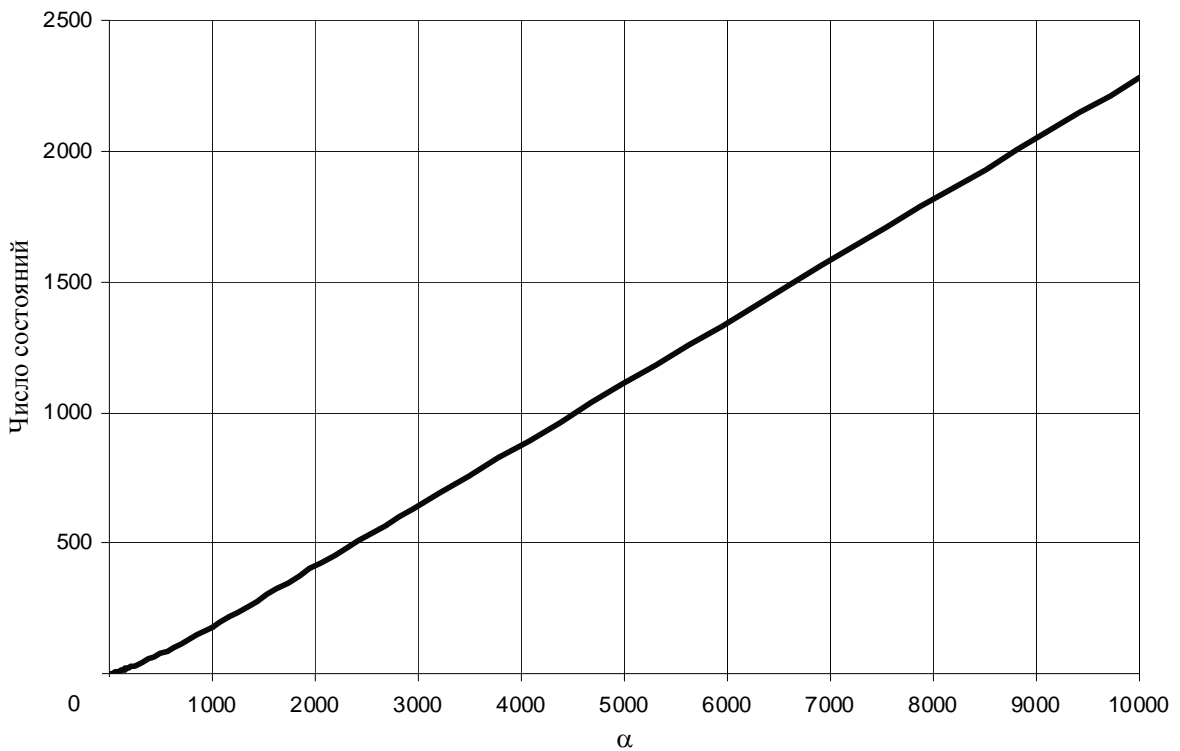


Рис. 6. Число $S_{1/2}$ -состояний дискретного спектра в интервале $\varepsilon = (0,1-0)$ как функция от α

3.3.2.2. *Радиальные волновые функции.* Временная компонента дираковской плотности тока в η – представлении для поля Шварцшильда и тетрад в калибровке Швингера имеет вид (см. (16), (17), (18))

$$j^0 = \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \psi = \psi_\eta^\dagger \psi_\eta =$$

$$= \frac{1}{\rho^2 \left(1 - \frac{2\alpha}{\rho}\right)} \left(f^2(\rho) + g^2(\rho)\right) \xi^+(\theta) \xi(\theta). \quad (44)$$

Компонента j^0 имеет простую физическую интерпретацию – это плотность вероятности, измеряемая удаленным наблюдателем.

Величина

$$J^0 = \frac{1}{\left(1 - \frac{2\alpha}{\rho}\right)} \left(f^2(\rho) + g^2(\rho)\right) =$$

$$= \frac{s+1}{s} \left(f^2(s) + g^2(s)\right) \quad (45)$$

является с точки зрения удаленного наблюдателя плотностью вероятности в сферической оболочке с радиусом ρ .

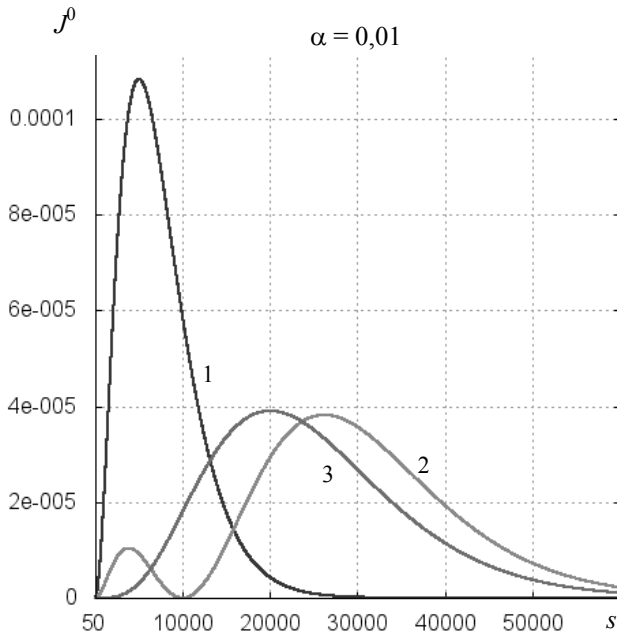


Рис. 7. Нормированная плотность вероятности как функция $s = \frac{\rho}{2\alpha} - 1$: 1 – $1S_{1/2}$; 2 – $2P_{1/2}$; 3 – $2S_{1/2}$

Величины j^0 и J^0 неограниченно растут при $\rho \rightarrow 2\alpha$ ($r \rightarrow r^0$).

Как и в случае определения энергетического спектра связанных состояний (п. 3.3.2.1), при работе с волновыми функциями необходим выбор $\rho_{\min} > 2\alpha$. Значения $\rho < \rho_{\min}$ не рассматриваются при интегрировании и вычислении матричных элементов.

Поскольку пробные частицы, в том числе и квантовомеханические, не могут пересекать «горизонта событий», величина ρ_{\min} должна быть больше гравитационного радиуса, по крайней мере, на характерный размер частицы, характеризующейся в квантовой механике комптоновской длиной волны l_c , т. е.

$$\rho_{\min} \geq 2\alpha + 1 \quad (r \geq r_0 + l_c). \quad (46)$$

При выборе $\rho_{\min} = 2\alpha + 1$ формально граничное условие (40) при $\rho = \rho_{\min}$ сводится к единственному условию $\cos\varphi = 0$. Однако фазу $\varphi(\alpha, \kappa, \varepsilon_N)$ с заранее заданной точностью необходимо определять по технологии, описанной в п. 3.3.1.

На рис. 7, 8 приведены нормированные на единицу зависимости $J^0(s)$, рассчитанные для некоторых S - и P -состояний.

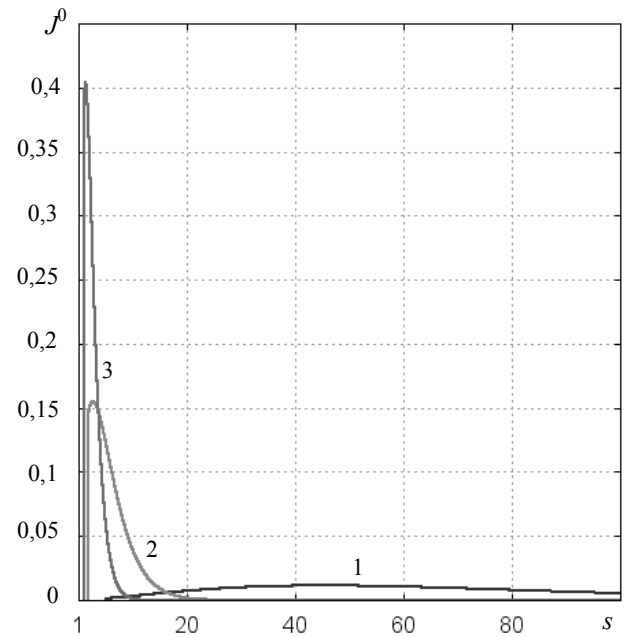


Рис. 8. Нормированная плотность вероятности для $S_{1/2}$ -состояния и различных значений α как функция $s = \frac{\rho}{2\alpha} - 1$: 1 – $\alpha = 0,1$; 2 – $\alpha = 0,3$; 3 – $\alpha = 0,5$

Далее рассмотрим проблему определения средних радиусов с рассматриваемыми волновыми функциями и $\rho_{\min} = 2\alpha + 1$.

Очевидно, физической характеристикой является превышение среднего радиуса относительно гравитационного радиуса: $\frac{\bar{\rho}}{2\alpha}$ или $\frac{\bar{r}}{r_0}$.

$$\bar{\rho} = \frac{\int_{\rho_{\min}}^{\infty} \frac{\rho}{\left(1 - \frac{2\alpha}{\rho}\right)} (f^2(\rho) + g^2(\rho)) d\rho}{\int_{\rho_{\min}}^{\infty} \frac{1}{\left(1 - \frac{2\alpha}{\rho}\right)} (f^2(\rho) + g^2(\rho)) d\rho} = \frac{\int_1^{\infty} \frac{(s+1)^2}{s} (f^2(s) + g^2(s)) ds}{\int_{\frac{1}{2\alpha}}^{\infty} \frac{s+1}{s} (f^2(s) + g^2(s)) ds}. \quad (47)$$

Видно, что при $\alpha \gg 1$ для всех состояний с разными квантовыми числами n, j, l соответствующий средний радиус близок к «горизонту событий» ($\bar{\rho} \rightarrow 2\alpha$).

При $\alpha \ll 1$ отношение $\frac{\bar{\rho}}{2\alpha}$ существенно возрастает и оно совпадает с отношением $\frac{\bar{r}}{l_c}$ в атоме водорода (см., например, [26]).

В табл. 2 приведены численные значения $\frac{\bar{\rho}}{2\alpha}$ для некоторых S - и P -состояний.

Таблица 2

Численные значения для $\frac{\bar{\rho}}{2\alpha}$ при $\alpha = 0,01$

	$1S_{1/2}$	$2S_{1/2}$	$2P_{1/2}$
$\frac{\bar{\rho}}{2\alpha}$	150	600	500

На рис. 9 приведена также зависимость $\frac{\bar{\rho}(\alpha)}{2\alpha}$ для $1S_{1/2}$ -состояния, показывающая значения $\bar{\rho}$ в промежуточной области изменения α .

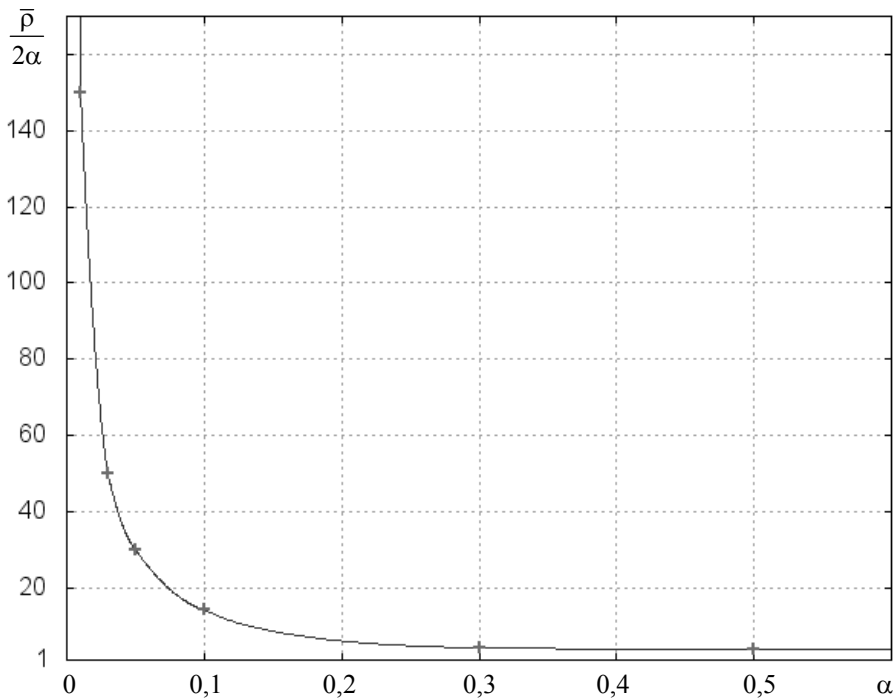


Рис. 9. Отклонение $\bar{\rho}(\alpha)$ от радиуса «горизонта событий» 2α для состояния $1S_{1/2}$

3. Обсуждение результатов

В работе показано, что в гравитационном поле Шварцшильда любой интенсивности возможно существование стационарных связанных состояний частиц со спином $1/2$ с вещественным энергетическим спектром.

Дискретный спектр реализуется в численных расчетах при использовании самосопряженного гамильтониана (5) с плоским скалярным произведением волновых функций и граничного условия (28), обеспечивающего нулевое значение θ -компоненты плотности дираковского тока (26) при $\rho = \rho_{\min}$, где $\rho_{\min} > 2\alpha$.

Следует отметить, что при такой постановке дираковская квантово-механическая частица не пересекает «горизонт событий». Волновая функция частицы определена на интервале $r \in [r_{\min}, \infty)$, где $r_{\min} > r_0$.

По результатам проведенных численных расчетов можно сделать следующие выводы:

1. Для значений $\alpha \ll 1$ энергетический спектр близок к водородоподобному $\left(E_n \approx m \left(1 - \frac{\alpha^2}{2n^2} \right) \right)$.

2. Численные релятивистские поправки к водородоподобному спектру для значений $\alpha = 0,01; 0,05; 0,1$ близки к поправкам, определенным аналитически в работе [16].

3. При возрастании α энергия связанной частицы заметно уменьшается.

4. При $\alpha \geq 1$ уровни энергии испытывают скачкообразное изменение при достижении своего для каждого уровня значения $\alpha_{кр}$.

5. При анализе спин-орбитального взаимодействия (расчеты с различными значениями κ) подтверждены выводы работ [16, 24] о снятии вырождения в гравитационном поле уровней энергии с одинаковым j в отличие от уровней энергии в кулоновском поле. При $\alpha > 0,1$ в расчетах с $|\kappa| > 1$ обнаружено поразительно большое расщепление уровней с одинаковым j , но разными l и, наоборот, с одинаковым l но разными проекциями спина частицы ($j = l \pm 1/2$). При $\alpha = 1$ для уровней энергии с $j = 7/2, l = 3$ и $j = 7/2, l = 4$ это расщепление достигает $\Delta E \approx 0,8m$!!! Почти такое же расщепление при $\alpha = 1$ реализуется для уровней с одинаковыми l : $4f_{5/2}$ и $4f_{7/2}$.

6. С возрастанием α заметно возрастает число сильносвязанных состояний вплоть до значений энергии частицы $\varepsilon \sim 0$ (энергия связи частицы $\sim m$).

7. При $\alpha \ll 1$ отношение среднего радиуса связанной дираковской частицы к гравитационному радиусу близко к отношению $\bar{\rho} = \frac{\bar{r}}{l_c}$ для атома

водорода; при $\alpha \gg 1$ средние радиусы $\bar{\rho} \rightarrow 2\alpha$ или $\bar{r} \rightarrow r_0$, т. е. при больших константах гравитационного взаимодействия связанные дираковские частицы в поле Шварцшильда «прижаты» к гравитационному радиусу («горизонту событий»).

Важным обстоятельством является то, что существование стационарных связанных состояний частиц со спином $1/2$ в гравитационном поле возможно лишь для метрик, запрещающих классическим частицам пересекать «горизонт событий».

Кроме рассмотренной классической метрики Шварцшильда этим же свойством обладают метрики Шварцшильда в изотропных [27] и гармонических [28] координатах.

Существование стационарных связанных состояний для дираковских частиц возможно также для метрик Райсснера – Нордстрёма [2], Керра [3] и Керра – Ньюмена [4], о чем авторы предполагают рассказать в следующих работах.

Для метрик центрально-симметричных удовлетворительных полей, разрешающих классическим частицам пересекать «горизонт событий», квантово-механический анализ показывает, что существование стационарных связанных состояний частиц со спином $1/2$ является невозможным [29].

К этим метрикам относятся метрики Эддингтона – Финкельштейна [5], [6], метрика Пенлеви – Гуллстранда [7], метрика Леметра – Финкельштейна [6], метрика Крускала [8]. Решениями уравнения Дирака для этих метрик могут быть лишь нестационарные комплексные уровни энергии.

По результатам работы можно сделать предположение о существовании нового типа коллапсаров. Эти коллапсары:

- инертные (дираковские частицы не могут проникать под «горизонт событий»);

- не излучают по Хокингу [30] (излучение Хокинга требует существования волновой функции (оператора гравитационного поля) под «горизонтом событий» [31–38]);

- обеспечивают существование стационарных связанных состояний частиц со спином $1/2$ для всех значений гравитационной константы связи α .

С точки зрения космологии неизлучающие реликтовые коллапсары нового типа при малых значениях гравитационной константы связи $\alpha \ll 1$ могут проявлять себя лишь через гравитацию и, таким образом, являются хорошими кандидатами для носителей «темной материи». При этом подразумевается, что массы коллапсаров не превышают масс гипотетических WIMP частиц, рассматриваемых во многих сценариях расширения Вселенной в качестве представителей «темной материи».

Наоборот, неизлучающие реликтовые коллапсары с $\alpha \gg 1$, образуя «матрешку» незаряженных дираковских частиц, прижатую к «горизонту событий» ($\bar{r} \rightarrow r_0$), могут играть важную роль в образовании планет, звезд и т. д.

Таким образом, результаты работы могут привести к изменению некоторых аспектов стандартной космологической модели, связанных с эволюцией Вселенной и с взаимодействием коллапсаров с окружающей средой.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Методы численного решения системы дираковских уравнений для поля Шварцшильда

Первый способ. Линейная система (31) решалась невязным методом Эйлера с автоматическим выбором шага. Перепишем систему (31) в виде

$$\frac{d}{d\rho} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = Q_1(\rho) \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix},$$

$$Q_1(\rho) := \frac{\rho}{\rho - 2\alpha} \begin{pmatrix} -\frac{\kappa\sqrt{1-2\alpha/\rho}}{\rho} & \varepsilon + \sqrt{1-2\alpha/\rho} \\ -\varepsilon + \sqrt{1-2\alpha/\rho} & \frac{\kappa\sqrt{1-2\alpha/\rho}}{\rho} \end{pmatrix}.$$

Норму $\|Q_1(\rho)\|$ – максимум модулей собственных чисел – оценим простейшим образом величиной

$$\Lambda_1(\rho) := \frac{|\rho(\rho - 2\alpha) + \kappa^2(1 - 2\alpha/\rho) - \varepsilon^2\rho^2|^{1/2}}{\rho - 2\alpha}.$$

При $\rho = \rho_{\max}$ полагаем в соответствии со сказанным выше

$$f(\rho) = e^{-\sqrt{1-\varepsilon^2}\rho}, \quad g(\rho) = -\sqrt{(1-\varepsilon)/(1+\varepsilon)}f(\rho).$$

Задаваясь величиной Δ , полагаем $\delta = \Delta/\Lambda_1(\rho)$ и

$$\begin{pmatrix} f(\rho - \delta) \\ g(\rho - \delta) \end{pmatrix} = (1 + \delta Q_1(\rho - \delta))^{-1} \begin{pmatrix} f(\rho) \\ g(\rho) \end{pmatrix}.$$

Из-за особенности в точке $\rho = 2\alpha$ шаги будут уменьшаться при приближении к ней, поэтому удобнее вблизи горизонта, например, при $\rho < 4\alpha$ перейти к новой переменной $t = 2\alpha\varepsilon \ln(\rho - 2\alpha)$. С использованием обозначений

$$u(t) = \frac{1}{2\alpha} e^{\frac{t}{2\alpha\varepsilon}} \quad (\text{см. (35)}), \quad \rho(t) = 2\alpha(1 + u(t)),$$

$$f_2(t) = f(\rho(t)), \quad g_2(t) = g(\rho(t))$$

рассматриваемая система примет вид

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} f_2(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix} = Q_2(t) \begin{pmatrix} f_2(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix}, \quad (48)$$

где мы обозначили

$$Q_2(t) = \frac{u(t)}{\varepsilon} Q_1(\rho(t)) =$$

$$= \frac{1}{2\alpha\varepsilon} \begin{pmatrix} -\kappa\sqrt{\frac{u(t)}{1+u(t)}} & \rho(t)\left(\varepsilon + \sqrt{\frac{u(t)}{1+u(t)}}\right) \\ \rho(t)\left(-\varepsilon + \sqrt{\frac{u(t)}{1+u(t)}}\right) & \kappa\sqrt{\frac{u(t)}{1+u(t)}} \end{pmatrix}.$$

При $t \rightarrow -\infty$

$$Q_2(t) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Кроме того, $\|Q_2(t)\| \sim 1$ при $t \leq t_0$. Поэтому в этой области можно выбрать шаг $\delta = \Delta$ и воспользоваться схемой

$$\begin{pmatrix} f_2(t - \delta) \\ g_2(t - \delta) \end{pmatrix} = (1 + \delta Q_2(t - \delta))^{-1} \begin{pmatrix} f_2(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix}.$$

Использованная разностная схема (Эйлера) имеет первый порядок точности. Отличие полученного численного решения от точного на одном шаге составляет величину $\sim \Delta^2$. На всем интервале интегрирования ошибка составит $\sim \Delta^2(\rho_{\max}/\Delta + |t_{\min}|/\Delta) = (\rho_{\max} + |t_{\min}|)\Delta$. Отметим, что по этой схеме амплитуда численного решения $A_2(t) = (f_2^2(t) + g_2^2(t))^{1/2}$ изменяется следующим образом:

$$A_2^2(t - \delta) = (f_2(t)g_2(t)) \times$$

$$\times \left((1 + \delta Q_2(t - \delta))(1 + \delta Q_2^T(t - \delta)) \right)^{-1} \begin{pmatrix} f_2(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix} \approx$$

$$\approx A_2^2(1 + \delta^2),$$

что дает асимптотическое поведение вида

$$A_2(t-T)/A_2(t) \approx (1+\delta^2)^{-T/(2\delta)} \approx e^{-\delta T/2}$$

при больших T . Вместе с тем, амплитуда точного решения сходится к положительной константе (см. ниже). В случае необходимости повышения точности можно воспользоваться схемой более высокого порядка.

Второй способ. Напомним, что для ненулевого решения линейной системы

$$\begin{pmatrix} f' \\ g' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$$

можно ввести гладкую функцию Φ (фаза) такую, что $\operatorname{tg}\Phi = f/g$. Она удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\Phi' = (b-c + (b+c)\cos(2\Phi) + (a-d)\sin(2\Phi))/2.$$

Также можно выписать уравнение для амплитуды $A = (f^2 + g^2)^{1/2}$:

$$\begin{aligned} (\ln A)' &= \frac{ff' + gg'}{f^2 + g^2} \\ &= a \sin^2 \Phi + d \cos^2 \Phi + (b+c) \sin \Phi \cos \Phi. \end{aligned}$$

Вычисляя эти коэффициенты для уравнений (31), (48) соответственно, получим для фазы уравнения

$$\frac{d\Phi_1}{d\rho} = \frac{\varepsilon\rho}{(\rho-2\alpha)} + \sqrt{\frac{\rho}{\rho-2\alpha}} \cos(2\Phi_1) - \frac{\kappa \sin(2\Phi_1)}{\sqrt{\rho(\rho-2\alpha)}},$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi_2}{dt} &= 1 + u(t) + \sqrt{u(t)(1+u(t))} \frac{\cos(2\Phi_2)}{\varepsilon} - \\ &- \frac{\kappa}{2\alpha\varepsilon} \sqrt{\frac{u(t)}{1+u(t)}} \sin(2\Phi_2). \end{aligned}$$

Рассмотрим функцию $\varphi_2(t) = \Phi_2(t) - t$. Она удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_2}{dt} &= u(t) + \sqrt{u(t)(1+u(t))} \frac{\cos(2\varphi_2 + 2t)}{\varepsilon} - \\ &- \frac{\kappa}{2\alpha\varepsilon} \sqrt{\frac{u(t)}{1+u(t)}} \sin(2\varphi_2 + 2t). \end{aligned}$$

При $t \rightarrow -\infty$ $u(t) \rightarrow 0$, поэтому при всех достаточно малых t $u(t) \leq 1$ и

$$\left| \frac{d\varphi_2}{dt} \right| \leq \sqrt{u(t)} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon} + \frac{|\kappa|}{2\alpha\varepsilon} \right).$$

Отсюда сразу получаем оценку

$$|\varphi_2(t) - \varphi_2(-\infty)| \leq 4\alpha\varepsilon \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon} + \frac{|\kappa|}{2\alpha\varepsilon} \right) \sqrt{u(t)}.$$

Для амплитуды решения системы (48) найдем

$$(\ln A_2)' = \frac{\kappa \cos(2\Phi_2) + \rho(t) \sin(2\Phi_2)}{2\alpha\varepsilon \sqrt{1+u(t)}} \sqrt{u(t)}.$$

Отсюда легко устанавливаем, что

$$|\ln(A_2(t)/A_2(-\infty))| \leq 2(|\kappa| + \rho(t)) \sqrt{u(t)},$$

т. е. $A_2(t)$ стремится к $A_2(-\infty)$ при $t \rightarrow \infty$ (при малых α очень быстро).

Уравнения для фазы (33), (35) решались численно неявным методом Рунге–Кутты пятого порядка с контролем размера шага [39]. Использовалась схема Ила для получения трехстадийного метода Радо ПА. Одностадийный метод по такой схеме эквивалентен неявному методу Эйлера. Трехстадийная формула Радо ПА A -устойчива, L -устойчива и имеет достаточно высокий порядок [39].

Для получения значения фазы Φ в точке $s = \frac{\rho}{2\alpha} - 1 \rightarrow 0$ уравнение (33) интегрировалось от s_{\max} до s_0 , а уравнение (35) – от $t_0 = 2\alpha\varepsilon \ln(2\alpha s_0)$ до t_{\min} . Верхний предел интегрирования s_{\max} выбирался достаточно большим, исходя из того, чтобы с определенной точностью (обычно 10^{-9}) удовлетворялось условие равенства численной производной нулю $\frac{d\Phi}{ds}(s_{\max}) \approx 0$. Точка сшивки решений

уравнений (33), (35) принималась равной $s_0 = 1$. Нижний предел интегрирования t_{\min} выбирался достаточно малым, исходя из того, чтобы с определенной точностью (обычно 10^{-9}) удовлетворялось условие равенства численной производной единице $\frac{d\Phi}{dt}(t_{\min}) \approx 1$.

При расчетах задавалась допустимая погрешность на одном шаге интегрирования, равная 10^{-4} .

Авторы благодарят за большую техническую помощь в подготовке статьи А. Л. Новоселову.

Список литературы

1. Schwarzschild Sitzber K. Deut. Akad. Wiss. Berlin. 1916. P. 189–196.
2. Reissner H. // Ann. Phys. 1916. Vol. 50. P. 106.
Nordstrom C. // Proc. K. Akad. Wet. Amsterdam. 1918. Vol. 20. P. 1238.
3. Kerr R. P. // Phys. Rev. Lett. 1963. Vol. 11. P. 237.
4. Newman E. T., Couch E., Chinnapared K. et al. // J. Math. Phys. 1965. Vol. 6. P. 918.
5. A. S. Eddington. Nature 113, 192 (1924).
6. Finkelstein D. // Phys. Rev. 1958. Vol. 110. P. 965.
7. Painleve P., Acad C. R. // Sci. (Paris). 1921. Vol. 173. P. 677.
Gullstrand A. Arkiv. Mat. Astron. Fys. 1922. Vol. 16. P. 1.
8. Kruskal M. // Phys. Rev. 1960. Vol. 119. P. 1743.
9. Doran C. J. L. // Phys. Rev. 2000. Vol. D 61, N 6. P. 067503.
10. Deruelle N., Ruffini R. // Phys. Lett. 1974. Vol. 52B. P. 437.
11. Damour T., Deruelle N., Ruffini R. // Lett. Nuov. Cim. 1976. Vol. 15. P. 257.
12. Ternov I. M., Khalilov V. P., Chizhov G. A., Gaina A. B. Proceedings of Soviet Higher Educational Institutions // Physics. (in Russian). 1978, N 9.
13. Gaina A. B., Chizhov G. A. Proceedings of Soviet Higher Educational Institutions // Physics (in Russian). 1980, N 4. P. 120.
14. Ternov I. M., Gaina A. B., Chizhov G. A. // Sov. Phys. J. 1980. Vol. 23. P. 695–700.
15. Galtsov D. V., Pomerantseva G. V., Chizhov G. A. // Sov. Phys. J. 1983. Vol. 26. P. 743–745.
16. Ternov I. M., Gaina A. B. // Sov. Phys. J. 1988. Vol. 31, N 2. P. 157–163.
17. Gaina A. B., Zaslavskii O. B. Class. Quantum Grav. 1992. Vol. 9. P. 667–676.
18. Gaina A. B., Ionescu-Pallas N. I. // Rom. J. Phys. 1993. Vol. 38. P. 729–730.
19. Lasenby A., Doran C., Pritchard J. et al. // Phys. Rev. 2005. Vol. D 72. P. 105014.
20. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. // Phys. Rev. 2010. Vol. D 82. P. 104056; arxiv: 1007.4631 (gr-qc).
21. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. // Phys. Rev. 2011. Vol. D 83. P. 105002; arxiv: 1102.4067v1 (gr-qc).
22. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. Arxiv: 1102.0844v6 (gr-qc).
23. Brill D. R., Wheeler J. A. // Rev. of Modern Physics. 1957. Vol. 29. P. 465–479.
24. Dolan S. R. Trinity Hall and Astrophysics Group, Cavendish Laboratory. Dissertation, 2006.
25. Хартри Д. Расчеты атомных структур. М.: ИЛ, 1960.
Hartree D. The calculation of atomic structures. NY: John Wiley, 1957.
26. Бете Г., Солпитер Э. Квантовая механика с одним и двумя электронами. М.: Физматгиз, 1960.
Bethe H. A., Salpeter E. E. Quantum mechanics of one- and two-electron atoms. Springer-Verlag, 1957.
27. Лайтман А., Пресс В., Прайс Р., Тюкольски С. Сборник задач по теории относительности и гравитации. М.: Мир, 1979.
Lightman A., Press W., Price R., Teukolsky S. Problem Book in Relativity and Gravitation (Princeton University Press, Princeton, NJ. 1975).
- Obukhov Yu. N. // Phys. Rev. Lett. 2001. Vol. 86. P. 192; Forsch. Phys. 2002. Vol. 50. P. 711.
28. Логунов А. А., Мествиришвили М. А. Релятивистская теория гравитации. М.: Наука, 1989.
29. Горбатенко М. В., Незнамов В. П. Физическая неэквивалентность метрики Шварцшильда и метрик центрально-симметричного незаряженного гравитационного поля, допускающих пересечение пробными частицами «горизонтов событий» // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2012. Вып. 2. С. 24.
30. Hawking S. W. // Commun. math. Phys. 1975. Vol. 43. P. 199–220.
31. Srinivasan K., Padmanabhan T. // Phys. Rev. 1999. Vol. D60. P. 024007. [gr-qc/9812028].
32. Shankaranarayanan S., Srinivasan K., Padmanabhan T. // Mod. Phys. Lett. 2001. Vol. A16. P. 571–578. [gr-qc/0007022].
33. Shankaranarayanan S., Padmanabhan T., Srinivasan K. // Class. Quant. Grav. 2002. Vol. 19. P. 2671–2688. [gr-qc/0010042].
34. Parikh M. K., Wilczek F. // Phys. Rev. Lett. 2000. Vol. 85. P. 5042. [arXiv:hep-th/9907001].
35. Vagenas E. C. // Phys. Lett. 2002. Vol. B 533. P. 302. [hep-th/0109108].
36. Robinson S. P., Wilczek F. // Phys. Rev. Lett. 2005. Vol. 95. P. 011303. [arXiv:gr-qc/0502074].
37. Vagenas E. C., Das S. JHEP 0610:025 (2006) [hep-th/0606077].
38. Zampeli A., Singleton D., Vagenas E. C. arXiv: [gr-qc] 1206.0879v1.
39. Хайпер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М.: Мир, 1999.
Hairer E., Wanner G. Solving ordinary differential equations II. Stiff and Differential-Algebraic Problems. Second Revised Edition, Springer-Verlag 1991, 1996.