

ВОПРОСЫ АТОМНОЙ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ:

**Теоретическая и прикладная
физика**

ВЫПУСК 3

2012

ФГУП

«РОССИЙСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ЯДЕРНЫЙ ЦЕНТР – ВНИИЭФ»

ВОПРОСЫ АТОМНОЙ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ:

**Теоретическая и прикладная
физика**

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СБОРНИК

ВЫПУСК 3

Издается с 1984 г.

Саров – 2012

Уважаемые читатели!

Редакция н/т сборника «Вопросы атомной науки и техники» серии «Теоретическая и прикладная физика» информирует о том, что начиная со 2-го полугодия 2008 г. журнал распространяется согласно новым правилам подписки.

Теперь подписаться на сборник можно во всех отделениях связи России по каталогу Агентства «Роспечать», раздел «Периодические издания НТИ», подписной индекс 72246.

Цена одного журнала – 200 руб.

В год издается 3 выпуска.

По всем вопросам обращаться по адресу:

607188 г. Саров Нижегородской обл., пр. Мира, 37, РФЯЦ-ВНИИЭФ, ИТМФ.

Редакция журнала ВАНТ, сер. «Теоретическая и прикладная физика».

Тел. (83130)7-54-96; e-mail: kul@otd68.vniief.ru

Главный редактор Ю. А. Трутнев

Редакционная коллегия:

Е. Н. Аврорин – зам. главного редактора, М. В. Горбатенко, В. П. Копышев, Н. В. Лычагина –
ответственный секретарь, Б. А. Надыкто – зам. главного редактора, А. В. Певницкий,
В. А. Симоненко, В. П. Соловьев, С. А. Холин

ИССЛЕДОВАНИЕ ГРАВИТАЦИОННОГО ПЕРЕМЕШИВАНИЯ В ПРИСУТСТВИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

С. И. Глазырин, М. Ю. Егужова, В. А. Жмайло, В. П. Стаценко, Ю. В. Янилкин

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Численно исследуется задача о турбулентном гравитационном перемешивании в присутствии магнитного поля для идеальной МГД. Граница раздела двух жидкостей изначально плоская, а магнитное поле задается параллельным плоскости раздела. Развивающаяся неустойчивость приводит к образованию области турбулентного перемешивания и замешивает среднюю плотность вещества и магнитное поле. В результате исследования получены как влияние магнитного поля на область перемешивания, так и влияние области перемешивания на магнитное поле. Последнее описано и с помощью предложенной полуфеноменологической модели.

Ключевые слова: МГД-турбулентность, гравитационное перемешивание, прямое численное моделирование, полуэмпирические модели.

1. Введение

Задача гравитационного перемешивания в плазме с магнитным полем встречается в огромном количестве фундаментальных задач и приложений, таких как турбулентное динамо [1], аккреция на компактные объекты [2], остатки сверхновых [3], магнитные потоки, вырывающиеся из солнечной фотосферы, [4], петаваттные импульсные установки и Z-пинчи [5–7]. При этом некоторые вопросы до сих пор остаются без ответа. В первую очередь это связано с турбулизацией течения при перемешивании. В данной работе рассматривается МГД-случай перемешивания в идеально проводящей жидкости. Данная задача представляет интерес и добавляет нетривиальные эффекты по сравнению с немагнитным случаем по следующим причинам: во-первых, поле само влияет на перемешивание, во-вторых, магнитное поле заморожено в вещество и следует плотности, но в отличие от последней является векторной величиной. В результате подобию средних значений плотности и магнитного поля не выполняется. Идеальная проводимость рассмотрена для того, чтобы исследовать турбулентную диффузию магнитного поля в чистом виде.

Нас интересуют следующие вопросы:

- каково влияние поля на развитие зоны турбулентного перемешивания (ТП), на рост зоны ТП, энергию турбулентных пульсаций, профили различных величин;
- в чем состоит влияние турбулентности на параметры магнитного поля (турбулентная диффузия, генерация дополнительных компонент, среднеквадратичные флуктуации поля);
- возможность описания процесса перемешивания с помощью МГД-варианта $k-\varepsilon$ модели с использованием результатов 3D численного моделирования.

2. Постановка задачи

Рассмотрим следующую задачу. Две несмешивающиеся идеальные жидкости разных плотностей ρ_1 и ρ_2 занимают полупространства $z < 0$ и $z > 0$ соответственно (рис. 1). Магнитное поле задается изначально параллельным границе раздела, $B \parallel OY$. Сила тяжести направлена вертикально ($g \parallel OZ$). Во всем объеме давление выбирается так, чтобы задать равновесие:

$$\begin{aligned} z < 0: & \quad h = p_0 - \rho_1 |g|z, \\ z > 0: & \quad p = p(z=0+\varepsilon) - \rho_2 |g|z, \\ z = 0: & \quad p(z=0+\varepsilon) = p_0 + \frac{B_1^2}{8\pi} - \frac{B_2^2}{8\pi}. \end{aligned} \quad (1)$$

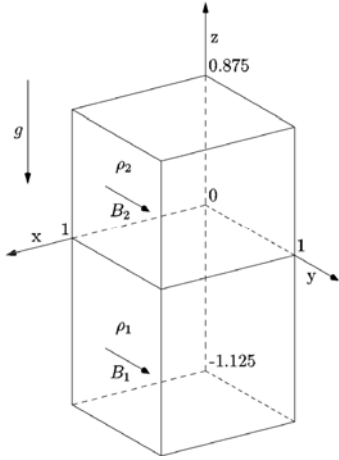


Рис. 1. Начальная постановка

Давление в центре удовлетворяет условию $p_0 \gg \rho gL$, в результате скорости движения $v \ll c_s$, и течение становится близким к несжимаемому (используемый код сжимаемый, а данный метод позволяет привести результаты близко к несжимаемому расчету). Начальное возмущение задаем в виде белого шума в тонкой полосе:

$$0 < z < \Delta z_0: \quad \rho = \rho_2 + \delta\rho. \quad (2)$$

Если говорить о масштабах задаваемых величин, то

$$A_t = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\delta\rho}{\rho_2} = \frac{1}{10}. \quad (3)$$

Для характеристики магнитного поля используем следующую безразмерную комбинацию

$$\xi \equiv \frac{B}{\sqrt{8\pi(\rho_2 - \rho_1)gL}}. \quad (4)$$

Она показывает отношение средней магнитной энергии к потенциальной. Расчеты были проведены со следующим диапазоном значений ξ :

$$\xi \in [3 \cdot 10^{-3}; 2, 2]. \quad (5)$$

Ниже будем различать однородный вариант задания магнитного поля: $B_1 = B_2$ и неоднородный $B_1 \neq 0, B_2 = 0$. Численное моделирование проводилось с помощью 3D сжимаемого гидрокода ТРЭК [8]. Все расчеты выполнены на сетке $200 \times 200 \times 400$ ячеек в геометрической области $L \times L \times 2L$.

3. Результаты расчетов

Для начала рассмотрим влияние магнитного поля на возникающую турбулентность. 2D срезы плотности для разных ξ представлены на рис. 2. Хорошо видно, что при увеличении поля течение «двумеризуется» и критической точкой перехода является $\xi \sim 1$. Эти результаты легко понять, если рассмотреть критерий скорости роста малых возмущений на границе двух веществ с магнитным полем [10]:

$$\delta\rho \sim e^{ik_x x + ik_y y - i\omega t}, \quad (6)$$

$$\omega^2 = -gk \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} + \frac{(B_1 k)^2}{4\pi(\rho_1 + \rho_2)} + \frac{(B_2 k)^2}{4\pi(\rho_1 + \rho_2)}. \quad (7)$$

Видно, что магнитное поле подавляет возмущения с $k > k_{cr}$, где критическая длина волны k_{cr} определяется из условия $\omega^2 = 0$. Например, для однородного поля

$$k_{cr} = \frac{2\pi(\rho_2 - \rho_1)g}{B^2}. \quad (8)$$

В результате достаточно сильное поле приведет к подавлению роста возмущений, параллельных полю. Также из соотношения (7) видно, что для введенной безразмерной величины выполняется

$$\xi = \text{const} \frac{B}{B_{cr}}, \quad B_{cr} = \sqrt{8\pi(\rho_2 - \rho_1)gL}. \quad (9)$$

где значение константы различается для однородного и неоднородного поля. В согласии с формулой (7) из расчетов получается, что поле подавляет мелкие пульсации и приводит к анизотропии компонент турбулентной энергии $\overline{(v'_x)^2} \sim \overline{(v'_z)^2} \gg \overline{(v'_y)^2}$.

Рассмотрим влияние магнитного поля на скорость роста зоны перемешивания. В немагнитном случае зависимость ширины зоны от времени имеет вид

$$\Delta z = \alpha A_t g t^2, \quad (10)$$

где параметр $\alpha \sim 0,04$. В магнитном случае это соотношение может не сохраниться: либо изменится α , либо зависимость от времени $\Delta z \sim t^2$. Проведенные расчеты показывают справедливость формулы (10). Полученная в расчете функция $\sqrt{\Delta z}(t)$ представлена на рис. 3.

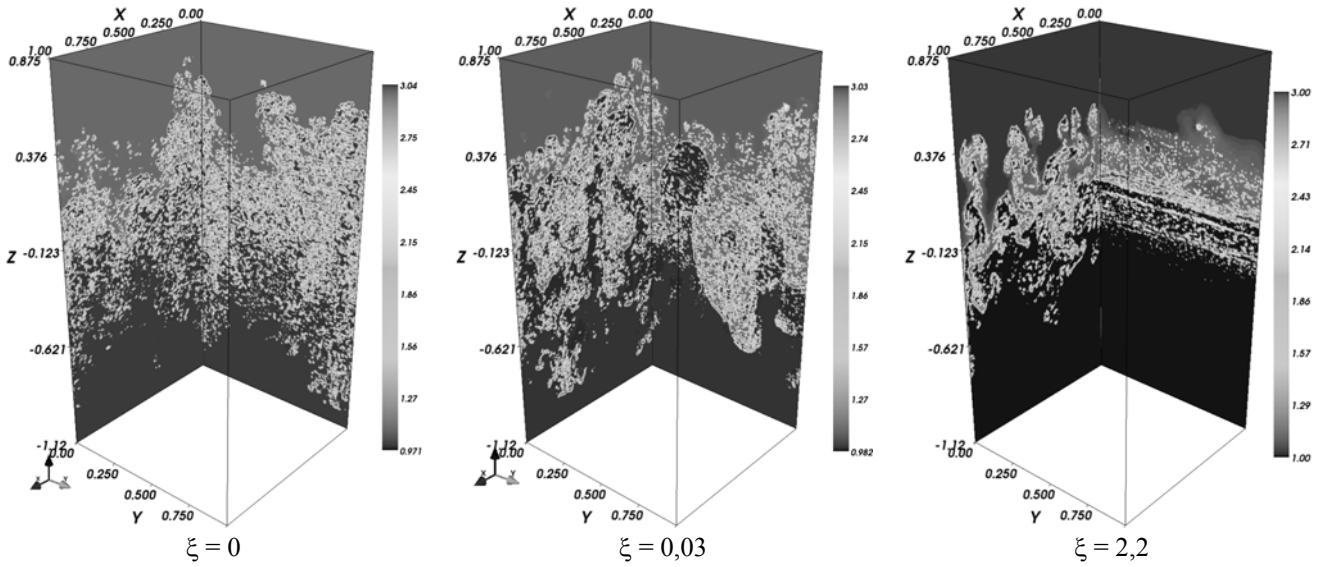


Рис. 2. Двумерные срезы плотности для расчетов с различным магнитным полем

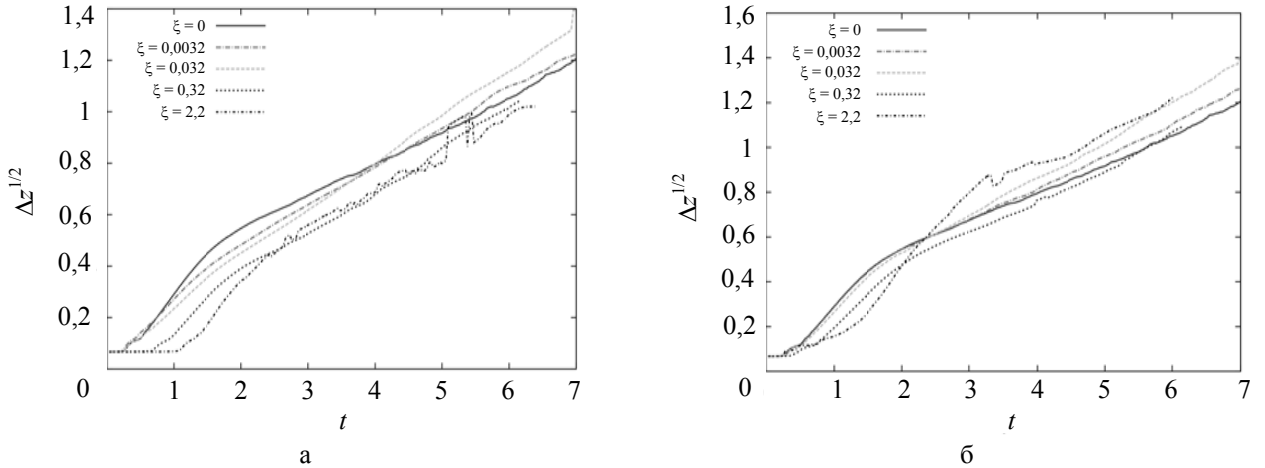


Рис. 3. Зависимости ширины зоны от времени: а – однородное поле; б – неоднородное поле

В результате видно, что коэффициент α сохраняет свое значение и не меняется с магнитным полем. Единственный наблюдаемый эффект магнитного поля заключается в задержке развития зоны перемешивания на начальной стадии $t \leq 1$, что также согласуется с выражением (7).

Для определения турбулентных пульсаций используем однородность величин в горизонтальных плоскостях. Тогда осреднение любой величины A определяется как

$$\bar{A}(z, t) \equiv \frac{1}{L^2} \int A(x, y, z, t) dx dy. \quad (11)$$

Пульсация величины

$$A'(x, y, z, t) = A(x, y, z, t) - \bar{A}(z, t). \quad (12)$$

Энергия турбулентных пульсаций имеет следующую зависимость от времени:

$$E_{turb} = \int \frac{\rho v'^2}{2} dV \sim L^2 \sim (gt^2)^2. \quad (13)$$

Указанное соотношение $E_{turb} \sim L^2$ выполняется во всех случаях. Интерес представляет коэффициент пропорциональности в данном выражении. Нормированная турбулентная энергия представлена на рис. 4.

Видно, что коэффициент пропорциональности не зависит от величины магнитного поля. При этом в неоднородном случае нормированная кинетическая энергия на начальном этапе развития неустойчивости значительно возрастает с возрастанием величины поля. Этот эффект связан с тем, что в уравнении для кинетической турбулентной энергии присутствует член, зависящий от производной поля:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\overline{u'^2}}{2} \right) = \dots + \overline{u'_i b'_j} \partial_j B_i + \dots, \quad (14)$$

и для неоднородного случая сильная неоднородность поля резко поднимает значения турбулентной энергии. Интересно то, что в дальнейшем, несмотря на этот начальный подскок, наблюдается универсальное поведение, не зависящее от величины поля.

Рассмотрим теперь влияние турбулентности на эволюцию магнитного поля. В неоднородном случае происходит процесс турбулентной диффузии поля. При этом профили поля на качественном уровне хорошо повторяют профили плотности (см. рис. 5). На самом деле присутствует некото-

рое количественное отличие (см. ниже про развитие $k-\varepsilon$ модели).

В однородном поле турбулентность генерирует возмущения (рис. 6,а) амплитуда которых будет описана ниже в полуфеноменологической модели. Также происходит генерация других компонент магнитного поля – рис. 6,б.

Турбулентная магнитная энергия сохраняет поведение, аналогичное соотношению (13) в случае, если есть универсальность распределения выделяющейся энергии между магнитной и кинетической, т. е.

$$E_{turbm} = \int \frac{\overline{b'^2}}{8\pi} dV \sim L^2 \sim (gt^2)^2. \quad (15)$$

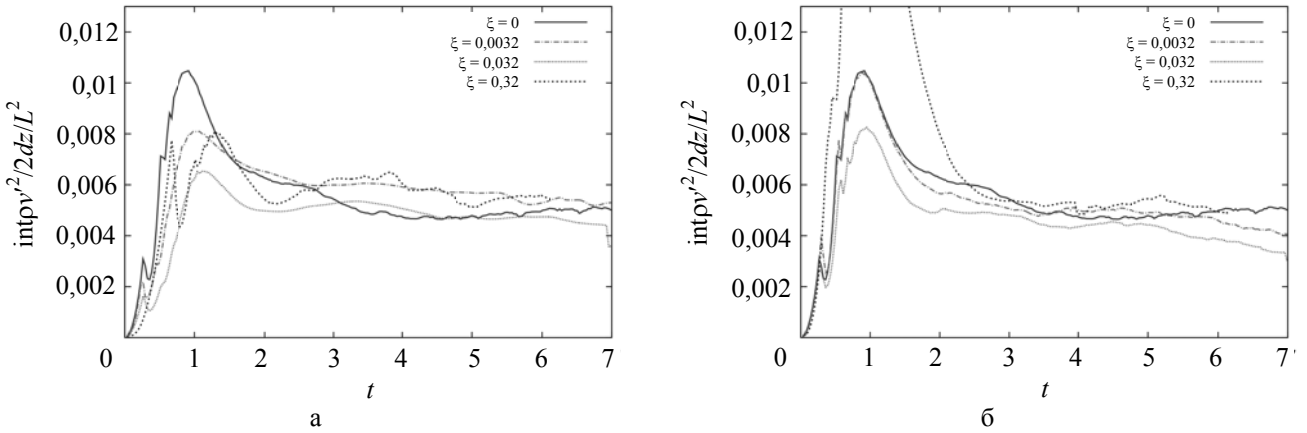


Рис. 4. Зависимость нормированной турбулентной энергии от времени: а – однородное поле; б – неоднородное поле

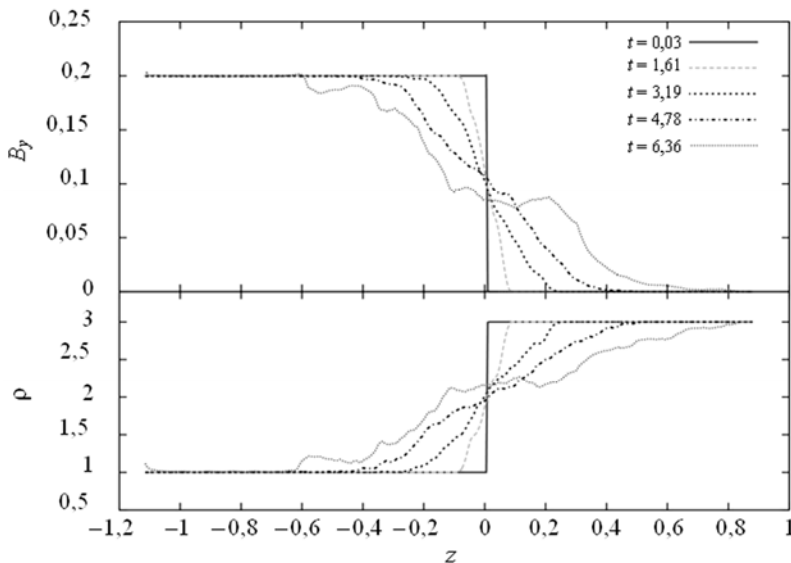


Рис. 5. Последовательные профили усредненных магнитного поля и плотности для расчета с $\xi = 0,3$, неоднородное поле

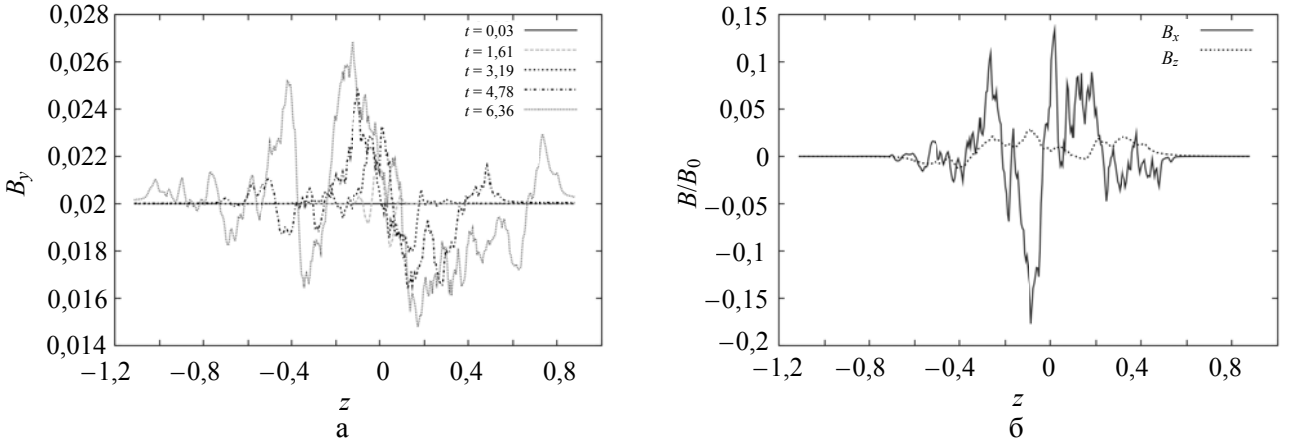


Рис. 6. Последовательные профили усредненного магнитного поля и плотности для расчета с $\xi = 0,03$, однородное поле

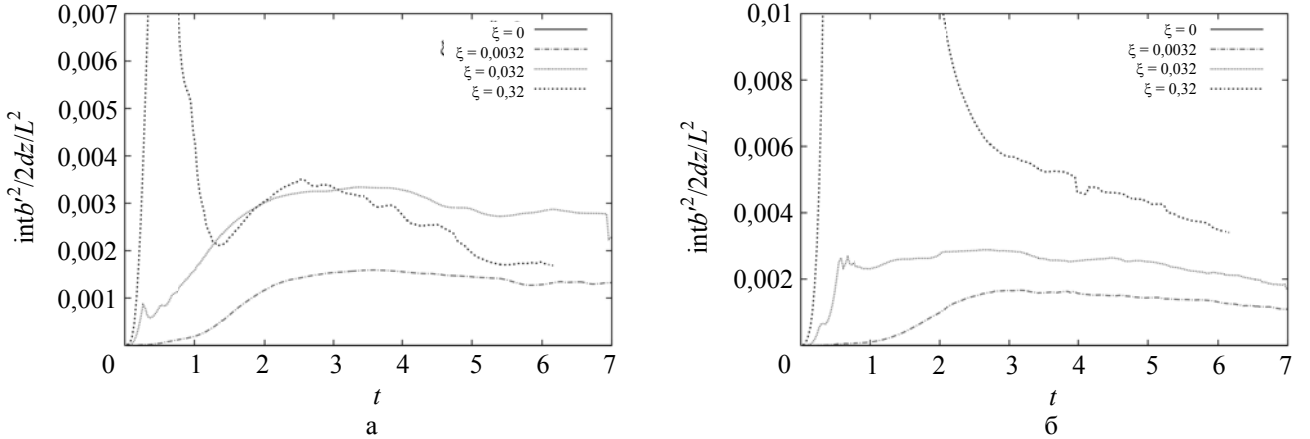


Рис. 7. Зависимость нормированной турбулентной магнитной энергии от времени: а – однородное поле; б – неоднородное поле

На рис. 7 представлена нормированная магнитная турбулентная энергия. Сразу видна некоторая разница с такими же результатами для кинетической энергии. Во-первых, наблюдается зависимость энергии поля с ростом величины поля – коэффициент при энергии растет с $|B|$. Во-вторых, в расчете с полем $\xi = 0,32$ коэффициент не выходит на стационарное значение. Это означает, что либо пульсации при таком поле медленно выходят на теоретическое предсказание, либо теоретическое предсказание $E_{turbm} \sim L^2$ в данном случае нарушается.

4. Построение полуфеноменологической модели

Рассмотрим класс двухпараметрических моделей $k - \varepsilon$. В этих моделях k – турбулентная кинетическая энергия, ε – диссипация турбулентной энергии. В этих терминах определяется турбулентная диффузия

$$D = c_D \frac{k^2}{\varepsilon}. \quad (16)$$

Тогда, например, для эволюции усредненной плотности в гравитационном перемешивании можно написать

$$\partial_t \rho = \partial_z (c_\alpha D \partial_z \rho). \quad (17)$$

В работе [9] предложено автомодельное решение уравнений $k-\varepsilon$ модели (без магнитного поля). Выпишем полученный аналитический результат для коэффициента диффузии из этой работы. Параметр автомодельности для задачи

$$\chi = \frac{z}{Ag t^2}. \quad (18)$$

После решения уравнений в автомодельном виде в рамках некоторых предположений [9] получаем

$$D(t, z) = c_D \frac{k^2}{\varepsilon} \equiv d(\chi) g^2 t^3, \quad (19)$$

$$d(\chi) = \frac{2A^2}{c_\alpha Z} \left\{ \left(\chi_1 - \frac{1}{Z} \right) e^{Z(\chi_1 - \chi)} - \chi + \frac{1}{Z} \right\}. \quad (20)$$

Здесь χ_1 – нижняя граница зоны перемешивания, A – число Атвуда, Z – переменная константа модели. В результате сравнения этого решения с прямым численным моделированием данной работы, получаются следующие оптимальные значения констант полуэмпирической модели $c_D = 0,12$, $c_\alpha = 1,7$.

Рассмотрим вопрос об эволюции магнитного поля. Усредненное уравнение выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \text{rot}[V \times B] + \text{rot} E_M, \quad (21)$$

где обозначено $E_M \equiv \overline{v' \times b'}$. В работах [11–13] представлено обобщение $k-\varepsilon$ модели на магнитный случай для моделирования задач возникновения динамо. Будем называть его моделью

Yoshizawa–Hamba (YH) и применим эти результаты к нашей задаче. Турбулентный член в уравнении для магнитного поля выглядит следующим образом:

$$E_M = \alpha B - \beta \text{rot} B + \gamma \text{rot} V. \quad (22)$$

Для гравитационного перемешивания предполагаем упрощение:

$$V = 0, \quad \alpha = 0, \quad \beta = C_\beta \frac{k^2}{\varepsilon}, \quad \gamma = 0, \quad (23)$$

тогда для магнитного поля уравнение превращается в диффузионное уравнение

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -\text{rot}(\beta \text{rot} B). \quad (24)$$

Введем параметр, показывающий относительную диффузию плотности и поля:

$$\eta \equiv \frac{D_{\rho t}}{D_{Bt}} = \frac{c_\alpha c_D}{C_\beta}. \quad (25)$$

Слабое поле не влияет на гидродинамические характеристики течения, поэтому используем результат (20) для определения k^2/ε . После сравнения с результатами 3D расчетов по ТРЭК для модели YH получается оптимальное значение (см. рис. 8,а)

$$\eta_{YH \text{ optim}} = 4,0. \quad (26)$$

В разной величине диффузии в зоне турбулентного перемешивания проявляется количественное отличие эволюции магнитного поля и плотности. При этом границы зоны для этих величин совпадают.

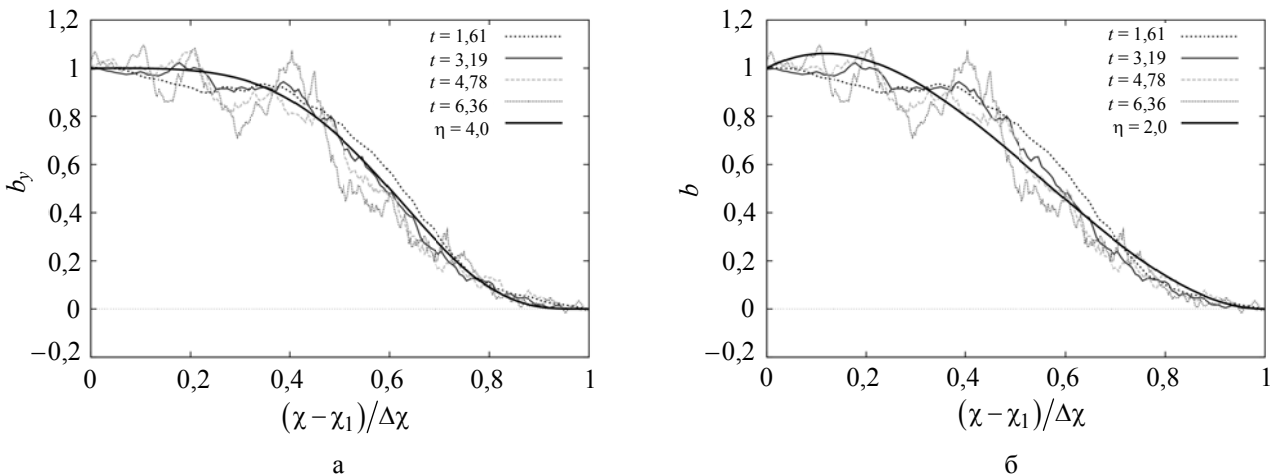


Рис. 8. Сравнение полуфеноменологических моделей с несколькими моментами численного расчета $\xi = 0,03$: а – модель YH; б – модель Стаценко

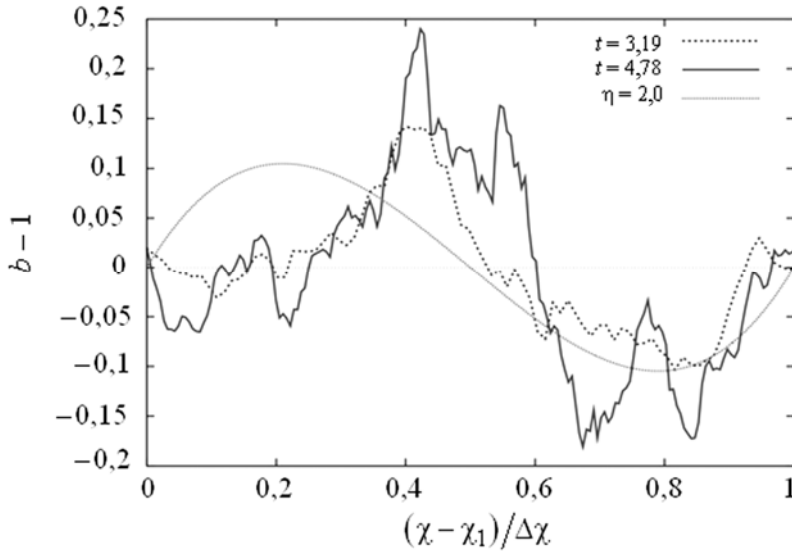


Рис. 9. Сравнение полуфеноменологической модели Стаценко с несколькими моментами численного расчета $\xi = 0,03$ с начальным однородным полем

Один из авторов данной работы В. П. Стаценко указал на неаккуратность усреднения, приводящего к соотношению (21). Уточненная версия для случая турбулентного перемешивания выглядит следующим образом (будем этот результат называть модель Стаценко):

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \text{rot}[u \times B] - \text{rot}\left(\rho D_{Bt} \text{rot}\left\{\frac{B}{\rho}\right\}\right), \quad u = \frac{\overline{\rho' u'}}{\rho}. \quad (27)$$

Для данной модели из численного моделирования получается оптимальный коэффициент (см. рис. 8,б)

$$\eta_{\text{Stats optim}} = 2,0. \quad (28)$$

Модель Стаценко предсказывает не наблюдаемый эффект роста поля в области $\chi \approx \chi_1$ (в этой области формально нарушается справедливость модели), но при этом в отличие от модели УН описывает возникновение возмущений и их амплитуду для однородной постановки задачи (рис. 9).

5. Заключение

В результате проведенных исследований можно заключить, что магнитное поле приводит к задержке роста зоны турбулентного перемешивания на начальной стадии, а сильное поле приводит также к «двумеризации» течения. Эти эффекты хорошо объясняются дисперсионным соотношением для малых возмущений границы раздела двух сред. Развитие турбулентности приводит

к диффузии и генерации дополнительных компонент магнитного поля. Эти эффекты описываются с помощью модифицированной $k - \varepsilon$ модели, с коэффициентами диффузии, определенными из проведенных 3D расчетов. Оказывается, что диффузия плотности и магнитного поля соответственно $D_{\rho t} = 0,20k^2/\varepsilon$, $D_{Bt} = \eta^{-1}D_{\rho t}$, где коэффициент $\eta = 2$ или 4 в зависимости от используемой модели.

Список литературы

1. Вайнштейн С. И., Зельдович Я. Б., Рузмайкин А. А. Турбулентное динамо в астрофизике. М.: Наука, 1980.
2. Litwin C., Brown E. F., Rosner R. // *Astrophys. J.* 2001. Vol. 554. P. 788.
3. Jun B.-I., Norman M. L. // *Astrophys. J.* 1996. Vol. 472. P. 245.
4. Isobe H., Miyagoshi T. et al. // *Nature.* 2005. Vol. 434. P. 478.
5. Sinars D. B. et al. // *Phys. Rev. Lett.* 2010. Vol. 105. P. 185001.
6. Matzen M. K. et al. // *Plasma Phys. Controlled Fusion.* 1999. Vol. 41. A175.
7. Slutz S. A. et al. // *Phys. Plasmas.* 2010. Vol. 17. 056303.
8. Стадник А. Л., Шанин А. А., Янилкин Ю. В. // ВАНТ. Сер. ММФП. 1994. Вып. 4. С. 71.
9. Гужова А. Р., Павлушин А. С., Стаценко В. П. // ВАНТ. Сер. ТПФ. 2005. Вып. 3. С. 37–48.

10. Chandrasekhar S. Hydrodynamic and Hydro-magnetic Stability. Oxford: Oxford University Press, 1961.

11. Yoshizawa A., Hamba F. A turbulent dynamo model for the reversed field pinches of plasma // Phys. Fluids. 1988. Vol. 31. P. 2276–2284.

12. Hamba F. One-dimensional calculation of a turbulent dynamo model for reversed field pinches // Phys. Fluids B. 1990. Vol. 2. P. 3064–3073.

13. Yoshizawa A., Itoh S.-I, Itoh K. Plasma and Fluid Turbulence: Theory and Modelling. Bristol and Philadelphia: Institute of Physics Publishing, 2002.

Статья поступила в редакцию 15.11.2012

**МНОГОПОТОКОВАЯ МОДЕЛЬ И ЧИСЛЕННАЯ МЕТОДИКА SRG-6
ДЛЯ РАСЧЕТА ОБРАЗОВАНИЯ И ДВИЖЕНИЯ РАЗРЕЖЕННОЙ ПЛАЗМЫ
В МАГНИТНОМ ПОЛЕ. ПРИМЕНЕНИЕ К РАСЧЕТУ
ЭФФЕКТОВ ЯДЕРНОГО ВЗРЫВА «МОРСКАЯ ЗВЕЗДА»**

И. М. Анисина, Г. В. Долголева, В. А. Жмайло, Н. В. Тарасова

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Описывается многопоточная модель для расчета образования и движения разреженной плазмы в геомагнитном поле («многопоточное» МГД-приближение). Приводится самое полное описание одномерной лагранжевой методики SRG-6, использующей эту модель в шестипоточном варианте. Проводится сравнение результатов расчетов с экспериментальными данными о параметрах области ЯВ в американском опыте «Морская звезда».

Ключевые слова: ядерный взрыв, магнитная гидродинамика, магнитное поле.

Введение

В 1958–1962 годах в нашей стране и в США было проведено несколько серий ядерных взрывов (ЯВ) в верхних (выше 150 км) слоях атмосферы [1, 2]. Многообразие и масштабность эффектов, которые проявились в этих опытах, позволяют рассматривать их в качестве уникальных источников данных по физике ионосферы, магнитосферы и общей физике плазмы. Поэтому уже в течение многих лет эти эффекты привлекают внимание исследователей. Основные экспериментальные данные, полученные в этих опытах, приведены в работах [3–8]. Их расчетно-теоретическому описанию посвящены работы [4, 9–16].

Среди указанных теоретических подходов в основном используются три.

Первый (и наиболее строгий) – «гибридная» модель. В этой модели движение ионов описывается уравнениями Власова, а электроны рассматриваются как «безмассовая» жидкость. Такой подход [9, 10] оказался весьма эффективным при расчетах начальной стадии взрыва (пока $t \leq 2\pi/\omega_i$, где $\omega_i \approx 10^2$ с – ионная ларморовская частота), однако его реализация для более поздних моментов времени оказывается довольно сложной. Кроме того, в этом подходе возникают трудности с учетом столкновений между частицами.

Другой подход [15, 16] состоит в использовании стандартных МГД-уравнений. Такие уравнения достаточно оправданы для «столкновительной» плазмы, однако в рассматриваемых задачах, когда пробеги частиц гораздо больше их ларморовских радиусов, их применение трудно обосновать. Тем не менее, ввиду своей простоты он допускает сравнительно простую численную реализацию и позволяет рассчитывать развитие ЯВ до больших ($t \gg 1$ с) моментов времени.

Третий подход (он и рассматривается в данной работе) основан на «многопоточном» МГД-приближении для решения исходной системы уравнений Максвелла–Больцмана. В этом подходе считается, что в рассматриваемом течении можно выделить несколько «потоков»: безмассовые электроны + тяжелые частицы (заряженные и нейтральные, «быстрые» и «медленные»), частицы продуктов взрывов (ПВ) и атмосферы). Более подробное описание этого подхода приведено в работе [17] и в п. 1 данной работы.

Одновременно с развитием этой модели разрабатывались соответствующие численные методики: от самых простых [11] (одномерная двухпоточковая методика «SRG-2») до довольно сложных [18] (трехмерная шестипоточковая методика, разработанная в рамках комплекса ТИМ-3D [19]).

В данной работе подробно описана одна из них – одномерная лагранжева методика «SRG-6», в которой решаются уравнения данной модели, полученные в «шестипоточковом» приближении. Хотя одномерный подход к описанию реальных космических ЯВ сильно ограничен, тем не менее, такая методика представлялась весьма полезной, поскольку полученные с ее помощью результаты используются для выявления относительной роли различных физических процессов, определяющих развитие таких ЯВ. Кроме того, ее лагранжев характер позволяет получать решения, которые могут использоваться для тестирования многомерных (эйлеровых) методик.

И наконец, методика «SRG-6» применяется для расчетов, связанных с проведением некоторых модельных экспериментов на лазерных установках [20].

1. Многопоточковая модель. Полное описание шестипоточковой модели

Наиболее строгая математическая формулировка задачи о движении плазмы в магнитном поле сводится к записи системы уравнений Больцмана с интегралами столкновений, учитывающими довольно большое число различных типов взаимодействий между частицами, а также взаимодействие заряженных частиц с внешним геомагнитным полем. Для самосогласованного учета эффектов поля исходная система уравнений должна быть дополнена уравнениями Максвелла.

Итак, исходная система уравнений имеет следующий вид.

Уравнения Больцмана–Власова для частиц сорта « α »

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \vec{v} \nabla f_\alpha + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \vec{F} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{v}} = J_\alpha(\vec{v}), \quad (1.1)$$

где e_α и m_α – заряд и масса частиц сорта « α »,

$$\vec{F} = \vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v} \vec{H}] \text{ – сила Лоренца;} \quad (1.2)$$

$$J_\alpha(\vec{v}) = \sum_\beta J_{\alpha\beta}(\vec{v}) \text{ – интеграл столкновений частиц сортов «}\alpha\text{» и «}\beta\text{»}. \quad (1.3)$$

Система замыкается квазистационарными уравнениями Максвелла

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -c \cdot \text{rot } \vec{E}; \quad (1.4)$$

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi \vec{j}}{c} \quad (1.5)$$

и законом Ома

$$e \left(\vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{u}_e \vec{H}] \right) = \vec{R}_e \text{ [21],} \quad (1.6)$$

где \vec{R}_e – «сила трения» между электронами и «тяжелыми» частицами, а \vec{u}_e связано с \vec{u}_i соотношением

$$\vec{u}_e = \vec{u}_i - \frac{\vec{j}}{en_e}, \quad (1.7)$$

где \vec{u}_i – среднемассовая скорость ионов.

Система (1.1)–(1.5) оказывается весьма сложной, поэтому для ее решения используются различные приближенные подходы.

Подход, применяемый в данной модели, основан на многопоточковом МГД-приближении для решения исходной системы уравнений Больцмана–Власова и Максвелла. Как отмечалось выше, в этой модели считается, что в рассматриваемом течении можно выделить несколько «потоков»: безмассовые электроны + тяжелые частицы (заряженные и нейтральные, «быстрые» и «медленные», частицы ПВ и атмосферы). Количество потоков может меняться в зависимости от требований решаемой задачи и количества рассматриваемых веществ. Учитываются основные механизмы столкновительного и бесстолкновительного взаимодействия между потоками.

Формально этот подход состоит в использовании некоторых приближенных представлений для функций распределения $f_\alpha(\vec{v}, \vec{r}, t)$. Наиболее известный пример такого подхода в кинетической теории газов – метод моментов Грэда [22].

Подробно процесс получения уравнений многопоточковой модели описан в работе [17]. Исходным является так называемое бимодальное представление для описания функции распределения f_α для каждого рассматриваемого вещества.

Каждая из функций f_α представляется в виде

$$f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) = \sum_{j=1,2} n_\alpha^{(j)} \varphi_\alpha^{(j)}, \quad (1.8)$$

где

$$\varphi_\alpha^{(j)} = \frac{1}{\left[(c_\alpha^j)^2 \pi \right]^{3/2}} \exp \left[- (x_\alpha^j)^2 \right]; \quad (1.9)$$

$$(x_\alpha^j)^2 = \frac{(\vec{v} - \vec{u}_\alpha^{(j)})^2}{2(c_\alpha^j)^2}, \quad (c_\alpha^j)^2 = \frac{T_\alpha^{(j)}}{m_\alpha}; \quad (1.10)$$

$n_\alpha^j(\vec{r}, t)$ – плотность; \vec{u}_α^j – скорость; $T_\alpha^{(j)}$ – температура частиц соответствующего потока. Этому представлению (1.8) соответствует разделение частиц (каждого из сортов « α ») на две группы: «медленных» частиц и группа «быстрых» частиц, получивших значительную энергию от ЯВ. Такое представление является приближенным, однако, как показывают соответствующие оценки и расчеты, оно позволяет получать непрерывные переходы к большому числу различных предельных случаев задач о взрыве (переход к газодинамике и вакууму, течения с большими и малыми числами Маха (в том числе и «альфвеновского»), течения нейтрального и полностью ионизированного газа и т. п.) [23, 24].

Подставляя (1.8) в исходную систему (1.1) и проводя соответствующее интегрирование, можно получить систему уравнений для среднemasовых характеристик каждого из введенных выше потоков. Для замыкания этой системы необходимо конкретизировать вид интегралов столкновений $J_{\alpha\beta}(\vec{v})$ и вычислить соответствующие моменты от этих интегралов. Количество рассматриваемых типов частиц и интервал относительных скоростей их движения, который реализуется в рассматриваемой задаче, приводят к необходимости рассматривать практически все типы столкновений, известных в атомной физике. Для упрощения задачи приходится выбирать те или другие в качестве основных. Этот выбор в значительной мере определяет модель образования и движения плазмы в данной задаче. На основании известных данных о сечениях атомных столкновений и оценок их возможной роли в рассматриваемых течениях в используемую модель включены следующие типы столкновений.

1. Упругие столкновения между тяжелыми частицами. Учитывались кулоновские сечения для столкновений между ионами и сечения, полученные для экранированного кулоновского потенциала, для столкновений с участием нейтральных атомов.

2. Упругие столкновения между электронами и тяжелыми частицами: для ионов использовалось кулоновское сечение, для атомов – сечение, полученное с учетом формул [25].

3. Неупругие столкновения между тяжелыми частицами. В качестве основных рассматривались перезарядка и ионизация. Сечение перезарядки выбиралось с учетом данных [26, 27]. Исходя из них и предполагая, что ввиду большой доли возбужденных частиц, участвующих в столкновениях, пере-

зарядка идет резонансным образом, для сечения использовалась формула Сена [28]. Что касается сечений по ионизации, то использовались самые простые из известных формул, а именно формулы, полученные В. Фирсовым в 60-х годах [29]. Как показывает сравнение этих формул с данными многочисленных экспериментов, они неплохо описывают эксперимент (с точностью до «двойки»), особенно в области относительных скоростей, где сечение максимально [30].

4. Неупругие столкновения с участием электронов. Сечения ионизации и возбуждения атомов электронным ударом описывались соотношением из работы [31], причем считалось, что эти процессы идут из основных состояний. Учитывалась также фоторекомбинация (согласно работе [31]).

Вычисление моментов от интегралов столкновений перечисленных типов является довольно сложной задачей, учитывая, что каждый из таких моментов зависит от большого числа аргументов (температуры, скорости, плотности рассматриваемых потоков), а сечения столкновений также имеют сложный вид. Поэтому при таких вычислениях использовался ряд приближений. Основное из них состояло в том, что необходимые формулы для моментов получались как интерполяционные между двумя предельными случаями, в которых для этих интегралов можно получить сравнительно строгие выражения, а именно, для случая холодных потоков и случая потоков с малой относительной скоростью.

В модели, используемой в методике SRG-6, разделение плазмы на потоки проводится по признакам: частицы ПВ и атмосферы, заряженные и нейтральные частицы, «быстрые» и «медленные», всего получается 8 потоков, плюс «безмассовые» электроны. В целях некоторого упрощения задачи и с учетом особенностей возникающего течения (см. ниже) число рассчитываемых потоков в данной модели было уменьшено с 8 до 6 за счет того, что быстрые и медленные потоки в каждом из сортов частиц ПВ (заряженных и нейтральных) были объединены в один поток. Таким образом, в этой модели рассчитывается движение и взаимодействие следующих потоков:

- 1 – ионы ПВ;
- 2 – нейтральные атомы ПВ;
- 3 – ионы атмосферы (быстрые);
- 4 – нейтральные атомы атмосферы (быстрые);
- 5 – ионы атмосферы (медленные);
- 6 – атомы атмосферы (медленные).

Кроме этих потоков рассчитывается «безмассовая» электронная компонента плазмы.

Каждый из этих потоков описывается своими значениями плотности, скорости и температуры. Для них решаются следующие уравнения:

$$\frac{d_k \rho_k}{dt} + (\rho_k)^2 \frac{\partial}{\partial m_k} [r_k^\nu u_{kr}] = S_k = \sum_j (\tilde{S}_{jk} + \delta S_{jk}), \quad (1.11)$$

$$\rho_k \frac{d_k \bar{u}_k}{dt} + \nabla P_k = -\frac{\rho_k \chi_k}{\rho_e \Phi_k} \left(\frac{1}{4\pi} [\text{rot } \vec{H}, \vec{H}] + \nabla P_e \right) + \sum_j \left((\tilde{S}_{jk} + g_{jk} \delta S_{jk}) (\bar{u}_j - \bar{u}_k) + \bar{F}_{kj} \right) + \bar{U}_k + \bar{G}_k, \quad (1.12)$$

$$\rho_k \frac{d_k \varepsilon_k}{dt} + \rho_k P_k \frac{\partial [r_k^\nu u_{kr}]}{\partial m_k} = \sum_j \left\{ (\tilde{S}_{jk} + g_{jk} \delta S_{jk}) \left[\varepsilon_j - \varepsilon_k + \frac{\bar{w}_{kj}^2}{2} \right] + \bar{F}_{kj} \bar{w}_{kj} \xi_j + Q_{kj} \right\} + Q_{ke}^{elast} + Q_{ke}^{inel}, \quad (1.13)$$

$$\frac{dr_k}{dt} = u_{kr}, \quad (1.14)$$

Для электронов:

$$\rho_e = \sum_k \frac{\rho_k \chi_k}{\Phi_k}, \quad (1.15)$$

$$\rho_e \bar{u}_e = \sum_k \frac{\rho_k \bar{u}_k \chi_k}{\Phi_k}, \quad (1.16)$$

$$\rho_e \frac{d_e \varepsilon_e}{dt} + \rho_e P_e \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho_e} \right) = -\frac{1}{M_e} \left(\frac{\gamma_e T_e}{(\gamma_e - 1)} + J_e \right) \sum_k S_k \chi_k / \Phi_k - \sum_k \left(Q_{ke}^{elast} + Q_{ke}^{inel} \right) - \sum_k \bar{u}_k \bar{U}_k; \quad (1.17)$$

Здесь

$$\vec{u}_k = (u_{kr}, 0, u_{k\varphi});$$

$$\frac{d_k}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_{kr} \frac{\partial}{\partial r},$$

$\rho_k, u_k, \varepsilon_k, P_k, m_k, \chi_k$ – это характеристики k -го потока: плотность, скорость, энергия, давление, масса и степень ионизации соответственно; φ_k – отношение массы иона/атома k -го потока к «стандартной» массе атома.

В одномерной методике SRG-6 удобнее задавать магнитное поле через магнитный потенциал M :

$$H_\theta = H_0 \frac{\partial M}{r_e \partial r_e}.$$

Уравнение для магнитного потенциала:

$$\frac{d_e M}{dt} = D \left[\frac{\partial^2 M}{\partial r_e^2} - \frac{2M}{r_e^2} \right], \quad (1.18)$$

где D – коэффициент диффузии, который зависит от характеристик электронной компоненты плазмы (в такой записи последнего уравнения пренебрегается эффектом Холла).

Вектор \vec{G}_k в соотношении (1.12) характеризует магнитное ламинарное взаимодействие между потоками:

$$\vec{G}_k = \omega_k \rho_k \left[(\vec{u}_e - \vec{u}_k) \times \vec{h} \right]; \quad (1.19)$$

$$\vec{h} = \vec{H}/H_0, \quad \omega_k = \frac{\omega_0 \chi_k}{\varphi_k}, \quad \omega_0 = \frac{eH_0}{M_0 c} \quad (e - \text{заряд электрона, } c - \text{скорость света}).$$

Источники, представленные в правой части уравнений, описывают обмен массами, изменение импульсов и внутренней энергии потоков в результате различных взаимодействий, неупругих, таких как ионизация, перезарядка, рекомбинация, и упругих. Характер взаимодействий зависит от их сечений.

Например, источники S_{ik} записываются в виде

$$S_{ik} = \tilde{S}_{ik} + \delta S_{ik}, \quad (1.20)$$

где \tilde{S}_{ik} описывает переходы частиц между потоками i и k за счет изменения заряда, а δS_{ik} – переход частиц атмосферы из медленных в быстрые потоки за счет упругих столкновений и ларморовского ускорения (для ионов).

Слагаемые \vec{F}_{kj} в уравнениях движения описывают изменение импульса потока « k » за счет упругих столкновений его частиц с частицами потока j .

Аналогично источники Q_{kj} и Q_{ke}^{elast} описывают эффекты упругих столкновений при непосредственном упругом взаимодействии частиц k и j (или электронов).

Члены \vec{U}_k и Q_{ke}^{inel} описывают изменение импульса и энергии потоков в результате ионизации столкновениями тяжелых частиц.

Конкретные выражения для источников приводятся в п. 2, где описывается их аппроксимация.

Уравнения состояния тяжелых частиц – как для идеального газа (все эти частицы считались одноатомными):

$$P_k = \varepsilon_k (\gamma_k - 1) \rho_k, \quad \varepsilon_k = \frac{T_k}{M_k (\gamma_k - 1)}, \quad (1.21)$$

уравнения состояния для электронов:

$$P_e = n_e T_e, \quad \varepsilon_e = \frac{1}{M_0} \left[\frac{T_e}{(\gamma - 1)} + J_e \right], \quad (1.22)$$

$J_e = \frac{\sum_k n_k \chi_k J_k}{n_e}$, J_k – потенциалы первой ионизации атомов ПВ и воздуха соответственно; n_k, n_e – концентрации ионов и электронов соответственно.

В данной модели выполняются законы сохранения массы, импульса, полной энергии:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum_k m_k &= 0, & \frac{d}{dt} \sum_k \int_0^\infty u_k dm_k &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\sum_k \int_0^\infty (u_k^2/2 + \varepsilon_k) dm_k + 2\pi \int_0^\infty \rho H^2 / 8\pi d\rho \right) &= 0. \end{aligned}$$

2. Методика SRG-6

2.1. Расщепление

Течения, возникающие при мощных энерговыделениях в атмосфере, характеризуются рядом физических особенностей, которые усложняют численное моделирование. Поскольку методика SRG является лагранжевой, то часть трудностей автоматически разрешается. Еще один подход для упрощения моделирования – это предпочтение методам глобальной аппроксимации метода расщепления по физическим процессам, который позволяет использовать аппроксимации и методы, наиболее подходящие для этих процессов.

Вначале система считается неподвижной и учитываются только члены, отвечающие за взаимодействие потоков. Сначала рассчитывается отщепленная система, описывающая взаимодействие потоков в магнитном поле. В SRG-6 предусмотрены две возможности учета взаимодействия потоков в магнитном поле. Первый из них – это классический вариант [11] учета поля, второй вариант будем называть «адаптивный». Для обозначения выбора того или иного варианта служит маркер δ_0 .

Таким образом, на одном временном шаге в качестве первого этапа при классическом учете магнитного поля ($\delta_0 = 1$) решается такая отщепленная система:

$$\rho_k \frac{d_k \vec{u}_k}{dt} = \delta_0 \vec{G}_k. \quad (2.1)$$

И соответственно покомпонентно в сферической системе координат:

$$\rho_k \frac{du_{kr}}{dt} = G_{kr} = -\omega_k \rho_k (u_{e\varphi} - u_{k\varphi}) + H_\theta / H_0 \frac{\rho_k u_{k\varphi}^2}{r}, \quad (2.2)$$

$$\rho_k \frac{du_{k\varphi}}{dt} = G_{k\varphi} = \omega_k \rho_k (u_{er} - u_{kr}) H_\theta / H_0 - \frac{u_{k\varphi} u_{kr}}{r}. \quad (2.3)$$

Далее решается отщепленная система, описывающая неупругие взаимодействия потоков.

$$\frac{d_k \rho_k}{dt} = \sum_j \tilde{S}_{jk}, \quad (2.4)$$

$$\rho_k \frac{d_k \vec{u}_k}{dt} = \sum_j \tilde{S}_{jk} (\vec{u}_j - \vec{u}_k) + \vec{U}_k, \quad (2.5)$$

$$\rho_k \frac{d_k \varepsilon_k}{dt} = \sum_j \tilde{S}_{jk} \left[\varepsilon_j - \varepsilon_k + \frac{\vec{w}_{kj}^2}{2} \right] + Q_{ke}^{inel}, \quad (2.6)$$

$$\rho_e \frac{d_e \varepsilon_e}{dt} = -B \left(\frac{\gamma_e T_e}{(\gamma_e - 1)} + J_e \right) \sum_k S_k \chi_k / \varphi_k - \sum_k Q_{ke}^{inel} - \sum_k \bar{u}_k \bar{U}_k. \quad (2.7)$$

Далее реализуется система, описывающая упругие взаимодействия между потоками:

$$\frac{d_k \rho_k}{dt} = \sum_j \delta S_{jk}, \quad (2.8)$$

$$\rho_k \frac{d_k \bar{u}_k}{dt} = \sum_j \left(g_{jk} \delta S_{jk} (\bar{u}_j - \bar{u}_k) + \bar{F}_{kj} \right), \quad (2.9)$$

$$\rho_k \frac{d_k \varepsilon_k}{dt} = \sum_j \left(g_{jk} \delta S_{jk} \left[\varepsilon_j - \varepsilon_k + \frac{\bar{w}_{kj}^2}{2} \right] + \bar{F}_{kj} \bar{w}_{kj} \xi_j + Q_{kj} \right) + Q_{ke}^{elast}, \quad (2.10)$$

$$\rho_e \frac{d_e \varepsilon_e}{dt} = - \sum_k Q_{ke}^{elast}. \quad (2.11)$$

На этом же этапе рассчитываются уравнения (1.15) и (1.16).

И наконец, последним этапом рассчитываем газодинамическое движение всех потоков, т. е. уравнения (1.11), (1.12), (1.13), (1.17) с равными нулю правыми частями.

2.2. Дискретизация

Для дискретизации уравнений (2.2) и (2.3) используются неявные, линейные разностные операторы (схемы). В результате чего получается система линейных уравнений относительно неизвестных $\Gamma_k^{(g+1)}$

($\Gamma_k = u_{k\varphi} r_k$), $u_{kr}^{(g+1)}$:

$$\Gamma_k^{(g+1)} + \omega_k \frac{\tau}{\rho_e} \frac{\partial M}{\partial r} \sum_{j \neq k} \chi_j \rho_j u_{kr}^{(g+1)} - \omega_k \frac{\tau}{\rho_e} \frac{\partial M}{\partial r} \sum_j \chi_j \rho_j u_{jr}^{(g+1)} = \Gamma_k^{(g)},$$

$$- \left(\frac{\Gamma_k^{(g)} \tau}{r^3} + \omega_k \frac{\tau}{\rho_e} \frac{\partial M}{\partial r} \frac{1}{r^2} \sum_{j \neq k} \chi_j \rho_j \right) \Gamma_k^{(g+1)} + \omega_k \frac{\tau}{\rho_e} \frac{\partial M}{\partial r} \frac{1}{r^2} \sum_j \chi_j \rho_j \Gamma_j^{(g+1)} + u_{kr}^{(g+1)} = u_{kr}^{(g)},$$

τ – временной шаг. Здесь индекс, обозначающий номер точки по пространству опущен, так как уравнения записаны относительно одной пространственной точки.

Для вычисления потенциала магнитного поля по уравнению диффузии, используем следующую разностную схему:

$$M_j^{(g+1)} \left[1 + \frac{2\tau D_j}{r_{j+1} - r_j} \left(\frac{1}{r_{j+1} - r_j} + \frac{1}{r_j - r_{j-1}} \right) + \frac{2\tau D_j}{r_j^2} \right] - M_{j+1}^{(g+1)} \frac{2\tau D_j}{(r_{j+1} - r_{j-1})(r_{j+1} - r_j)} -$$

$$- M_{j-1}^{(g+1)} \frac{2\tau D_j}{(r_{j+1} - r_{j-1})(r_j - r_{j-1})} = M_j^{(g)}.$$

Здесь j – индекс по пространству, g – индекс по времени.

Для реализации **неупругих** взаимодействий между различными потоками тяжелых частиц были выбраны балансные, неявные схемы первого порядка точности по времени.

Учитывая то, что источники \tilde{S}_{jk} разбивают множество потоков на пары по характеру взаимодействия, можно записать схемы относительно этой части неупругих взаимодействий для нечетных k :

для плотностей:

$$\frac{\rho_k^{(g+1)} - \rho_k^{(g)}}{\tau} = \bar{\varphi} n_{k+1}^{(g+1)} A_k - \bar{\varphi} i_k^{(g+1)} B_k - \bar{\varphi} i_k^{(g+1)} \Omega_k n_e,$$

$$\frac{\rho_{k+1}^{(g+1)} - \rho_{k+1}^{(g)}}{\tau} = -\bar{\varphi} n_{k+1}^{(g+1)} A_k + \bar{\varphi} i_k^{(g+1)} B_k + \bar{\varphi} i_k^{(g+1)} \Omega_k n_e,$$

где

$$A_k = \sum_{j \neq k, k+1} \theta_{k+1, j} i_j^{(g)} + \sum_j \Lambda_{k+1, j} \frac{\rho_j^{(g)}}{\varphi_j} + \Lambda_{ek+1} n_e,$$

$$B_k = \sum_{j \neq k, k+1} \theta_{jk} n_j^{(g)},$$

$$n_k = \frac{\rho_k (1 - \chi_k)}{\varphi_k}, \quad i_k = \frac{\rho_k \chi_k}{\varphi_k}.$$

Индекс по пространству опущен, так как уравнения записаны относительно одной точки по пространству.

$$\bar{\varphi} = \begin{cases} \varphi_1 = \varphi_2 & \text{при } k = 1, \\ \varphi_3 = \varphi_4 = \varphi_5 = \varphi_6 & \text{при } k = 3, 5. \end{cases}$$

Уравнения для релаксации скоростей:

$$\frac{\rho_k^{(g+1)} u_k^{(g+1)} - u_k^{(g)}}{\varphi_k \tau} = \left(A_k + \theta_{k+1, k} i_k^{(g+1)} \right) n_{k+1}^{(g+1)} \left(u_{k+1}^{(g+1)} - u_k^{(g+1)} \right),$$

$$\frac{\rho_{k+1}^{(g+1)} u_{k+1}^{(g+1)} - u_{k+1}^{(g)}}{\varphi_{k+1} \tau} = \left(B_k + \theta_{k+1, k} n_{k+1}^{(g+1)} + \Omega_k n_e \right) i_k^{(g+1)} \left(u_k^{(g+1)} - u_{k+1}^{(g+1)} \right).$$

Уравнения для пересчета энергии:

$$\frac{\rho_k^{n+1} \varepsilon_k^{(g+1)} - \varepsilon_k^{(g)}}{\bar{\varphi} \tau} = \left(A_k + \theta_{k+1, k} i_k^{(g+1)} \right) n_{k+1}^{(g+1)} \left[\varepsilon_{k+1}^{(g+1)} - \varepsilon_k^{(g+1)} + \frac{\left(u_{k+1}^{(g+1)} - u_k^{(g+1)} \right)^2}{2} \right],$$

$$\frac{\rho_{k+1}^{(g+1)} \varepsilon_{k+1}^{(g+1)} - \varepsilon_{k+1}^{(g)}}{\bar{\varphi} \tau} = \left(B_k + \theta_{k+1, k} n_{k+1}^{(g+1)} + \Omega_k n_e \right) i_k^{(g+1)} \left[\varepsilon_k^{(g+1)} - \varepsilon_{k+1}^{(g+1)} + \frac{\left(u_{k+1}^{(g+1)} - u_k^{(g+1)} \right)^2}{2} \right].$$

Как часть этого этапа расчета неупругих взаимодействий решается также следующая система уравнений:

$$\begin{cases} \rho_e \frac{d\varepsilon_e}{dt} = -(\gamma_e \varepsilon_e - B J_e (\gamma_e - 1)) \sum_k S_k \chi_k / \varphi_k - \sum_k Q_{ke}^{inel} - \sum_k \bar{U}_k \bar{u}_k, \\ \rho_k \frac{d\varepsilon_k}{dt} = Q_{ke}^{inel}, \\ \rho_k \frac{d\bar{u}_k}{dt} = \bar{U}_k. \end{cases}$$

Здесь

$$\sum_k S_k \chi_k / \varphi_k = \sum_j \sum_{k=1,3,5} \tilde{S}_{jk} = \sum_{j=2,4,6,k,e} \sum I_{jk} - \sum_{k=1,3,5} \text{Re}_k;$$

$$\text{Re}_k = \Omega_k N_k \chi_k N_e.$$

Таким образом, более подробно эту систему уравнений можно расписать так:

$$\rho_e \frac{d\varepsilon_e}{dt} = -(I_{2e} + I_{4e} + I_{6e}) (\gamma_e \varepsilon_e - B J_e (\gamma_e - 1)) +$$

$$+ \sum_{j=2,4,6} \sum_k I_{jk} \left(\frac{B}{(\gamma_e - 1)} \Delta_{jk} \left(\zeta_{kj} + \zeta_{jk} + \frac{\bar{w}_{kj}^2}{y_{kj}^2} \right) - \gamma_e \varepsilon_e + B J_e (\gamma_e - 1) \right) + \sum_{j=1,3,5} \text{Re}_j (\gamma_e - 1) (\varepsilon_e - B J_e), \quad (2.12)$$

$$\rho_k \frac{d\varepsilon_k}{dt} = \begin{cases} -\frac{B}{(\gamma-1)} \sum_{j=1}^6 \left[\zeta_{kj} (I_{kj} \Delta_{kj} + I_{jk} \Delta_{jk}) + \left(\zeta_{k+1j} - \frac{w_{k+1j}^2}{2y_{k+1j}^2} \right) I_{k+1j} \Delta_{k+1j} \right], & k=1, 3, 5, \\ -\frac{B}{(\gamma-1)} \sum_{j=1}^6 \left[\zeta_{kj} I_{jk} \Delta_{jk} + \frac{w_{kj}^2}{2y_{kj}^2} I_{kj} \Delta_{kj} \right], & k=2, 4, 6, \end{cases} \quad (2.13)$$

$$\rho_k \frac{d\bar{u}_k}{dt} = \frac{B}{(\gamma-1)} \sum_{j=1}^6 \left\{ \frac{\bar{w}_{kj}}{y_{kj}^2} (I_{kj} \Delta_{kj} + I_{jk} \Delta_{jk}) \right\}, \quad (2.14)$$

где $\zeta_{kj} = \frac{2\varepsilon_k}{y_{kj}^2}$, $y_{jk}^2 = (\bar{u}_j - \bar{u}_k)^2 + 2(\varepsilon_j + \varepsilon_k)$, $\bar{w}_{kj} = \bar{u}_j - \bar{u}_k$.

Разностные схемы для решения этой системы уравнений можно строить по-разному. Для каждого из уравнений: изменения импульса (2.14) и внутренней энергии (2.13), возможны два варианта реализации отщепленных уравнений: явный и неявный.

При построении явных схем все правые части в уравнениях для тяжелых потоков берутся с (g) -го слоя по времени, несмотря на это, в уравнении для пересчета энергии электронов ε_e в правой части, очевидно, берется с $(g+1)$ -го слоя.

При построении неявных схем ε_k из числителя соответствующего ζ_{kj} и \bar{u}_k из соответствующего \bar{w}_{kj} в правой части берутся с $(g+1)$ -го слоя (знаменатель – по-прежнему с (g) -го).

Возможна реализация как неявной схемы, так и явной. На данный момент реализована схема типа явные скорости – явные энергии. Одно из преимуществ этой схемы состоит в выполнении в ней такого соотношения:

$$\zeta_{kj} + \zeta_{jk} + \frac{\bar{w}_{kj}^2}{y_{kj}^2} = 1,$$

что автоматически упрощает уравнение энергии электронов.

Из уравнения следует, что возможна ситуация, когда температура электронов в результате такого пересчета станет отрицательной. Достаточное условие неотрицательности температуры электронов:

$$\frac{\Delta_{jk}}{(\gamma_e - 1)} > J.$$

С другой стороны, для того чтобы в результате такого пересчета энергия тяжелых потоков не стала отрицательной, необходимо, чтобы $\frac{2B\Delta_{kj}}{(\gamma-1)} \leq (2(\varepsilon_k + \varepsilon_j) + (\bar{u}_k - \bar{u}_j)^2)$.

На этапе расчета **упругих** взаимодействий выделяется несколько «подэтапов». На первом из них решается система уравнений:

$$\rho_k \frac{du_k}{dt} = \sum_j F_{kj} = \sum_{j \neq k} \frac{\mu_{kj}}{\Phi_k} \rho_k n_j \eta_{kj} (u_j - u_k),$$

$$\rho_k \frac{d\varepsilon_k}{dt} = \sum_{j \neq k} \frac{\mu_{kj}}{\Phi_k} \rho_k n_j \eta_{kj} (u_j - u_k)^2 \xi_j + \frac{2\mu_{kj}}{\Phi_k + \Phi_j} \rho_k n_j \eta_{kj} \left(\varepsilon_j \frac{\Phi_j}{\Phi_k} - \varepsilon_k \right),$$

где $\mu_{kj} = \frac{\Phi_k \Phi_j}{\Phi_k + \Phi_j}$, $\xi_j = \frac{\Phi_j}{\Phi_j + \Phi_k}$.

Этим уравнениям соответствуют неявные разностные схемы:

$$\rho_k \frac{u_k^{(g+1)} - u_k^{(g)}}{\tau} = \sum_{j \neq k} \mu_{kj} n_k n_j \eta_{kj} (u_j^{(g+1)} - u_k^{(g+1)}),$$

$$\rho_k \frac{\varepsilon_k^{(g+1)} - \varepsilon_k^{(g)}}{\tau} = \sum_{j \neq k} \mu_{kj} n_k n_j \eta_{kj} (u_j^{(g+1)} - u_k^{(g+1)})^2 \xi_j + \frac{2\mu_{kj}}{\varphi_k + \varphi_j} \rho_k n_j \eta_{kj} \left(\varepsilon_j^{(g+1)} \frac{\varphi_j}{\varphi_k} - \varepsilon_k^{(g+1)} \right).$$

Далее решается система уравнений:

$$\frac{d\rho_3}{dt} = \delta S_{53},$$

$$\frac{d\rho_5}{dt} = \delta S_{35},$$

$$\frac{du_3}{dt} = \delta S_{53}(u_5 - u_3),$$

$$\frac{d\varepsilon_3}{dt} = \delta S_{53} \left[\varepsilon_5 - \varepsilon_3 + \frac{w_{35}^2}{2} \right].$$

Ее разностная реализация представляется следующим образом:

$$\frac{\rho_3^{(g+1)} - \rho_3^{(g)}}{\tau} = \tilde{\omega} n_5^{(g+1)} \rho_3^{(g)}, \quad (2.15)$$

$$\frac{\rho_5^{(g+1)} - \rho_5^{(g)}}{\tau} = -\tilde{\omega} \rho_5^{(g+1)} n_3^{(g)}, \quad (2.16)$$

$$\rho_3^{(g+1)} \frac{u_3^{(g+1)} - u_3^{(g)}}{\tau} = \tilde{\omega} \rho_3^{(g)} n_5^{(g+1)} (u_5^{(g)} - u_3^{(g+1)}), \quad (2.17)$$

$$\rho_3^{(g+1)} \frac{\varepsilon_3^{(g+1)} - \varepsilon_3^{(g)}}{\tau} = \tilde{\omega} \rho_3^{(g)} n_5^{(g+1)} \left[\varepsilon_5^{(g)} - \varepsilon_3^{(g+1)} + \frac{(u_5^{(g)} - u_3^{(g+1)})^2}{2} \right]. \quad (2.18)$$

И последний шаг – это расчет упругих взаимодействий с электронами:

$$\rho_k \frac{d_k \varepsilon_k}{dt} = Q_{ke}^{elast} = 2\rho_k n_e \eta_{ek} \left(\frac{BT_e}{\varphi_k (\gamma - 1)} - \varepsilon_k \right),$$

$$\rho_e \frac{d_e \varepsilon_e}{dt} = -\sum_k Q_{ke}^{elast}.$$

Разностные схемы очевидны:

$$\rho_k \frac{\varepsilon_k^{(g+1)} - \varepsilon_k^{(g)}}{\tau} = 2n_k n_e \eta_{ek} \left(\varepsilon_e^{(g+1)} - JB - \varepsilon_k^{(g+1)} \varphi_k \right), \quad (2.19)$$

$$\rho_e \frac{\varepsilon_e^{(g+1)} - \varepsilon_e^{(g)}}{\tau} = -\sum_k 2n_k n_e \eta_{ek} \left(\varepsilon_e^{(g+1)} - JB - \varepsilon_k^{(g+1)} \varphi_k \right). \quad (2.20)$$

Разностная схема, по которой рассчитывается газодинамическое движение каждого потока для отщепленной газодинамической системы (т. е. уравнения (1.11), (1.12), (1.13), (1.17) с равными нулю правыми частями), является неявной, балансной и полностью консервативной, если физическая вязкость не учитывается, и консервативной с учетом физической вязкости.

2.3. Алгоритм построения общей сетки

В методике SRG счет газодинамического движения для каждого газа происходит независимо от других на своей пространственной лагранжевой сетке,двигающейся вместе с потоком. Сложность возникает при описании взаимодействия между потоками, потому как на сетке каждого газа необходимо иметь значения величин всех остальных газов.

Для счета релаксационных членов (членов, описывающих взаимодействия потоков) вводится дополнительная сетка, которая есть совокупность отличных друг от друга узлов разностных сеток каждого из газов. Возникает необходимость пересчета величин, характеризующих потоки, с сетки каждого из потоков на эту общую сетку.

В общем случае будет возникать ситуация, когда на одну ячейку сетки какого-либо газа приходится несколько ячеек общей сетки (рис. 2.1). Тогда плотности, энергии, температуры этого газа переносятся непосредственно из этой «родной» ячейки во все соответствующие ячейки общей сетки. При этом массы и внутренняя энергия будут сохраняться:

$$m_i = \rho_i V_i = \rho_i (r_{i+1}^{v+1} - r_i^{v+1}) / (v+1),$$

$$\sum_j m_{i_j} = \sum_j \rho_{i_j} (r_{i_{j+1}}^{v+1} - r_{i_j}^{v+1}) / (v+1) = \rho_i (r_{i+1}^{v+1} - r_i^{v+1}) / (v+1) = m_i,$$

где i – номер ячейки сетки данного газа, i_j – номера соответствующих ячеек общей сетки.

Скорости же в таком случае интерполируются в нужных узлах линейной интерполяцией по двум точкам. В тех ячейках общей сетки, где данный газ не присутствует, все величины этого газа считаются равными 0.

После этапа релаксации плотности, скорости, энергии каждого из потоков переносятся на «родные» сетки. Скорости переносятся непосредственно с узлов общей сетки на совпадающие с ними узлы сетки данного газа, плотность усредняется по объему, энергия же усредняется по массе.

$$\rho_i = \frac{\sum_j \rho_{i_j} V_j}{\sum_j V_j}, \quad \varepsilon_i = \frac{\sum_j \varepsilon_{i_j} \rho_{i_j} V_j}{\sum_j \rho_{i_j} V_j}.$$

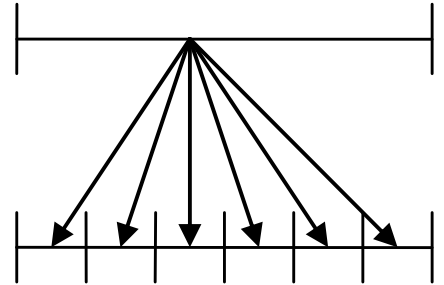


Рис. 2.1. Перенос величин из одной ячейки какого-либо газа в соответствующие ей ячейки общей сетки

3. Численные расчеты

Рассмотрим задачу о бесстолкновительном ламинарном разлете облака плазмы в замагниченном «фоне» в пределе «слабого» взаимодействия. (Эта задача решалась ранее в работе [9] с помощью гибридной модели.)

Хотя эта задача является по сути всего лишь двухпоточковой, она наглядно иллюстрирует адекватность методики SRG и позволяет сравнить результаты с теми, что получены, исходя из других подходов к решению задач такого типа.

Итак, разогревом плазмы за счет взаимодействия пренебрегаем. Рассматриваем разлет сферического облака плазмы, вызванный некоторым локальным энерговыделением, заданным при $0 < r < R_0$, в замагниченную фоновую плазму. Потенциал магнитного поля на начальный момент времени задан в виде:

$$M(0, r_e) = \begin{cases} 0, & r_e < R_0, \\ \frac{(r_e - R_0)^2}{2}, & r_e \geq R_0. \end{cases}$$

Рассматриваются сферическая задача, 2 потока тяжелых частиц, в нашей нумерации это потоки с индексом 1 и 3, и поток электронов.

Начальные данные имеют следующий вид:

$$\begin{array}{|l} \hline 0 \\ \hline R_0 = 0,1 \end{array}$$

$$\rho_1 = 1000; \quad T_1 = 10^{-2};$$

$$u_1 = \frac{r}{R_0} V_0; \quad \chi_1 = 1; \quad \Gamma_1 = 0$$

$$\begin{array}{|l} \hline 0 \\ \hline 2 \end{array}$$

$$\rho_3 = 1; \quad T_3 = 10^{-2};$$

$$u_3 = 0; \quad \chi_3 = 1; \quad \Gamma_3 = 0$$

$$\begin{array}{|l} \hline 0 \\ \hline R_0 = 0,1 \\ \hline 2 \end{array}$$

$$\rho_e = 1001; \quad T_e = 10^{-5};$$

$$u_e = 0$$

$$\rho_e = 1; \quad T_e = 10^{-5};$$

$$u_e = 0$$

Граничные условия для газодинамического движения тяжелых потоков – свободная поверхность на внешних границах и условие равенства нулю скоростей в центре.

Переходя в исходных уравнениях (1)–(8) к безразмерным переменным:

$$t' = \omega_0 t, \quad u' = u/u_0, \quad r' = r/\tilde{R}, \quad H' = H/H_0, \quad n_k = \tilde{n}n',$$

можно убедиться, что решение задачи будет зависеть от параметров

$$\delta = \frac{\omega_0 \tilde{R}}{u_0}, \quad \varphi = \frac{M_k}{M_0} \quad \text{и} \quad M_A = \frac{u_0}{v_A}, \quad \text{где} \quad v_A = H_0 / \sqrt{4\pi \tilde{n} M_0} \quad \text{– альфвеновская скорость.}$$

В данном случае заданы следующие параметры: $V_0 = 5$; $M_A = \infty$; $\varphi = 1$, $\delta = 1$.

В уравнении движения электронное давление не учитывается, для описания изменения магнитного поля используем уравнение вмороженности магнитного поля в сетку электронного газа, т. е. считаем $D = 0$.

В такой постановке данная задача имеет аналитическое решение.

$$r_e(r_{e0}, t) = \begin{cases} R_1 \left(\frac{\tilde{R}^3 + r_{e0}^3}{\tilde{R}^3 + R_1^3} \right)^{1/3}, & r_{e0} < R_1, \\ r_{e0}, & r_{e0} \geq R_1, \end{cases}$$

где $R_1 = V_0 t + R_0$,

$$\tilde{R} = \left(\frac{N}{4/3\pi n_2^0} \right)^{1/3} = \left(\frac{n_1^0 4/3\pi R_0^3}{4/3\pi n_2^0} \right)^{1/3} = \left(\frac{n_1^0}{n_2^0} \right)^{1/3} R_0,$$

$$\mathbf{M}(r_e, t) = \begin{cases} 0, & r < R_e, \\ \frac{\left[\left(r^3 \left(\frac{\tilde{R}^3}{R_1^3} + 1 \right) - \tilde{R}^3 \right)^{1/3} - R_0 \right]^2}{2}, & R_e \leq r \leq R_1, \\ \frac{(r - R_0)^2}{2}, & r > R_1, \end{cases}$$

$$\frac{1}{R_e^3} = \frac{1}{R_1^3} \frac{\tilde{R}^3 + R_1^3}{\tilde{R}^3 + R_0^3}.$$

Значения Γ_k можно найти (в первом порядке малости по параметру δ). Это даст:

$$\Gamma_1^0 = -M(r, t),$$

$$\Gamma_2^0 = M(r, 0) - M(r, t).$$

Результаты численного решения данной задачи сравниваются с аналитическим решением на рис. 3.1, 3.2. Наблюдается удовлетворительное согласие численного и аналитического решений. На рис. 3.1 видно небольшое отклонение, которое, возможно, объясняется тем, что при получении аналитического решения предполагалось, что поток 3 неподвижен, в действительности при данном времени скоростью этого потока уже нельзя пренебречь.

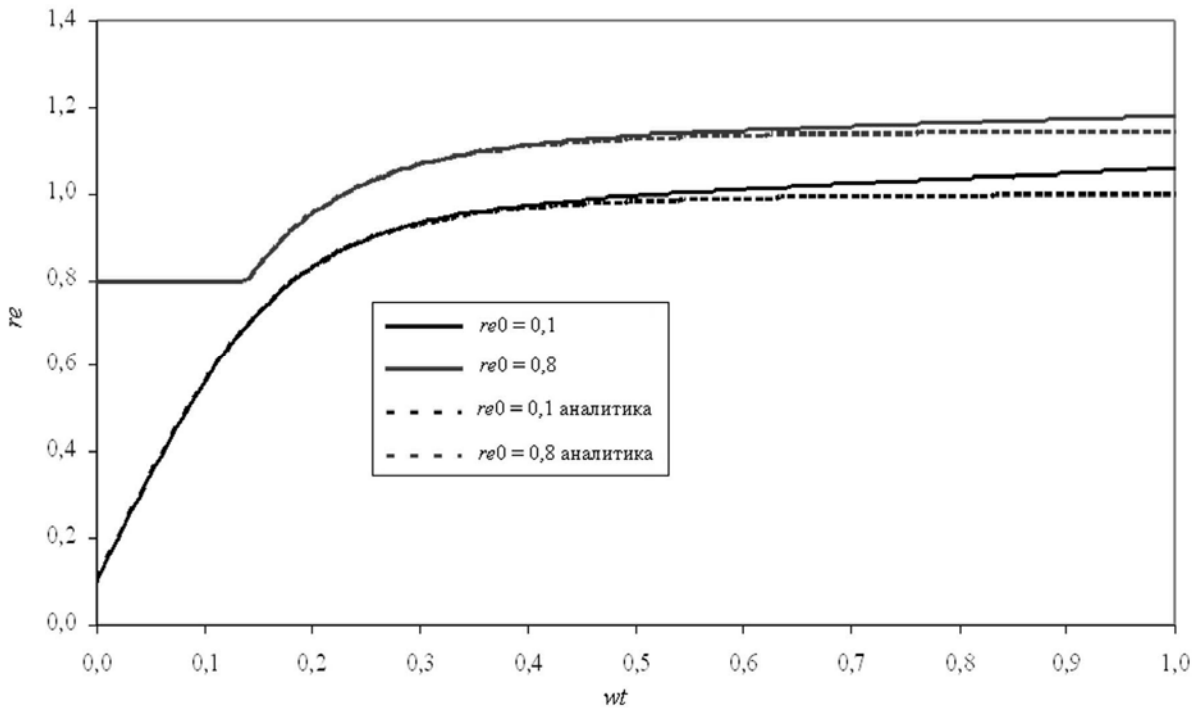


Рис. 3.1. Сравнение траектории движения лагранжевых частиц электронного газа по численному и аналитическому решению. Здесь r_{e0} – начальная координата рассматриваемой частицы (электрона)

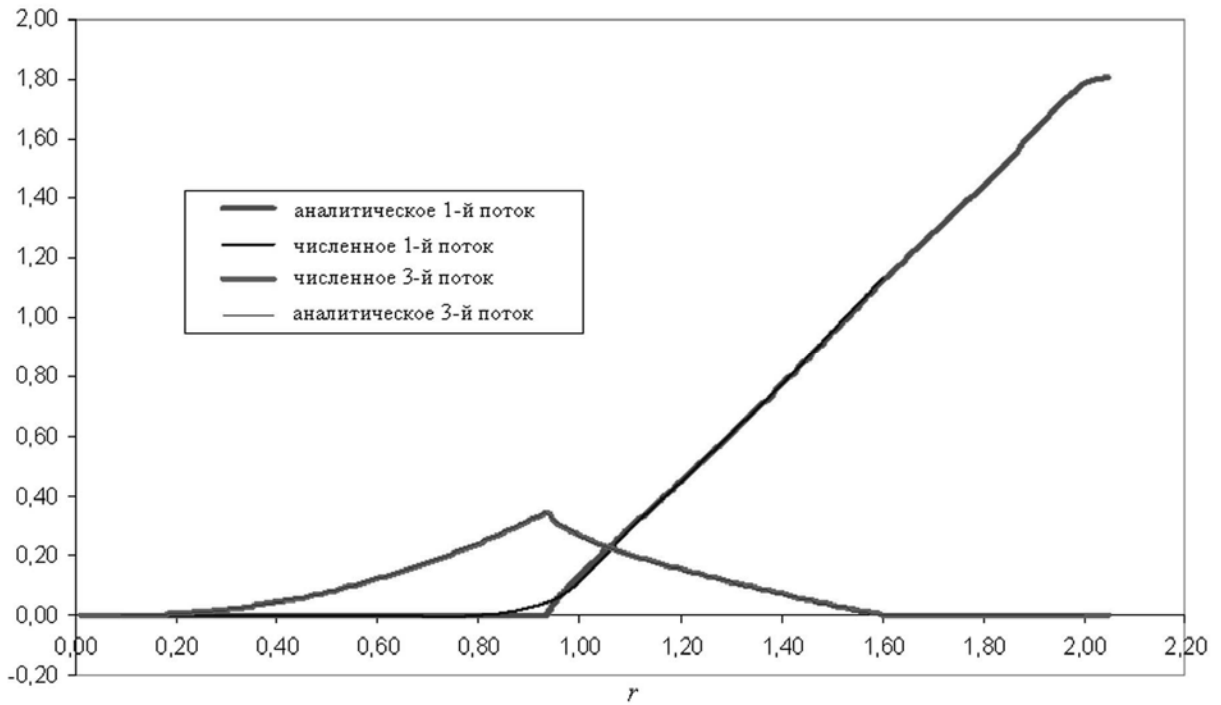


Рис. 3.2. Сравнение углового момента $\Gamma_k = u_{k\phi} r_k$ потоков с аналитическим решением на момент времени 0,3

Была посчитана также аналогичная цилиндрическая задача для сравнения с соответствующим расчетом, проведенным по гибридной модели в работе [9]. На рис. 3.3–3.6 приводятся сравнительные результаты. Видно хорошее соответствие.

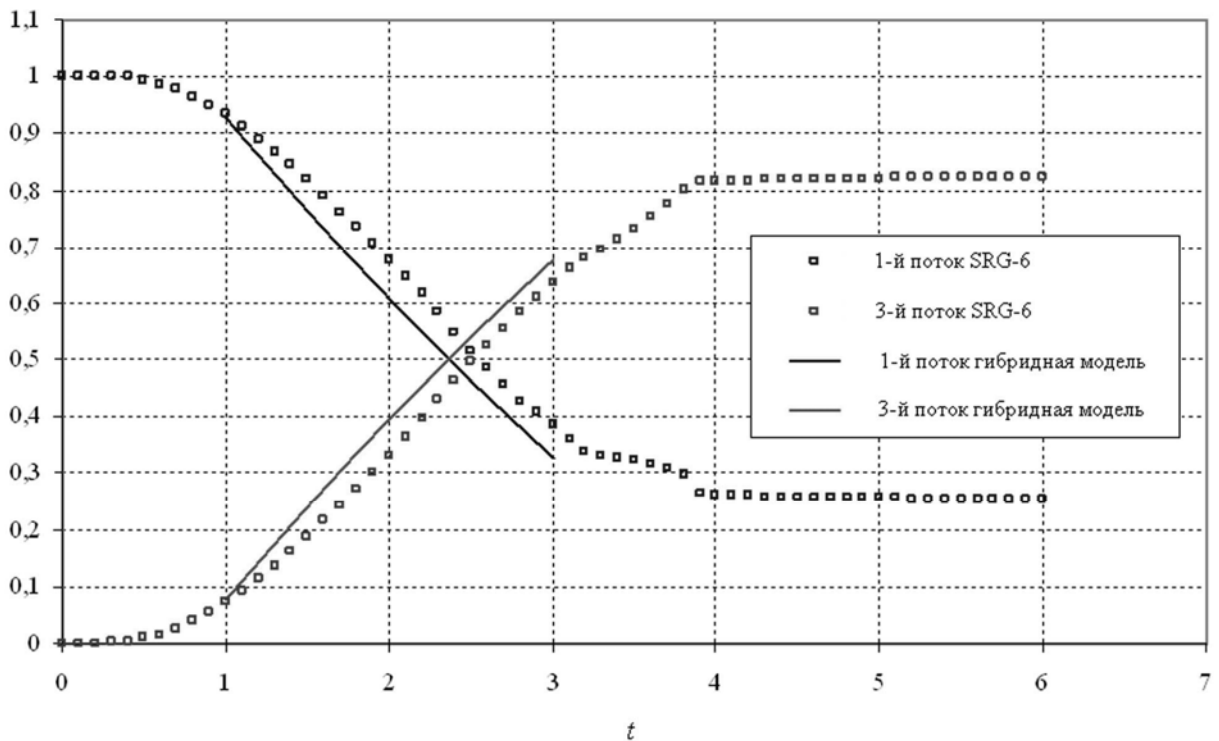


Рис. 3.3. Сравнение полной кинетической энергии потоков (нормированных на начальную энергию облака плазмы) с результатами, полученными по гибридной модели

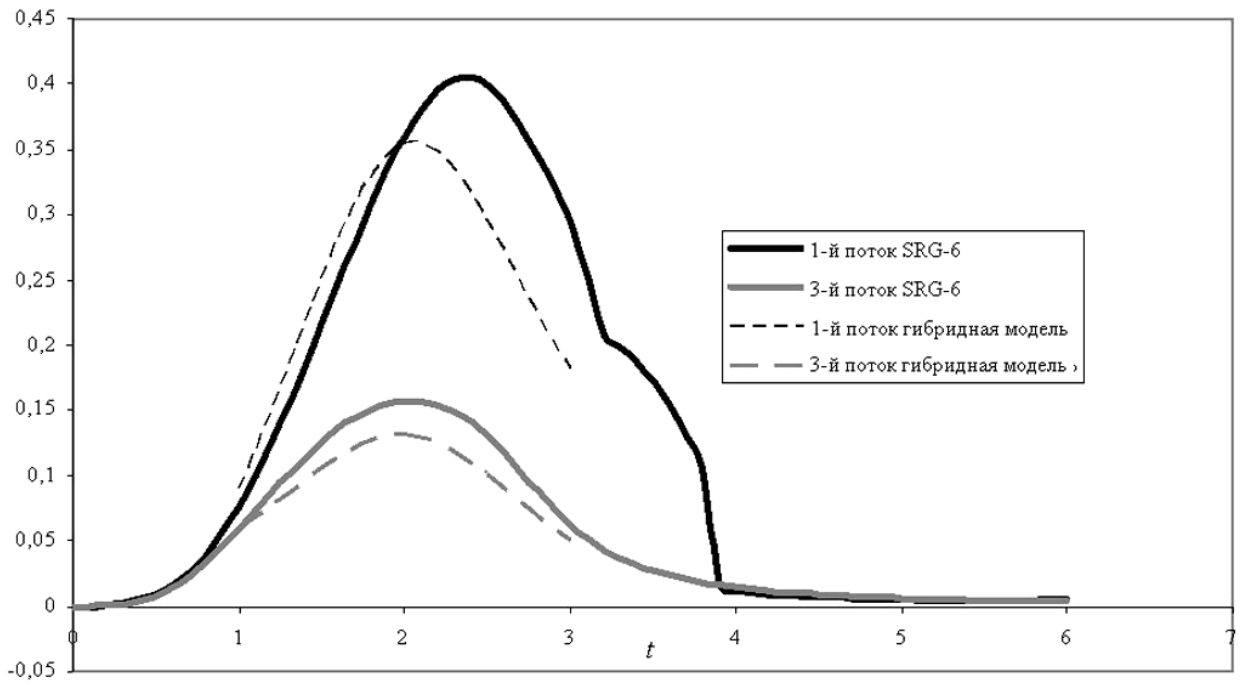


Рис. 3.4. Сравнение азимутальной составляющей кинетической энергии (нормированной на начальную энергию облака плазмы) 1-го и 3-го потоков с результатами, полученными по гибридной модели

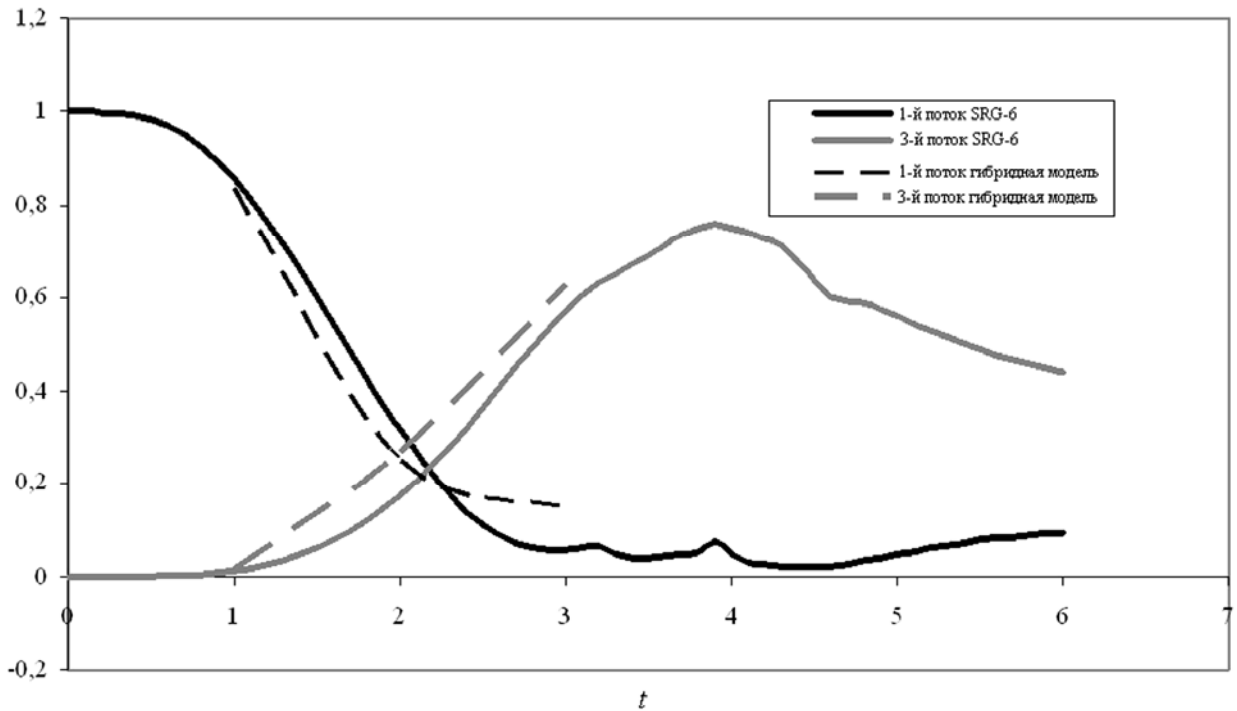


Рис. 3.5. Сравнение радиальной составляющей кинетической энергии потоков (нормированных на начальную энергию облака плазмы) с результатами, полученными по гибридной модели

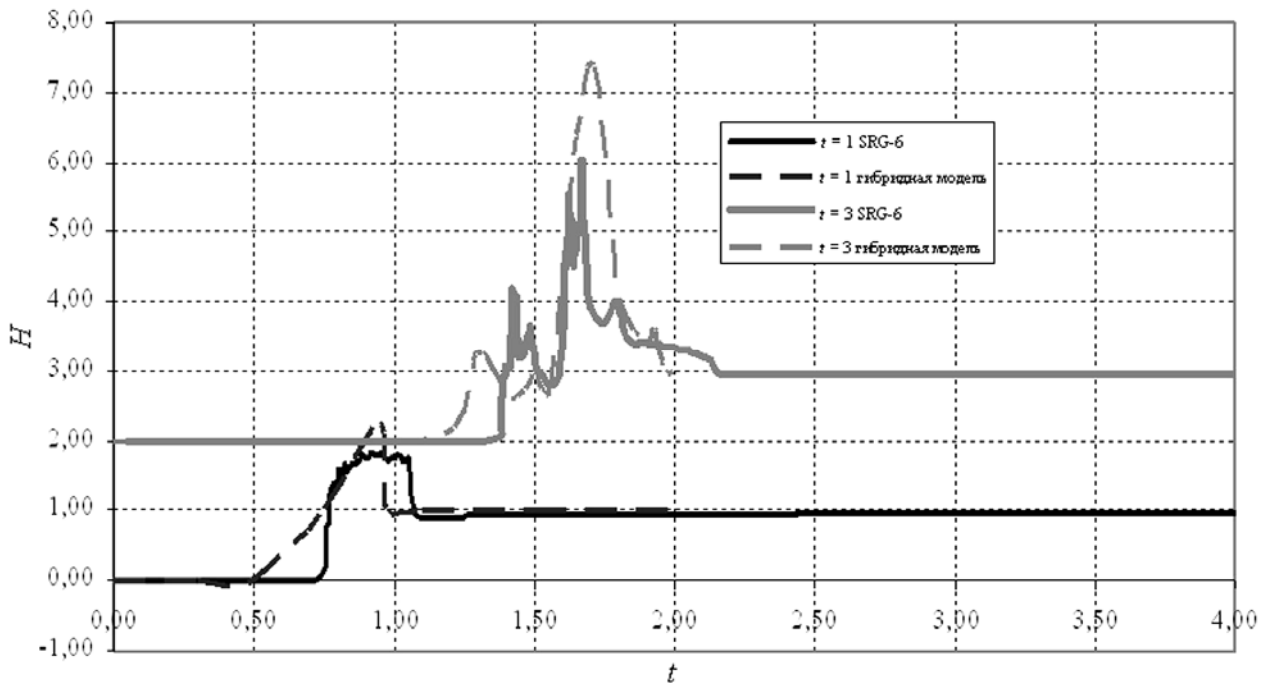


Рис. 3.6. Сравнение профилей напряженности магнитного поля с результатами, полученными по гибридной модели. (Для наглядности профили, соответствующие разным временам, сдвинуты на 2 по оси ординат.) Значения напряженности нормированы на H_0

4. Расчеты операции «Морская звезда»

Американский взрыв «Морская звезда» – ядерный взрыв с энерговыделением $q = 1400$ кт. Был произведен 9 июля 1962 г. в Тихом океане на высоте 400 км над о. Джонстон. В 2006 году появилась статья [8], в которой содержится большое количество экспериментальных данных по операции «Морская звезда». По методике SRG-6 были проведены секторные расчеты этой операции в направлении вверх, вниз и горизонтально поперек линий магнитного поля.

Начальные данные для этих расчетов задавались следующим образом. Считалось, что при $t = 0$ ПВ разлетелись на расстояние $R_0 = 5$ км. Их плотность постоянна по радиусу. Полная масса $M = M_0$, полная энергия E_0 . Принималось, что $M_0 = 10^3$ кг; $E_0 = \frac{1}{6} E_{tot}$, где $E_{tot} = 1,4$ Мт, т. е. $E_0 \sim 10^9$ МДж. Предполагалось, что 90 % массы ПВ составляет масса ионов ПВ (1-й поток) (с учетом закалки) и 10 % – масса нейтральных частиц ПВ (2-й поток). Полагалось, что доля внутренней энергии ПВ составляет 1 % от полной начальной энергии ПВ, а доля кинетической энергии – 99 %. Профиль скорости полагался линейным по радиусу. Скорость границы составляла $v^0 = 1800$ км/с. Характеристики атмосферы задавались в соответствии со справочником [32].

Подробнее постановка расчетов описана в работе [17].

На рис. 4.1 представлены данные о размерах магнитной каверны в вертикальной плоскости XU в различные моменты времени, взятые из работы [8].

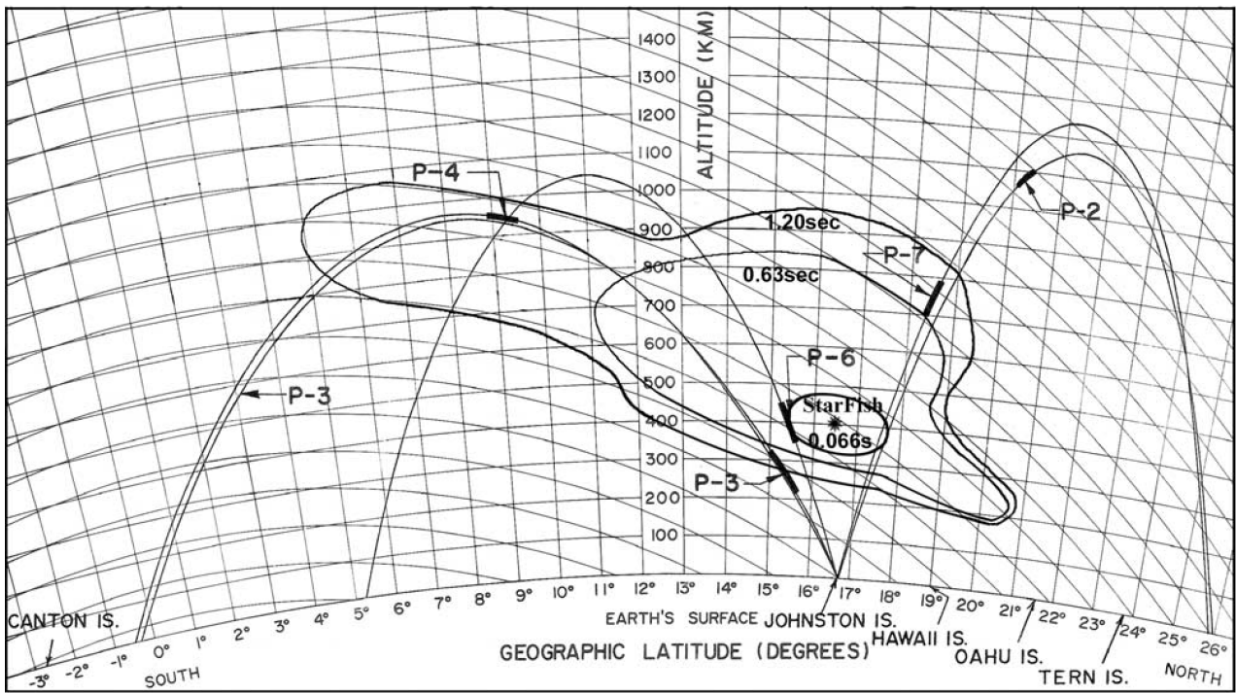


Рис. 4.1. Форма каверны в моменты времени $t = 0,066$ с, $t = 0,63$ с, $t = 1,2$ с.
P-2, P-3, P-4, P-6, P-7 – ракеты, запущенные для измерения параметров ОВ

На рис. 4.2 представлены данные о напряженности поля, измеренной датчиком на ракете P-2 (положение ракеты см. рис. 4.1).

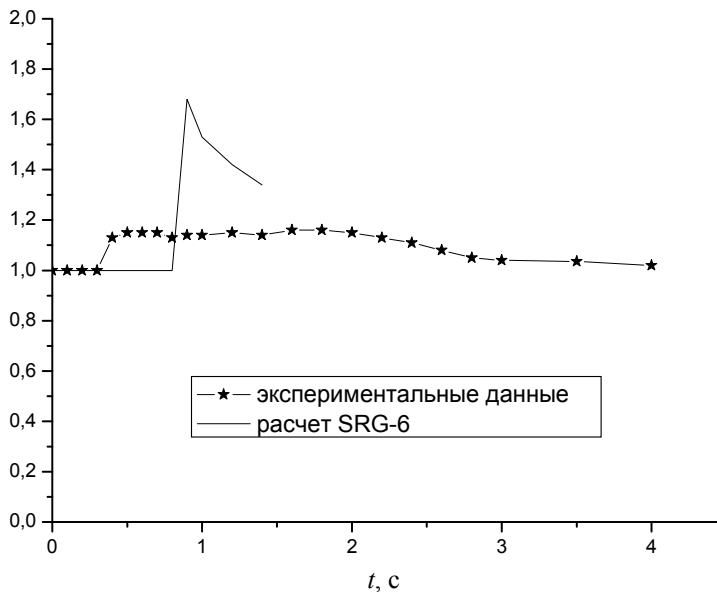


Рис. 4.2. Напряженность магнитного поля, измеренная датчиком на ракете P-2.
Напряженность нормирована на H_0

На рисунке 4.3 представлены графики зависимости от времени положения верхней границы каверны, полученные в расчетах по методике SRG-6 в сравнении с данными работы [8]. На этом рисунке пунктирная кривая соответствует расчету с однократной ионизацией заряженных частиц, а сплошная кривая – с приближенным учетом двукратной ионизации. Видно, что расчет с двукратной ионизацией значи-

тельно ближе к результатам работы [8], чем расчет с однократной ионизацией. В дальнейшем предполагается проведение расчетов в более строгим учетом многократной ионизации.

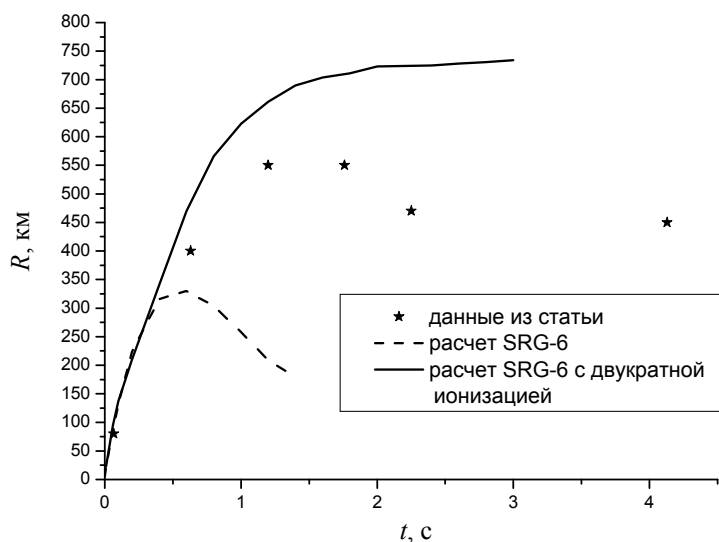


Рис. 4.3. Зависимость от времени положения верхней границы магнитной каверны относительно точки взрыва

Заключение

Основные результаты данной работы состоят в следующем:

- разработана физическая модель для описания течений разреженной плазмы в магнитном поле, основанная на многопоточковом МГД-приближении;
- один из вариантов данной модели («шестипоточковый») реализован в виде одномерной лагранжевой методике SRG-6;
 - на примере цилиндрической задачи о разлете облака плазмы проведено сравнение результатов, полученных по этой методике, и соответствующих результатов, полученных с помощью более строгой (гибридной) модели; получено вполне удовлетворительное согласие этих результатов;
 - проведены секторные расчеты динамики плазмы и магнитного поля для опыта «Морская звезда», получено удовлетворительное (с точностью до коэффициента $\sim 1,5$) согласие с результатами измерений в опыте.

Приведенные в данной работе результаты свидетельствуют, что методика SRG-6 (физическая модель+численный метод) может быть полезна в расчетах общих физических зависимостей, характеризующих развитие космических ЯВ.

В дальнейшем предполагается проведение таких расчетов. Предполагается также проведение расчетов лазерных экспериментов по исследованию взаимодействия потоков разреженной плазмы с магнитным полем.

Список литературы

1. Ядерные испытания СССР. Т. 2. С. 51–73. Begell-Atom, 1998.
2. Hoerlin H. US high-altitude test experiments. LASL, LA-6405, 1976.
3. Операция «Морская звезда». Сборник статей. М.: Атомиздат, 1964.
4. Хесс В. Радиационный пояс и магнитосфера. М.: Атомиздат, 1972.
5. Berg R. A. et al. «A Starfish Happening» Lockheed Missiles and Spase Co. March 1967, Rep. DASA – 1925, AD-955681.

6. Гаврилов Б. Г., Гайнуллин К. Г., Жмайло В. А., Зецер Ю. И., Селин В. И. Геомагнитные эффекты от расширяющегося плазменного образования высотного ЯВ // ФГВ. 2004. Т. 40, № 6. С. 31–41.
7. Bomke H. A., Balton I. A., Grote H. N., Harris A. K. Near and Distant Observation of the 1962 Johnston Island High-Altitude Nuclear Tests // J. of Geoph. Res. 1964. Vol. 69, № 15. P. 3125–3140.
8. Pulmer Dyal. Particle and field measurements of the Starfish diamagnetic cavity // J. of Geoph. Res. 2006. Vol. 111. P. A12211.
9. Голубев А. И., Соловьев А. А., Терехин В. А. О бесстолкновительном разлете ионизированного облака в однородную замагниченную плазму // ПМТФ. 1978, № 5. С. 33–43.
10. Башурин В. П., Голубев А. И., Терехин В. А. О бесстолкновительном торможении ионизированного облака, разлетающегося в однородную замагниченную плазму // ПМТФ. 1983, № 5. С. 10–17.
11. Антоненко Э. М., Башурин В. П., Долголева Г. В., Жмайло В. А. Метод расчета «двухпоточковых» вязких течений неравновесной плазмы в магнитном поле // ВАНТ. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1995, № 1–2. С. 48–53.
12. Губков Е. В., Жмайло В. А., Самигулин М. С. Образование и движение плазмы при сильных взрывах в магнитосфере (операция «Морская звезда») // Тез. докладов научной конференции «II Забабанские научные чтения». Снежинск, 1991.
13. Башурин В. П., Богуненко Ю. Д., Гайнулин К. Г. и др. Физические эффекты ЯВ в атмосфере // Высокие плотности энергии. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 1997.
14. Жмайло В. А. Физические эффекты космических ЯВ // Теоретики ВНИИЭФ. Прошлое и настоящее. Саров, 2003. С. 56–60.
15. Холодов Я. А., Холодов А. С., Ступицкий Е. Л., Репин А. Ю. Численное исследование поведения плазменного облака в верхней ионосфере // Математическое моделирование. 2005. Т. 17, № 11. С. 43–62.
16. Ступицкий А. Е., Холодов А. С. Моделирование динамики плазменного сгустка высокой удельной энергии в верхней атмосфере // Геомагнетизм и аэрономия. 2012. Т. 52, № 4. С. 435–456.
17. Жмайло В. А., Анисина И. М., Будников В. Г. и др. Физические эффекты ядерного взрыва в операции «Морская звезда» // Труды РФЯЦ-ВНИИЭФ. 2008. Т. 13. С. 16–37.
18. Соболев И. В. Многомерные методики решения задач многопоточковой газодинамики в переменных Эйлера на неструктурированных сетках // XIII Международный семинар «Супервычисления и математическое моделирование». Саров, 2011.
19. Соколов С. С., Панов А. И., Воропинов А. А., Новиков И. Г. и др. Методика ТИМ расчета трехмерных задач механики сплошных сред на неструктурированных многогранных лагранжевых сетках // ВАНТ. Сер. Матем. моделирование физических процессов. 2005. Вып. 3. С. 37–52.
20. Бессараб А. В., Бондаренко Г. А., Долголева Г. В., Жмайло В. А., Кунин А. В., Никитин И. Н., Новикова Е. А., Стаценко В. П., Сунгатуллин Р. Р. Исследование механизмов диффузии магнитного поля в разлетающуюся лазерную плазму // Физика плазмы. 2007. Т. 33, № 10. С. 891–904.
21. Куликовский А. Г., Любимов Г. А. Магнитная гидродинамика. М.: Логос, 2005.
22. Грэд Г. О кинетической теории разреженных газов // Механика. 1952. Вып. 4, 5.
23. Башурин В. П., Долголева Г. В., Кочубей Ю. К., Терехин В. А. Кинетическое описание сильного взрыва в разреженном газе // ПМТФ. 1986, № 2. С. 80–85.
24. Бахрах С. М., Губков Е. В., Жмайло В. А., Терехин В. А. Разлет плазменного облака в однородном магнитном поле // ПМТФ. 1974, № 4. С. 146–150.
25. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Квантовая механика. М.: Наука, 1974.
26. Смирнов Б. М. Асимптотические методы в теории атомных столкновений. М.: Атомиздат, 1973.
27. Гольдманский В. М., Никитин Е. Е., Смирнов Б. М. Теория столкновений атомных частиц. М.: Наука, 1981.
28. Сена Л. А. // ЖЭТФ. 1939. Т. 9. С. 1320.
29. Фирсов В. П. // Там же. 1959. Т. 36. С. 1517–1520.
30. Fleschmann H. H., Dehmel R. C., Lee S. K. Direct-Transition Features in Stripping Collisions of Heavy Neutral Atoms and Ions // Phys. Rev. A. 1972. Vol. 5, № 4. P. 1784–1798.
31. Вайнштейн Л. А., Собельман И. И., Юлов Е. А. Возбуждение атомов и уширение спектральных линий. М.: Наука, 1979.
32. Околосземное космическое пространство. Справочник. Ред. Ф. С. Джонсон. М.: Мир, 1966.

СТАЦИОНАРНЫЕ СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ ДИРАКОВСКИХ ЧАСТИЦ В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ ШВАРЦШИЛЬДА

М. А. Вронский, М. В. Горбатенко, Н. С. Колесников,
В. П. Незнамов¹, Е. Ю. Попов, И. И. Сафронов

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Для гравитационного поля Шварцшильда с использованием самосопряженного гамильтониана с плоским скалярным произведением при любых значениях гравитационной константы связи впервые обоснованы и получены в численных расчетах стационарные связанные состояния элементарных частиц со спином $1/2$, не распадающиеся со временем. Для получения дискретного энергетического спектра введено граничное условие, при котором компоненты вектора плотности тока рассматриваемых дираковских частиц равны нулю вблизи «горизонта событий». При малых значениях константы связи энергетический спектр близок к водородоподобному. По результатам работы можно сделать предположение о существовании нового типа коллапсаров, для которых отсутствует механизм излучения по Хокингу. С точки зрения космологии неизлучающие реликтовые коллапсары нового типа при малых значениях гравитационной константы связи $\alpha \ll 1$ могут проявлять себя лишь через гравитацию и, таким образом, являются хорошими кандидатами для носителей «темной материи».

Ключевые слова: уравнение Дирака, гравитационное поле Шварцшильда, стационарные связанные состояния, самосопряженные гамильтонианы, энергетический спектр.

Введение

В настоящее время для сферически- и аксиально-симметричных электрически заряженных и незаряженных коллапсаров с точечной массой известны четыре основных решения общей теории относительности (ОТО). Это – решение Шварцшильда [1], решение Райсснера – Нордстрёма [2], решение Керра [3], решение Керра – Ньюмена [4].

Классическое решение Шварцшильда характеризуется точечным сферически-симметричным источником гравитационного поля массой M и радиусом «горизонта событий» (гравитационным радиусом)

$$r_0 = \frac{2GM}{c^2}. \quad (1)$$

В формуле (1) G – гравитационная постоянная, c – скорость света. В классическом случае частица по часам удаленного наблюдателя достигает «горизонта событий» за бесконечное время.

Для частицы массой m безразмерная гравитационная константа связи равна

$$\alpha = \frac{GMm}{\hbar c} = \frac{Mm}{m_p^2} = \frac{r_0}{2l_c}. \quad (2)$$

В формуле (2) \hbar – постоянная Планка, $m_p = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 2 \cdot 10^{-5}$ г – планковская масса, $l_c = \frac{\hbar}{mc}$ – комптоновская длина волны.

В отличие от констант взаимодействия в Стандартной модели физики элементарных частиц в гравитационном случае константа связи α может достигать очень больших значений. Для электрона величине $\alpha \approx 1$ соответствует источник гравитации с массой $M = 0,5 \cdot 10^{15}$ кг. Тогда, например, гравитационное взаимодействие электрона с источником $M = M_\odot = 2 \cdot 10^{30}$ кг определяется величиной $\alpha \approx 4 \cdot 10^{15}$.

¹ E-mail: neznamov@vniief.ru

В настоящее время в центрах галактик известны коллапсары с массой, достигающей миллиардов солнечных масс. В этом случае электрон будет гравитационно взаимодействовать с такими объектами с величиной $\alpha \approx 10^{25}$.

В решении Райсснера–Нордстрёма точечный сферический симметричный источник Шварцшильда обладает электрическим зарядом Q . Решение Керра соответствует вращающемуся источнику Шварцшильда с угловым моментом $\mathbf{J} = M\mathbf{c}\bar{a}$. В решении Керра–Ньюмена вращающийся источник Керра обладает электрическим зарядом Q .

В отличие от решения Шварцшильда для решений Райсснера–Нордстрёма, Керра и Керра–Ньюмена характерно существование двух «горизонтов событий»: внешнего и внутреннего. По-прежнему классическая частица может достичь внешнего «горизонта событий» лишь за бесконечное время ($t \rightarrow \infty$).

Кроме перечисленных выше решений ОТО существуют метрики, полученные координатными преобразованиями основных метрик и допускающие пересечение классическими частицами «горизонтов событий» за конечное время.

Для поля Шварцшильда можно отметить следующие решения: метрика Эддингтона–Финкельштейна [5, 6], метрика Пенлеви–Гуллстранда [7], метрика Леметра–Финкельштейна [6], метрика Крускала [8].

Для поля Керра отметим решение Дорана [9].

Несмотря на явную электромагнитную аналогию в атомной физике, связанные состояния дираковских частиц в полях коллапсаров исследовались сравнительно мало. Для гравитационного случая сложилось убеждение, что связанные состояния частиц имеют комплексные энергии. В этом случае эти состояния экспоненциально распадаются со временем. Существование резонансных состояний в поле Шварцшильда для массивных скалярных частиц с использованием уравнения Клейна–Гордона обсуждалось в работах [10–13]. Аналогичная проблема для дираковских массивных частиц обсуждалась в работах [14–18]. В этих работах, в частности, при $\alpha \ll 1$ непосредственным решением уравнения Дирака в слабом поле Шварцшильда для действительной части энергии получен водородоподобный спектр с релятивистскими поправками. В работе [19] авторы рассмотрели проблему связанных состояний в поле Шварцшильда, используя метрику Пенлеви–Гуллстранда. В работе получены энергетические спектры с комплексными значениями энергии для величин $\alpha \ll 1$, а также

для значений $\alpha \sim 1$. При $\alpha \ll 1$ для действительной части энергии также получен водородоподобный спектр с другими, чем в работе [16], релятивистическими поправками.

В работах [20–22] с помощью методов псевдоэрмитовой квантовой механики для произвольных гравитационных полей, в том числе зависящих от времени, разработан метод получения самосопряженных дираковских гамильтонианов с плоским скалярным произведением волновых функций.

Из одночастичной квантовой механики следует, что при существовании эрмитовости гамильтониана, при наличии квадратично интегрируемых волновых функций и при установлении соответствующих граничных условий самосопряженные гамильтонианы, не зависящие от времени, должны обеспечивать существование стационарных связанных состояний частиц с вещественным энергетическим спектром. Данная работа посвящена исследованию таких состояний дираковских частиц в поле Шварцшильда.

1. Анализ возможности существования связанных состояний частиц со спином 1/2 в центрально симметричном гравитационном поле Шварцшильда

Ниже будем использовать систему единиц $\hbar = c = 1$, сигнатуру

$$\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}[1, -1, -1, -1] \quad (3)$$

и обозначения γ^α , γ^α – соответственно для мировых и локальных матриц Дирака.

Первоначально приведем для метрики Шварцшильда стационарный самосопряженный дираковский гамильтониан, определенный в работе [22].

Метрика Шварцшильда

$$ds^2 = f_s dt^2 - \frac{dr^2}{f_s} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (4)$$

$$f_s = 1 - \frac{r_0}{r};$$

В (4) мы подразумеваем действительные значения $f_s > 0$.

Самосопряженный гамильтониан H_η

$$H_\eta = \sqrt{f_s} m \gamma^0 - i \sqrt{f_s} \gamma^0 \left\{ \gamma^1 \sqrt{f_s} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) + \gamma^2 \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \text{ctg} \theta \right) + \gamma^3 \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\} - \frac{i}{2} \gamma^0 \gamma^1 \frac{\partial f_s}{\partial r}. \quad (5)$$

1.1. Разделение переменных

Уравнение Дирака со стационарным гамильтонианом (5) допускает разделение переменных, если биспинор $\psi_\eta(\mathbf{r}, t) = \psi_\eta(r, \theta, \varphi)e^{-iEt}$ определить в виде

$$\psi_\eta(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} F(r) & \xi(\theta) \\ -iG(r) & \sigma^3 \xi(\theta) \end{pmatrix} e^{im_\varphi \varphi} \quad (6)$$

и использовать следующее уравнение (см., например, [23]):

$$\left[-\sigma^2 \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \text{ctg} \theta \right) + i\sigma^1 m_\varphi \frac{1}{\sin \theta} \right] \xi(\theta) = i\kappa \xi(\theta) \quad (7)$$

В равенствах (6), (7): $\xi(\theta)$ – сферические гармоники для спина 1/2, σ^i – двумерные матрицы Паули, m_φ – магнитное квантовое число, κ – квантовое число уравнения Дирака:

$$\kappa = \pm 1, \pm 2, \dots = \begin{cases} -(l+1), & j = l+1/2 \\ l, & j = l-1/2 \end{cases} \quad (8)$$

В (8) j, l – квантовые числа полного и орбитального момента дираковской частицы, соответственно.

$\xi(\theta)$ можно представить в виде [24]:

$$\begin{aligned} \xi(\theta) &= \begin{pmatrix} -_{1/2} Y_{jm_\varphi}(\theta) \\ _{1/2} Y_{jm_\varphi}(\theta) \end{pmatrix} = \\ &= (-1)^{m_\varphi+1/2} \sqrt{\frac{1}{4\pi} \frac{(j-m_\varphi)!}{(j+m_\varphi)!}} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} (\kappa - m_\varphi + 1/2) P_l^{m_\varphi-1/2}(\theta) \\ P_l^{m_\varphi+1/2}(\theta) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (9)$$

В (9) $P_l^{m_\varphi \pm 1/2}(\theta)$ – присоединенные полиномы Лежандра.

В результате разделения переменных получаем уравнения для вещественных радиальных функций $F(r), G(r)$. Далее эти уравнения будем записывать в безразмерных переменных

$$\varepsilon = \frac{E}{m}, \quad \rho = \frac{r}{l_c}, \quad \frac{r_0}{l_c} = 2\alpha.$$

1.2. Уравнения и асимптотика для радиальных волновых функций

Система уравнений для вещественных радиальных функций $F(\rho), G(\rho)$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{2\alpha}{\rho} \right) \frac{dF}{d\rho} + \left(\frac{1+\kappa \sqrt{1-\frac{2\alpha}{\rho}}}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right) F - \left(\varepsilon + \sqrt{1-\frac{2\alpha}{\rho}} \right) G &= 0, \\ \left(1 - \frac{2\alpha}{\rho} \right) \frac{dG}{d\rho} + \left(\frac{1-\kappa \sqrt{1-\frac{2\alpha}{\rho}}}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right) G + \left(\varepsilon - \sqrt{1-\frac{2\alpha}{\rho}} \right) F &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Областью определения переменной ρ для функций $F(\rho), G(\rho)$ является интервал $(2\alpha, \infty)$ в соответствии с метрикой (4) и с присутствием в уравнениях (10) выражения $\sqrt{1-\frac{2\alpha}{\rho}}$. Уравнения (10) показывают, что, как и в классическом случае, квантовая механика запрещает присутствие дираковских частиц под «горизонтом событий» $r < r_0$, т. е. $\rho < 2\alpha$.

Рассмотрим асимптотику решений системы (10). При $\rho \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} F &= C_1 e^{-\rho \sqrt{1-\varepsilon^2}} + C_2 e^{\rho \sqrt{1-\varepsilon^2}}, \\ G &= \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}} \left(-C_1 e^{-\rho \sqrt{1-\varepsilon^2}} + C_2 e^{\rho \sqrt{1-\varepsilon^2}} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Для обеспечения финитного движения дираковских частиц необходимо использовать лишь экспоненциально убывающие решения (11), т. е. в этом случае $C_2 = 0$.

При $\rho \rightarrow 2\alpha$ ($r \rightarrow r_0$)

$$\begin{aligned} F &= \frac{A}{\sqrt{\rho-2\alpha}} \sin(2\alpha\varepsilon \ln(\rho-2\alpha) + \varphi), \\ G &= \frac{A}{\sqrt{\rho-2\alpha}} \cos(2\alpha\varepsilon \ln(\rho-2\alpha) + \varphi), \end{aligned} \quad (12)$$

где A и φ – постоянные величины.

Осциллирующие функции F и G в (12) плохо определены на «горизонте событий» и расходятся при $\rho \rightarrow 2\alpha$. Для обеспечения квадратичной интегрируемости рассматриваемых функций необходимо сужение их области определения до интервала $[\rho_{\min}, \infty)$, где $\rho_{\min} > 2\alpha$.

Гамильтониан (5) является эрмитовым для всей области определения ρ . Это можно показать, используя общее условие эрмитовости дираковских гамильтонианов во внешних гравитационных полях, доказанное в работе [20].

$$\oint ds_k \left(\sqrt{-g} j^k \right) = 0. \quad (13)$$

Для сферически-симметричного поля Шварцшильда условие (13) сводится к

$$4\pi\rho^2 j^1(\rho \rightarrow \infty) + 4\pi\rho^2 j^1(\rho \rightarrow 2\alpha) = 0. \quad (14)$$

По определению радиальная плотность тока дираковских частиц равна

$$j^1 = \Psi^+ \gamma^0 \gamma^1 \Psi. \quad (15)$$

Для поля Шварцшильда и тетрад в калибровке Швингера [22]

$$\gamma^0 = f_s^{-1/2} \gamma^0, \quad \gamma^1 = f_s^{1/2} \gamma^1, \quad \gamma^2 = \frac{1}{r} \gamma^2, \quad \gamma^3 = \frac{1}{r \sin \theta} \gamma^3.$$

После перехода в η -представление [20,21,22], в котором представлен гамильтониан (5), получаем

$$j^1 = \Psi_\eta^+ f_s \gamma^0 \gamma^1 \Psi_\eta, \quad (17)$$

где $\Psi = \eta^{-1} \Psi_\eta$, $\eta^{-1} = f_s^{1/4}$.

Далее используем функции (6) в виде

$$\Psi_\eta(\rho, \theta, \varphi) = \frac{1}{\rho} \frac{1}{\sqrt{f_s}} \begin{pmatrix} f(\rho) & \xi(\theta) \\ -ig(\rho) & \sigma^3 \xi(\theta) \end{pmatrix} e^{im_\varphi \varphi}. \quad (18)$$

В результате радиальная плотность тока равна

$$j^1 = -\frac{2}{\rho^2} f(\rho) g(\rho) \left[\xi^+(\theta) \sigma^2 \xi(\theta) \right]. \quad (19)$$

С учетом явного вида сферических гармоник (9)

$$\xi^+(\theta) \sigma^2 \xi(\theta) = 0, \quad (20)$$

что доказывает эрмитовость гамильтониана (5).

Таким образом, при введении физически разумного граничного условия вблизи «горизонта событий» ($\rho = \rho_{\min}$) система уравнений (10) будет обладать стационарным вещественным энергетическим спектром связанных состояний частиц со спином 1/2.

2. Определение стационарных связанных состояний дираковских частиц в поле Шварцшильда

2.1. Слабое гравитационное поле

В этом случае гравитационный радиус r_0 много меньше комптоновской длины волны l_c ($r_0 \ll l_c$).

Учитывая, что расстояния $r \ll l_c$ не могут значимо влиять в квантовой механике на энергетический спектр уравнений (10), будем считать, что величинами $\frac{2\alpha}{\rho}$ можно пренебречь по сравнению с единицей во всем интервале изменения ρ . Тогда уравнения (10) принимают вид

$$\frac{\partial F}{\partial \rho} + \frac{1+\kappa}{\rho} F - (\varepsilon+1)G = 0, \quad (21)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \rho} + \frac{1-\kappa}{\rho} G + \left(\varepsilon - 1 + \frac{\alpha}{\rho} \right) F = 0. \quad (16)$$

В слабых полях значение ε близко к единице и слагаемым $\frac{\alpha}{\rho} F$ во втором уравнении системы (21)

пренебрегать нельзя. Решение системы (21) близко к решению системы дираковских уравнений для кулоновского потенциала

$$U(\rho) = \frac{\alpha_{em}}{\rho}, \quad (22)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \rho} + \frac{1+\kappa}{\rho} F - \left(\varepsilon + 1 + \frac{\alpha_{em}}{\rho} \right) G = 0, \quad (23)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \rho} + \frac{1-\kappa}{\rho} G + \left(\varepsilon - 1 + \frac{\alpha_{em}}{\rho} \right) F = 0.$$

В выражениях (22), (23) α_{em} – электромагнитная постоянная тонкой структуры.

Следовательно, энергетический спектр, определяемый уравнениями (21), близок к спектру дираковского уравнения для водородоподобных атомов с заменой α_{em} на α и может быть записан в виде.

$$E_n \approx m \left(1 - \frac{\alpha^2}{2n^2} \right). \quad (24)$$

Полученный результат в случае отсутствия релятивистских поправок совпадает с результатами, полученными в [14–18].

Естественно, водородоподобный спектр (24) можно получить также, переходя в нерелятивистском приближении от уравнения Дирака с гамильтонианом (5) к соответствующему уравнению Шредингера.

2.2. Граничное условие вблизи «горизонта событий»

Для численного определения спектра связанных состояний в системе (10) необходимо задать граничное условие при $\rho \rightarrow 2\alpha$ ($r \rightarrow r_0$). Требование обращения волновых функций вблизи горизонта в нуль невыполнимо из-за вида функций (12).

Обратимся снова к виду и значениям компонент плотности тока дираковских частиц при $\rho \rightarrow 2\alpha$ ($r \rightarrow r_0$).

С учетом (9), (16)–(18)

$$j^r \equiv j^1 = -\frac{2}{\rho^2} f(\rho)g(\rho) \left[\xi^+(\theta) \sigma^2 \xi(\theta) \right] = 0, \quad (25)$$

$$j^\theta \equiv j^2 = \frac{2}{\rho^3 \sqrt{f_s}} f(\rho)g(\rho) \left[\xi^+(\theta) \sigma^1 \xi(\theta) \right] \neq 0, \quad (26)$$

$$j^\varphi \equiv j^3 = -\frac{i}{\rho^3 \sin \theta} \frac{1}{\sqrt{f_s}} f(\rho)g(\rho) \left[\xi^+(\theta) (\sigma^3 \sigma^3 - \sigma^3 \sigma^3) \xi(\theta) \right] = 0. \quad (27)$$

При равенстве нулю компонент j^r и j^φ , θ – компонента тока неограниченно растет при $\rho \rightarrow 2\alpha$.

Отсюда естественным граничным условием вблизи «горизонта событий» является ограничение θ -компоненты дираковского тока при $\rho = \rho_{\min}$. С учетом вида функций (6), (9), (12), (18) простейшим ограничением является условие

$$f(\rho_{\min})g(\rho_{\min}) = 0. \quad (28)$$

С учетом (18), (12) условие (28) преобразуется к виду

$$\sin 2(2\alpha \varepsilon \ln(\rho_{\min} - 2\alpha) + \varphi) = 0. \quad (29)$$

$$2\alpha \varepsilon \ln(\rho_{\min} - 2\alpha) + \varphi = \frac{\pi}{2} N, \quad N = \pm 1, 3, 5 \dots \quad (30)$$

Четные значения N , при которых также удовлетворяется условие (29), в численных расчетах при определении дискретных уровней энергии не используются из-за ряда физических соображений, изложенных ниже в п. 2.3.

Условие (30) определяет вещественный энергетический спектр уравнений (10) при их численном решении.

2.3. Методы и результаты численного решения системы дираковских уравнений для радиальных волновых функций в поле Шварцшильда

2.3.1. Численные методы определения собственных значений и собственных функций уравнения Дирака в поле Шварцшильда

Для функций $f(\rho) = \sqrt{\rho(\rho - 2\alpha)} F(\rho)$, $g(\rho) = \sqrt{\rho(\rho - 2\alpha)} G(\rho)$ (см. (6), (18)) система уравнений (10) записывается в виде

$$\begin{cases} (1 - 2\alpha/\rho) \frac{df}{d\rho} + \frac{\kappa \sqrt{1 - 2\alpha/\rho}}{\rho} f - (\varepsilon + \sqrt{1 - 2\alpha/\rho}) g = 0, \\ (1 - 2\alpha/\rho) \frac{dg}{d\rho} - \frac{\kappa \sqrt{1 - 2\alpha/\rho}}{\rho} g + (\varepsilon - \sqrt{1 - 2\alpha/\rho}) f = 0 \end{cases} \quad (31)$$

с граничными условиями

$$\frac{f(\rho_{\max})}{g(\rho_{\max})} = -\sqrt{\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}}, \quad (32)$$

$$f(\rho_{\min})g(\rho_{\min}) = 0.$$

Эту задачу можно решать несколькими способами. Мы рассмотрим два из них. Первый – это численное решение системы (31) «назад», начиная с некоторого ρ_{\max} , для которого полагаем установившимся асимптотическое поведение (11) (естественным выбором ρ_{\max} является выполнение условия $\rho_{\max} \sqrt{1 - \varepsilon^2} \gg 1$). Далее, выбираются те ε , для которых решения удовлетворяют граничному условию вблизи горизонта. Второй способ состоит во введении новой гладкой функции – «фазы», совпадающей с точностью до $k\pi$ ($k = 1, 2, 3 \dots$) с $\arctg(f/g)$. Известно (см., например, [25]), что для этой функции можно написать замкнутое дифференциальное уравнение, при этом асимптотическое условие (11) и условие в ρ_{\min} легко переписывается в терминах фазы.

Уравнение для фазы имеет следующий вид

$$\frac{d\Phi}{ds} = 2\alpha \left(\varepsilon \frac{s+1}{s} + \sqrt{\frac{s+1}{s}} \cos 2\Phi \right) - \kappa \frac{1}{\sqrt{s(s+1)}} \sin 2\Phi. \quad (33)$$

В (33) введено обозначение $s = \frac{\rho}{2\alpha} - 1$; интервал изменения s : $(0, \infty)$.

В численных расчетах при $s \rightarrow 0$ удобно ввести новую переменную

$$t = 2\alpha\varepsilon \ln(\rho - 2\alpha). \quad (34)$$

Тогда $s(t) = \frac{1}{2\alpha} e^{\frac{t}{2\alpha\varepsilon}}$ и уравнение (33) для переменной t имеет вид

$$\frac{d\Phi(s(t))}{dt} = 1 + s(t) + \sqrt{s(t)(1+s(t))} \frac{\cos 2\Phi}{\varepsilon} - \frac{\kappa}{2\alpha\varepsilon} \sqrt{\frac{s(t)}{1+s(t)}} \sin 2\Phi. \quad (35)$$

В (35); интервал изменения t : $(-\infty, \infty)$.

Асимптотическое условие (11), (32) в терминах фазы равно

$$\Phi(s \rightarrow \infty) = -\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}. \quad (36)$$

Граничное условие (32), (29) при $\rho \rightarrow 2\alpha$ или $t \rightarrow -\infty$ уже фактически записано как условие для фазы:

$$\sin 2(t + \varphi) = 0 \text{ при } t \rightarrow -\infty. \quad (37)$$

Изложение методов численного решения как системы уравнений (31), так и уравнений для фазы (33), (35) приведено в Приложении.

Кратко остановимся на технологии определения энергетического спектра рассматриваемых уравнений Дирака в численных расчетах.

Численное решение системы (31) и уравнений для фазы (33), (35) проводится обратным способом от $\rho_{\max}(s_{\max})$ до $\rho_{\min}(t_{\min})$. ρ_{\max} удовлетворяет условию $\rho_{\max} \sqrt{1-\varepsilon^2} \gg 1$; t_{\min} определяется заданной точностью.

Из уравнения (35) следует, что при $t \rightarrow -\infty$ $\Phi = \varphi + t$, где φ при заданных $\alpha, \kappa, \varepsilon$ является постоянной величиной. Мерой точности может быть степень приближения фазы в расчетах к прямой $\varphi + t$.

Далее применяем граничное условие (37)

$$\sin 2(\varphi + t_{\min}) = 0, \quad (38)$$

$$(\sin \varphi \cos t_{\min} + \cos \varphi \sin t_{\min})(\cos \varphi \cos t_{\min} - \sin \varphi \sin t_{\min}) = 0. \quad (39)$$

Для выполнения (39) пусть $\cos \varphi = 0$, тогда условие (38) выполняется, если

$$\cos \varphi = 0, \quad \sin 2t_{\min} = 0. \quad (40)$$

Условие (38) также выполняется, если

$$\sin \varphi = 0, \quad \sin 2t_{\min} = 0. \quad (41)$$

Однако использование второго условия (41) приводит в численных расчетах к нефизическим уровням энергии (например, при значениях $\alpha \ll 1$ в расчетах существуют сильносвязанные состояния с $\varepsilon \ll 1$).

Кроме того, возникает расщепление водородоподобных уровней при $\alpha \ll 1$, что не соответствует предельному переходу к значениям

$$E_n = mc^2 \left(1 - \frac{\alpha^2}{2n^2} \right)$$

с аналитическими релятивистскими поправками, полученными в работе 16.

Исходя из этого, ниже использовались лишь условия (40).

Итак, при достижении в расчетах заданной точности приближения фазы к прямой $\varphi + t$ определяются t_{\min} и искомый энергетический спектр

$$\varphi(\alpha, \kappa, \varepsilon_N) = \frac{\pi}{2} N, \quad N = \pm 1, 3, 5... \quad (42)$$

Второе условие в (40) всегда можно выполнить, продолжив расчеты до ближайшего нуля $\sin 2t_{\min}$. При этом в пределах заданной точности постоянная φ не изменяется.

2.3.2. Результаты численных расчетов решений уравнения Дирака в поле Шварцшильда

2.3.2.1. Численное определение энергетического спектра. При решении системы уравнений (31) или эквивалентных ей уравнений для фазы (33), (35) при заданных значениях α и квантового числа κ (8) можно получить численные зависимости $\varphi(\varepsilon)$. Обозначим через ε_0 нижний энергетический уровень при фиксированных значениях α и κ . При малых значениях α зависимости $\varphi(\varepsilon)$ при $\varepsilon < \varepsilon_0$ носят растущий и ступенчатый характер; при $\varepsilon < \varepsilon_0$ фаза изменяется слабо $\left(\Delta\Phi < \frac{\pi}{2} \right)$. При возрастании α зависимости $\varphi(\varepsilon)$ становятся все более и более гладкими.

При возрастании α и достижении $\alpha = \alpha_{\text{кр}}$ максимум зависимости $\varphi(\varepsilon)$ становится равным $N \frac{\pi}{2}$. Это означает, что данному максимуму соот-

ветствует нижайший энергетический уровень $\varepsilon = \varepsilon_0^{\text{кр}}$.

При дальнейшем увеличении α максимум фазы смещается в сторону больших значений $-\varepsilon$, увеличиваясь по своей величине.

Фактически для всех значений α при $\varepsilon \sim 0$ значение фазы близко к нулю.

На рис. 1, а, б, в, г приведены описанные выше характерные зависимости $\varphi(\varepsilon)$, рассчитанные для значения $\kappa = -1$.

После применения к зависимости $\varphi(\varepsilon)$ граничного условия (40) получаем искомый дискретный энергетический спектр.

На рис. 1, а, б, в, г несколько низших энергетических уровней отмечены пересечением фазовых кривых $\varphi(\varepsilon)$ с горизонтальными линиями

$$N \frac{\pi}{2} \quad (N = \pm 1, 3, 5...).$$

Описанное выше поведение зависимости $\varphi(\varepsilon)$ приводит к специфическим особенностям в зависимостях $\varepsilon_n(\alpha, \kappa)$.

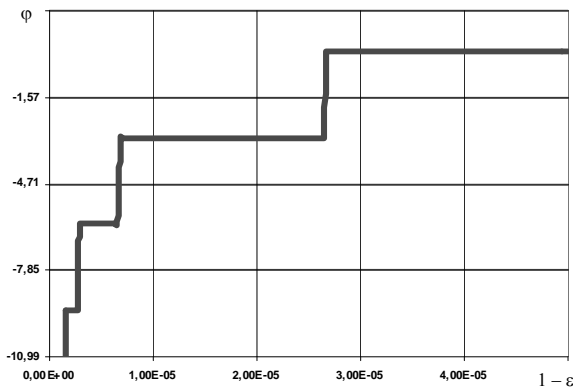
Из рис. 1 видно, что энергия связанной дираковской частицы заметно уменьшается с ростом α . После достижения $\varepsilon = \varepsilon^{\text{кр}}$ энергия частицы скачкообразно уменьшается с дальнейшим плавным уменьшением при возрастании α .

В области максимума зависимости $\varphi(\varepsilon)$ между уровнями энергии возникает заметная «энергетическая пустыня» (см. рис. 1, в).

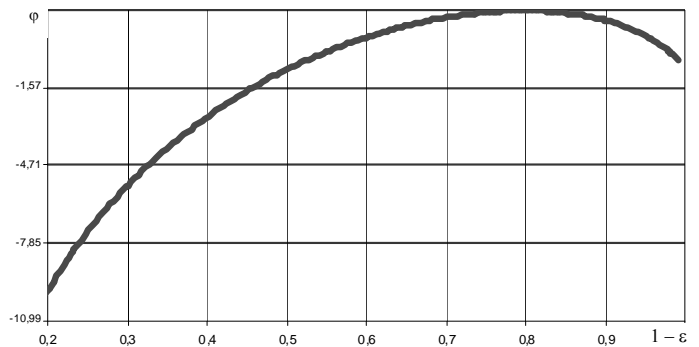
Из рис. 1, г видно также, что при $\alpha \geq 10$ возникает заметное число уровней с энергией связи, близкой к полной энергии частицы $\varepsilon = 1 (E = m)$.

Далее перейдем к конкретным результатам расчетов. Для значений $\alpha \ll 1$ в [14–18] установлено, что энергетический спектр должен быть близок к водородоподобному.

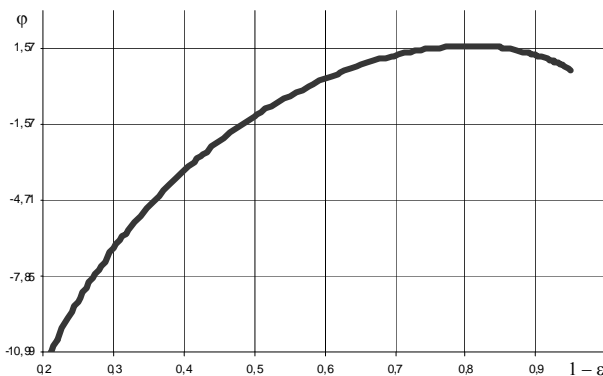
В работе [16] вычислены также релятивистские поправки к водородоподобному спектру.



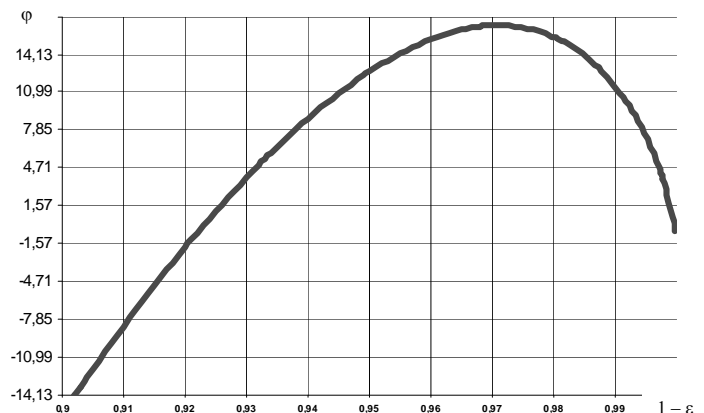
а



б



в



г

Рис. 1. Поведение фазы при значениях $\alpha = 1/137$ (а); $\alpha = 2,65$ (б); $\alpha = 3$ (в); $\alpha = 150$ (г)

В результате при $\alpha \ll 1$ спектр частицы со спином $1/2$ в поле Шварцшильда определяется формулой

$$\varepsilon_n = 1 - \frac{\alpha^2}{2n^2} - \frac{3\alpha^4}{n^4} \times \left\{ \frac{n}{l+1/2} \left[\left(1 - \frac{1}{3} \delta_{l0} \right) + \frac{1}{12} (1 - \delta_{l0}) \left(\frac{1}{\kappa} + \frac{2}{l(l+1)} \right) \right] - \frac{5}{8} \right\} \quad (43)$$

Выражение (43) показывает, что в отличие от атома водорода гравитационное поле снимает вырождение уровней с одинаковыми j , но разными l .

В табл. 1 для значений $\alpha = 0,01; 0,05; 0,1$ приведены аналитические величины $1 - \varepsilon_n^{an}$ для некоторых значений n и κ , определенные из выражения (43). Там же приведены аналогичные значения $1 - \varepsilon_n^{num}$, определенные в численных расчетах. С точностью до долей процента видно хорошее согласие между численными и аналитическими значениями ε_n .

При увеличении α энергетический спектр начинает отклоняться от водородоподобного.

На рис. 2 приведены энергетические спектры для трех низших уровней энергии в состоянии с нулевым орбитальным моментом ($1S_{1/2}, 2S_{1/2}, 3S_{1/2}$). С увеличением α наблюдается монотонное увеличение энергии связи.

Однако при дальнейшем увеличении константы связи α низший уровень энергии скачкообразно уменьшается по своей величине. Так, при достижении значения $\alpha_{кр} \approx 2,65$ наблюдается скачок на $\Delta E \approx 0,35m$, изображенный на рис. 3. При дальнейшем увеличении α нижний уровень энергии монотонно стремится к нулю. Заметим, что все уровни, лежащие выше $1S_{1/2}$ состояния, при увеличении α также испытывают такие же изменения. Наличие скачков в уровнях энергии при определенных значениях константы связи носит закономерный характер и обязано поведению $\varphi(\varepsilon)$ (достижение $\varphi^{max} = N \frac{\pi}{2}$ при $\varepsilon = \varepsilon^{kp}$).

Таблица 1

Численные и аналитические значения величин $1 - \varepsilon_n$ для $\alpha = 0,01; 0,05; 0,1$ (аналитические значения – обычный шрифт, численные значения – жирный шрифт)

α	$n=1$ $\kappa=-1$ ($j=1/2$) ($l=0$)	$n=2$ $\kappa=-1$ ($j=1/2$) $l=0$	$n=1$ $\kappa=-1$ ($j=1/2$) $l=0$	$n=2$ $\kappa=+1$ ($j=1/2$) $l=1$	$n=3$ $\kappa=+1$ ($j=1/2$) $l=1$
$\alpha = 0,01$	5.0021E-05 5.0040E-05	1.25038E-05 1.2427E-05	5.5568E-06 5.5133E-06	1.2502E-05 1.2428E-05	5.5561E-06 5.5139E-06
$\alpha = 0,05$	1.26633E-03 1.2675E-03	3.14893E-04 3.1487E-04	1.3967E-04 1.3947E-04	3.1359E-04 3.1316E-04	1.3929E-04 1.3899E-04
$\alpha = 0,1$	5.2125E-03 5.2866E-03	1.288E-03 1.2970E-03	5.6805E-04 5.7021E-04	1.2674E-03 1.2691E-03	5.6189E-04 5.6197E-04

α	$n=2$ $\kappa=-2$ $j=3/2$ $l=1$	$n=3$ $\kappa=-2$ $j=3/2$ $l=1$	$n=3$ $\kappa=+2$ $j=3/2$ $l=2$	$n=3$ $\kappa=-3$ $j=5/2$ $l=2$
$\alpha = 0,01$	1.2501E-05 1.2486E-05	5.5561E-06 5.5134E-06	5.5558E-06 5.5139E-06	5.5558E-06 5.5729E-06
$\alpha = 0,05$	3.134E-04 3.1327E-04	1.3923E-04 1.3883E-04	1.3904E-04 1.3870E-04	1.3902E-04 1.3904E-04
$\alpha = 0,1$	1.2643E-03 1.2606E-03	5.6086E-04 5.5911E-04	5.58E-04 5.5746E-04	5.5769E-04 5.5772E-04

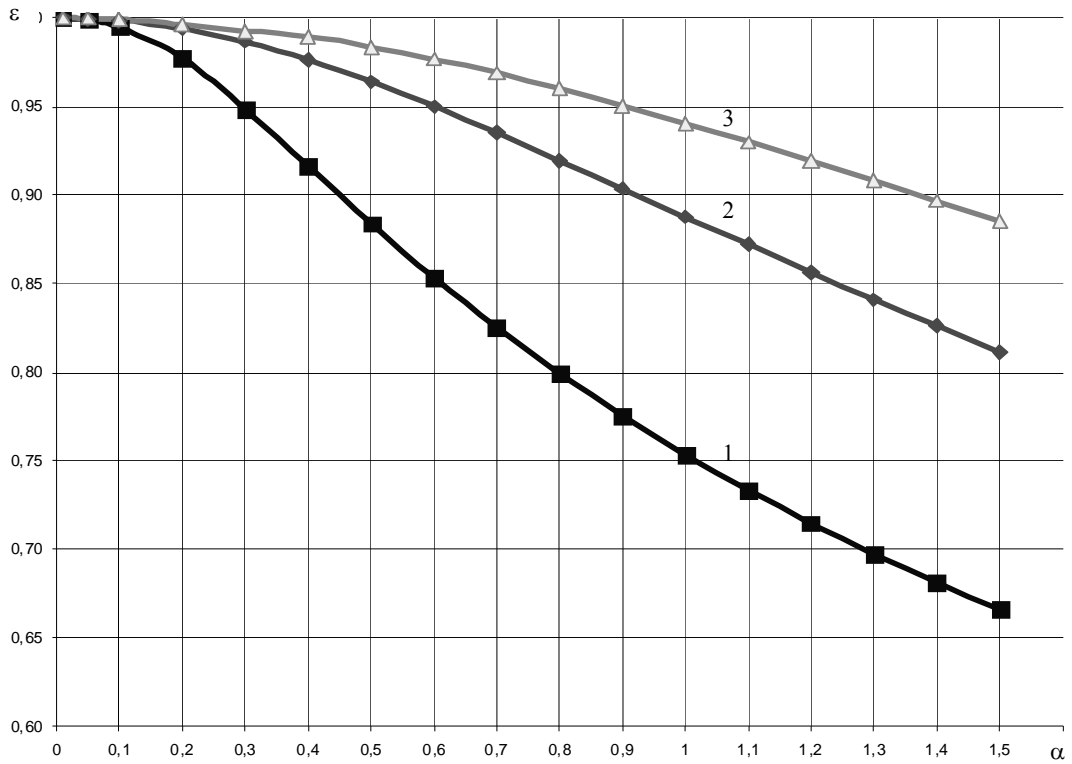


Рис. 2. Энергетические спектры для $1S_{1/2}$, $2S_{1/2}$, $3S_{1/2}$ состояний: 1 – $n = 1$; 2 – $n = 2$; 3 – $n = 3$

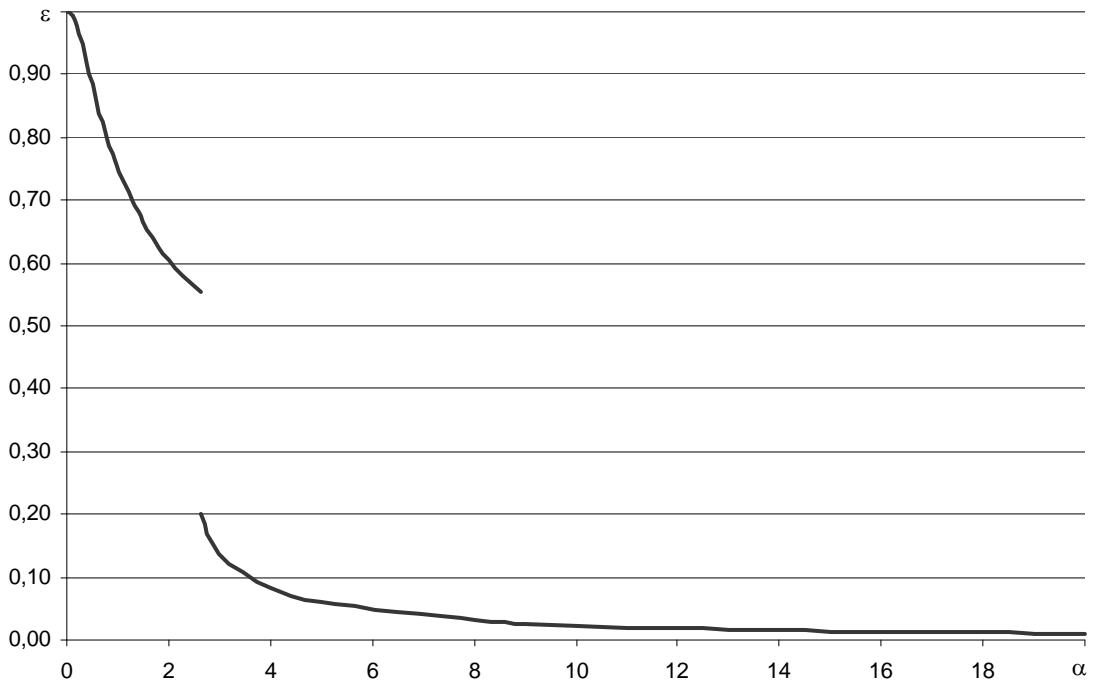


Рис. 3. Зависимость $\epsilon(\alpha)$ для $1S_{1/2}$ состояний

При анализе спектров энергий, полученных численным решением системы (31) и уравнений (33), (35) для различных значений κ , обнаружился ряд необычных особенностей. На рис. 4 приведены графики собственных значений энергии как функции α для различных значений κ . Неожиданным является поведение графиков при $\kappa = -2$ и $\kappa = 4$. Эти функции имеют минимум при $\alpha \approx 0,35$ и $\alpha \approx 0,77$ соответственно.

На рис. 5 приведены зависимости $\varphi(\varepsilon)$ для значений $\kappa = -2$, $\alpha = 0,4$ и $\kappa = -2$, $\alpha = 0,5$. Видно, что в отличие от поведения фазы в большинстве проведенных расчетов в данном случае максимум фазы при $\alpha = 0,4$ больше, чем в расчете с $\alpha = 0,5$. В результате низший уровень энергии при $\alpha = 0,4$ заметно меньше, чем при $\alpha = 0,5$. В дальнейшем,

по крайней мере, до значений $\alpha \approx 0,1$ поведение зависимости $\varphi(\varepsilon)$ приобретает стандартный характер. Аналогичное поведение зависимости $\varphi(\varepsilon)$ при $\alpha = 0,8-0,9$ проявляется и в расчетах с $\kappa = 4$.

Обращает на себя внимание тот факт, что, по крайней мере, в интервале $\alpha \in (0,1-1)$ низшим уровнем энергии является состояние с наибольшим рассчитанным полным моментом ($j = 9/2$, $l = 4$), при этом состояние ($j = 7/2$, $l = 4$) лежит гораздо выше и при $\alpha = 1$ различие в энергиях этих двух состояний достигает почти $0,8m$. Почти такое же расщепление испытывают уровни с одинаковыми j , но разными l .

На рис. 6 показан рост с увеличением α числа сильносвязанных $S_{1/2}$ - состояний в интервале значений $\varepsilon = (0,1-0)$.

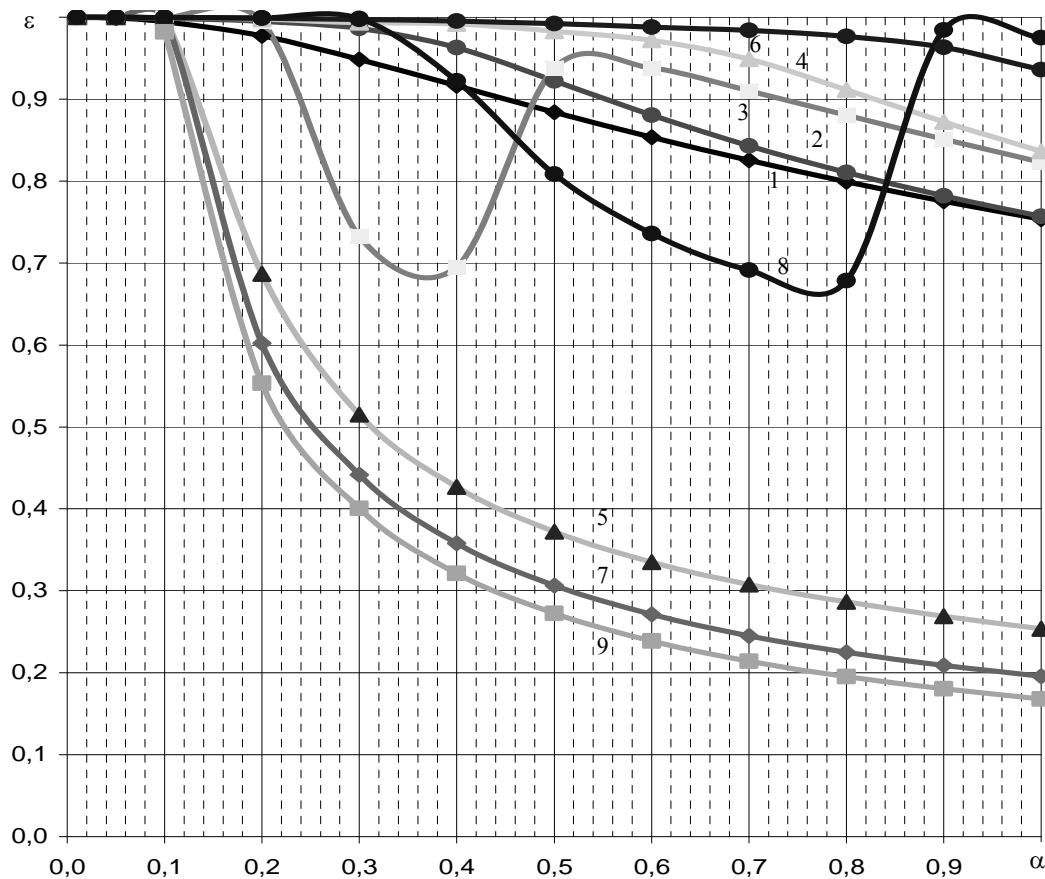


Рис. 4. Зависимости $\varepsilon(\alpha)$ для низших уровней энергии и различных значений κ : 1 – $\kappa = -1$ ($l = 0, j = 1/2$); 2 – $\kappa = 1$ ($l = 1, j = 1/2$); 3 – $\kappa = -2$ ($l = 1, j = 3/2$); 4 – $\kappa = 2$ ($l = 2, j = 3/2$); 5 – $\kappa = -3$ ($l = 2, j = 5/2$); 6 – $\kappa = 3$ ($l = 3, j = 5/2$); 7 – $\kappa = -4$ ($l = 3, j = 7/2$); 8 – $\kappa = 4$ ($l = 4, j = 7/2$); 9 – $\kappa = -5$ ($l = 4, j = 9/2$)

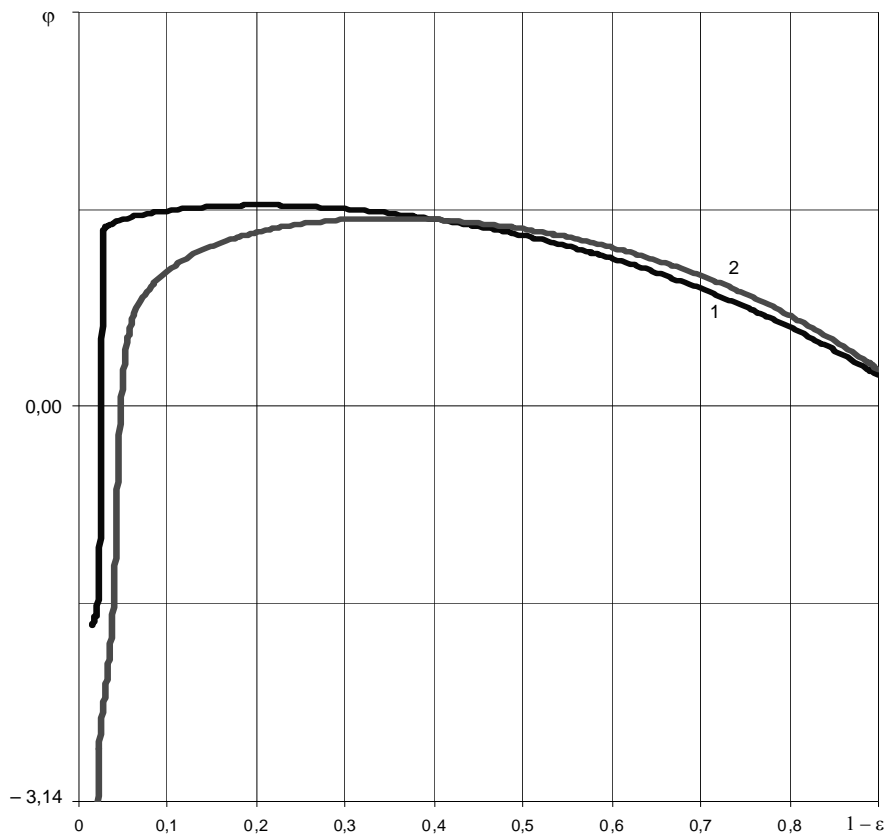


Рис. 5. Поведение фазовых кривых при $\alpha = 0,4$, $\kappa = -2$ (кривая 1) и $\alpha = 0,5$, $\kappa = -2$ (кривая 2)

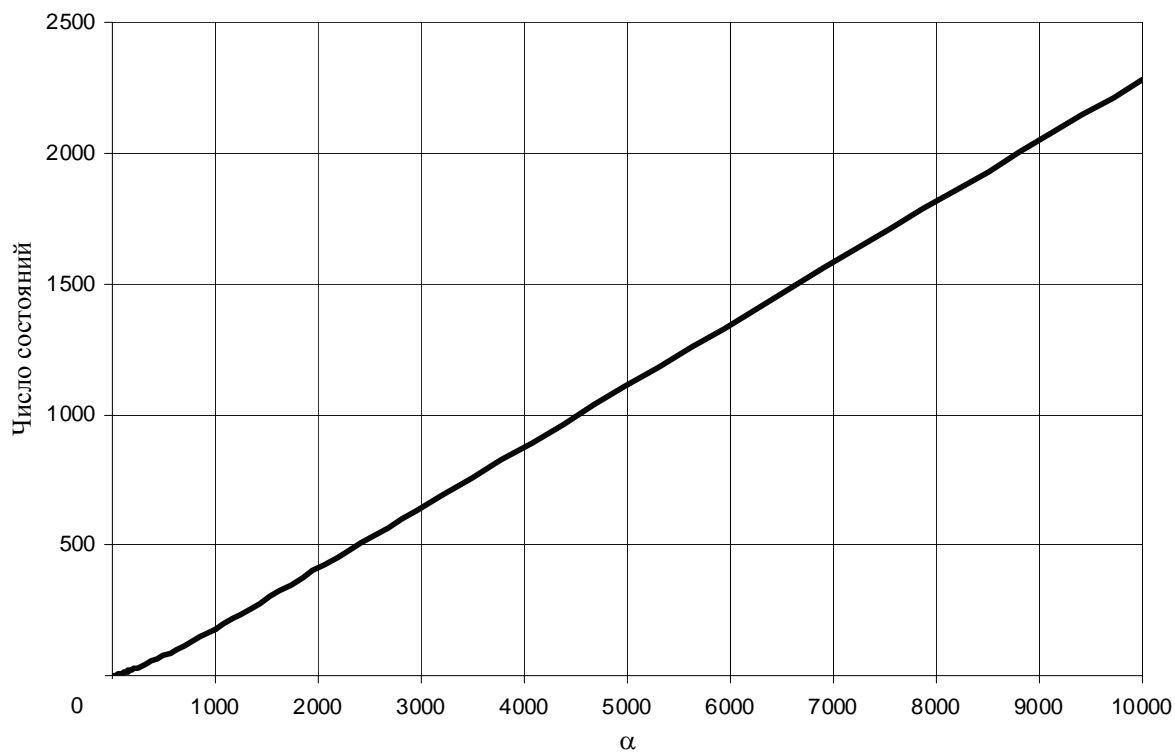


Рис. 6. Число $S_{1/2}$ -состояний дискретного спектра в интервале $\varepsilon = (0,1-0)$ как функция от α

3.3.2.2. *Радиальные волновые функции.* Временная компонента дираковской плотности тока в η – представлении для поля Шварцшильда и тетрад в калибровке Швингера имеет вид (см. (16), (17), (18))

$$j^0 = \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \psi = \psi_\eta^\dagger \psi_\eta = \frac{1}{\rho^2 \left(1 - \frac{2\alpha}{\rho}\right)} \left(f^2(\rho) + g^2(\rho)\right) \xi^+(\theta) \xi(\theta). \quad (44)$$

Компонента j^0 имеет простую физическую интерпретацию – это плотность вероятности, измеряемая удаленным наблюдателем.

Величина

$$J^0 = \frac{1}{\left(1 - \frac{2\alpha}{\rho}\right)} \left(f^2(\rho) + g^2(\rho)\right) = \frac{s+1}{s} \left(f^2(s) + g^2(s)\right) \quad (45)$$

является с точки зрения удаленного наблюдателя плотностью вероятности в сферической оболочке с радиусом ρ .

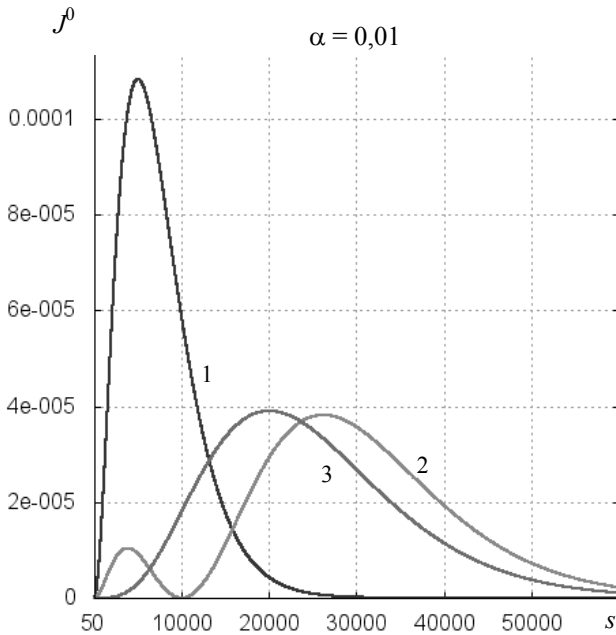


Рис. 7. Нормированная плотность вероятности как функция $s = \frac{\rho}{2\alpha} - 1$: 1 – $1S_{1/2}$; 2 – $2P_{1/2}$; 3 – $2S_{1/2}$

Величины j^0 и J^0 неограниченно растут при $\rho \rightarrow 2\alpha$ ($r \rightarrow r^0$).

Как и в случае определения энергетического спектра связанных состояний (п. 3.3.2.1), при работе с волновыми функциями необходим выбор $\rho_{\min} > 2\alpha$. Значения $\rho < \rho_{\min}$ не рассматриваются при интегрировании и вычислении матричных элементов.

Поскольку пробные частицы, в том числе и квантовомеханические, не могут пересекать «горизонта событий», величина ρ_{\min} должна быть больше гравитационного радиуса, по крайней мере, на характерный размер частицы, характеризующейся в квантовой механике комптоновской длиной волны l_c , т. е.

$$\rho_{\min} \geq 2\alpha + 1 \quad (r \geq r_0 + l_c). \quad (46)$$

При выборе $\rho_{\min} = 2\alpha + 1$ формально граничное условие (40) при $\rho = \rho_{\min}$ сводится к единственному условию $\cos\varphi = 0$. Однако фазу $\varphi(\alpha, \kappa, \varepsilon_N)$ с заранее заданной точностью необходимо определять по технологии, описанной в п. 3.3.1.

На рис. 7, 8 приведены нормированные на единицу зависимости $J^0(s)$, рассчитанные для некоторых S - и P -состояний.

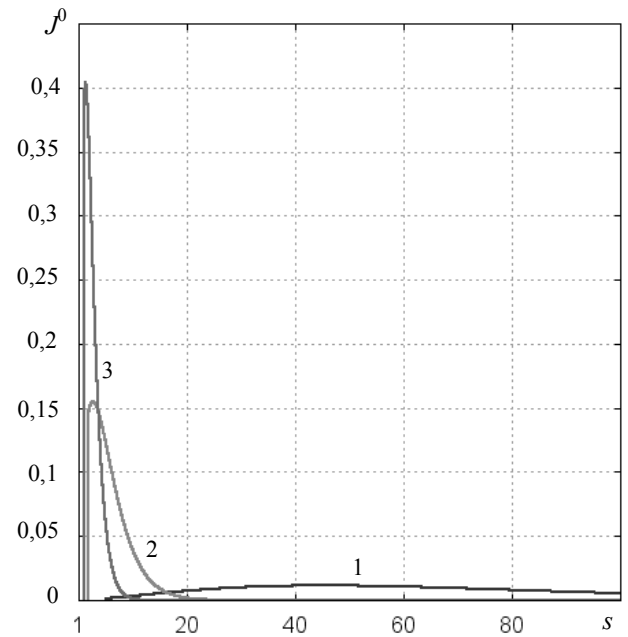


Рис. 8. Нормированная плотность вероятности для $S_{1/2}$ -состояния и различных значений α как функция $s = \frac{\rho}{2\alpha} - 1$: 1 – $\alpha = 0,1$; 2 – $\alpha = 0,3$; 3 – $\alpha = 0,5$

Далее рассмотрим проблему определения средних радиусов с рассматриваемыми волновыми функциями и $\rho_{\min} = 2\alpha + 1$.

Очевидно, физической характеристикой является превышение среднего радиуса относительно гравитационного радиуса: $\frac{\bar{\rho}}{2\alpha}$ или $\frac{\bar{r}}{r_0}$.

$$\bar{\rho} = \frac{\int_{\rho_{\min}}^{\infty} \frac{\rho}{\left(1 - \frac{2\alpha}{\rho}\right)} (f^2(\rho) + g^2(\rho)) d\rho}{\int_{\rho_{\min}}^{\infty} \frac{1}{\left(1 - \frac{2\alpha}{\rho}\right)} (f^2(\rho) + g^2(\rho)) d\rho} = \frac{\int_1^{\infty} \frac{(s+1)^2}{s} (f^2(s) + g^2(s)) ds}{\int_{\frac{1}{2\alpha}}^{\infty} \frac{s+1}{s} (f^2(s) + g^2(s)) ds}. \quad (47)$$

Видно, что при $\alpha \gg 1$ для всех состояний с разными квантовыми числами n, j, l соответствующий средний радиус близок к «горизонту событий» ($\bar{\rho} \rightarrow 2\alpha$).

При $\alpha \ll 1$ отношение $\frac{\bar{\rho}}{2\alpha}$ существенно возрастает и оно совпадает с отношением $\frac{\bar{r}}{l_c}$ в атоме водорода (см., например, [26]).

В табл. 2 приведены численные значения $\frac{\bar{\rho}}{2\alpha}$ для некоторых S - и P -состояний.

Таблица 2

Численные значения для $\frac{\bar{\rho}}{2\alpha}$ при $\alpha = 0,01$

	$1S_{1/2}$	$2S_{1/2}$	$2P_{1/2}$
$\frac{\bar{\rho}}{2\alpha}$	150	600	500

На рис. 9 приведена также зависимость $\frac{\bar{\rho}(\alpha)}{2\alpha}$ для $1S_{1/2}$ -состояния, показывающая значения $\bar{\rho}$ в промежуточной области изменения α .

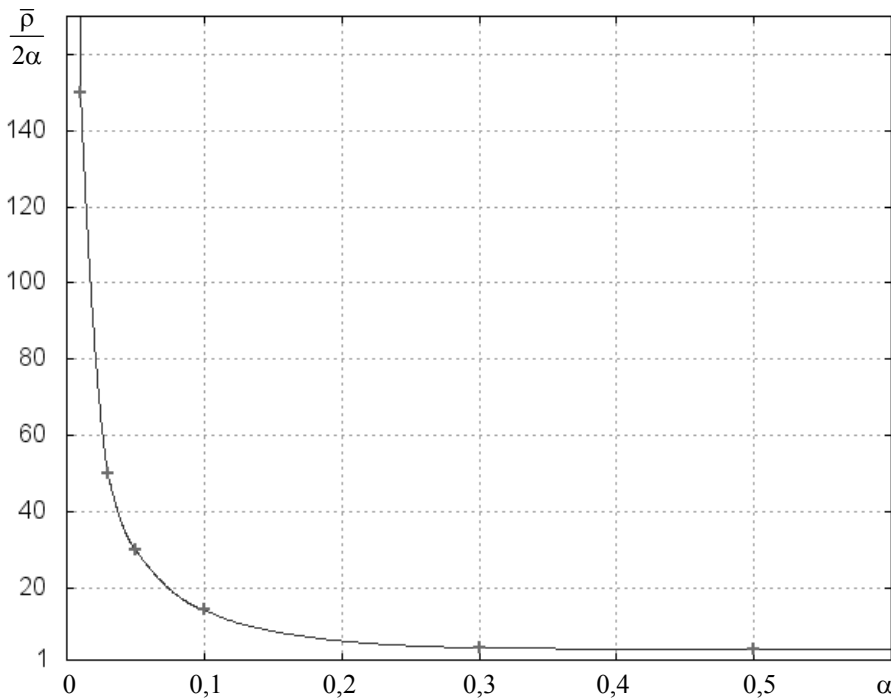


Рис. 9. Отклонение $\bar{\rho}(\alpha)$ от радиуса «горизонта событий» 2α для состояния $1S_{1/2}$

3. Обсуждение результатов

В работе показано, что в гравитационном поле Шварцшильда любой интенсивности возможно существование стационарных связанных состояний частиц со спином $1/2$ с вещественным энергетическим спектром.

Дискретный спектр реализуется в численных расчетах при использовании самосопряженного гамильтониана (5) с плоским скалярным произведением волновых функций и граничного условия (28), обеспечивающего нулевое значение θ -компоненты плотности дираковского тока (26) при $\rho = \rho_{\min}$, где $\rho_{\min} > 2\alpha$.

Следует отметить, что при такой постановке дираковская квантово-механическая частица не пересекает «горизонт событий». Волновая функция частицы определена на интервале $r \in [r_{\min}, \infty)$, где $r_{\min} > r_0$.

По результатам проведенных численных расчетов можно сделать следующие выводы:

1. Для значений $\alpha \ll 1$ энергетический спектр близок к водородоподобному $\left(E_n \approx m \left(1 - \frac{\alpha^2}{2n^2} \right) \right)$.

2. Численные релятивистские поправки к водородоподобному спектру для значений $\alpha = 0,01; 0,05; 0,1$ близки к поправкам, определенным аналитически в работе [16].

3. При возрастании α энергия связанной частицы заметно уменьшается.

4. При $\alpha \geq 1$ уровни энергии испытывают скачкообразное изменение при достижении своего для каждого уровня значения $\alpha_{кр}$.

5. При анализе спин-орбитального взаимодействия (расчеты с различными значениями κ) подтверждены выводы работ [16, 24] о снятии вырождения в гравитационном поле уровней энергии с одинаковым j в отличие от уровней энергии в кулоновском поле. При $\alpha > 0,1$ в расчетах с $|\kappa| > 1$ обнаружено поразительно большое расщепление уровней с одинаковым j , но разными l и, наоборот, с одинаковым l но разными проекциями спина частицы ($j = l \pm 1/2$). При $\alpha = 1$ для уровней энергии с $j = 7/2, l = 3$ и $j = 7/2, l = 4$ это расщепление достигает $\Delta E \approx 0,8m$!!! Почти такое же расщепление при $\alpha = 1$ реализуется для уровней с одинаковыми l : $4f_{5/2}$ и $4f_{7/2}$.

6. С возрастанием α заметно возрастает число сильносвязанных состояний вплоть до значений энергии частицы $\varepsilon \sim 0$ (энергия связи частицы $\sim m$).

7. При $\alpha \ll 1$ отношение среднего радиуса связанной дираковской частицы к гравитационному радиусу близко к отношению $\bar{\rho} = \frac{\bar{r}}{l_c}$ для атома

водорода; при $\alpha \gg 1$ средние радиусы $\bar{\rho} \rightarrow 2\alpha$ или $\bar{r} \rightarrow r_0$, т. е. при больших константах гравитационного взаимодействия связанные дираковские частицы в поле Шварцшильда «прижаты» к гравитационному радиусу («горизонту событий»).

Важным обстоятельством является то, что существование стационарных связанных состояний частиц со спином $1/2$ в гравитационном поле возможно лишь для метрик, запрещающих классическим частицам пересекать «горизонт событий».

Кроме рассмотренной классической метрики Шварцшильда этим же свойством обладают метрики Шварцшильда в изотропных [27] и гармонических [28] координатах.

Существование стационарных связанных состояний для дираковских частиц возможно также для метрик Райсснера – Нордстрёма [2], Керра [3] и Керра – Ньюмена [4], о чем авторы предполагают рассказать в следующих работах.

Для метрик центрально-симметричных удовлетворительных полей, разрешающих классическим частицам пересекать «горизонт событий», квантово-механический анализ показывает, что существование стационарных связанных состояний частиц со спином $1/2$ является невозможным [29].

К этим метрикам относятся метрики Эддингтона – Финкельштейна [5], [6], метрика Пенлеви – Гуллстранда [7], метрика Леметра – Финкельштейна [6], метрика Крускала [8]. Решениями уравнения Дирака для этих метрик могут быть лишь нестационарные комплексные уровни энергии.

По результатам работы можно сделать предположение о существовании нового типа коллапсаров. Эти коллапсары:

- инертные (дираковские частицы не могут проникать под «горизонт событий»);

- не излучают по Хокингу [30] (излучение Хокинга требует существования волновой функции (оператора гравитационного поля) под «горизонтом событий» [31–38]);

- обеспечивают существование стационарных связанных состояний частиц со спином $1/2$ для всех значений гравитационной константы связи α .

С точки зрения космологии неизлучающие реликтовые коллапсары нового типа при малых значениях гравитационной константы связи $\alpha \ll 1$ могут проявлять себя лишь через гравитацию и, таким образом, являются хорошими кандидатами для носителей «темной материи». При этом подразумевается, что массы коллапсаров не превышают масс гипотетических WIMP частиц, рассматриваемых во многих сценариях расширения Вселенной в качестве представителей «темной материи».

Наоборот, неизлучающие реликтовые коллапсары с $\alpha \gg 1$, образуя «матрешку» незаряженных дираковских частиц, прижатую к «горизонту событий» ($\bar{r} \rightarrow r_0$), могут играть важную роль в образовании планет, звезд и т. д.

Таким образом, результаты работы могут привести к изменению некоторых аспектов стандартной космологической модели, связанных с эволюцией Вселенной и с взаимодействием коллапсаров с окружающей средой.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Методы численного решения системы дираковских уравнений для поля Шварцшильда

Первый способ. Линейная система (31) решалась невязным методом Эйлера с автоматическим выбором шага. Перепишем систему (31) в виде

$$\frac{d}{d\rho} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = Q_1(\rho) \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix},$$

$$Q_1(\rho) := \frac{\rho}{\rho - 2\alpha} \begin{pmatrix} -\frac{\kappa\sqrt{1-2\alpha/\rho}}{\rho} & \varepsilon + \sqrt{1-2\alpha/\rho} \\ -\varepsilon + \sqrt{1-2\alpha/\rho} & \frac{\kappa\sqrt{1-2\alpha/\rho}}{\rho} \end{pmatrix}.$$

Норму $\|Q_1(\rho)\|$ – максимум модулей собственных чисел – оценим простейшим образом величиной

$$\Lambda_1(\rho) := \frac{|\rho(\rho - 2\alpha) + \kappa^2(1 - 2\alpha/\rho) - \varepsilon^2\rho^2|^{1/2}}{\rho - 2\alpha}.$$

При $\rho = \rho_{\max}$ полагаем в соответствии со сказанным выше

$$f(\rho) = e^{-\sqrt{1-\varepsilon^2}\rho}, \quad g(\rho) = -\sqrt{(1-\varepsilon)/(1+\varepsilon)}f(\rho).$$

Задаваясь величиной Δ , полагаем $\delta = \Delta/\Lambda_1(\rho)$ и

$$\begin{pmatrix} f(\rho - \delta) \\ g(\rho - \delta) \end{pmatrix} = (1 + \delta Q_1(\rho - \delta))^{-1} \begin{pmatrix} f(\rho) \\ g(\rho) \end{pmatrix}.$$

Из-за особенности в точке $\rho = 2\alpha$ шаги будут уменьшаться при приближении к ней, поэтому удобнее вблизи горизонта, например, при $\rho < 4\alpha$ перейти к новой переменной $t = 2\alpha\varepsilon \ln(\rho - 2\alpha)$. С использованием обозначений

$$u(t) = \frac{1}{2\alpha} e^{\frac{t}{2\alpha\varepsilon}} \quad (\text{см. (35)}), \quad \rho(t) = 2\alpha(1 + u(t)),$$

$$f_2(t) = f(\rho(t)), \quad g_2(t) = g(\rho(t))$$

рассматриваемая система примет вид

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} f_2(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix} = Q_2(t) \begin{pmatrix} f_2(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix}, \quad (48)$$

где мы обозначили

$$Q_2(t) = \frac{u(t)}{\varepsilon} Q_1(\rho(t)) =$$

$$= \frac{1}{2\alpha\varepsilon} \begin{pmatrix} -\kappa\sqrt{\frac{u(t)}{1+u(t)}} & \rho(t) \left(\varepsilon + \sqrt{\frac{u(t)}{1+u(t)}} \right) \\ \rho(t) \left(-\varepsilon + \sqrt{\frac{u(t)}{1+u(t)}} \right) & \kappa\sqrt{\frac{u(t)}{1+u(t)}} \end{pmatrix}.$$

При $t \rightarrow -\infty$

$$Q_2(t) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Кроме того, $\|Q_2(t)\| \sim 1$ при $t \leq t_0$. Поэтому в этой области можно выбрать шаг $\delta = \Delta$ и воспользоваться схемой

$$\begin{pmatrix} f_2(t - \delta) \\ g_2(t - \delta) \end{pmatrix} = (1 + \delta Q_2(t - \delta))^{-1} \begin{pmatrix} f_2(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix}.$$

Использованная разностная схема (Эйлера) имеет первый порядок точности. Отличие полученного численного решения от точного на одном шаге составляет величину $\sim \Delta^2$. На всем интервале интегрирования ошибка составит $\sim \Delta^2(\rho_{\max}/\Delta + |t_{\min}|/\Delta) = (\rho_{\max} + |t_{\min}|)\Delta$. Отметим, что по этой схеме амплитуда численного решения $A_2(t) = (f_2^2(t) + g_2^2(t))^{1/2}$ изменяется следующим образом:

$$A_2^2(t - \delta) = (f_2(t)g_2(t)) \times$$

$$\times \left((1 + \delta Q_2(t - \delta))(1 + \delta Q_2^T(t - \delta)) \right)^{-1} \begin{pmatrix} f_2(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix} \approx$$

$$\approx A_2^2(1 + \delta^2),$$

что дает асимптотическое поведение вида

$$A_2(t-T)/A_2(t) \approx (1+\delta^2)^{-T/(2\delta)} \approx e^{-\delta T/2}$$

при больших T . Вместе с тем, амплитуда точного решения сходится к положительной константе (см. ниже). В случае необходимости повышения точности можно воспользоваться схемой более высокого порядка.

Второй способ. Напомним, что для ненулевого решения линейной системы

$$\begin{pmatrix} f' \\ g' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$$

можно ввести гладкую функцию Φ (фаза) такую, что $\operatorname{tg}\Phi = f/g$. Она удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\Phi' = (b-c + (b+c)\cos(2\Phi) + (a-d)\sin(2\Phi))/2.$$

Также можно выписать уравнение для амплитуды $A = (f^2 + g^2)^{1/2}$:

$$\begin{aligned} (\ln A)' &= \frac{ff' + gg'}{f^2 + g^2} \\ &= a \sin^2 \Phi + d \cos^2 \Phi + (b+c) \sin \Phi \cos \Phi. \end{aligned}$$

Вычисляя эти коэффициенты для уравнений (31), (48) соответственно, получим для фазы уравнения

$$\frac{d\Phi_1}{d\rho} = \frac{\varepsilon\rho}{(\rho-2\alpha)} + \sqrt{\frac{\rho}{\rho-2\alpha}} \cos(2\Phi_1) - \frac{\kappa \sin(2\Phi_1)}{\sqrt{\rho(\rho-2\alpha)}},$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi_2}{dt} &= 1 + u(t) + \sqrt{u(t)(1+u(t))} \frac{\cos(2\Phi_2)}{\varepsilon} - \\ &- \frac{\kappa}{2\alpha\varepsilon} \sqrt{\frac{u(t)}{1+u(t)}} \sin(2\Phi_2). \end{aligned}$$

Рассмотрим функцию $\varphi_2(t) = \Phi_2(t) - t$. Она удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_2}{dt} &= u(t) + \sqrt{u(t)(1+u(t))} \frac{\cos(2\varphi_2 + 2t)}{\varepsilon} - \\ &- \frac{\kappa}{2\alpha\varepsilon} \sqrt{\frac{u(t)}{1+u(t)}} \sin(2\varphi_2 + 2t). \end{aligned}$$

При $t \rightarrow -\infty$ $u(t) \rightarrow 0$, поэтому при всех достаточно малых t $u(t) \leq 1$ и

$$\left| \frac{d\varphi_2}{dt} \right| \leq \sqrt{u(t)} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon} + \frac{|\kappa|}{2\alpha\varepsilon} \right).$$

Отсюда сразу получаем оценку

$$|\varphi_2(t) - \varphi_2(-\infty)| \leq 4\alpha\varepsilon \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon} + \frac{|\kappa|}{2\alpha\varepsilon} \right) \sqrt{u(t)}.$$

Для амплитуды решения системы (48) найдем

$$(\ln A_2)' = \frac{\kappa \cos(2\Phi_2) + \rho(t) \sin(2\Phi_2)}{2\alpha\varepsilon \sqrt{1+u(t)}} \sqrt{u(t)}.$$

Отсюда легко устанавливаем, что

$$|\ln(A_2(t)/A_2(-\infty))| \leq 2(|\kappa| + \rho(t)) \sqrt{u(t)},$$

т. е. $A_2(t)$ стремится к $A_2(-\infty)$ при $t \rightarrow \infty$ (при малых α очень быстро).

Уравнения для фазы (33), (35) решались численно неявным методом Рунге–Кутты пятого порядка с контролем размера шага [39]. Использовалась схема Ила для получения трехстадийного метода Радо ПА. Одностадийный метод по такой схеме эквивалентен неявному методу Эйлера. Трехстадийная формула Радо ПА A -устойчива, L -устойчива и имеет достаточно высокий порядок [39].

Для получения значения фазы Φ в точке $s = \frac{\rho}{2\alpha} - 1 \rightarrow 0$ уравнение (33) интегрировалось от s_{\max} до s_0 , а уравнение (35) – от $t_0 = 2\alpha\varepsilon \ln(2\alpha s_0)$ до t_{\min} . Верхний предел интегрирования s_{\max} выбирался достаточно большим, исходя из того, чтобы с определенной точностью (обычно 10^{-9}) удовлетворялось условие равенства численной производной нулю $\frac{d\Phi}{ds}(s_{\max}) \approx 0$. Точка сшивки решений

уравнений (33), (35) принималась равной $s_0 = 1$. Нижний предел интегрирования t_{\min} выбирался достаточно малым, исходя из того, чтобы с определенной точностью (обычно 10^{-9}) удовлетворялось условие равенства численной производной единице $\frac{d\Phi}{dt}(t_{\min}) \approx 1$.

При расчетах задавалась допустимая погрешность на одном шаге интегрирования, равная 10^{-4} .

Авторы благодарят за большую техническую помощь в подготовке статьи А. Л. Новоселову.

Список литературы

1. Schwarzschild Sitzber K. Deut. Akad. Wiss. Berlin. 1916. P. 189–196.
2. Reissner H. // Ann. Phys. 1916. Vol. 50. P. 106.
Nordstrom C. // Proc. K. Akad. Wet. Amsterdam. 1918. Vol. 20. P. 1238.
3. Kerr R. P. // Phys. Rev. Lett. 1963. Vol. 11. P. 237.
4. Newman E. T., Couch E., Chinnapared K. et al. // J. Math. Phys. 1965. Vol. 6. P. 918.
5. A. S. Eddington. Nature 113, 192 (1924).
6. Finkelstein D. // Phys. Rev. 1958. Vol. 110. P. 965.
7. Painleve P., Acad C. R. // Sci. (Paris). 1921. Vol. 173. P. 677.
Gullstrand A. Arkiv. Mat. Astron. Fys. 1922. Vol. 16. P. 1.
8. Kruskal M. // Phys. Rev. 1960. Vol. 119. P. 1743.
9. Doran C. J. L. // Phys. Rev. 2000. Vol. D 61, N 6. P. 067503.
10. Deruelle N., Ruffini R. // Phys. Lett. 1974. Vol. **52B**. P. 437.
11. Damour T., Deruelle N., Ruffini R. // Lett. Nuov. Cim. 1976. Vol. **15**. P. 257.
12. Ternov I. M., Khalilov V. P., Chizhov G. A., Gaina A. B. Proceedings of Soviet Higher Educational Institutions // Physics. (in Russian). 1978, N 9.
13. Gaina A. B., Chizhov G. A. Proceedings of Soviet Higher Educational Institutions // Physics (in Russian). 1980, N 4. P. 120.
14. Ternov I. M., Gaina A. B., Chizhov G. A. // Sov. Phys. J. 1980. Vol. 23. P. 695–700.
15. Galtsov D. V., Pomerantseva G. V., Chizhov G. A. // Sov. Phys. J. 1983. Vol. 26. P. 743–745.
16. Ternov I. M., Gaina A. B. // Sov. Phys. J. 1988. Vol. 31, N 2. P. 157–163.
17. Gaina A. B., Zaslavskii O. B. Class. Quantum Grav. 1992. Vol. 9. P. 667–676.
18. Gaina A. B., Ionescu-Pallas N. I. // Rom. J. Phys. 1993. Vol. 38. P. 729–730.
19. Lasenby A., Doran C., Pritchard J. et al. // Phys. Rev. 2005. Vol. D 72. P. 105014.
20. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. // Phys. Rev. 2010. Vol. D 82. P. 104056; arxiv: 1007.4631 (gr-qc).
21. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. // Phys. Rev. 2011. Vol. D 83. P. 105002; arxiv: 1102.4067v1 (gr-qc).
22. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. Arxiv: 1102.0844v6 (gr-qc).
23. Brill D. R., Wheeler J. A. // Rev. of Modern Physics. 1957. Vol. 29. P. 465–479.
24. Dolan S. R. Trinity Hall and Astrophysics Group, Cavendish Laboratory. Dissertation, 2006.
25. Хартри Д. Расчеты атомных структур. М.: ИЛ, 1960.
Hartree D. The calculation of atomic structures. NY: John Wiley, 1957.
26. Бете Г., Солпитер Э. Квантовая механика с одним и двумя электронами. М.: Физматгиз, 1960.
Bethe H. A., Salpeter E. E. Quantum mechanics of one- and two-electron atoms. Springer-Verlag, 1957.
27. Лайтман А., Пресс В., Прайс Р., Тюкольски С. Сборник задач по теории относительности и гравитации. М.: Мир, 1979.
Lightman A., Press W., Price R., Teukolsky S. Problem Book in Relativity and Gravitation (Princeton University Press, Princeton, NJ. 1975).
- Obukhov Yu. N. // Phys. Rev. Lett. 2001. Vol. 86. P. 192; Forsch. Phys. 2002. Vol. 50. P. 711.
28. Логунов А. А., Мествиришвили М. А. Релятивистская теория гравитации. М.: Наука, 1989.
29. Горбатенко М. В., Незнамов В. П. Физическая неэквивалентность метрики Шварцшильда и метрик центрально-симметричного незаряженного гравитационного поля, допускающих пересечение пробными частицами «горизонтов событий» // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2012. Вып. 2. С. 24.
30. Hawking S. W. // Commun. math. Phys. 1975. Vol. 43. P. 199–220.
31. Srinivasan K., Padmanabhan T. // Phys. Rev. 1999. Vol. **D60**. P. 024007. [gr-qc/9812028].
32. Shankaranarayanan S., Srinivasan K., Padmanabhan T. // Mod. Phys. Lett. 2001. Vol. A16. P. 571–578. [gr-qc/0007022].
33. Shankaranarayanan S., Padmanabhan T., Srinivasan K. // Class. Quant. Grav. 2002. Vol. 19. P. 2671–2688. [gr-qc/0010042].
34. Parikh M. K., Wilczek F. // Phys. Rev. Lett. 2000. Vol. 85. P. 5042. [arXiv:hep-th/9907001].
35. Vagenas E. C. // Phys. Lett. 2002. Vol. B 533. P. 302. [hep-th/0109108].
36. Robinson S. P., Wilczek F. // Phys. Rev. Lett. 2005. Vol. 95. P. 011303. [arXiv:gr-qc/0502074].
37. Vagenas E. C., Das S. JHEP 0610:025 (2006) [hep-th/0606077].
38. Zampeli A., Singleton D., Vagenas E. C. arXiv: [gr-qc] 1206.0879v1.
39. Хайпер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М.: Мир, 1999.
Hairer E., Wanner G. Solving ordinary differential equations II. Stiff and Differential-Algebraic Problems. Second Revised Edition, Springer-Verlag 1991, 1996.

РАСЧЕТЫ МАГНИТНОГО ПОЛЯ И ПОТОКОВ β -ЭЛЕКТРОНОВ В ОБЛАСТИ ВЗРЫВА ОПЕРАЦИИ «МОРСКАЯ ЗВЕЗДА»

**В. А. Жмайло, А. Н. Залялов, Н. В. Иванов,
А. А. Пушкарев, И. В. Соболев, А. Е. Широков**

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Описаны расчеты параметров области ядерного взрыва операции «Морская звезда», проведенного США в 1962 г. Приведено сравнение их результатов с опубликованными данными измерений, полученными в этом эксперименте.

Ключевые слова: «Морская звезда», ядерный взрыв, магнитная каверна, β -электроны.

Введение

В 1962 году в Тихом океане на высоте 400 км над островом Джонстон был произведен ядерный взрыв (ЯВ) мощностью 1400 кт ТНТ, который получил название «Морская звезда». Данный опыт сопровождался разнообразными физическими эффектами, некоторые из них не получили полного объяснения до настоящего времени.

Наиболее строгая физическая модель, описывающая движение разреженной плазмы в магнитном поле для экспериментов такого типа, представляет собой систему кинетических уравнений Больцмана–Власова, дополненную уравнениями Максвелла. Однако численное решение такой системы уравнений представляет большие трудности, особенно в трехмерном случае. В работе [1] предложен другой подход, основанный на многопоточковом магнитогазодинамическом (МГД) приближении. В рамках данного подхода считается, что в рассматриваемом течении можно выделить несколько сортов частиц («потоков»). Движение каждого потока описывается уравнениями газовой динамики, между потоками происходят взаимодействия, обусловленные различными физическими механизмами. С использованием данного подхода в работе [1] проведен расчет некоторых физических эффектов, которые наблюдались в опыте «Морская звезда».

Дальнейшее развитие данной физической модели и соответствующей численной методики описано в работе [2]. Дополнительно, был опубликован ряд

экспериментальных данных о физических параметрах области взрыва в данной операции [3]. Эти обстоятельства стимулировали появление представляемой работы.

Для расчета потоков β -излучения, которые были измерены в эксперименте [3], совместно с методикой [2] использовалась методика расчета движения релятивистских электронов в магнитном поле на основе метода Монте-Карло [4].

1. Физическая модель и численная методика

Многопоточковая МГД модель [1] содержит шесть потоков частиц: ионы продуктов взрыва, нейтральные частицы продуктов взрыва, быстрые ионы атмосферы, быстрые нейтральные частицы атмосферы, медленные ионы атмосферы, медленные нейтральные частицы атмосферы, электроны.

Движение каждого из потоков описывается газодинамическим приближением. При этом между ними могут происходить обмены массой, импульсом, внутренней энергией. Поток электронов является безмассовым и его движение определяется условием электронейтральности среды. Учитывается также влияние на движение магнитного поля, которое заморожено в электронный поток.

Система уравнений, связывающая кинематические и термодинамические величины потоков в переменных Эйлера имеет следующий вид (по умолчанию используется система единиц СГС):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_k \vec{u}_k) &= \sum_{j=1}^6 S_{jk}, \quad \rho_e = m_0 \sum_{k=1}^6 \frac{\chi_k \rho_k}{m_k}, \\ \vec{u}_e &= m_0 \sum_{k=1}^6 \frac{\chi_k \rho_k \vec{u}_k}{m_k \rho_e}, \quad (k=1, \dots, 6), \\ \frac{\partial(\rho_k \vec{u}_k)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_k \vec{u}_k \cdot \vec{u}_k) + \operatorname{grad} p_k + \\ + \frac{m_0 \chi_k \rho_k}{\rho_e m_k} \left(\operatorname{grad} p_e - \frac{1}{4\pi} [\operatorname{rot} \vec{H} \times \vec{H}] \right) &= \\ = \sum_{j=1}^6 (S_{jk} \vec{u}_j + \vec{R}_{jk}) + \vec{F}_k + \vec{U}_k, \\ \frac{\partial(\rho_k \varepsilon_k)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_k \varepsilon_k \vec{u}_k) + \\ + p_k \operatorname{div} \vec{u}_k &= \sum_{j=1}^6 \left(S_{jk} \left(\varepsilon_j + \frac{(\vec{u}_j - \vec{u}_k)^2}{2} \right) + \right. \\ + \frac{m_j}{m_j + m_k} (\vec{R}_{jk} \cdot \vec{u}_j - \vec{u}_k) + Q_{jk} \Big) + Q_{ek}, \\ \frac{\partial(\rho_e \varepsilon_e)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_e \varepsilon_e \vec{u}_e) + p_e \operatorname{div} \vec{u}_e &= \\ = - \sum_{k=1}^6 Q_{ek} - \sum_{k=1}^6 (\vec{u}_k, \vec{U}_k), \\ \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} &= \operatorname{rot} [\vec{u}_e \times \vec{H}], \quad p_k = p_k(\rho_k, \varepsilon_k), \\ p_e &= p_e(\rho_e, \varepsilon_e). \end{aligned}$$

Здесь ρ_k – плотность, \vec{u}_k – скорость, ε_k – энергия, p_k – давление k -го потока, ρ_e – плотность, \vec{u}_e – скорость, ε_e – энергия, p_e – давление электронов, \vec{H} – вектор напряженности магнитного поля. Величины χ_k и m_k представляют собой константы модели: χ_k – степень ионизации k -го потока, которая равна 1 для ионных потоков и 0 для нейтральных; m_k – безразмерные массы атомов.

В правых частях данных уравнений величины S_{jk} характеризуют интенсивность обмена массами между потоками. Величины \vec{R}_{jk} представляют интенсивность обмена импульсом в результате силовых взаимодействий между потоками. Величина \vec{F}_k характеризует ларморовское взаимодействие между потоками. Величина \vec{U}_k задает изменение импульса в результате ионизации. Сла-

гаемые Q_{jk} характеризуют интенсивность тепловых обменов энергиями между j -м и k -м потоками; Q_{ek} – температурный обмен между электронами и остальными потоками.

Для описания динамики β -электронов используется кинетическое уравнение Власова

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial t} + \vec{u}_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial \vec{r}} + \frac{e}{c} [\vec{u}_\beta \times \vec{H}] \frac{\partial f_\beta}{\partial \vec{p}_\beta} = Q_\beta,$$

где $f_\beta(\vec{r}, \vec{p}_\beta, t)$, $Q_\beta(\vec{r}, \vec{p}_\beta, t)$, \vec{u}_β , \vec{p}_β – функции распределения и мощности источника β -электронов, их скорость и импульс, соответственно. Оно приведено с учетом того, что при данном ядерном взрыве можно пренебречь столкновением и торможением β -электронов на частицах среды и друг с другом, так как соответствующие времена столкновений много больше рассматриваемых в задаче времен. Дополнительно, пренебрегается влиянием на β -токи поляризованного электрического поля.

Изотропным источником β -электронов являются осколки деления продуктов ядерного взрыва. При его описании используется следующая формула

$$\begin{aligned} Q_\beta(\vec{r}, \varepsilon_\beta, t) &= 1,82 \cdot 10^{-2} n_{\text{ПВ}}(\vec{r}) \times \\ &\times \begin{cases} \left(9,34 \cdot 10^{-2} + 0,5 \left(1 - \frac{\varepsilon_\beta}{0,4} \right)^8 \right) \phi(\varepsilon_\beta, t), & 0 \leq \varepsilon_\beta \leq 0,4 \text{ МэВ}, \\ 9,54 \cdot 10^{-2} \cdot \exp(-0,1 |\varepsilon_\beta - 1|^{1,98}) \phi(\varepsilon_\beta, t), & 0,4 < \varepsilon_\beta \leq 10 \text{ МэВ}, \end{cases} \\ \phi(\varepsilon_\beta, t) &= \frac{\exp\left\{ t^{0,4} \ln \left[(0,736 - 0,061 \varepsilon_\beta)(1+b) \right] \right\}}{1+bt}, \\ b &= 0,57 + 0,11 |\varepsilon_\beta - 1|^{1,4}, \end{aligned}$$

где $n_{\text{ПВ}}$ – концентрация осколков деления продуктов ядерного взрыва, ε_β выражено в МэВ. В ней интерполяционная зависимость от энергии получена Кондратьевым В. А. и Матвиенко Ю. И. (РФЯЦ-ВНИИТФ) по результатам расчетов и соответствует экспериментальным данным [5].

Численное решение системы уравнений шестипотоковой МГД по методике «ГИМ» [6] рассмотрено в докладе [2]. При этом используется метод расщепления по физическим процессам. Расчет одного шага по времени разделяется на следующие этапы: расчет уравнений газодинамики для всех потоков; решение уравнения адвекции для всех потоков; расчет обменов между потоками; расчет изменения магнитного поля.

Так как β -токи при космическом ЯВ опыта «Морская звезда» пренебрежимо мало влияют на МГД, расчет динамики β -электронов осуществляется отдельно с использованием результатов МГД расчета. Пространственные распределения плотности продуктов взрыва и напряженности магнитного поля передаются в методику расчета кинетического уравнения для β -электронов в магнитном поле [4], основанную на методе Монте-Карло.

2. Постановка и результаты расчетов

Расчеты опыта «Морская звезда» были выполнены в двумерной («секторный» расчет «Т-2D») и трехмерной (расчет «Т-3D») постановках. В двумерном расчете магнитное поле было направлено вдоль поверхности Земли, учитывалась зависимость плотности атмосферы от высоты.

В работе [7] представлены фотографии светящихся областей, полученных в опыте. На рис. 1 показано сравнение расчета и эксперимента на момент времени 1 с. Видно, что имеются три светящиеся области. Первая область имеет серповидную форму и вызвана движением ударной волны в атмосфере. Вторая область имеет вид струи, направленной вдоль геомагнитного поля. Свечение этой

струи вызвано продуктами взрыва. Третья область расположена в нижних слоях атмосферы и обусловлена рентгеновской ионизацией.

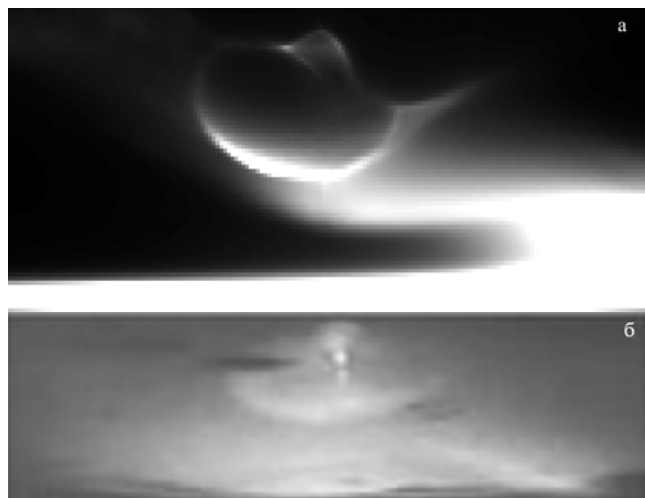


Рис. 1. Светящиеся области в расчете (а) и опыте (б)

В опыте «Морская звезда» в область взрыва были запущены контрольные ракеты («Р-2», «Р-3», «Р-4», «Р-6», «Р-7») в плоскости, проходящей через остров Джонстон и магнитный меридиан. Их траектории и положение в момент ядерного взрыва показаны на рис. 2 [3]. Три из пяти ракет пролетали через магнитную каверну, образуемую разлетающимся облаком плазмы. На борту каждой ракеты находился магнетометр и измеряющие потоки β -электронов датчики.

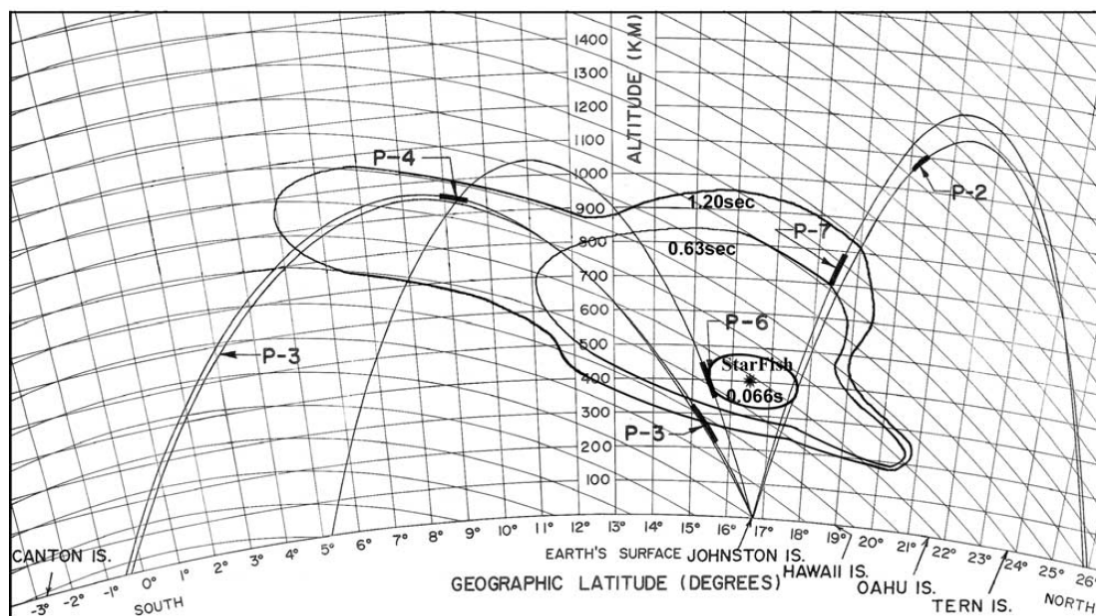


Рис. 2. Траектории контрольных ракет, линии геомагнитного поля и форма расширяющейся магнитной каверны в плоскости, проходящей через остров Джонстон и магнитный меридиан

На рис. 3 представлены полученные в расчете «Т-3D» распределения магнитного давления в меридиональной плоскости, проходящей через центр ЯВ (на этих рисунках и далее в текущем разделе h – высота, x – направление с юга на север Земли; центр ЯВ в точке с координатами $(0, 0)$). По этим данным магнитная каверна расширяется до момента времени ~ 2 с и после этого происходит ее сжатие до момента времени 5 с. Аналогичная динамика магнитного поля наблюдалась и в эксперименте: на рис. 2, 4 представлено схематичное изображение границ магнитной каверны на различные моменты времени, восстановленное по данным датчиков ракет [3].

Количественное сравнение результатов расчетов и экспериментальных данных для датчиков магнитного поля контрольных ракет показано на рис. 5 (B_0 – невозмущенное геомагнитное поле). Ударная волна, как в расчете, так и в эксперименте, достигает ракеты «Р-2» в момент времени 0,5 с после ЯВ. Струя продуктов взрыва, летящая вдоль магнитного поля, достигает ракеты «Р-4», которая находилась на расстоянии более 1000 км от точки взрыва, примерно за 1 с. Для датчика «Р-6», расположенного вблизи точки взрыва, данные измерений приведены только на моменты времени более 2,5 с после ЯВ. Они хорошо соответствуют расчетным данным и указывают на существенное вытеснение магнитного поля в месте расположения ракеты.

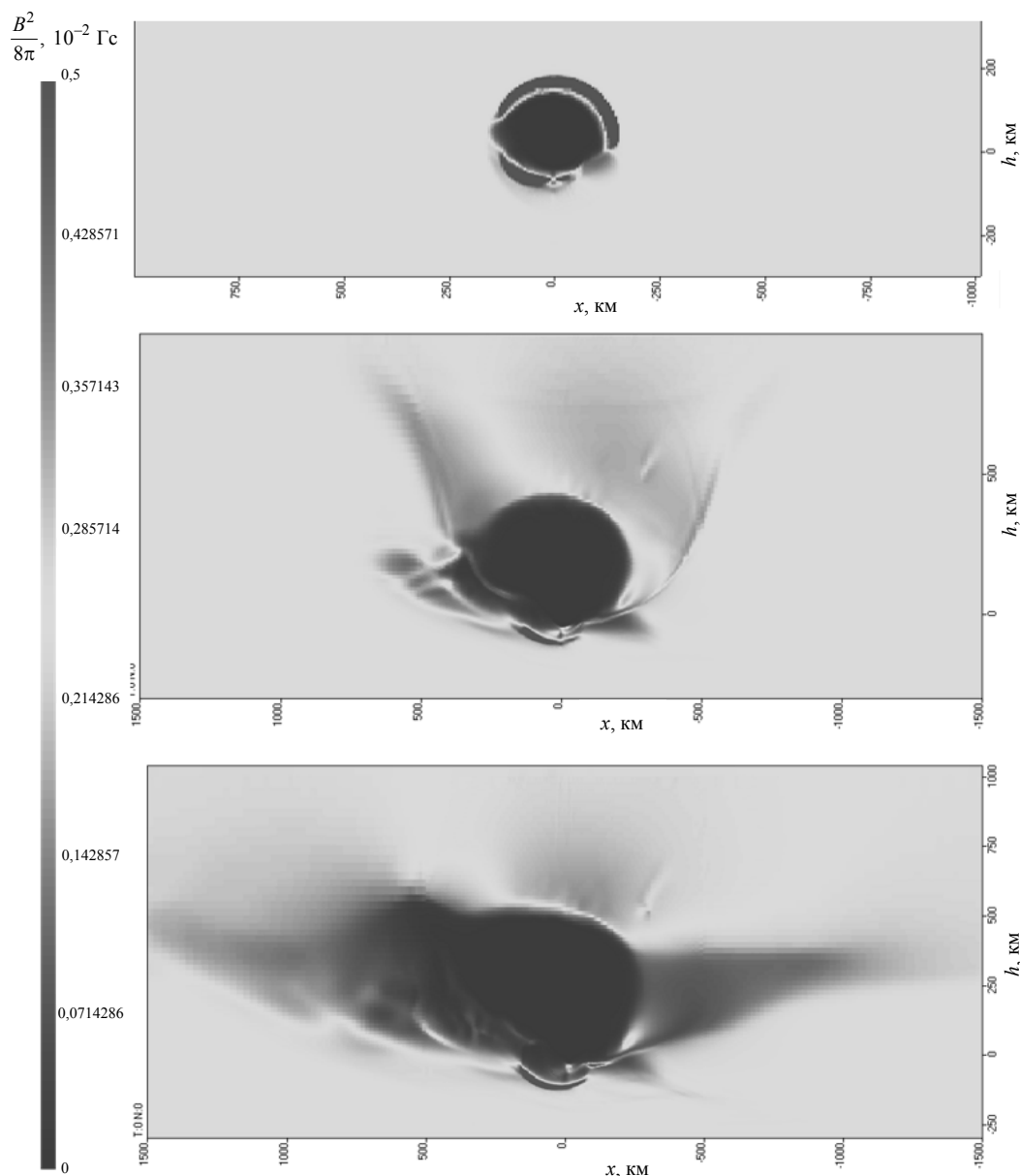


Рис. 3. Магнитное давление в меридиональной плоскости через 0,1; 0,5; 1; 2; 5 с после ЯВ (см. также с. 51)

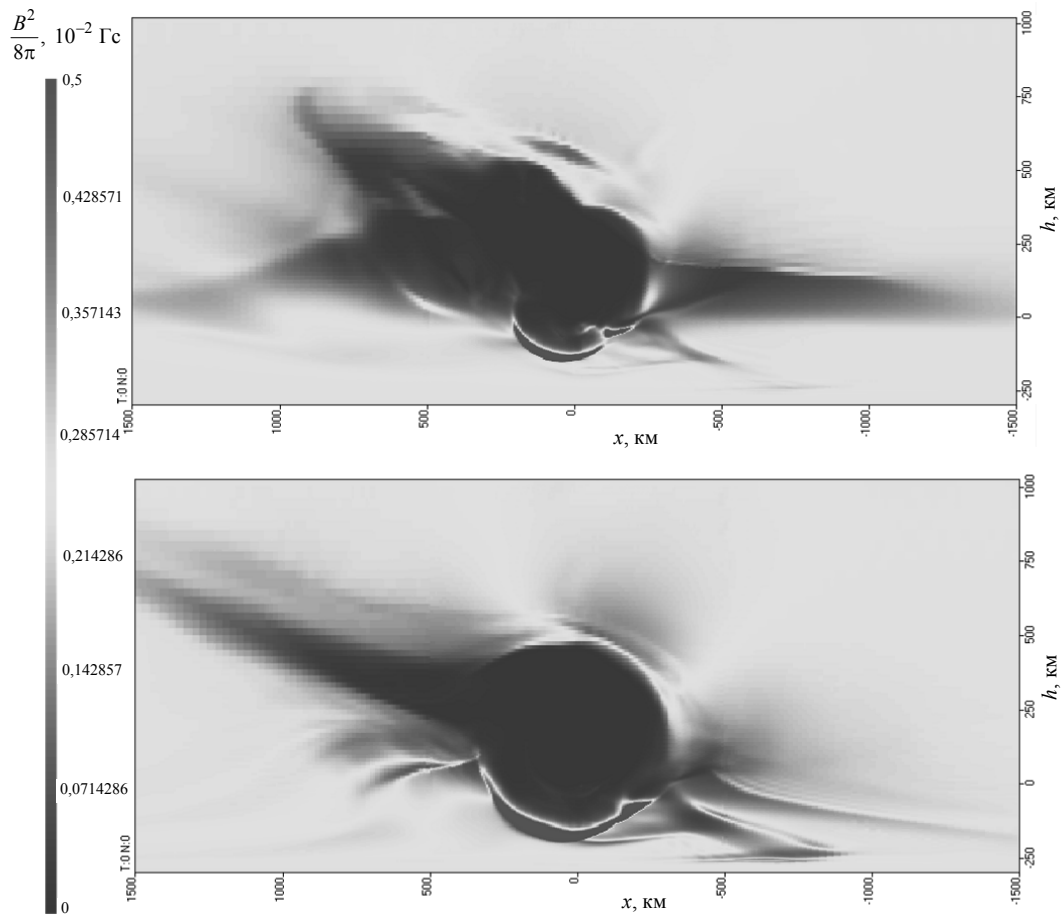


Рис. 3. Окончание

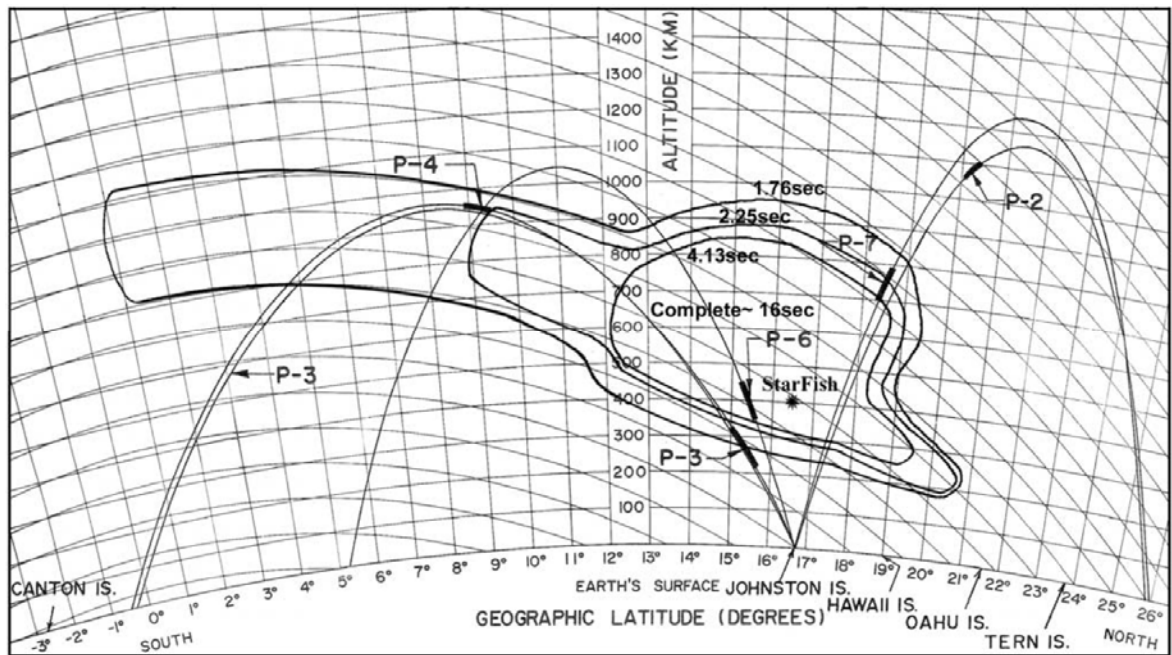


Рис. 4. Границы магнитной каверны во время фазы ее схлопывания [3]

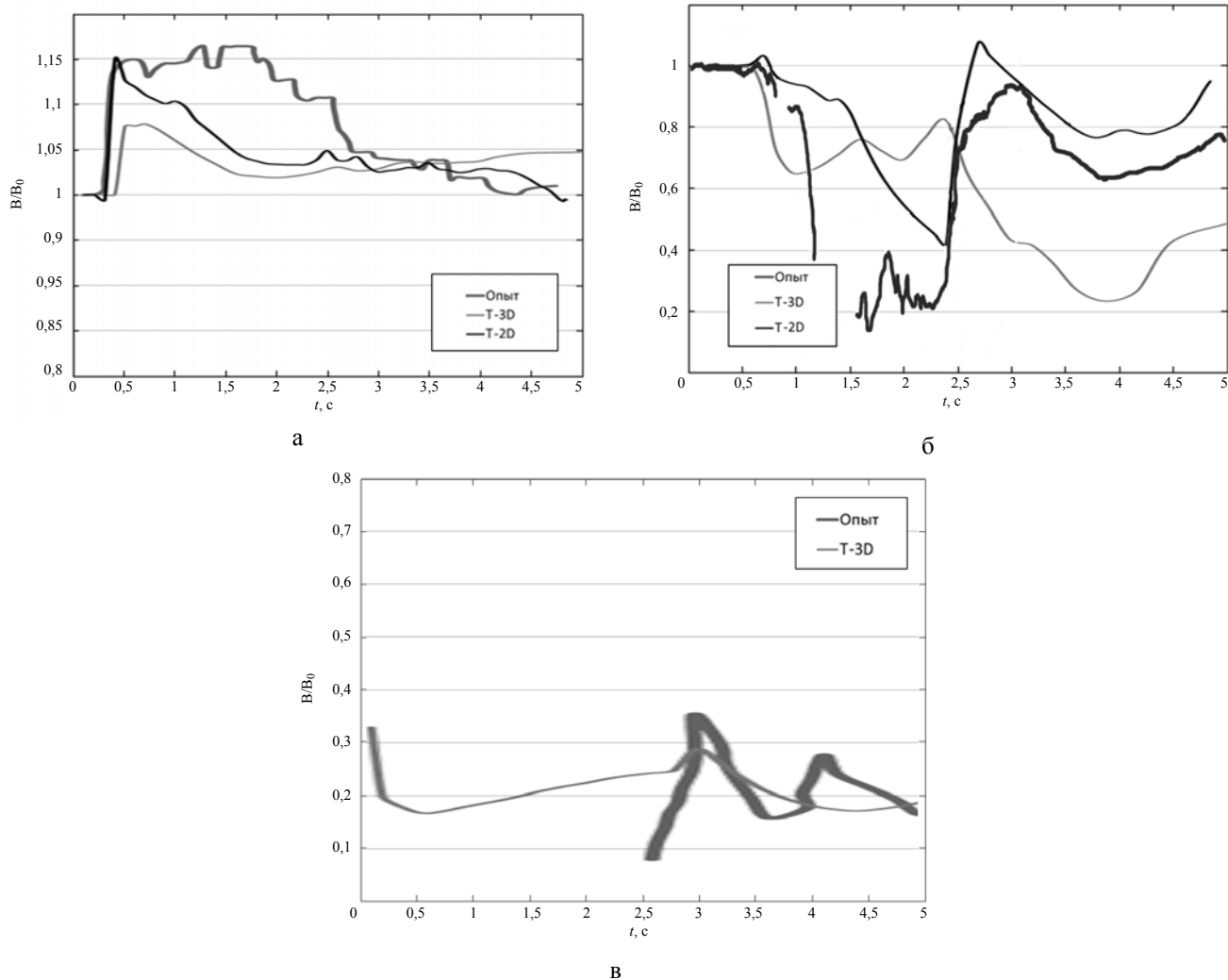


Рис. 5. Показания магнитного датчика ракеты «P-2» (а), «P-4» (б), «P-6» (в)

Наблюдаемые в опыте «Морская звезда» эффекты, связанные с распределением β -потоков, носят преимущественно трехмерный характер. Однако с помощью двумерных расчетов возможна оценка характеристик β -излучения в магнитной каверне на начальной квазидвумерной стадии, длящейся ~ 1 с после ЯВ.

С использованием полученных в двух выше представленных многопоточковых МГД расчетах («T-2D», «T-3D») данных проведены соответствующие осесимметричные расчеты характеристик β -излучения (расчет «2b», «3b»). Для расчета «3b» из результата расчета «T-3D» взяты МГД данные с верхней полуплоскости меридионального сечения; при этом ось симметрии направлена вдоль магнитного поля через центр ЯВ.

Основной целью двумерного расчета «2b» было получение (с точностью до ~ 2 раз) распределений характеристик β -электронов в магнитной ка-

верне. Это связано с тем, что данный расчет соответствует проходящей через центр ЯВ верхней меридиональной полуплоскости – в нем менее чем в 2 раза завышаются размеры магнитной каверны.

В свою очередь, в расчете «2b» пренебрегается наклоном линий магнитного поля к поверхности Земли и, как следствие, отсутствует наблюдаемая в опыте и расчете «T-3D» струя продуктов взрыва в южном направлении, которая обеспечивает приход β -электронов на датчик «P-4» через $\sim 0,5$ с после ядерного взрыва. Расчет «3b» был выполнен, в частности, с целью исследования этого эффекта.

На рис. 6, 7 представлены распределения всесторонних потоков j_β β -электронов на различные моменты времени, полученные в результате расчетов «2b» и «3b». На этих рисунках стрелками помечены места нахождения ракет, измеривших существенные потоки.

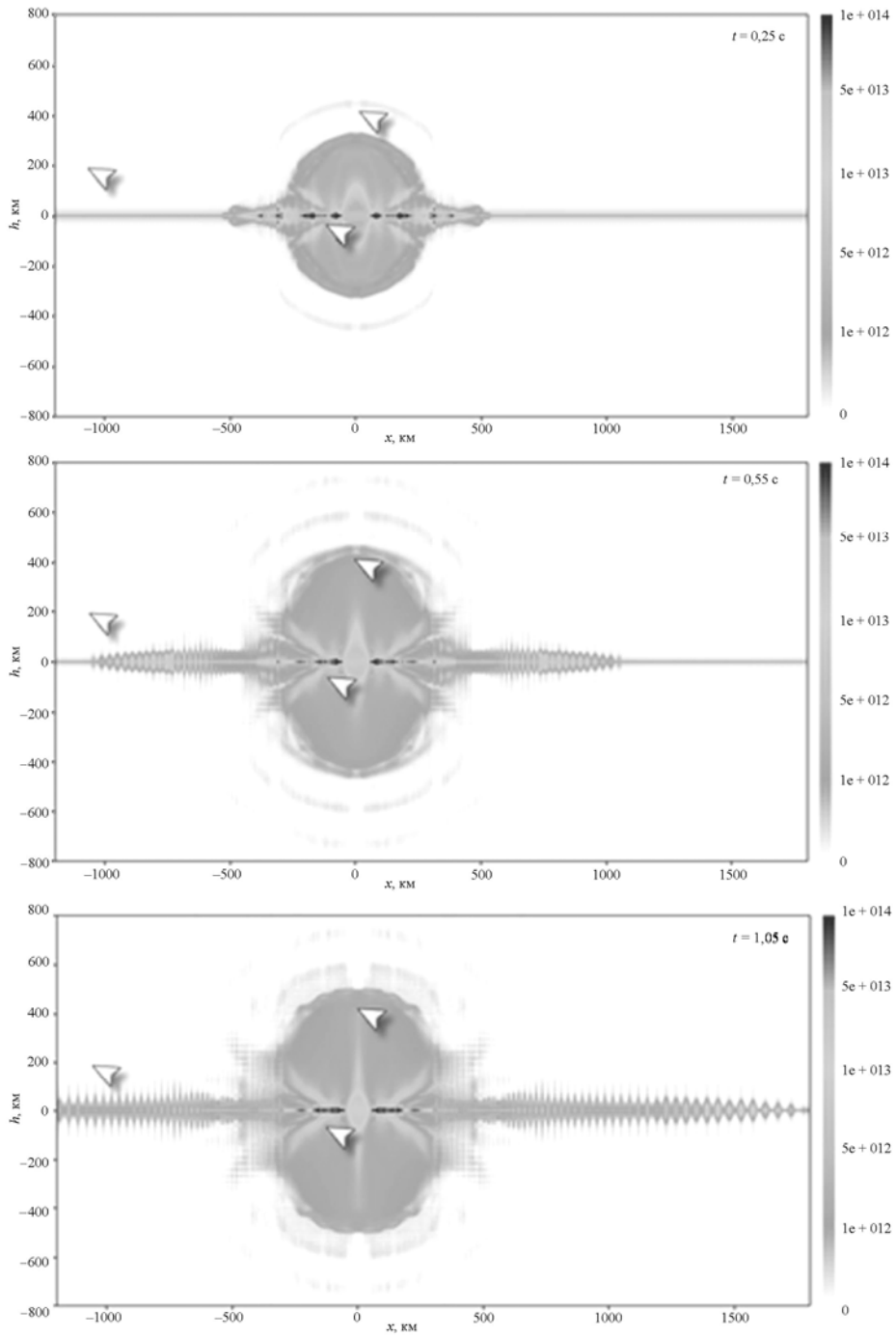


Рис. 6. Распределение всесторонних потоков β -электронов j_{β} [$\text{см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$] через 0,25; 0,55; 1,05 с после ЯВ (расчет «2b»)

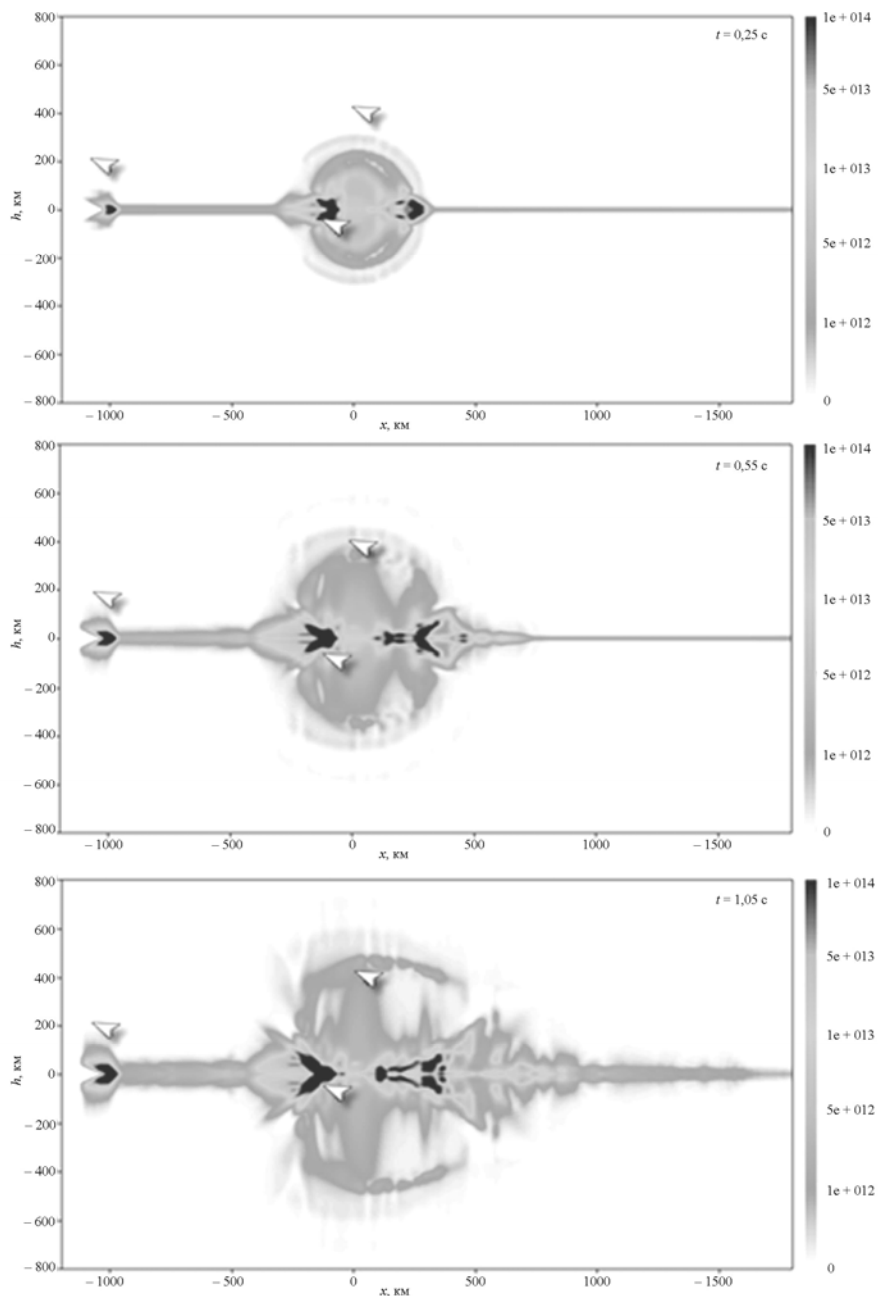


Рис. 7. Распределение всесторонних потоков β -электронов j_{β} [$\text{см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$] через 0,25; 0,55; 1,05 с после ЯВ (расчет «3b»)

На рис. 8 показано сравнение всесторонних потоков, зарегистрированных ракетами «Р-4», «Р-6» «Р-7», и полученных в результате расчетов «2b» и «3b». При построении расчетных показаний датчика «Р-4» учитывалась кривизна силовых линий магнитного поля (учет которой отсутствует в двумерных расчетах) – в этом случае ракета находится на расстоянии около 100 км от оси симметрии расчетной геометрии задачи.

Так как в силу двумерного характера расчетов «2b» и «3b» точность рассчитанных β -потоков изначально не превышает двух раз, то видно, что удалось получить удовлетворительное согласие расчетных и экспериментальных данных.

Результаты данных расчетов, показывают, что β -область, имея до момента времени $\sim 0,3$ с близкую к шарообразной форму, постепенно замедляясь, расширяется со скоростью в несколько сот километров в секунду, соответствующей скорости движения облака заряженных частиц продуктов взрыва.

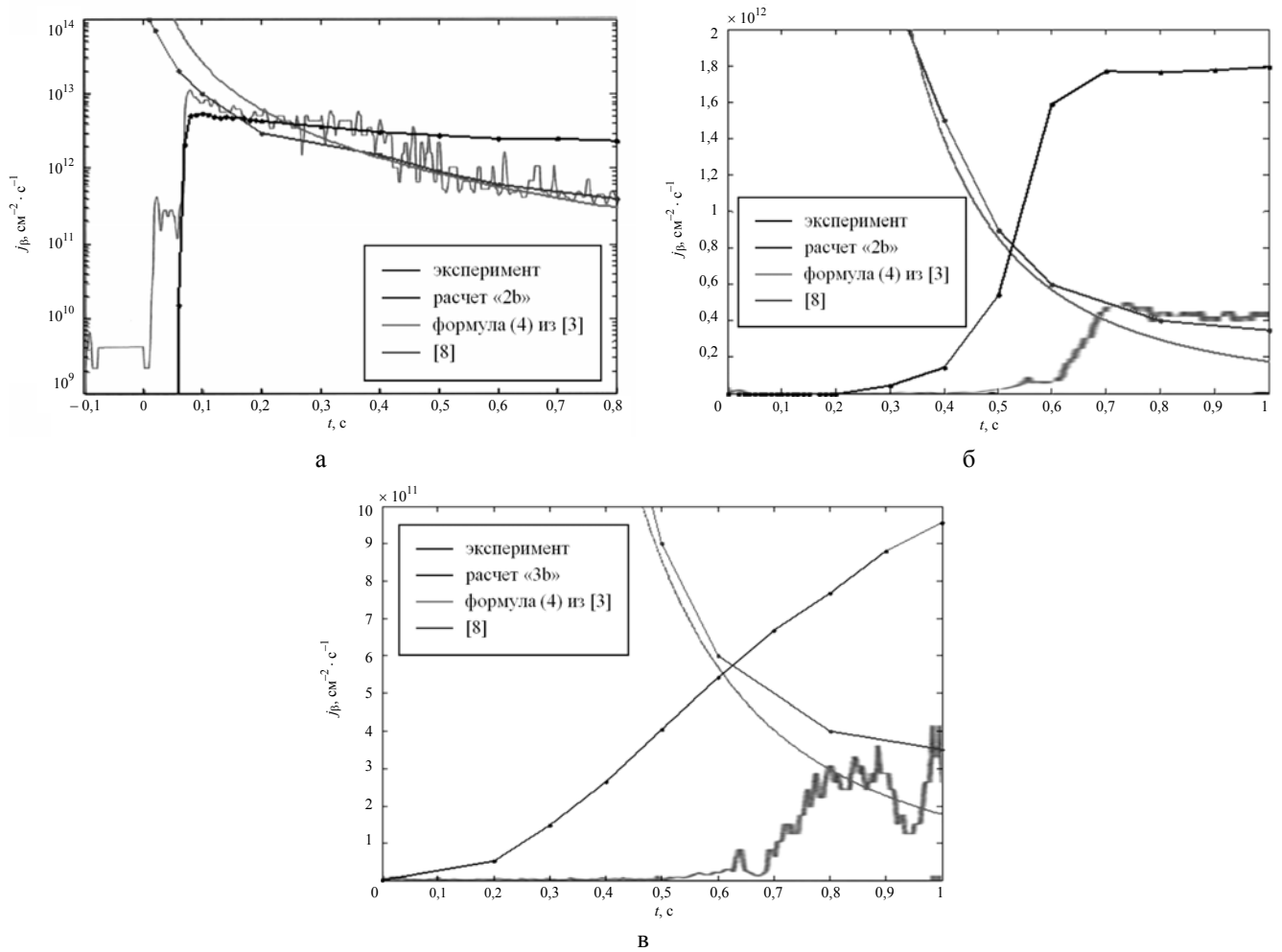


Рис. 8. Всесторонний поток β -электронов для ракет «P-6» (а), «P-7» (б), «P-4» (в)

Распределение β -электронов в магнитной каверне носит неравномерный характер. Большая, чем в расчете «2b», неоднородность β -потоков в расчете «3b» связана, преимущественно, с наклоном линий магнитного поля относительно поверхности Земли в расчете «Т-3D». В свою очередь, даже в расчете «2b» всесторонние потоки электронов существенно меняются от $\sim 10^{12} \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$ (на периферии каверны) до $\sim 10^{13} \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$ (в районе центра ЯВ).

На рис. 9 представлены в зависимости от времени интегральные количества β -электронов, испущенных продуктами взрыва, находящихся в счетной области, и ушедших в область невозмущенного геомагнитного поля. Из него следует, что в каверне на рассматриваемом промежутке времени (от 0 до 1 с после ЯВ) удерживается большая часть испущенных продуктами взрыва β -электронов. Их количество в областях, ограниченных сферами различных радиусов с центром в точке ЯВ приведено в таблице.

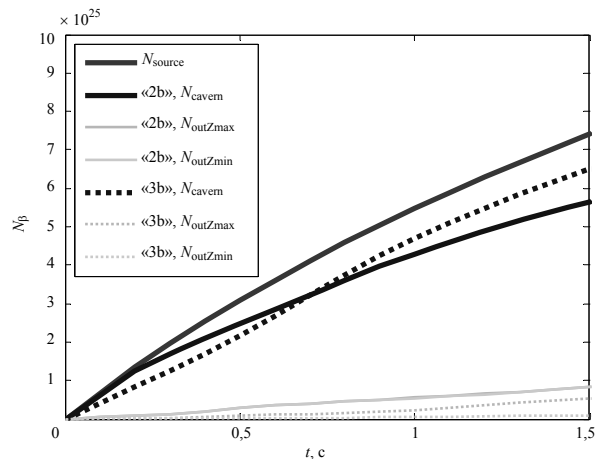


Рис. 9. Количество β -электронов N_β в зависимости от времени: испущенных продуктами взрыва (N_{source}); находящихся в магнитной каверне (N_{cavern}); ушедших из магнитной каверны вдоль геомагнитных силовых линий вверх от Земли (N_{outZmax}); вниз к Земле (N_{outZmin})

Количество β -электронов в областях, ограниченных сферами различных радиусов с центром в точке ЯВ, через 1 с после ЯВ (расчет «2b»)

R, км	300	400	500	600	Всего
$N_{\beta}, 10^{25} \text{ см}^{-3}$	1,4	2,5	3,5	3,8	5,6

Остальная часть β -излучения уходит преимущественно вдоль силовых линий магнитного поля по узкой (сравнительно с размерами магнитной каверны) трубке тока (радиусом менее 50 км) – что согласуется с оптическими наблюдениями в магнитосопреженных областях и отсутствием сигнала на датчике электронов ракеты «Р-4» в первые полсекунды после ЯВ. Средняя расчетная энергия β -электронов в магнитной каверне составляет $\sim 1,6$ МэВ (рис. 10).

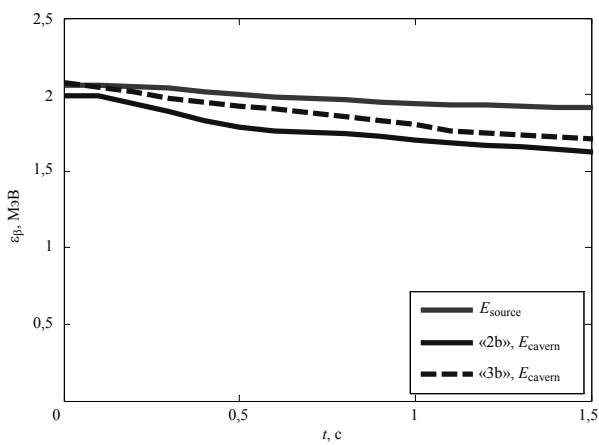


Рис. 10. Средняя энергия β -электронов в зависимости от времени: испущенных продуктами взрыва (E_{source}); находящихся в магнитной каверне (E_{cavern})

Представленные оценки эффективности захвата большей части β -электронов в магнитной каверне на масштабах времени ~ 1 с после ЯВ отличаются от полученных на основе экспериментальных наблюдений в работе [3] примерно в 6 раз. В ней на основе дополнительного предположения о равномерности величин β -потоков в магнитной каверне делается заключение о захвате в сфере с центром в точке ЯВ и радиусом 400 км около 5 % β -электронов от испущенных продуктами взрыва. Однако представленные в данной работе результаты расчетов свидетельствуют о неточности такого предположения и соответствуют имеющимся экспериментальным данным.

Данное предположение было бы оправдано, если бы на стадии расширения магнитной каверны из всего ее объема магнитное поле вытеснялось до такой степени, чтобы внутри нее β -электроны двигались свободно. Однако, исходя из расчетов и экспериментальных показаний датчиков, вытеснение поля на расстоянии больше 100 км от центра ЯВ происходит до величин больше $\sim 0,005$ Гс. В таком магнитном поле β -электроны имеют ларморовский радиус преимущественно менее 20 км, который более чем на порядок меньше размера магнитной каверны. Следовательно, это обстоятельство на фоне близкого к сферическому разлета излучающих β -электронов продуктов взрыва приводит к тому, что β -потоки в магнитной каверне имеют большее значение вдоль магнитной силовой линии и перпендикулярной к ней плоскости, проходящих через центр ЯВ (см. рис. 9, 10).

На рис. 8 зелеными и красными кривыми (см. цветную вкладку) показаны результаты работ [2, 8]. Эти результаты получены с использованием ряда модельных представлений, однако, как видно из приведенных рисунков, согласуются (с точностью до нескольких раз) как с данными опыта, так и с данными описанных выше детальных расчетов.

Более подробное рассмотрение некоторых модельных подходов к решению рассматриваемой задачи предполагается провести в отдельной работе.

Выводы

В целом, по результатам проведенных расчетов можно заключить, что для стадии расширения магнитной каверны ядерного взрыва «Морская звезда» получены параметры возмущений магнитного поля и потоки β -электронов, соответствующие экспериментальным данным.

Показано, что динамика магнитной каверны на этом этапе имеет трехмерный характер, и ее форма существенно изменяется даже на масштабах времени порядка 1 с. Распределение в ней β -электронов со средней энергией ~ 2 МэВ носит существенно неравномерный характер и основная их часть сосредоточена вблизи центра ядерного взрыва. На стадии расширения магнитной каверны из нее в область искусственного радиационного пояса уходит менее половины от испущенных радиоактивными продуктами взрыва β -электронов.

Получение характеристик β -области на последующей стадии схлопывания магнитной каверны и далее требует реализация трехмерной методики расчета движения релятивистских электронов в магнитное поле.

Список литературы

1. Жмайло В. А., Анисина И. М., и др. Физические эффекты ядерного взрыва в операции «Морская звезда» // Труды РФЯЦ-ВНИИЭФ. 2008. Т. 13. С. 16–37.

2. Соболев И. В. Многомерные методики решения задач многопоточковой газодинамики в переменных Эйлера на неструктурированных сетках // «Супервычисления и математическое моделирование. Труды XIII Международного семинара», Саров, 2011.

3. Dyal P. Particle and field measurements of the Starfish diamagnetic cavity // J. of Geophys. Res. 2006. Vol. 111.

4. Иванов А. Н., Иванов Н. В. Моделирование методом Монте-Карло траекторий электронов в магнитной каверне электронов // VI межотраслевая конференция по радиационной стойкости. Сб. докл. Саров. 14–20 октября 2002. С. 113–120.

5. West H. I. The Beta Spectra of the Fission Products of U-235, 1 to 300 Seconds after Fission // Trans. American Nuclear Soc. 1960. Vol. 3. P. 537.

6. Соколов С. С., Панов А. И., Воропинов А. А., Новиков И. Г., Соболев И. В., Ялозо А. В. Методика ТИМ расчета трехмерных задач механики сплошных сред на неструктурированных многогранных лагранжевых сетках // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2005. Вып. 3. С. 37–52.

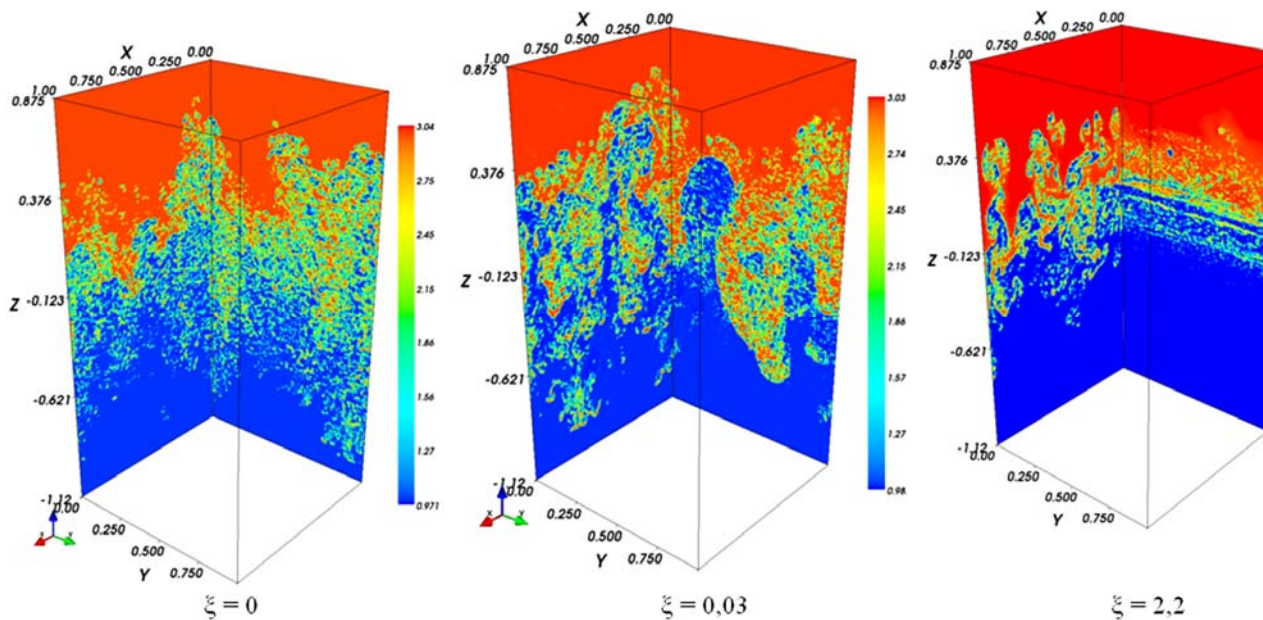
7. Berg R. A. et al. A Starfish Happening. Lockheed Missiles and Space Co., March 1967, Report Dasa-1925, AD-955681.

8. Ступицкий Е. Л., Смирнов Е. В., Куликова Н. А. Потоки β -электронов внутри магнитной плазменной каверны: расчет и сопоставление с экспериментом // Геомагнетизм и аэронавигация. 2010. Т. 50, № 6. С. 778–791.

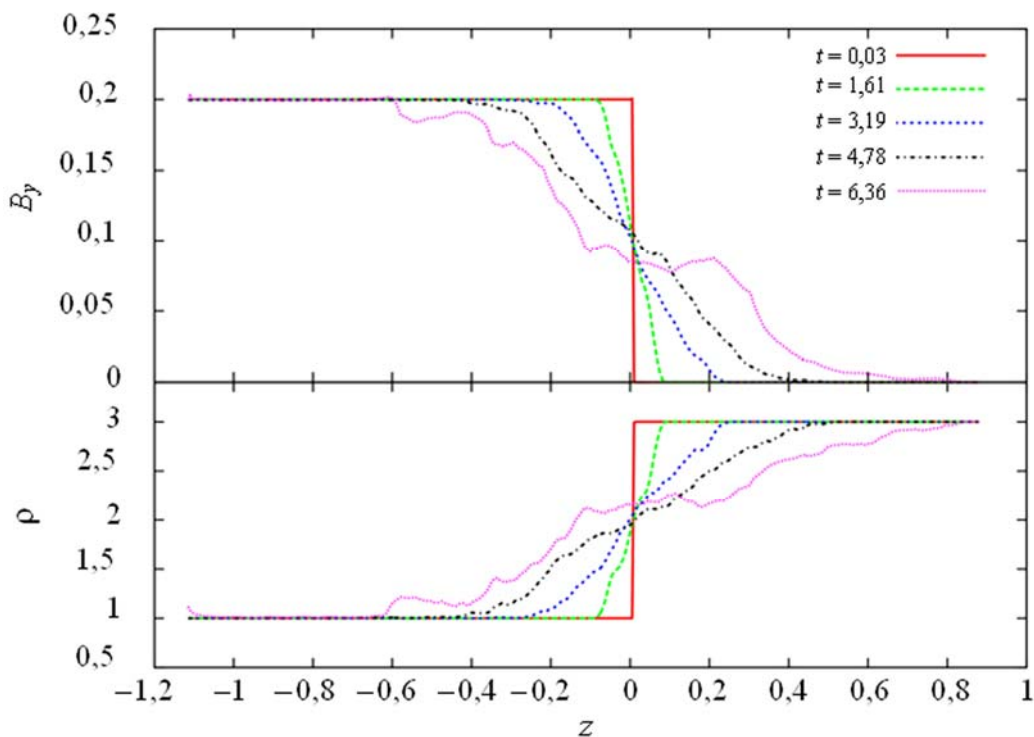
Статья поступила в редакцию 03.12.2012.

ИССЛЕДОВАНИЕ ГРАВИТАЦИОННОГО ПЕРЕМЕШИВАНИЯ В ПРИСУТСТВИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

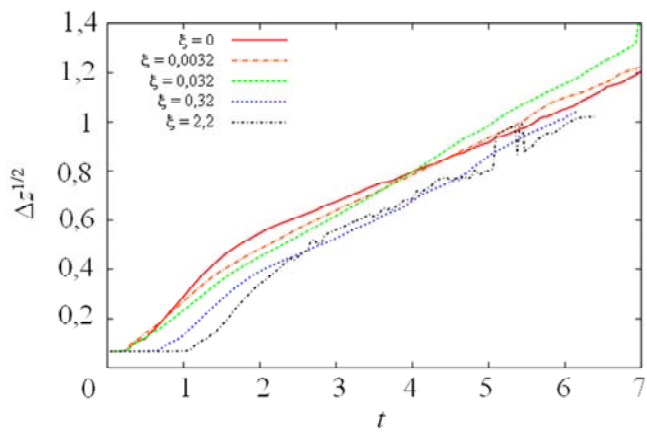
С. И. Глазырин, М. Ю. Егужова, В. А. Жмайло, В. П. Стаценко, Ю. В. Янилкин



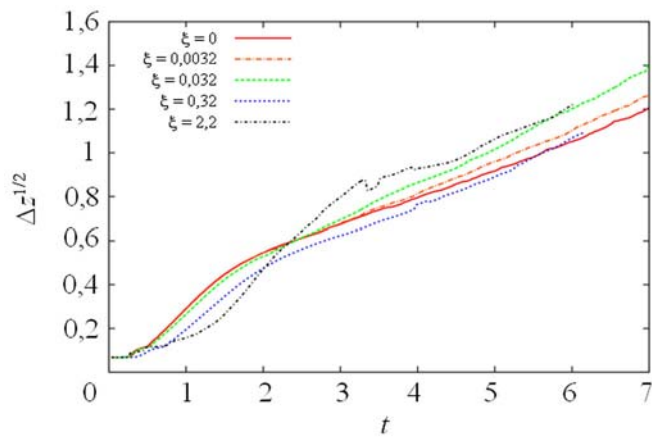
Двумерные срезы плотности для расчетов с различным магнитным полем



Последовательные профили усредненных магнитного поля и плотности
для расчета с $\xi = 0,3$, неоднородное поле

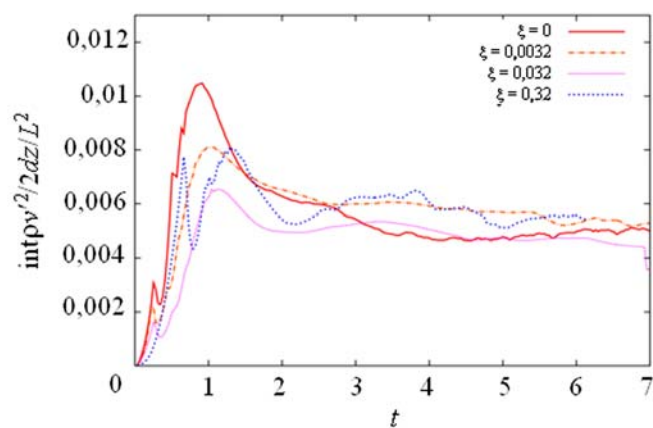


а

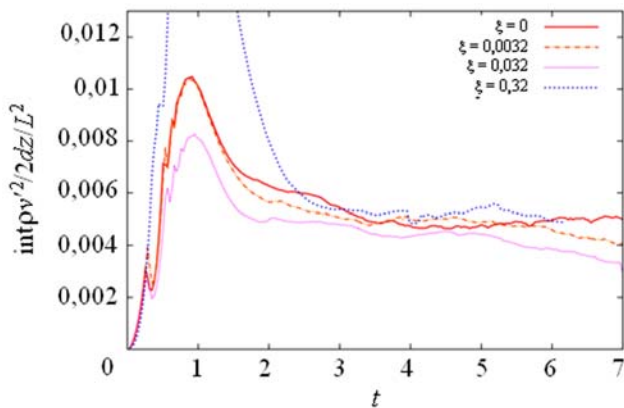


б

Зависимости ширины зоны от времени: а – однородное поле; б – неоднородное поле

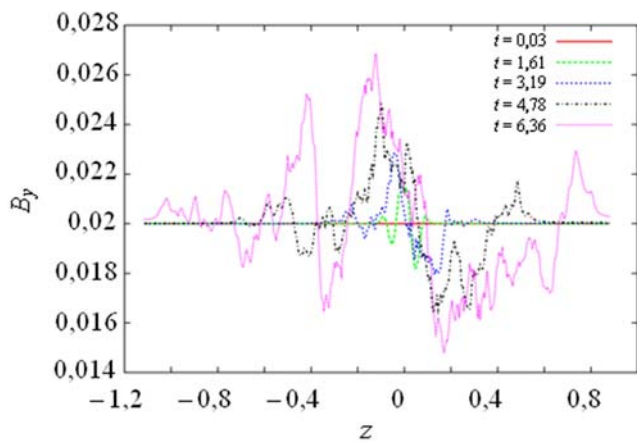


а

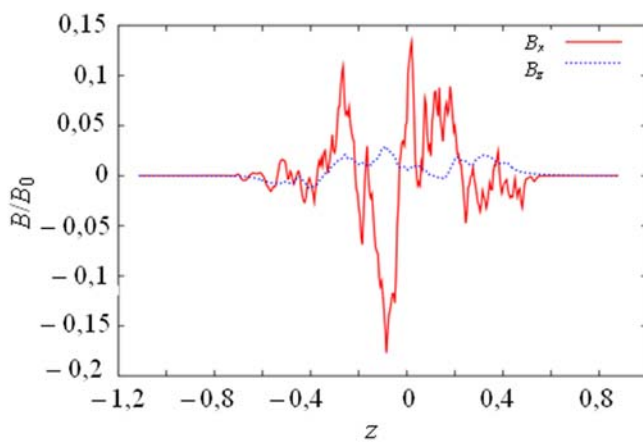


б

Зависимость нормированной турбулентной энергии от времени: а – однородное поле; б – неоднородное поле

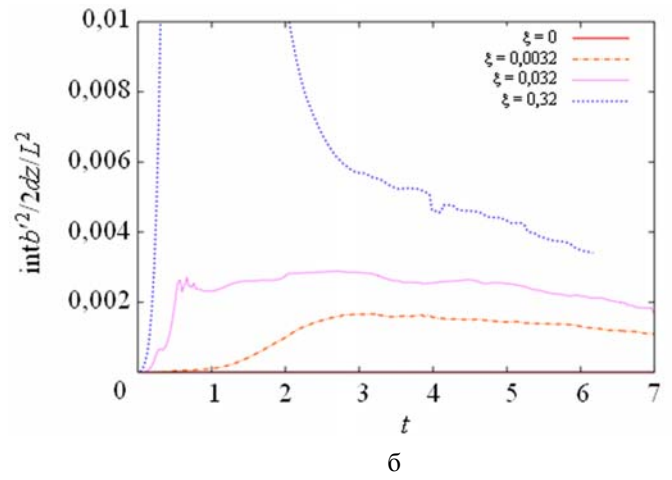
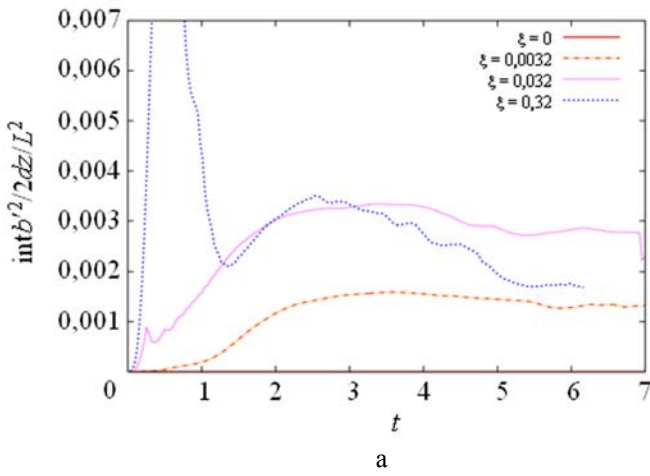


а

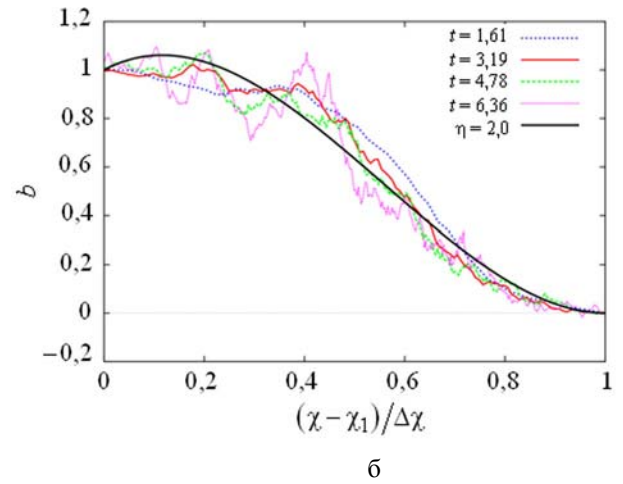
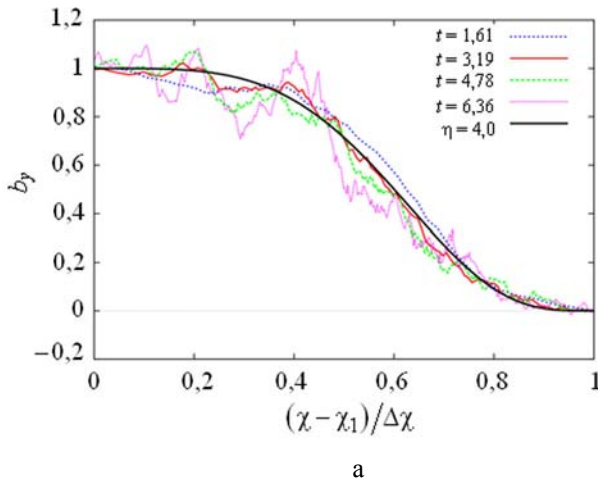


б

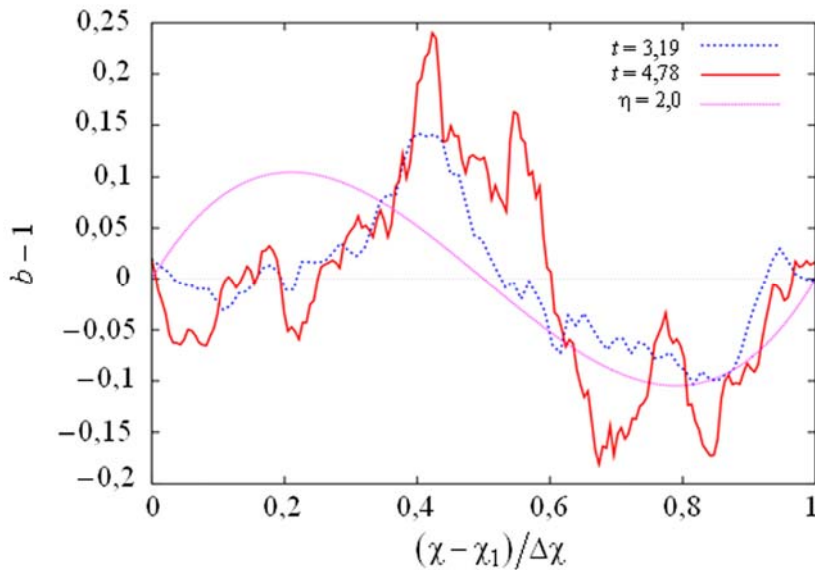
Последовательные профили усредненного магнитного поля и плотности для расчета с $\xi = 0,03$, однородное поле



Зависимость нормированной турбулентной магнитной энергии от времени:
а – однородное поле; б – неоднородное поле



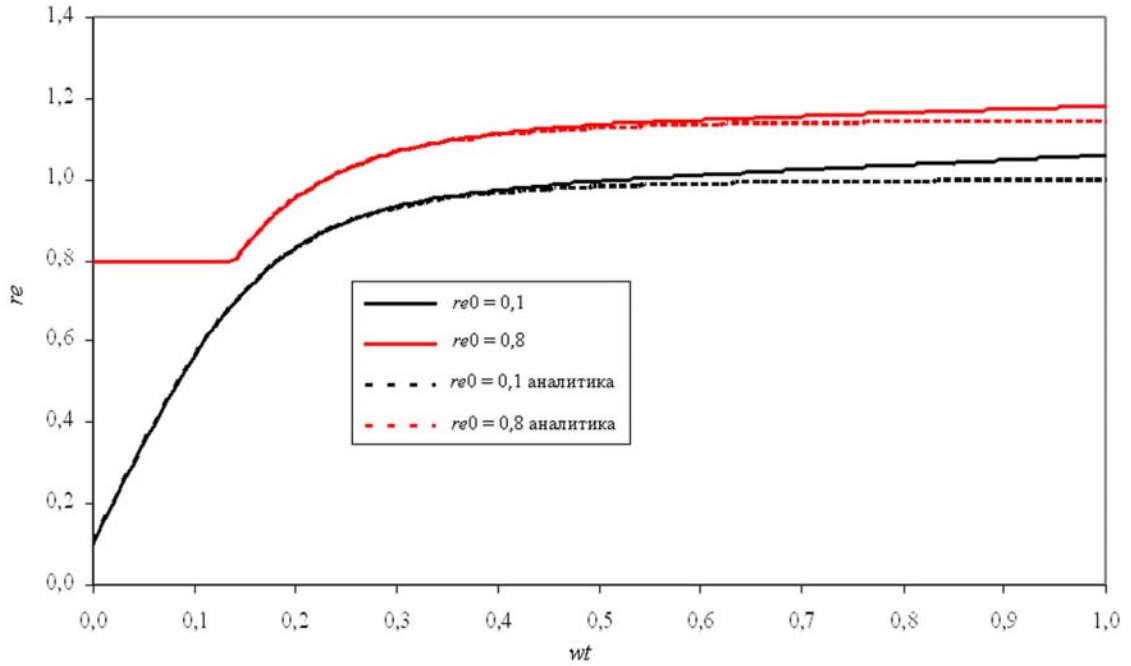
Сравнение полуфеноменологических моделей с несколькими моментами численного расчета $\xi = 0,03$:
а – модель УН; б – модель Стаценко



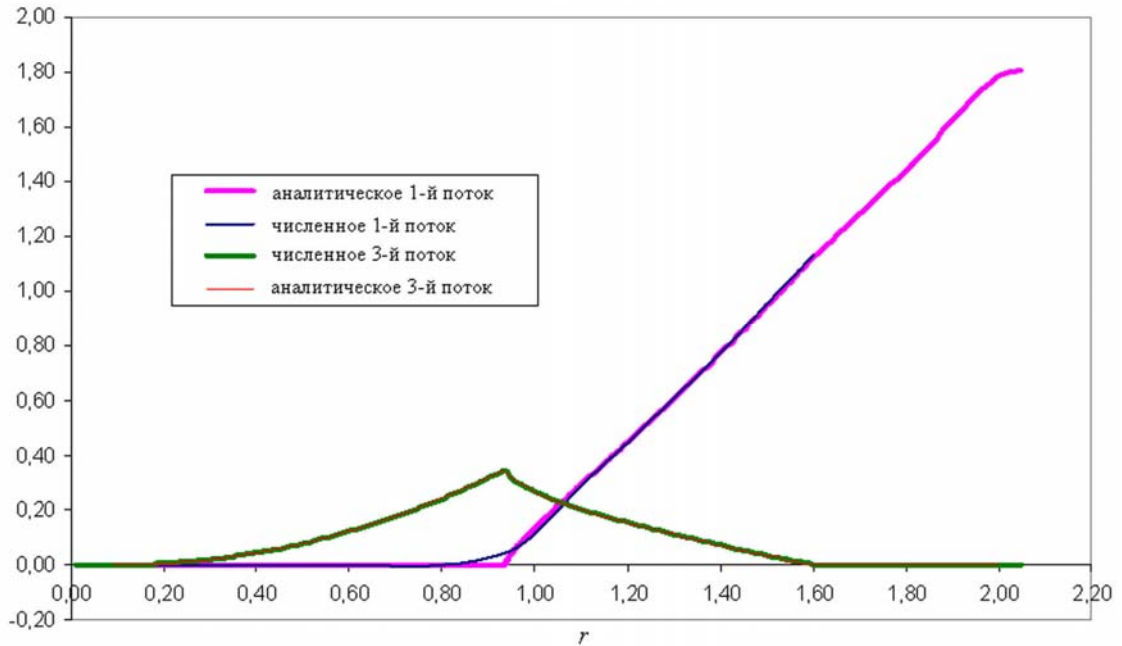
Сравнение полуфеноменологической модели Стаценко с несколькими моментами численного расчета $\xi = 0,03$ с начальным однородным полем

**МНОГОПОТОКОВАЯ МОДЕЛЬ И ЧИСЛЕННАЯ МЕТОДИКА SRG-6
ДЛЯ РАСЧЕТА ОБРАЗОВАНИЯ И ДВИЖЕНИЯ РАЗРЕЖЕННОЙ ПЛАЗМЫ
В МАГНИТНОМ ПОЛЕ. ПРИМЕНЕНИЕ К РАСЧЕТУ ЭФФЕКТОВ
ЯДЕРНОГО ВЗРЫВА «МОРСКАЯ ЗВЕЗДА»**

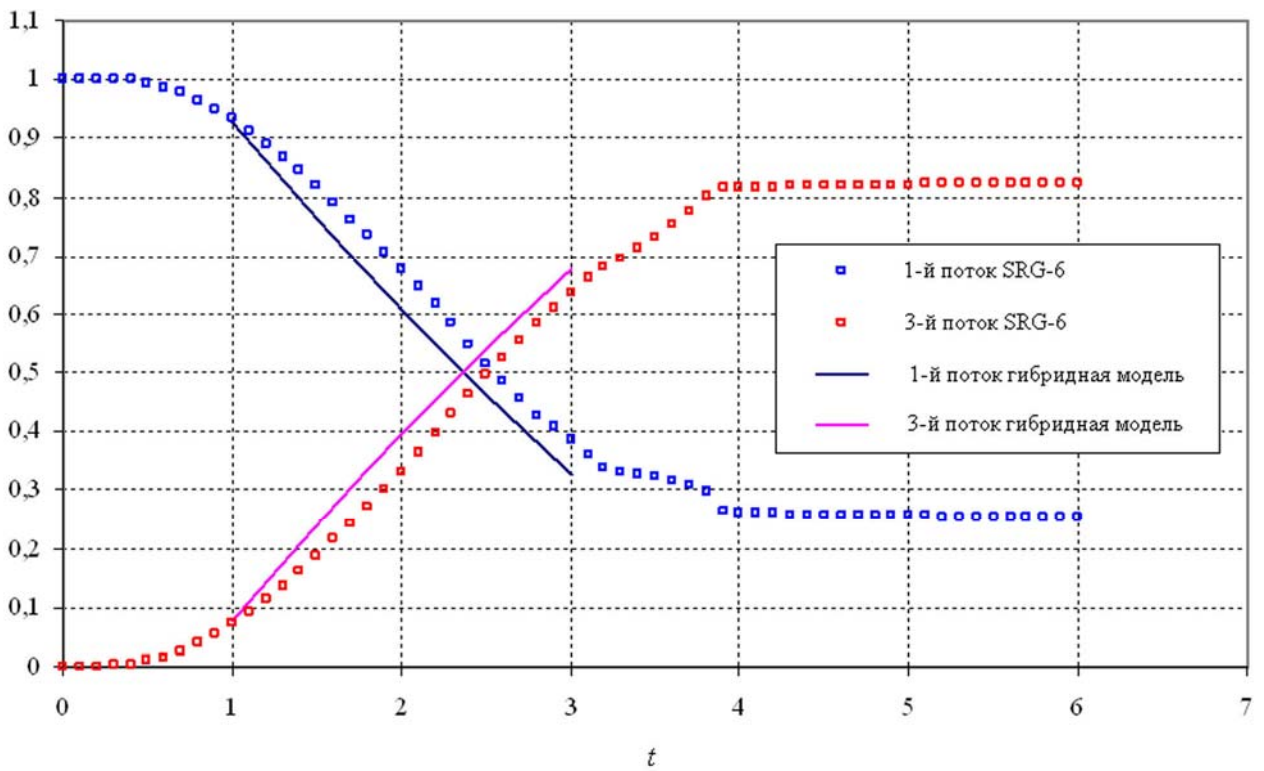
И. М. Анисина, Г. В. Долголева, В. А. Жмайло, Н. В. Тарасова



Сравнение траектории движения лагранжевых частиц электронного газа по численному и аналитическому решению. Здесь r_{e0} – начальная координата рассматриваемой частицы (электрона)



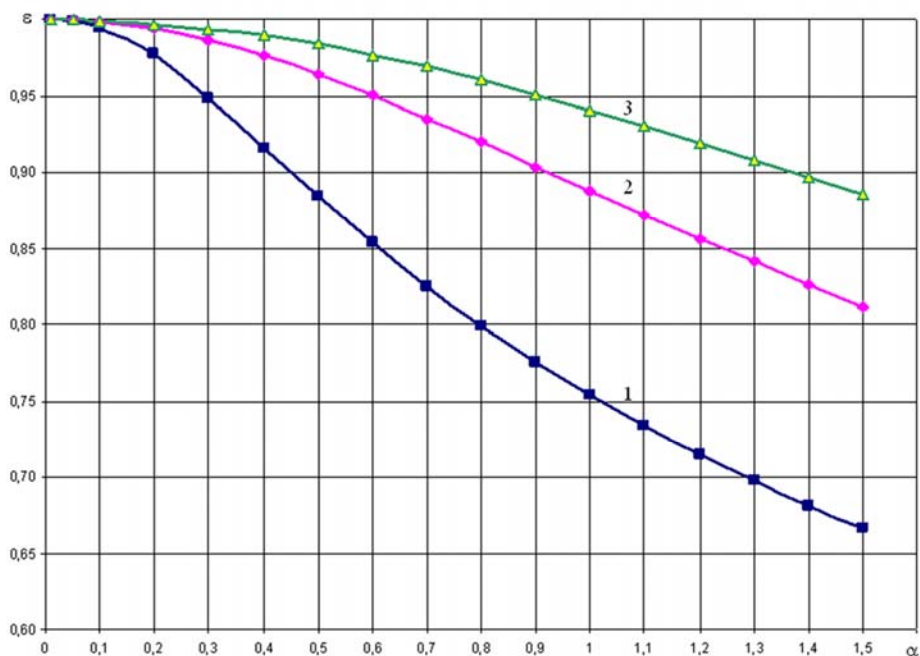
Сравнение углового момента $\Gamma_k = u_{k\phi} r_k$ потоков с аналитическим решением на момент времени 0,3



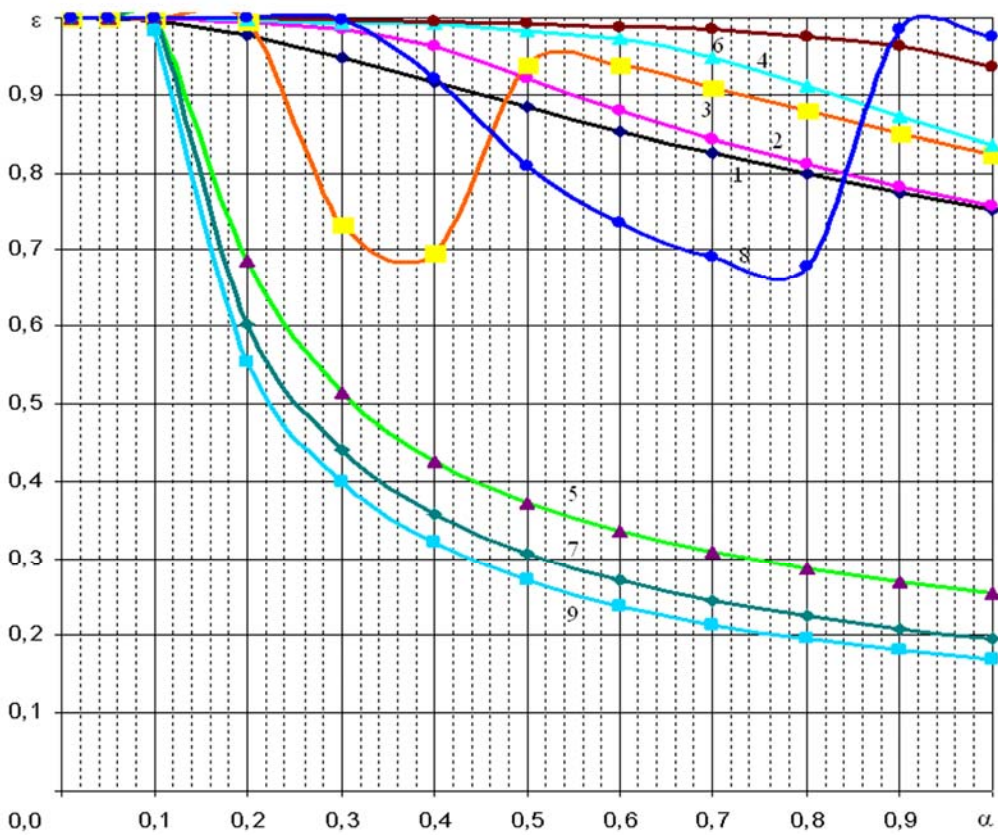
Сравнение полной кинетической энергии потоков (нормированных на начальную энергию облака плазмы) с результатами, полученными по гибридной модели

СТАЦИОНАРНЫЕ СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ ДИРАКОВСКИХ ЧАСТИЦ В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ ШВАРЦШИЛЬДА

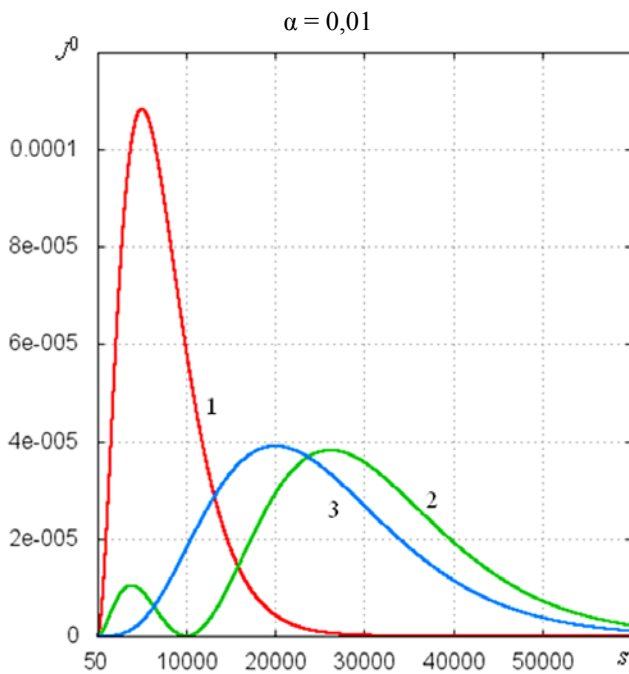
М. А. Вронский, М. В. Горбатенко, Н. С. Колесников,
В. П. Незнамов, Е. Ю. Попов, И. И. Сафронов



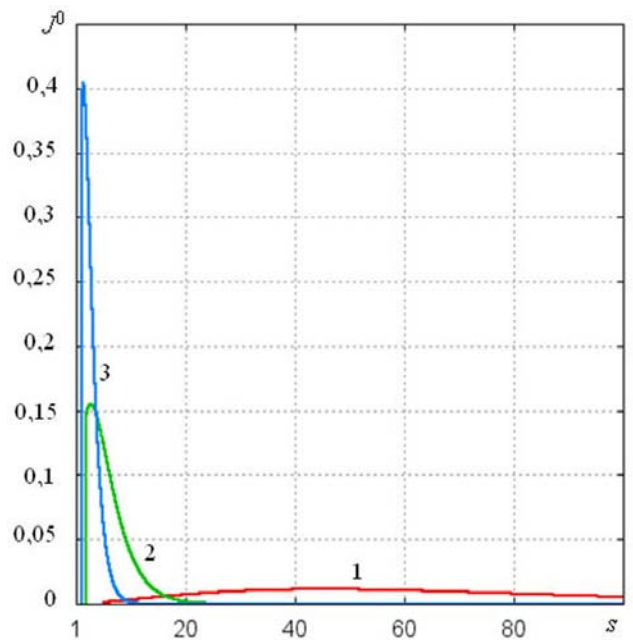
Энергетические спектры для $1S_{1/2}$, $2S_{1/2}$, $3S_{1/2}$ состояний: 1 – $n = 1$; 2 – $n = 2$; 3 – $n = 3$



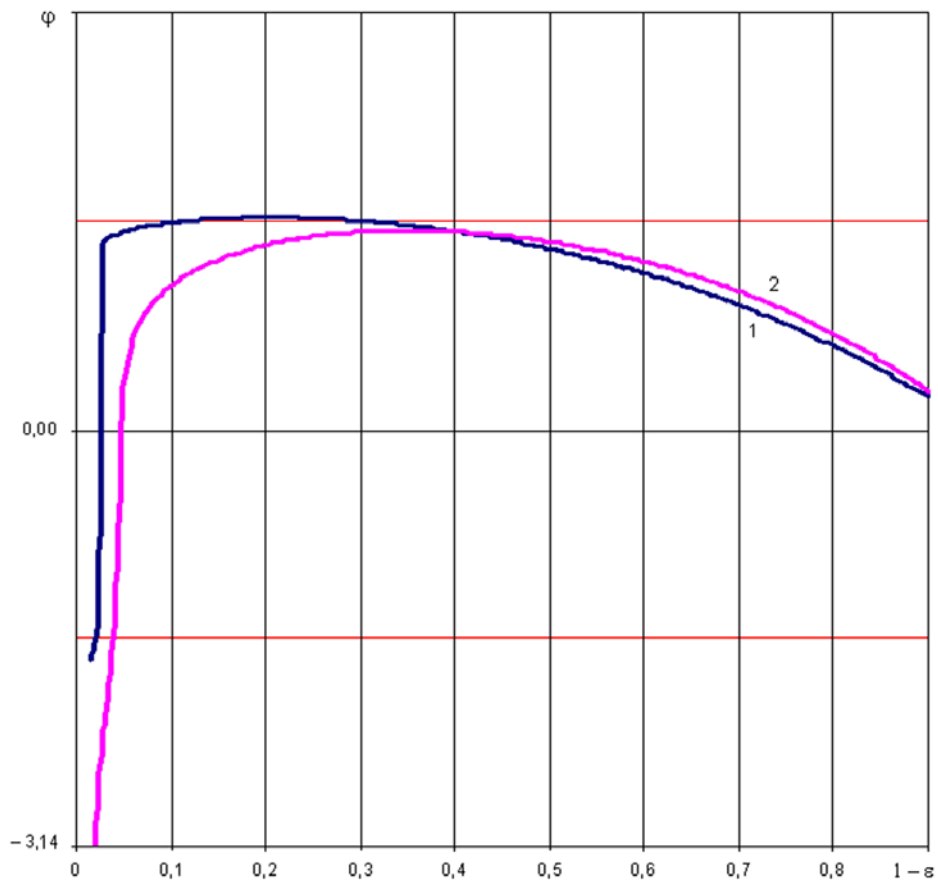
Зависимости $\varepsilon(\alpha)$ для низших уровней энергии и различных значений κ : 1 – $\kappa = -1$ ($l = 0, j = 1/2$);
 2 – $\kappa = 1$ ($l = 1, j = 1/2$); 3 – $\kappa = -2$ ($l = 1, j = 3/2$); 4 – $\kappa = 2$ ($l = 2, j = 3/2$); 5 – $\kappa = -3$ ($l = 2, j = 5/2$);
 6 – $\kappa = 3$ ($l = 3, j = 5/2$); 7 – $\kappa = -4$ ($l = 3, j = 7/2$); 8 – $\kappa = 4$ ($l = 4, j = 7/2$); 9 – $\kappa = -5$ ($l = 4, j = 9/2$)



Нормированная плотность вероятности как функция $s = \frac{\rho}{2\alpha} - 1$: 1 – $1S_{1/2}$; 2 – $2P_{1/2}$; 3 – $2S_{1/2}$



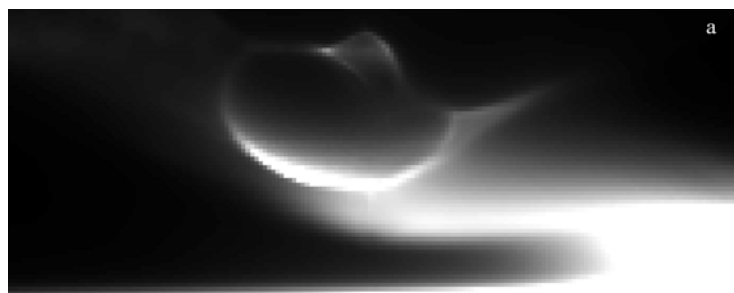
Нормированная плотность вероятности для $S_{1/2}$ -состояния и различных значений α как функция $s = \frac{\rho}{2\alpha} - 1$: 1 – $\alpha = 0,1$; 2 – $\alpha = 0,3$; 3 – $\alpha = 0,5$



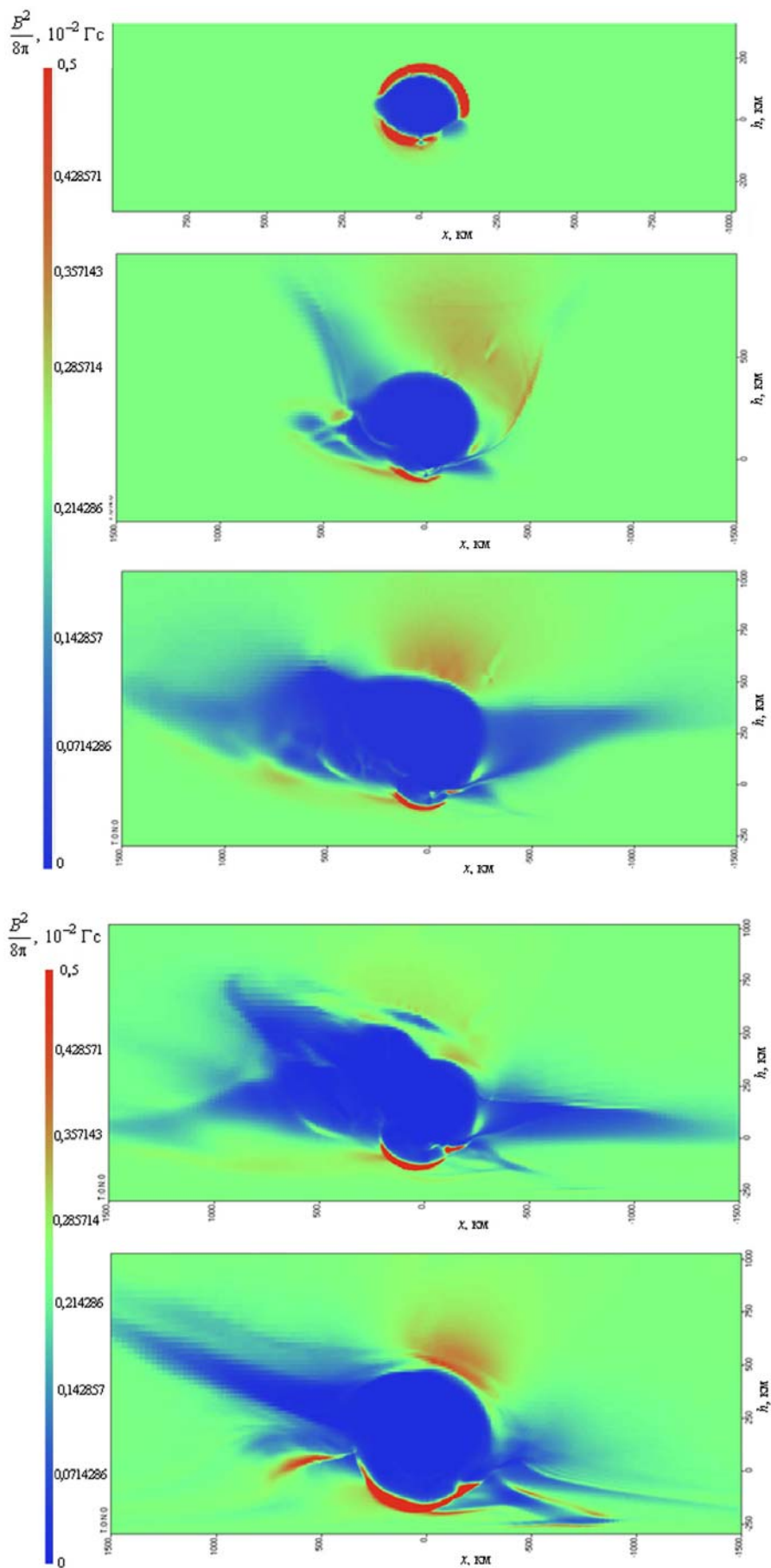
Поведение фазовых кривых при $\alpha = 0,4$, $\kappa = -2$ (кривая 1) и $\alpha = 0,5$, $\kappa = -2$ (кривая 2)

РАСЧЕТЫ МАГНИТНОГО ПОЛЯ И ПОТОКОВ β -ЭЛЕКТРОНОВ В ОБЛАСТИ ВЗРЫВА ОПЕРАЦИИ «МОРСКАЯ ЗВЕЗДА»

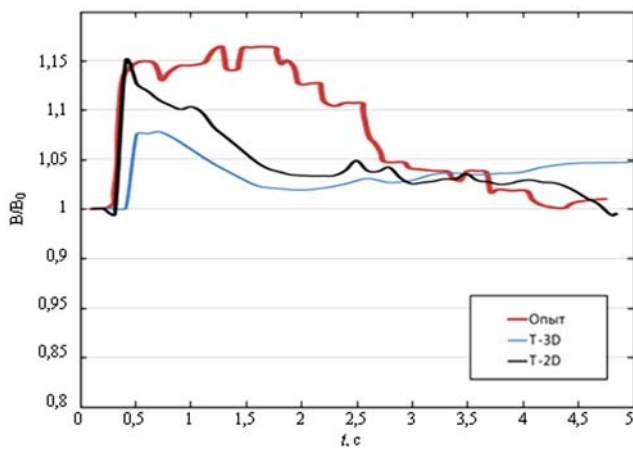
В. А. Жмайло, А. Н. Залялов, Н. В. Иванов, А. А. Пушкарев, И. В. Соболев, А. Е. Широков



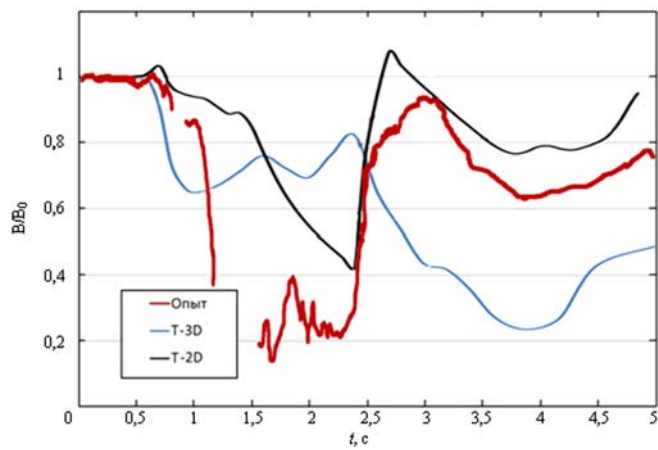
Светящиеся области в расчете (а) и опыте (б)



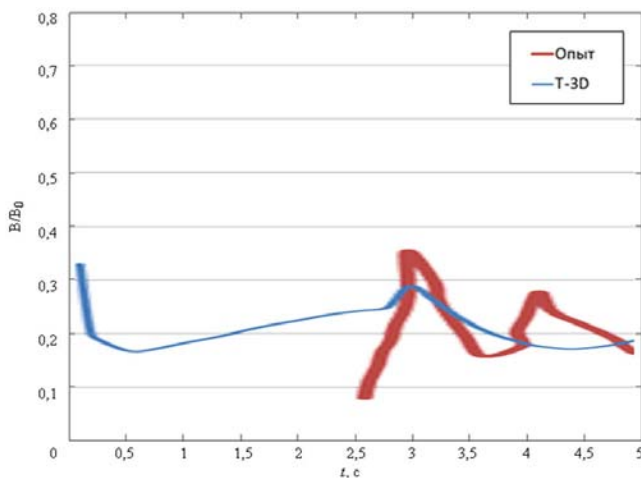
Магнитное давление в меридиональной плоскости через 0,1; 0,5; 1; 2; 5 с после ЯВ



а

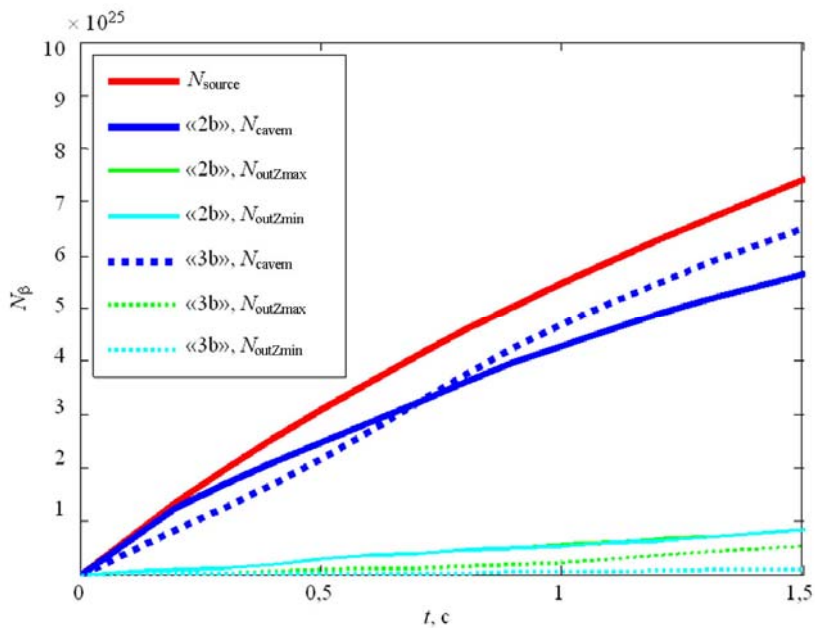


б

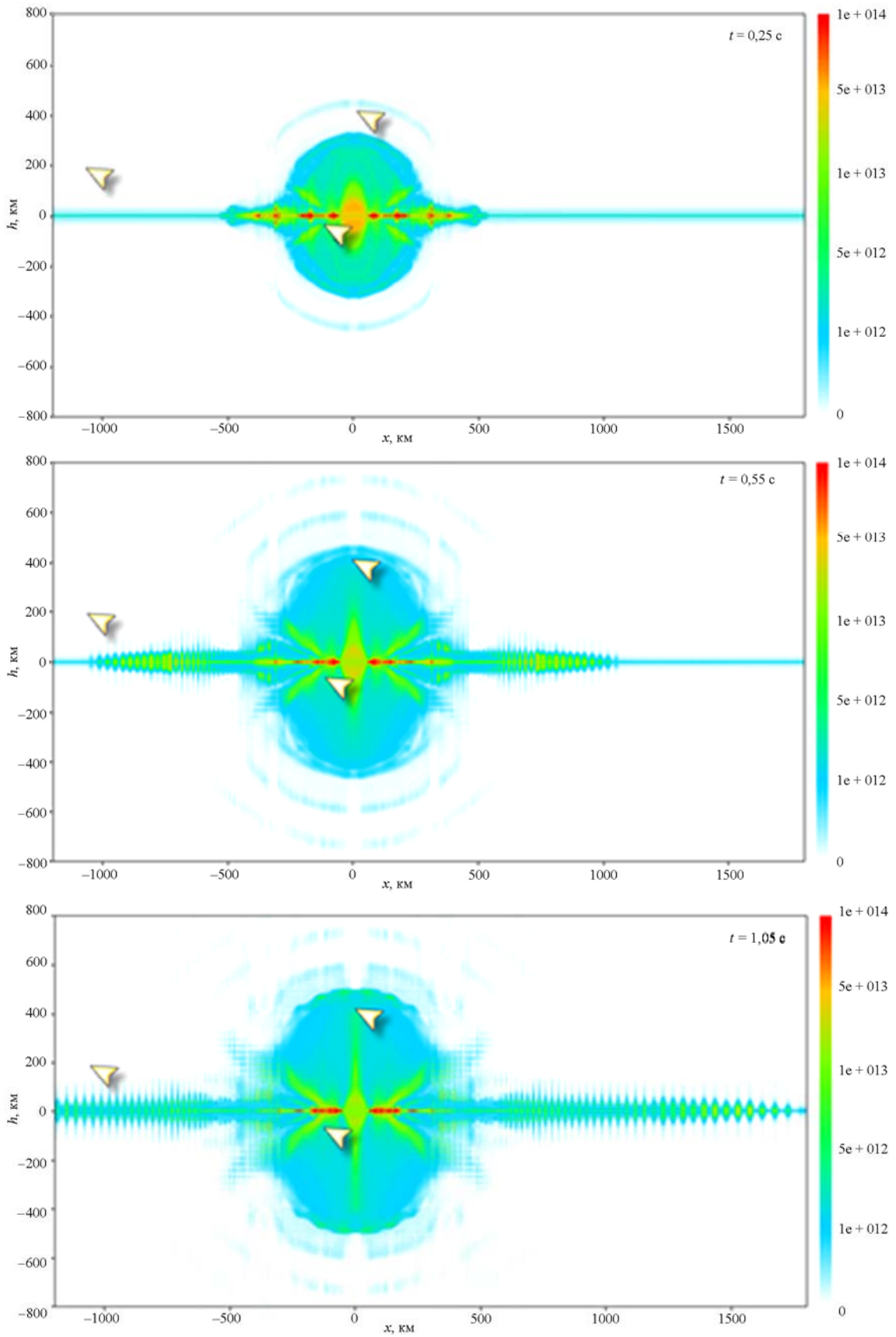


в

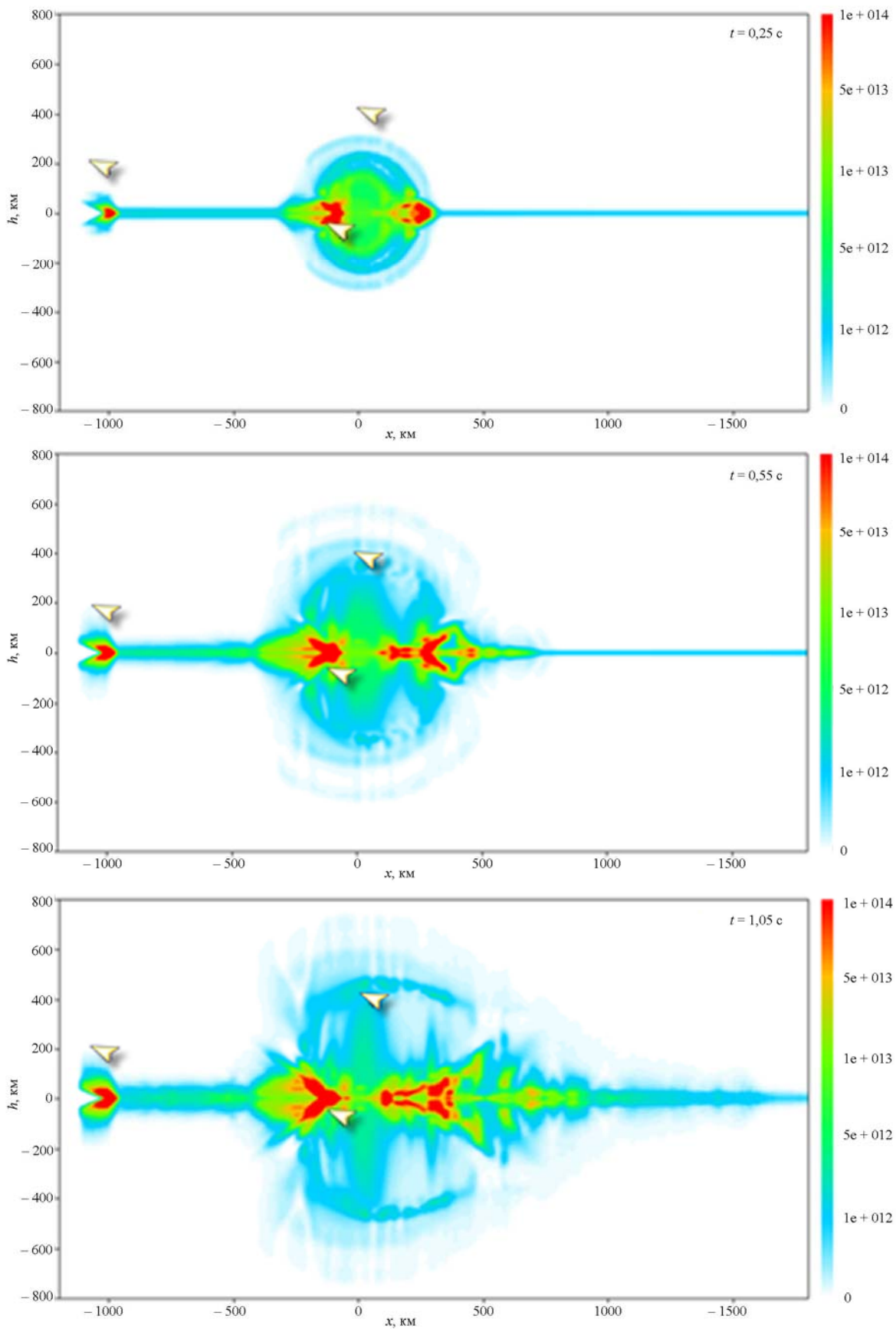
Показания магнитного датчика ракеты «Р-2» (а), «Р-4» (б), «Р-6» (в)



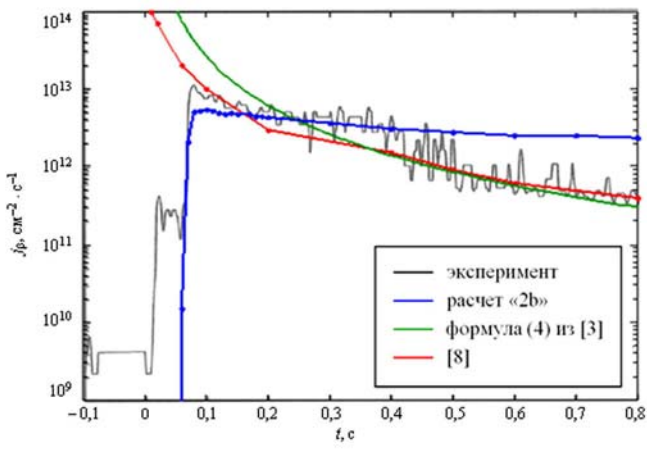
Количество β -электронов N_β в зависимости от времени: испущенных продуктами взрыва (N_{source}); находящихся в магнитной каверне (N_{cavern}); ушедших из магнитной каверны вдоль геомагнитных силовых линий вверх от Земли ($N_{outZmax}$); вниз к Земле ($N_{outZmin}$)



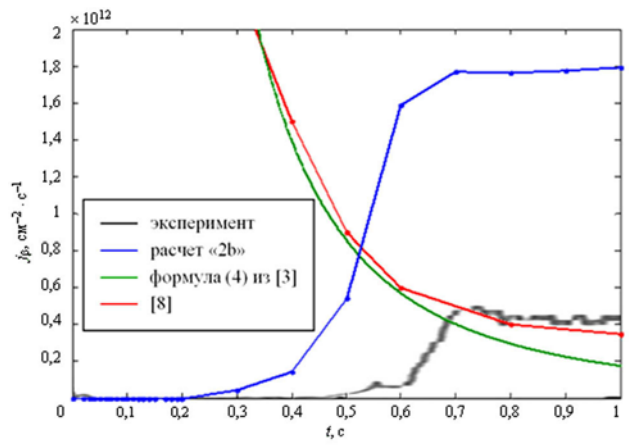
Распределение всесторонних потоков β -электронов j_{β} [$\text{см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$]
через 0,25; 0,55; 1,05 с после ЯВ (расчет «2b»)



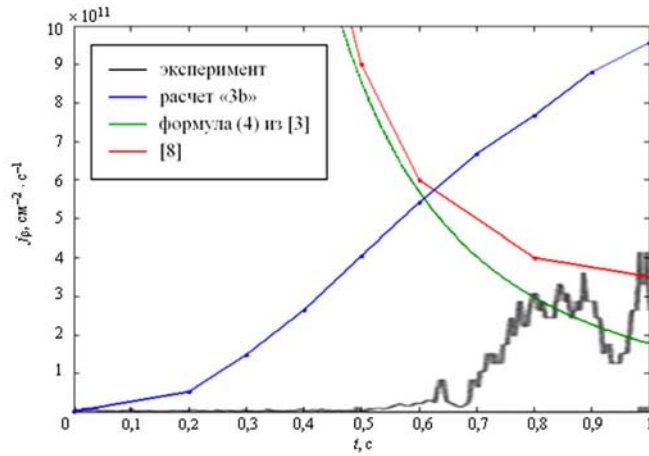
Распределение всесторонних потоков β -электронов j_β [$\text{см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$]
через 0,25; 0,55; 1,05 с после ЯВ (расчет «3b»)



а

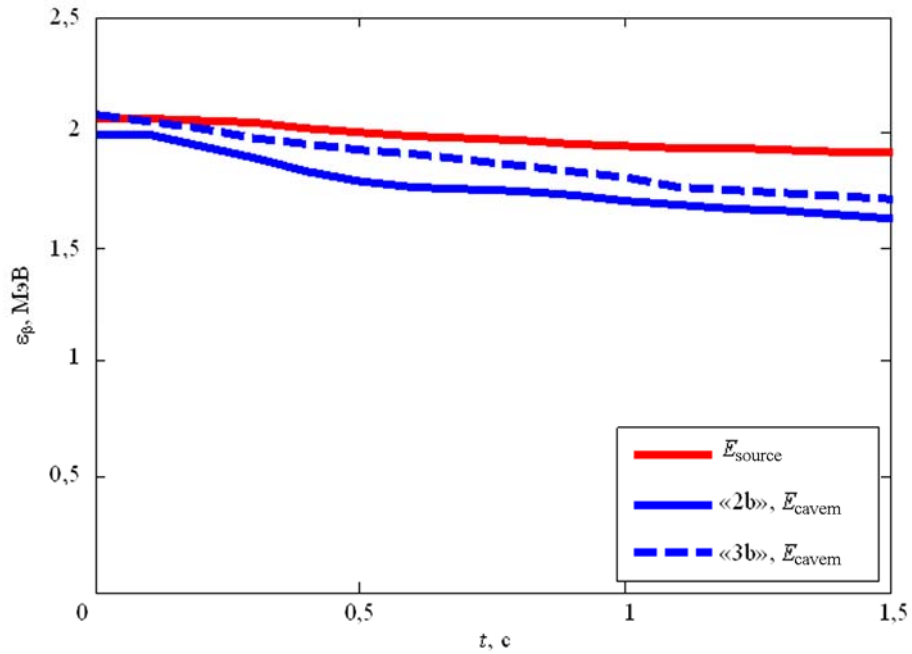


б



в

Всесторонний поток β -электронов для ракет «P-6» (а), «P-7» (б), «P-4» (в)



Средняя энергия β -электронов в зависимости от времени: испущенных продуктами взрыва (E_{source}); находящихся в магнитной каверне (E_{cavem})

Глазырин С. И., Егужова М. Ю., Жмайло В. А., Стаценко В. П., Янилкин Ю. В. Исследование гравитационного перемешивания в присутствии магнитного поля	3	Glazyrin S. I., Eguzhova M. Yu., Statsenko V. P., Yanilkin Yu. V., Zhmaylo V. A. Study of gravitational mixing with magnetic field	3
Анисина И. М., Долголева Г. В., Жмайло В. А., Тарасова Н. В. Многопоточная модель и численная методика SRG-6 для расчета образования и движения разреженной плазмы в магнитном поле. Применение к расчету эффектов ядерного взрыва «Морская звезда»	11	Anisina I. M., Dolgoleva G. V., Zhmailo V. A., Tarasova N. V. A multiflow model and a numerical technique for calculate initiation and motion of rarefied plasma in magnetic field	11
Вронский М. А., Горбатенко М. В., Колесников Н. С., Незнамов В. П., Попов Е. Ю., Сафронов И. И. Стационарные связанные состояния дираковских частиц в гравитационном поле Шварцшильда	30	Vronsky M. A., Gorbatenko M. V., Kolesnikov N. S., Neznamov V. P., Popov E. Yu., Safronov I. I. Stationary Bound States of Dirac Particles in the Schwarzschild Gravitational Field	30
Жмайло В. А., Залялов А. Н., Иванов Н. В., Пушкарев А. А., Соболев И. В., Широков А. Е. Расчеты магнитного поля и потоков β -электронов в области взрыва операции «Морская звезда»	47	Zhmaylo V. A., Zalyalov A. N., Ivanov N. V., Pushkaryov A. A., Sobolev I. V., Shirokov A. E. Magnetic field and β -current calculations of starfish explosion area	47

Редактор *Н. П. Мишкина*

Компьютерная подготовка оригинала-макета *С. Н. Фролова, С. В. Макеева, Е. В. Мусеева*

Подписано в печать 13.02.2013 Формат 60 × 84 1/8
 Офсетн. печ. Усл. печ. л. 8,3 Уч.-изд. л. 7,7
 Тираж 200 экз. Зак. тип. 7-2013 4 статьи Индекс 3657

Отпечатано в ИПК ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ»
 607188, г. Саров Нижегородской области

ISSN 0234-0763 **ВОПРОСЫ АТОМНОЙ НАУКИ И ТЕХНИКИ**

Серия:

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ ФИЗИКА

2012. Вып. 3. 1–58

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ

К авторским оригиналам, передаваемым для издания, предъявляются следующие требования:

1. Экземпляр статьи должен быть отпечатан на одной стороне листа формата А4 шрифтом Times New Roman 12 пунктов через 2 интервала, левое поле 3 см. Статья сопровождается дискетой 3,5' (zip100, zip250, cd-r/rw, USB Flash Drive) с электронным вариантом текста (шрифт 11 пунктов через 1 интервал) в редакторе Word for Windows версии 97. Статья должна быть составлена в следующем порядке: УДК; название статьи; инициалы и фамилии авторов; аннотация (не более 10 строк); ключевые слова – все вышеперечисленное на русском и английском языках; текст; список литературы; пронумерованные рисунки и подписи (на отдельном листе); таблицы с нумерационным и тематическим заголовками, каждая таблица на отдельном листе, а в электронном виде представляется отдельным файлом. Кавычки в тексте ставятся при английской раскладке клавиатуры («...»). Название файла должно состоять из фамилии первого автора и краткого названия статьи.

2. Файлы иллюстраций должны быть представлены отдельно – в виде файлов, в формате TIFF (.TIF) или JPEG (.JPG) (максимальное качество) с разрешением не менее 250 точек на дюйм (dpi или inch). Название файла иллюстрации должно включать фамилию первого автора и порядковый номер рисунка в статье, например: Dzyuba_03.tif. Не допускается представлять иллюстрации, созданные с использованием внутренних инструментов Word.

3. При написании статьи следует использовать общепринятые термины, единицы измерения и условные обозначения. Все употребляемые авторами обозначения должны быть определены при их первом появлении в тексте. Необходимо обращать внимание на написание прописных и строчных букв: латинские буквы (*A, I, d, h* и т. п.) набираются курсивом, греческие буквы (α, β, γ), названия функций (\sin, \cos, \exp), химических элементов (H_2O, H_2C_5OH) и единиц измерения (см, МВт/см², с) – прямым (обычным) шрифтом. Символы ($\Re, \varnothing, \otimes \in$ и т. п.) следует оговаривать на полях рукописи. Обозначения матриц и векторов набираются полужирным шрифтом прямо.

4. Формулы создаются в виде целых математических выражений в формульном редакторе Word или редакторе Math Type 5.2 и нумеруются в круглых скобках. Нумерация формул должна быть сплошной по статье (не по разделам), нумерация типа (2а), (2б) нежелательна. Нумеровать следует только те формулы и уравнения, на которые есть ссылка в последующем изложении.

5. Ссылки на литературу в тексте даются по порядку, арабскими цифрами в квадратных скобках. Список литературы составляется в той же последовательности, в которой приводятся ссылки на литературу в тексте. Библиографические ссылки оформляются по следующим правилам:

– для книг: фамилии и инициалы авторов, название книги, место издания, издательство (без кавычек), год (для трудов конференций – город, страна, год);

– для статей в журнале: фамилии и инициалы авторов, название статьи, название журнала (без кавычек), год, том, выпуск, страницы;

– для авторефератов диссертаций: фамилия и инициалы автора, название автореферата диссертации, степень, место защиты (город) и год;

– для препринтов: фамилии и инициалы авторов, название препринта, место издания, год и номер;

– для патентов: вид патентного документа (А.с. или Пат.), его номер, название страны, выдавшей документ, индекс международной классификации изобретения, название издания, в котором опубликована формула изобретения, год и номер издания;

– для электронных источников – полный электронный адрес (включая дату обращения к источнику), позволяющий обратиться к публикации.

При необходимости в заголовке библиографической ссылки на работу четырех и более авторов могут быть указаны имена всех авторов или первых трех с добавлением слов «и др.». В списке литературы инициалы должны стоять после фамилий.

6. В конце текста (перед списком литературы) указывается контактная информация обо всех авторах статьи: фамилия, имя, отчество (полностью), место работы, должность, телефон, e-mail и по желанию автора – домашний почтовый адрес.

Все материалы по статьям должны направляться по адресу:

607188, г. Саров Нижегородской обл., пр. Мира, 37, РФЯЦ-ВНИИЭФ, ИТМФ, в редакцию журнала ВАНТ, сер. «Теоретическая и прикладная физика». Тел. (83130) 2-77-01. E-mail: Nadykto@vniief.ru