УДК 530.145.7; 514.764.2

СТАЦИОНАРНЫЕ СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ ЧАСТИЦ СО СПИНОМ ½ В ГРАВИТАЦИОННЫХ ПОЛЯХ КЕРРА И КЕРРА – НЬЮМЕНА

М. В. Горбатенко, В. П. Незнамов[1]

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, Саров Нижегородской обл.

Для гравитационных полей Керра и Керра – Ньюмена с использованием гамильтониана Чандрасекара обоснована возможность существования стационарных связанных состояний пробных частиц со спином ½. При выполнении условия Гильберта $g_{00} > 0$ связанные состояния дираковских частиц с вещественным дискретным энергетическим спектром возможны как для частиц находящихся вне поверхности внешней эргосферы полей Керра и Керра – Ньюмена, так и для частиц, находящихся под поверхностью внутренней «эргосферы». В этом случае поверхности внешней и внутренней эргосфер играют роль бесконечно больших потенциальных барьеров. Квантово-механические частицы со спином ½ не могут пересекать поверхности эргосфер полей Керра и Керра – Ньюмена. По результатам работы можно сделать предположение о существовании нового типа вращающихся коллапсаров, для которых отсутствует излучение по Хокингу. Результаты работы могут привести к корректировке некоторых аспектов стандартной космологической модели, связанных с эволюцией Вселенной и с взаимодействием вращающихся коллапсаров с окружающей средой.

Ключевые слова: уравнение Дирака, гравитационное поле Керра – Ньюмена, стационарные связанные состояния, самосопряженные гамильтонианы, дискретный энергетический спектр.

1. Введение

Авторами в работах [1–3] с помощью методов псевдоэрмитовой квантовой механики для произвольных внешних гравитационных полей, в том числе зависящих от времени, разработан алгоритм получения самосопряженных дираковских гамильтонианов с плоским скалярным произведением волновых функций.

Из одночастичной квантовой механики следует, что при существовании эрмитовости гамильтониана, при наличии квадратично интегрируемых волновых функций и при установлении соответствующих граничных условий самосопряженные гамильтонианы, не зависящие от времени, должны обеспечивать существование стационарных связанных состояний частиц с вещественным энергетическим спектром.

В работах [4, 5] для гравитационного поля Шварцшильда с использованием самосопряженого гамильтониана с плоским скалярным произведением волновых функций для любых значений гравитационной константы связи в численных расчетах впервые получены стационарные связанные состояния частиц со спином ½, не распадающиеся со временем.

Для выполнения условия Гильберта $g_{00} > 0$ в численных расчетах введено граничное условие, при котором компоненты вектора плотности тока дираковских частиц равны нулю вблизи «горизонта событий».

В работе [6] аналогичный подход был применен к квантово-механическому поведению дираковских частиц в заряженном гравитационном поле Райсснера – Нордстрёма. В результате сделан вывод, что связанные состояния частиц со спином ½ с вещественным дискретным энергетическим спектром могут существовать как вне внешнего «горизонта событий», так и под внутренним «горизонтом событий» – горизонтом Коши.

При выполнении условия $g_{00} > 0$ «горизонты событий» полей Шварцшильда и Райсснера – Нордстрёма при квантово-механическом рассмотрении являются бесконечно большими потенциальными барьерами, лишающими возможности пересекать их пробными дираковскими частицами. Отсюда

[1] E-mail: neznamov@vniief.ru

следует, что такие коллапсары не могут излучать по механизму Хокинга [7].

В настоящей работе по аналогии с работами [4–6] проводится анализ возможности существования стационарных связанных состояний дираковских частиц в гравитационных полях Керра [8] и Керра – Ньюмена [9]. В результате анализа делается вывод, что связанные состояния частиц со спином ½ с вещественным энергетическим спектром могут существовать как вне поверхности внешней «эргосферы» полей Керра и Керра – Ньюмена, так и под поверхностью внутренней эргосферы.

Результаты численного определения энергетического спектра и волновых функций будут приведены в следующей работе.

Данная работа построена следующим образом. Раздел 2 посвящен квантово-механическому поведению дираковских частиц в поле Керра. В подразделах 2.1, 2.2 вводятся обозначения и приводятся метрика Керра в координатах Бойера – Линдквиста и два дираковских гамильтониана. Один из них – самосопряженный гамильтониан с плоским скалярным произведением волновых функций, полученный авторами в работе [3]. Второй – физически эквивалентный гамильтониан Чандрасекара, полученный в работе [10].

Поскольку Чандрасекаром в [10] для уравнения Дирака в поле Керра была проведена процедура разделения угловых и радиальных переменных, в подразделе 2.3 анализируются уравнения и асимптотика для радиальных волновых функций.

В подразделе 2.4 обсуждаются вопросы эрмитовости гамильтониана, граничные условия для волновых функций и делается вывод о существовании стационарных связанных состояний дираковских частиц с вещественным энергетическим спектром.

В подразделе 2.5 обсуждается случай экстремального поля Керра и случай «голой» сингулярности.

В разделе 3 аналогично исследуется возможность существования стационарных связанных состояний дираковских частиц в поле Керра – Ньюмена.

В Заключении приведены основные выводы проведенного анализа.

2. Гравитационное поле Керра

2.1. Метрика Керра в координатах Бойера – Линдквиста

Решение уравнений ОТО Керра характеризуется точечным источником гравитационного поля с массой M, вращающимся с угловым моментом $\mathbf{J} = Mc\mathbf{a}$, где c – скорость света.

Ниже будем использовать систему единиц $\hbar = c = 1$.

Тетрадные векторы определяются соотношением

$$H^{\mu}_{\underline{\alpha}} H^{\nu}_{\underline{\beta}} g_{\mu\nu} = \eta_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}, \qquad (1)$$

где

$$\eta_{\underline{\alpha}\underline{\beta}} = \mathrm{diag}\left[1,-1,-1,-1\right]. \qquad (2)$$

Глобальные (неподчеркнутые) индексы поднимаются и опускаются с использованием метрического тензора $g_{\mu\nu}$ и обратного тензора $g^{\mu\nu}$; локальные (подчеркнутые) индексы поднимаются и опускаются с использованием тензоров $\eta_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}$, $\eta^{\underline{\alpha}\underline{\beta}}$.

Матрицы Дирака удовлетворяют соотношениям:

$$\gamma^{\mu}\gamma^{\alpha} + \gamma^{\alpha}\gamma^{\mu} = 2g^{\alpha\beta}E, \qquad (3)$$

$$\gamma^{\underline{\mu}}\gamma^{\underline{\alpha}} + \gamma^{\underline{\alpha}}\gamma^{\underline{\mu}} = 2\eta^{\underline{\alpha}\underline{\beta}}E, \qquad (4)$$

где E – единичная 4×4 матрица.

Связь между γ^{α} и $\gamma^{\underline{\alpha}}$ определяется выражением

$$\gamma^{\alpha} = H^{\alpha}_{\underline{\beta}}\gamma^{\underline{\beta}}. \qquad (5)$$

Метрика Керра в координатах Бойера – Линдквиста (t, r, θ, φ) имеет вид

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_0 r}{\rho_k^2}\right)dt^2 + \frac{2ar_0 r}{\rho_k^2}\sin^2\theta dt d\varphi - \frac{\rho_k^2}{\Delta}dr^2 - \\ -\rho_k^2 d\theta^2 - \left(r^2 + a^2 + \frac{a^2 r_0 r}{\rho_k^2}\sin^2\theta\right)\sin^2\theta d\varphi^2. \qquad (6)$$

В выражении (6) $r_0 = \dfrac{2GM}{c^2}$ – гравитационный радиус («горизонт событий»), G – гравитационная постоянная, $\rho_k^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta$, $\Delta = r^2 - r_0 r + a^2$.

В соответствии с условием Гильберта $(g_{00} > 0)$ в метрике (6) подразумевается выполнение неравенства

$$\left(1 - \frac{r_0 r}{\rho_k^2}\right) > 0. \qquad (7)$$

В координатах (r, θ) равенство нулю выражения (7) определяет внешнюю и внутреннюю эргосферы поля Керра.

Контравариантный тензор $g^{\alpha\beta}$ имеет вид:

$$g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta}\left(r^2 + a^2 + \frac{a^2 r_0 r}{\rho_k^2}\sin^2\theta\right) & 0 & 0 & \frac{a r_0 r}{\Delta\rho_k^2} \\ 0 & -\frac{\Delta}{\rho_k^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\rho_k^2} & 0 \\ \frac{a r_0 r}{\Delta\rho_k^2} & 0 & 0 & -\frac{1}{\Delta\sin^2\theta}\left(1 - \frac{r_0 r}{\rho_k^2}\right) \end{pmatrix} \quad (8)$$

2.2. Гамильтонианы частиц со спином ½ в поле Керра

В работе [3] для метрики (6) авторами в η-представлении получен самосопряженный дираковский гамильтониан с плоским скалярным произведением волновых функций. Он имеет достаточно сложный вид:

$$H_\eta = \frac{m}{\sqrt{g^{00}}}\gamma^0 - \frac{i\sqrt{\Delta}}{\rho_k\sqrt{g^{00}}}\gamma^0\gamma^1\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right) -$$
$$-\frac{i}{\rho_k\sqrt{g^{00}}}\gamma^0\gamma^2\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\theta\right) - \frac{i}{g^{00}\sqrt{\Delta}\sin\theta}\gamma^0\gamma^3\frac{\partial}{\partial\varphi} -$$
$$-\frac{i}{g^{00}}\frac{a r_0 r}{\rho_k^2\Delta}\frac{\partial}{\partial\varphi} - \frac{i}{2}\gamma^0\gamma^1\left[\frac{\partial}{\partial r}\frac{\sqrt{\Delta}}{\rho_k\sqrt{g^{00}}}\right] -$$
$$-\frac{i}{2}\gamma^0\gamma^2\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{1}{\rho_k\sqrt{g^{00}}}\right] + \frac{i}{4}\gamma^3\gamma^1 \times$$
$$\times\sqrt{g^{00}}\frac{\Delta}{\rho_k} a r_0 \sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r}{g^{00}\rho_k^2\Delta}\right) -$$
$$-\frac{i}{4}\gamma^2\gamma^3\sqrt{g^{00}}\frac{\sqrt{\Delta}}{\rho_k} a r_0 \sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{r}{g^{00}\rho_k^2\Delta}\right). \quad (9)$$

Если в выражении (9) ограничиться линейными членами по a, мы получим самосопряженный гамильтониан для слабого поля Керра

$$H_\eta^{app} = m\sqrt{f_s}\gamma^0 - i f_s\gamma^0\gamma^1\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right) - \frac{i r_0}{2r^2}\gamma^0\gamma^1 -$$
$$-i\sqrt{f_s}\gamma^0\left[\gamma^2\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r}\operatorname{ctg}\theta\right) + \gamma^3\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right] -$$
$$-\frac{i a r_0}{r^3}\frac{\partial}{\partial\varphi} - i\frac{3}{4}\frac{a r_0}{r^3}\sin\theta\gamma^3\gamma^1. \quad (10)$$

В (10) $f_s = 1 - \frac{r_0}{r}$.

При $a = 0$ гамильтонианы (9), (10) совпадают с самосопряженным гамильтонианом в поле Шварцшильда [3–5].

В отличие от центрально-симметричных гравитационных полей Шварцшильда, Райсснера – Нордстрёма и др. аксиально-симметричное поле Керра не позволяет использовать для отделения угловых переменных в уравнении Дирака сферические гармоники со спином ½.

Чандрасекар в работе [10] провел разделение переменных в дираковском гамильтониане с метрикой (6), используя двухкомпонентный спинорный формализм Пенроуза – Ньюмена [11] и единичную тетраду Kinnersley [12].

Следуя работам [13–14], уравнение Дирака и гамильтониан Чандрасекара можно записать в биспинорной форме

$$i\frac{\partial\psi_{Ch}}{\partial t} = H_{Ch}\psi = \left(\frac{m}{g^{00}}\gamma^0 -\right.$$
$$\left.-\frac{i}{g^{00}}\gamma^0\gamma^k\frac{\partial}{\partial x^k} - i\Phi^0 - \frac{i}{g^{00}}\gamma^0\gamma^k\Phi^k\right)\psi_{Ch}. \quad (11)$$

В выражении (11) $k = 1,2,3$, Φ^0, Φ^k – биспинорные связности, вычисляемые стандартным образом.

Остальные величины имеют следующий вид:

$$\psi_{Ch} = \begin{pmatrix} P^A \\ Q_B^* \end{pmatrix}. \quad (12)$$

В уравнении (11)

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}\sigma^{\mu AB'} \\ \sqrt{2}\left[\sigma^\mu_{AB'}\right]^T & 0 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

$$\sqrt{2}\left[\sigma^{\mu AB'}\right] = \sqrt{2}\begin{pmatrix} n^\mu & -m^{*\mu} \\ -m^\mu & l^\mu \end{pmatrix};$$
$$\sqrt{2}\left[\sigma^\mu_{AB'}\right]^T = \sqrt{2}\begin{pmatrix} l^\mu & m^{*\mu} \\ m^\mu & n^\mu \end{pmatrix}. \quad (14)$$

В соотношениях (13), (14) индексы A, B' принимают значения 0 и 1, значки * и T означают комплексное сопряжение и транспонирование.

Компоненты тетрады Kinnersley равны

$$l^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{r^2+a^2}{\Delta}, 1, 0, \frac{a}{\Delta}\right),$$

$$n^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}\rho_k^2}\left[r^2+a^2, -\Delta, 0, a\right], \qquad (15)$$

$$m^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}\left(r+ia\cos\theta\right)}\left(ia\sin\theta, 0, 1, \frac{i}{\sin\theta}\right).$$

Обратный метрический тензор (8) выражается через компоненты тетрады (15) следующим образом:

$$g^{\mu\nu} = l^{\mu}n^{\nu} + n^{\mu}l^{\nu} - m^{\mu}m^{*\nu} - m^{*\mu}m^{\nu}. \qquad (16)$$

Гамильтониан Чандрасекара (11) физически эквивалентен самосопряженному гамильтониану (9), поскольку они связаны друг с другом преобразованием подобия.

Для волновых функций уравнения Дирака с гамильтонианом Чандрасекара (11) в скалярном произведении присутствует весовой оператор Паркера [1–3], [15]

$$\rho_p = \sqrt{g_G}\,\gamma^0\gamma^0, \qquad (17)$$

где для метрики Керра в координатах Бойера–Линдквиста $g_G = \frac{\rho_k^4}{r^4}$ [3].

При использовании самосопряженного гамильтониана (9) $\rho_p = 1$.

Если определить оператор η из равенства

$$\rho_p = \eta^{+}\eta, \qquad (18)$$

то гамильтониан Чандрасекара будет связан с гамильтонианом (9) преобразованием подобия

$$H_{\eta} = \eta H_{Ch}\eta^{-1}. \qquad (19)$$

Из формулы (19) следует, что оба гамильтониана имеют одинаковый энергетический спектр.

В общем случае выражение для оператора η является сложным и громоздким. В случае $a = 0$ (поле Шварцшильда) оператор η диагонален и имеет вид

$$\eta = \mathrm{diag}\left[\frac{1}{\sqrt{f_s}}, 1, 1, \frac{1}{\sqrt{f_s}}\right]. \qquad (20)$$

С учетом вышесказанного для анализа возможности существования стационарных связанных состояний частиц со спином ½ в поле Керра далее воспользуемся процедурой разделения переменных, реализованной Чандрасекаром в [10] (см. также [13]).

Для стационарного случая волновую функцию в уравнении (11) можно записать в виде

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r})e^{-iEt}, \qquad (21)$$

где E – энергия пробной дираковской частицы.

Далее, представляя функцию (21) в виде

$$\psi_{Ch}(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\left(r - ia\cos\theta\right)}\overset{(-)}{R}(r)\overset{(-)}{S}(\theta) \\ \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\overset{(+)}{R}(r)\overset{(+)}{S}(\theta) \\ \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\overset{(+)}{R}(r)\overset{(-)}{S}(\theta) \\ \frac{1}{\left(r + ia\cos\theta\right)}\overset{(-)}{R}(r)\overset{(+)}{S}(\theta) \end{pmatrix} e^{-iEt}e^{im_{\varphi}\varphi}, \qquad (22)$$

можно получить отдельно два уравнения для угловых функций $\overset{(-)}{S}(\theta), \overset{(+)}{S}(\theta)$ и два уравнения для радиальных функций $\overset{(-)}{R}(r), \overset{(+)}{R}(r)$:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{d}{d\theta} + aE\sin\theta - m_{\varphi}\frac{1}{\sin\theta} + \frac{1}{2}\mathrm{ctg}\theta\right)\overset{(-)}{S}(\theta) = \\ &= \left(\lambda + am\cos\theta\right)\overset{(+)}{S}(\theta), \\ &\left(\frac{d}{d\theta} - aE\sin\theta + m_{\varphi}\frac{1}{\sin\theta} + \frac{1}{2}\mathrm{ctg}\theta\right)\overset{(+)}{S}(\theta) = \\ &= \left(-\lambda + am\cos\theta\right)\overset{(-)}{S}(\theta), \end{aligned} \qquad (23)$$

$$\begin{aligned} &\Delta^{1/2}\left(\frac{d}{dr} - i\frac{K}{\Delta}\right)\overset{(-)}{R}(r) = \left(\lambda + imr\right)\overset{(+)}{R}(r), \\ &\Delta^{1/2}\left(\frac{d}{dr} + i\frac{K}{\Delta}\right)\overset{(+)}{R}(r) = \left(\lambda - imr\right)\overset{(-)}{R}(r). \end{aligned} \qquad (24)$$

В уравнениях (24)

$$K = \left(r^2 + a^2\right)E - m_{\varphi}a. \qquad (25)$$

В уравнениях (23), (24) параметр λ является константой разделения. В отличие от центрально симметричных полей Шварцшильда и Райсснера–Нордстрёма кроме стандартной зависимости λ от квантовых чисел j, l в поле Керра λ зависит также от магнитного квантового числа m_{φ}, углового момента *a*, энергии и массы пробной частицы и для соблюдения условия Гильберта (7) от радиальной координаты *r*. Таким образом, при решении радиальных уравнений (24) для каждого значения энергии E, момента a, квантового числа m_φ, радиальной координаты r для определения параметра λ необходимо решать уравнения (23) с граничными условиями, вообще говоря, зависящими от r.

В диссертации [14] автор, не выполняя условие (7), численно определил константу разделения λ в интервале значений aE от нуля до восьми и вплоть до $j = \frac{11}{2}$.

Угловые функции $\overset{(-)}{S}(\theta), \overset{(+)}{S}(\theta)$ являются сфероидальными гармониками. Обзор их широкого применения в теоретической физике можно найти, например, в [14].

Сфероидальные гармоники удовлетворяют следующим соотношениям симметрии:

$$\overset{(-)}{S}(\theta) = \overset{(+)}{S}(\pi - \theta),$$
$$S_{l,m_\varphi,E}^{j=l+1/2}(\theta) = (-1)^{l+m_\varphi} S_{l,m_\varphi,E}^{j=l-1/2}(\pi - \theta); \tag{26}$$

$$S_{j,l,m_\varphi,E}(\theta) = (-1)^j S_{j,l,-m_\varphi,-E}(\pi - \theta); \tag{27}$$

$$S_{l,m_\varphi,E}^{j=l+1/2}(\theta) = (-1)^{m+1/2} S_{l,-m_\varphi,-E}^{j=l-1/2}(\theta). \tag{28}$$

2.3. Уравнения и асимптотика для радиальных волновых функций

Поскольку из системы уравнений (24) следует, что $\overset{(+)}{R}{}^*(r) = \overset{(-)}{R}(r)$, получим уравнения для вещественных радиальных функций

$$g(r) = \overset{(-)}{R}(r) + \overset{(+)}{R}(r),$$
$$f(r) = -i\left(\overset{(-)}{R}(r) - \overset{(+)}{R}(r)\right). \tag{29}$$

Уравнения для функций $f(r)$ и $g(r)$ имеют следующий вид:

$$f_K \frac{d}{dr} f + \frac{\sqrt{f_K}}{r}\lambda f -$$
$$-\left(E\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right) - \frac{m_\varphi a}{r^2} + \sqrt{f_K}\, m\right) g = 0,$$
$$f_K \frac{d}{dr} g - \frac{\sqrt{f_K}}{r}\lambda g + \tag{30}$$
$$+\left(E\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right) - \frac{m_\varphi a}{r^2} - \sqrt{f_K}\, m\right) f = 0.$$

В уравнениях (30)

$$f_K = 1 - \frac{r_0}{r} + \frac{a^2}{r^2}. \tag{31}$$

Условие (7) обуславливает рассмотрение лишь положительных значений $f_K > 0$. Величину f_K в (31) можно представить в виде

$$f_K = \left(1 - \frac{r_+}{r}\right)\left(1 - \frac{r_-}{r}\right), \tag{32}$$

где

$$r_\pm = \frac{r_0}{2} \pm \sqrt{\frac{r_0^2}{4} - a^2}. \tag{33}$$

При $r_0^2 \ge 4a^2$ величины $r_\pm$ являются внешними и внутренними радиусами «горизонтов событий» поля Керра.

Введем безразмерные переменные $\varepsilon = \frac{E}{m}$; $\rho = \frac{r}{l_c}$; $2\alpha = \frac{r_0}{l_c} = \frac{2GMm}{\hbar c}$; $\alpha_a = \frac{a}{l_c}$; $l_c = \frac{\hbar}{mc}$ – комптоновская длина волны пробной дираковской частицы.

В безразмерных переменных величины (32), (33) можно представить в виде

$$f_K = \left(1 - \frac{\rho_+}{\rho}\right)\left(1 - \frac{\rho_-}{\rho}\right), \tag{34}$$

$$\rho_+ = \alpha + \sqrt{\alpha^2 - \alpha_a^2}, \tag{35}$$

$$\rho_- = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - \alpha_a^2}. \tag{36}$$

Уравнения (30) в безразмерных переменных имеют вид

$$\left(1-\frac{\rho_+}{\rho}\right)\left(1-\frac{\rho_-}{\rho}\right)\frac{df}{d\rho} + \frac{\lambda\sqrt{\left(1-\frac{\rho_+}{\rho}\right)\left(1-\frac{\rho_-}{\rho}\right)}}{\rho} f -$$
$$-\left(\varepsilon\left(1+\frac{\alpha_a^2}{\rho^2}\right) - \frac{m_\varphi \alpha_a}{\rho^2} + \sqrt{\left(1-\frac{\rho_+}{\rho}\right)\left(1-\frac{\rho_-}{\rho}\right)}\right) g = 0,$$
$$\left(1-\frac{\rho_+}{\rho}\right)\left(1-\frac{\rho_-}{\rho}\right)\frac{dg}{d\rho} - \frac{\lambda\sqrt{\left(1-\frac{\rho_+}{\rho}\right)\left(1-\frac{\rho_-}{\rho}\right)}}{\rho} g + \tag{37}$$
$$+\left(\varepsilon\left(1+\frac{\alpha_a^2}{\rho^2}\right) - \frac{m_\varphi \alpha_a}{\rho^2} - \sqrt{\left(1-\frac{\rho_+}{\rho}\right)\left(1-\frac{\rho_-}{\rho}\right)}\right) f = 0.$$

Поскольку в уравнениях (30), (37) значения $f_K > 0$ возможны лишь при $\rho > \rho_+$ и $\rho < \rho_-$, то волновые функции в области между внешним и внутренним «горизонтами событий» $(\rho_- \le \rho \le \rho_+)$ равны нулю.

При $\rho > \rho_+$ в соответствии с условием (7) областью определения волновых функций уравнения

Дирака в поле Керра является пространство (ρ,θ,φ) с радиусами $\rho(\theta)$ большими, чем радиусы поверхности внешней эргосферы. При $\rho<\rho_-$ областью определения волновых функций, наоборот, является область с радиусами $\rho(\theta)$ меньшими, чем радиусы поверхности внутренней эргосферы.

Если угловой момент a равен нулю, т. е. $\alpha_a=0$, то $\rho_+=2\alpha$; $\rho_-=0$. В этом случае уравнения (30), (37) будут совпадать с системой радиальных уравнений для поля Шварцшильда с одним «горизонтом событий» ($r=r_0$ или $\rho=2\alpha$); константа разделения λ перестает зависеть от энергии частицы и от расстояния ρ, и становится равной константе разделения κ в системе дираковских уравнений во внешнем поле кулоновского потенциала

$$\kappa=\pm1,\pm2...=\begin{cases}-(l+1), & j=l+\dfrac{1}{2}\\ l, & j=l-\dfrac{1}{2}\end{cases}. \qquad (38)$$

Рассмотрим асимптотику радиальных волновых функций $f(\rho),g(\rho)$ при $\rho\to\infty$; $\rho\to\rho_+(\rho>\rho_+)$; $\rho\to\rho_-(\rho<\rho_-)$; $\rho\to0$.

При $\rho\to\infty$ асимптотическое поведение волновых функций $f(\rho),g(\rho)$ для финитного движения является таким же, как и для центрально-симметричных гравитационных полей Шварцшильда, Райсснера – Нордстрёма и др. [4–6].

При $\rho\to\infty$

$$f=Ce^{-\rho\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$
$$g=-\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}f. \qquad (39)$$

Поведение волновых функций $f(\rho),g(\rho)$ вблизи «горизонтов событий» по своей структуре также близко к поведению радиальных функций в случае полей Шварцшильда и Райсснера – Нордстрёма [4–6].

При $\rho\to\rho_+$ $(\rho>\rho_+)$

$$f=A\sin\left(M_+\ln(\rho-\rho_+)+\varphi_+\right),$$
$$g=A\cos\left(M_+\ln(\rho-\rho_+)+\varphi_+\right). \qquad (40)$$

В формуле (40)

$$M_+=\frac{\rho_+^2}{2\sqrt{\alpha^2-\alpha_a^2}}\left(\varepsilon\left(1+\frac{\alpha_a^2}{\rho_+^2}\right)-\frac{m_\varphi\alpha_a}{\rho_+^2}\right). \qquad (41)$$

При $\rho\to\rho_-$ $(\rho<\rho_-)$

$$f=B\cos\left(M_-\ln(\rho_--\rho)+\varphi_-\right),$$
$$g=B\sin\left(M_-\ln(\rho_--\rho)+\varphi_-\right). \qquad (42)$$

В (42)

$$M_-=\frac{\rho_-^2}{2\sqrt{\alpha^2-\alpha_a^2}}\left(\varepsilon\left(1+\frac{\alpha_a^2}{\rho_-^2}\right)-\frac{m_\varphi\alpha_a}{\rho_-^2}\right). \qquad (43)$$

При $\rho\to0$ система уравнений (30) сводится к уравнениям

$$\frac{df}{d\rho}+\frac{\lambda(\rho)}{\alpha_a}f-\left(\varepsilon-\frac{m_\varphi}{\alpha_a}\right)g=0,$$
$$\frac{dg}{d\rho}-\frac{\lambda(\rho)}{\alpha_a}g+\left(\varepsilon-\frac{m_\varphi}{\alpha_a}\right)f=0. \qquad (44)$$

Зависимость $\lambda(\rho)$ при $\rho\to0$ должна определяться из решения угловых уравнений (23) с соответствующими граничными условиями, определяемыми выполнением неравенства (7).

В соотношениях (39), (40), (42) величины $C,A,B,\varphi_+,\varphi_-$ – постоянные интегрирования.

Как и в случае полей Шварцшильда и Райсснера – Нордстрёма [4–6], осциллирующие функции f и g плохо определены на внешнем и внутреннем «горизонте событий» и расходятся при $\rho\to\rho_+$ $(\rho>\rho_+)$ и при $\rho\to\rho_-$ $(\rho>\rho_-)$. Для обеспечения квадратичной интегрируемости рассматриваемых функций и в соответствии с условием (7) необходимо сужение их области определения до интервала $\left[\rho_+^{\min},\infty\right)$, где $\rho_+^{\min}>\rho_+$, и до интервала $\left(0,\rho_-^{\max}\right]$, где $\rho_-^{\max}<\rho_-$.

2.4. Эрмитовость гамильтониана Чандрасекара, граничные условия для волновых функций

Согласно общей теореме, доказанной в [2], стационарный гамильтониан Чандрасекара является псевдоэрмитовым или, другими словами, эрмитовым с весовым оператором Паркера (17).

В работах [4–6] эрмитовость исходных гамильтонианов для полей Шварцшильда и Райсснера – Нордстрема с учетом поведения волновых функций определялась с использованием явного вида сферических гармоник для частиц со спином ½. В нашем случае угловые функции $\overset{(-)}{S}(\theta),\overset{(+)}{S}(\theta)$ могут быть определены лишь при численном решении уравнений (23) и прямое подтверждение эрмитовости гамильтониана уравнения (11)

$\left(\left(\Phi, H_{Ch}\Psi\right) = \left(H_{Ch}\Phi, \Psi\right)\right)$ не представляется возможным. Однако сходная с полями Шварцшильда и Райсснера – Нордстрёма структура уравнений для радиальных волновых функций, сходные асимптотики для радиальных функций при $\rho \to \infty$ и вблизи «горизонтов событий», гладкие зависимости $\overset{(-)}{S}(\theta), \overset{(+)}{S}(\theta)$, полученные автором [14] в численных расчетах, позволяют с большой долей уверенности считать гамильтониан Чандрасекара также эрмитовым.

Граничные условия для волновых функций определяются выполнением условия Гильберта (7).

При $2\alpha \le \rho < \infty$ $\left(r_0 \le r < \infty\right)$ угловые функции $\overset{(-)}{S}(\theta), \overset{(+)}{S}(\theta)$ и параметр разделения λ при заданном значении E, a, m_φ вычисляются из уравнений (23) с использованием условия регулярности функций в полюсах при $\cos\theta = \pm 1$ (см., например, [14]).

При $\rho_+ < \rho < 2\alpha$ $\left(r_+ < r < r_0\right)$ для выполнения условия (7) необходимо на поверхности внешней эргосферы угловые функции положить равными нулю.

Для другой области определения волновых функций $0 < \rho < \rho_-$ $\left(0 < r < r_-\right)$ для выполнения условия (7) угловые функции должны быть равными нулю на поверхности внутренней эргосферы.

При таком задании граничных условий параметр разделения λ будет зависеть от радиальной координаты ρ. Определяя зависимость $\lambda(\rho)$ в серии численных расчетов уравнений (23), далее можно определять энергетический спектр, решая систему радиальных уравнений (30).

2.5. Экстремальное поле Керра и «голая» сингулярность

Экстремальное поле реализуется при $\alpha = \alpha_a \left(a = \dfrac{r_0}{2}\right)$. В этом случае внешний и внутренний «горизонты событий» совпадают, их радиус равен

$$\rho_+ = \rho_- = \alpha\,. \tag{45}$$

Радиусы поверхностей внешней и внутренней эргосфер равны

$$\left(r_{erg}\right)_{1,2} = \frac{r_0}{2}\left(1 \pm \sin\theta\right). \tag{46}$$

Для рассматриваемого случая система уравнений (30) для радиальных волновых функций $f(\rho), g(\rho)$ сводится к виду

$$\begin{gathered}
\left(1-\frac{\alpha}{\rho}\right)^2 \frac{df}{d\rho} + \frac{\lambda\left|1-\dfrac{\alpha}{\rho}\right|}{\rho} f - \\
-\left(\varepsilon\left(1+\frac{a^2}{\rho^2}\right) - \frac{m_\varphi\alpha}{\rho^2} + \left|1-\frac{\alpha}{\rho}\right|\right) g = 0, \\
\left(1-\frac{\alpha}{\rho}\right)^2 \frac{dg}{d\rho} - \frac{\lambda\left|1-\dfrac{\alpha}{\rho}\right|}{\rho} g + \\
+\left(\varepsilon\left(1+\frac{a^2}{\rho^2}\right) - \frac{m_\varphi\alpha}{\rho^2} - \left|1-\frac{\alpha}{\rho}\right|\right) f = 0.
\end{gathered} \tag{47}$$

Волновые функции определены в интервале $\rho \in (0, \infty)$ за исключением окрестности около «горизонта событий». Поведение волновых функций вблизи «горизонта событий» имеет вид

$$\left.\begin{aligned}
f(\rho) &= -A\sin\left(\alpha^2\left(2\varepsilon - \frac{m_\varphi}{\alpha}\right)\frac{1}{\rho-\alpha} + \varphi_+\right) \\
g(\rho) &= A\cos\left(\alpha^2\left(2\varepsilon - \frac{m_\varphi}{\alpha}\right)\frac{1}{\rho-\alpha} + \varphi_+\right)
\end{aligned}\right\} \rho \to \alpha\left(\rho > \alpha\right) \tag{48}$$

$$\left.\begin{aligned}
f(\rho) &= B\cos\left(\alpha^2\left(2\varepsilon - \frac{m_\varphi}{\alpha}\right)\frac{1}{\alpha-\rho} + \varphi_-\right) \\
g(\rho) &= -B\sin\left(\alpha^2\left(2\varepsilon - \frac{m_\varphi}{\alpha}\right)\frac{1}{\alpha-\rho} + \varphi_-\right)
\end{aligned}\right\} \rho \to \alpha\left(\rho < \alpha\right) \tag{49}$$

Исходя из эрмитовости исходного гамильтониана и самосопряженности гамильтониана (9), искомый энергетический спектр будет стационарным и вещественным.

Для экстремального поля Керра подход, выработанный в предыдущих разделах для определения стационарных связанных состояний дираковских частиц, не претерпевает идеологических изменений.

Система уравнений (47) с граничными условиями, обсужденными в подразделе 2.4, обладает дискретным стационарным вещественным спектром для дираковских частиц, находящихся либо над внешней эргосферой, либо под поверхностью внутренней эргосферы. Эти поверхности играют роль бесконечно больших потенциальных барьеров, запрещающих квантово-механическим частицам со спином ½ пересекать их с любой стороны.

Рассмотрим интересный случай «голой» сингулярности, который реализуется при $\alpha_a > \alpha \left(a > \frac{r_0}{2} \right)$.

В этом случае внешний и внутренний «горизонты событий» исчезают, величины ρ_+, ρ_- в (35), (36) становятся комплексными числами.

По мере возрастания углового момента вращения $a > \frac{r_0}{2}$ происходит уменьшение области (ρ, θ), где не выполняется условие $g_{00} > 0$ (7). В пределе бесконечно большого момента a ограничение области определения волновой функции $\psi(r, \theta, \varphi)$ сводится к узкой полосе в экваториальной плоскости с $\theta \approx \frac{\pi}{2}$ и $0 \le r \le r_0$.

Поскольку выполнение условия Гильберта $g_{00} > 0$ требует и для случая «голой» сингулярности ограничений на область определения волновой функции уравнения Дирака в поле Керра, анализ уровней энергии дираковских частиц требует специального рассмотрения, связанного с проведением численных расчетов уравнений (30), (37).

3. Гравитационное поле Керра – Ньюмена

Решение уравнений ОТО Керра – Ньюмена характеризуется точечным электрически заряженным источником гравитационного поля с массой M и зарядом Q, вращающимся с угловым моментом $\mathbf{J} = Mc\mathbf{a}$.

3.1. Метрика Керра – Ньюмена в координатах Бойера – Линдквиста (t, r, θ, φ)

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_0 r - r_Q^2}{\rho_k^2}\right) dt^2 + \frac{2a\left(r_0 r - r_Q^2\right)}{\rho_k^2} \sin^2 \theta dt d\varphi - \\ - \frac{\rho_k^2}{\Delta_{K-N}} dr^2 - \rho_k^2 d\theta^2 - \\ - \left(r^2 + a^2 + \frac{a^2\left(r_0 r - r_Q^2\right)}{\rho_k^2} \sin^2\theta \right) \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (50)$$

В выражении (50) по сравнению с выражением для метрики Керра (6) присутствуют новые обозначения, связанные с присутствием электрического заряда Q:

$$r_Q = \frac{\sqrt{G}Q}{c^2}; \ \Delta_{K-N} = r^2 f_{K-N} = r^2 \left(1 - \frac{r_0}{r} + \frac{a^2}{r^2} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right).$$

В соответствии с условием Гильберта $(g_{00} > 0)$ в метрике (50) подразумевается выполнение неравенства

$$\left(1 - \frac{r_0 r - r_Q^2}{\rho_k^2}\right) > 0. \quad (51)$$

Равенство нулю выражения (51) определяет внешнюю и внутреннюю эргосферы поля Керра – Ньюмена.

3.2. Разделение переменных, уравнения и асимптотика для радиальных волновых функций

Автор работы [16], используя подход Чандрасекара [10], провел разделение переменных в уравнении Дирака в поле Керра – Ньюмена с метрикой (50), используя двухкомпонентный спинорный формализм Пенроуза – Ньюмена [11] и единичную тетраду Kinnersley [12].

В результате уравнения для угловых функций $\overset{(-)}{S}(\theta), \overset{(+)}{S}(\theta)$ остаются такими же, как и для поля Керра (см. (23)). Уравнения для радиальных функций $\overset{(-)}{R}_{K-N}(r), \overset{(+)}{R}_{K-N}(r)$ имеют вид

$$\begin{aligned} &\Delta_{K-N}^{1/2} \left(\frac{d}{dr} - i\frac{K_{K-N}}{\Delta_{K-N}} \right) \overset{(-)}{R}_{K-N}(r) = \\ &= \left(\lambda + imr\right) \overset{(+)}{R}_{K-N}(r), \\ &\Delta_{K-N}^{1/2} \left(\frac{d}{dr} + i\frac{K_{K-N}}{\Delta_{K-N}} \right) \overset{(+)}{R}_{K-N}(r) = \\ &= \left(\lambda - imr\right) \overset{(-)}{R}_{K-N}(r). \end{aligned} \quad (52)$$

В уравнениях (52)

$$K_{K-N} = \left(r^2 + a^2\right)E - m_\varphi a + eQr.$$

Из системы уравнений (52) следует, что $\overset{(+)}{R}{}^*_{K-N}(r) = \overset{(-)}{R}_{K-N}(r)$. Тогда для вещественных функций

$$g_1(r)=\overset{(-)}{R}_{K-N}(r)+\overset{(+)}{R}_{K-N}(r),$$
$$f_1(r)=-i\left(\overset{(-)}{R}_{K-N}(r)-\overset{(+)}{R}_{K-N}(r)\right). \tag{53}$$

уравнения (52) имеют следующий вид:

$$f_{K-N}\frac{df_1}{dr}+\frac{\lambda\sqrt{f_{K-N}}}{r}f_1-$$
$$-\left(E\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)-\frac{m_\varphi a}{r^2}+\frac{eQ}{r}+m\sqrt{f_{K-N}}\right)g_1=0,$$
$$f_{K-N}\frac{dg_1}{dr}+\frac{\lambda\sqrt{f_{K-N}}}{r}g_1+ \tag{54}$$
$$+\left(E\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)-\frac{m_\varphi a}{r^2}+\frac{eQ}{r}-m\sqrt{f_{K-N}}\right)f_1=0.$$

В уравнениях (54)

$$f_{K-N}=1-\frac{r_0}{r}+\frac{a^2+r_Q^2}{r^2}. \tag{55}$$

Условие (51) обуславливает рассмотрение лишь положительных значений $f_{K-N}>0$.

Первоначально рассмотрим случай, когда

$$r_0\ge 2\sqrt{a^2+r_Q^2}. \tag{56}$$

В этом случае f_{K-N} можно представить в виде

$$f_{K-N}=\left(1-\frac{r_{K-N}^+}{r}\right)\left(1-\frac{r_{K-N}^-}{r}\right), \tag{57}$$

где

$$r_{K-N}^{\pm}=\frac{r_0}{2}\pm\sqrt{\frac{r_0^2}{4}-a^2-r_Q^2}. \tag{58}$$

Величины $r_{K-N}^{\pm}$ являются внешними и внутренними радиусами «горизонтов событий» поля Керра – Ньюмена.

В безразмерных переменных $\varepsilon=\dfrac{E}{m}$; $\rho=\dfrac{r}{l_c}$;

$$2\alpha=\frac{r_0}{l_c}=\frac{2GMm}{\hbar c};\quad \alpha_Q=\frac{r_Q}{l_c}=\frac{\sqrt{G}Qm}{\hbar c};\quad \alpha_{em}=\frac{eQ}{\hbar c}$$

выражения (57), (58) можно представить в виде

$$f_{K-N}=\left(1-\frac{\rho_{K-N}^+}{\rho}\right)\left(1-\frac{\rho_{K-N}^-}{\rho}\right), \tag{59}$$

$$\rho_{K-N}^{\pm}=\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-\alpha_a^2-\alpha_Q^2}. \tag{60}$$

Уравнения (54) в безразмерных переменных имеют вид

$$\left(1-\frac{\rho_{K-N}^+}{\rho}\right)\left(1-\frac{\rho_{K-N}^-}{\rho}\right)\frac{df_1}{d\rho}+\frac{\lambda\sqrt{\left(1-\frac{\rho_{K-N}^+}{\rho}\right)\left(1-\frac{\rho_{K-N}^-}{\rho}\right)}}{\rho}f_1-$$
$$-\left(\varepsilon\left(1+\frac{\alpha_a^2}{\rho^2}\right)-\frac{m_\varphi\alpha_a}{\rho^2}+\frac{\alpha_{em}}{\rho}+\sqrt{\left(1-\frac{\rho_{K-N}^+}{\rho}\right)\left(1-\frac{\rho_{K-N}^-}{\rho}\right)}\right)g_1=0,$$
$$\left(1-\frac{\rho_{K-N}^+}{\rho}\right)\left(1-\frac{\rho_{K-N}^-}{\rho}\right)\frac{dg_1}{d\rho}-\frac{\lambda\sqrt{\left(1-\frac{\rho_{K-N}^+}{\rho}\right)\left(1-\frac{\rho_{K-N}^-}{\rho}\right)}}{\rho}g_1+ \tag{61}$$
$$+\left(\varepsilon\left(1+\frac{\alpha_a^2}{\rho^2}\right)-\frac{m_\varphi\alpha_a}{\rho^2}+\frac{\alpha_{em}}{\rho}-\sqrt{\left(1-\frac{\rho_{K-N}^+}{\rho}\right)\left(1-\frac{\rho_{K-N}^-}{\rho}\right)}\right)f_1=0.$$

Как и для поля Керра, в соответствии с условием (51) областью определения волновых функций $f_1(\rho), g_1(\rho)$ в уравнениях (61) является пространство (ρ,θ,φ) с радиусами большими, чем радиусы поверхности внешней эргосферы и с радиусами $\rho(\theta)$ меньшими, чем радиусы поверхности внутренней эргосферы поля Керра – Ньюмена.

Асимптотическое поведение радиальных волновых функций для финитного движения по своей структуре такое же, как и для поля Керра.

При $\rho\to\infty$

$$f_1=Ce^{-\rho\sqrt{1-\varepsilon^2}},$$
$$g_1=-\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}f_1. \tag{62}$$

При $\rho\to\rho_{K-N}^+$ $\left(\rho>\rho_{K-N}^+\right)$

$$f_1 = A\sin\left(M^+_{K-N}\ln\left(\rho-\rho^+_{K-N}\right)+\varphi^+_{K-N}\right),$$
$$g_1 = A\cos\left(M^+_{K-N}\ln\left(\rho-\rho^+_{K-N}\right)+\varphi^+_{K-N}\right), \quad (63)$$

где

$$M^+_{K-N} = \frac{\left(\rho^+_{K-N}\right)^2}{2\sqrt{\alpha^2-\alpha_a^2-\alpha_Q^2}}\times$$
$$\times\left(\varepsilon\left(1+\frac{\alpha_a^2}{\left(\rho^+_{K-N}\right)^2}\right)-\frac{m_\varphi}{\left(\rho^+_{K-N}\right)^2}+\frac{\alpha_{em}}{\rho^+_{K-N}}\right). \quad (64)$$

При $\rho\to\rho^-_{K-N}$ $\left(\rho<\rho^-_{K-N}\right)$

$$f_1 = B\cos\left(M^-_{K-N}\ln\left(\rho^-_{K-N}-\rho\right)+\varphi^-_{K-N}\right),$$
$$g_1 = B\sin\left(M^-_{K-N}\ln\left(\rho^-_{K-N}-\rho\right)+\varphi^-_{K-N}\right), \quad (65)$$

где

$$M^-_{K-N} = \frac{\left(\rho^-_{K-N}\right)^2}{2\sqrt{\alpha^2-\alpha_a^2-\alpha_Q^2}}\times$$
$$\times\left(\varepsilon\left(1+\frac{\alpha_a^2}{\left(\rho^-_{K-N}\right)^2}\right)-\frac{m_\varphi}{\left(\rho^-_{K-N}\right)^2}+\frac{\alpha_{em}}{\rho^-_{K-N}}\right). \quad (66)$$

При $\rho\to 0$ система уравнений (61) сводится к уравнениям:

$$\frac{df_1}{d\rho}+\frac{\lambda(\rho)}{\sqrt{\alpha_a^2+\alpha_Q^2}}f_1+\left(\varepsilon\frac{\alpha_a^2}{\alpha_a^2+\alpha_Q^2}-\frac{m_\varphi a_a}{\alpha_a^2+\alpha_Q^2}\right)g_1=0,$$
$$\frac{dg_1}{d\rho}-\frac{\lambda(\rho)}{\sqrt{\alpha_a^2+\alpha_Q^2}}g_1+\left(\varepsilon\frac{\alpha_a^2}{\alpha_a^2+\alpha_Q^2}-\frac{m_\varphi a_a}{\alpha_a^2+\alpha_Q^2}\right)f_1=0. \quad (67)$$

Зависимость $\lambda(\rho)$ при $\rho\to 0$ должна определяться из решения угловых уравнений (23) с соответствующими граничными условиями, определяемыми выполнением неравенства (51).

В (62), (63), (65) величины C, A, B, φ^+_{K-N}, φ^-_{K-N} – постоянные интегрирования.

Как и в случае полей Шварцшильда [4, 5], Райсснера – Нордстрёма [6] и Керра (см. (40)–(43)) осциллирующие функции f_1 и g_1 плохо определены на внешнем и внутреннем «горизонте событий» и расходятся при $\rho\to\rho^+_{K-N}$ $\left(\rho>\rho^+_{K-N}\right)$ и при $\rho\to\rho^-_{K-N}$ $\left(\rho<\rho^-_{K-N}\right)$. Для обеспечения квадратичной интегрируемости рассматриваемых функций и в соответствии с условием (51) необходимо сужение их области определения до интервала $\left[\left(\rho^+_{K-N}\right)^{\min},\infty\right)$, где $\left(\rho^+_{K-N}\right)^{\min}>\rho^+_{K-N}$ и до интервала $\left(0,\left(\rho^-_{K-N}\right)^{\max}\right]$, где $\left(\rho^-_{K-N}\right)^{\max}<\rho^-_{K-N}$.

Эрмитовость дираковского гамильтониана в поле Керра – Ньюмена обосновывается так же как и для поля Керра ((п. 2.4) данной работы, см. также [2, 17]).

Граничные условия для волновых функций определяются также, как и для поля Керра (п. 2.4).

В результате можно заключить, что система уравнений (61) имеет стационарный, вещественный энергетический спектр. Численные величины этого спектра и вид волновых функций будут определены позднее в численных расчетах.

3.3. Экстремальное поле Керра – Ньюмена и «голая» сингулярность

Экстремальное поле реализуется при $\alpha=\sqrt{\alpha_a^2+\alpha_Q^2}$ $\left(\frac{r_0}{2}=\sqrt{a^2+r_Q^2}\right)$. В этом случае внешний и внутренний «горизонты событий» совпадают, их радиус равен

$$\rho^+_{K-N}=\rho^-_{K-N}=\alpha. \quad (68)$$

Радиусы поверхностей внешней и внутренней эргосфер равны

$$\left(r_{erg}\right)_{1,2}=\frac{r_0}{2}\left(1\pm\frac{2a}{r_0}\sin\theta\right). \quad (69)$$

Для рассматриваемого случая система уравнений (61) сводится к виду

$$\left(1-\frac{\alpha}{\rho}\right)^2\frac{df_1}{d\rho}+\frac{\lambda\left|1-\frac{\alpha}{\rho}\right|}{\rho}f_1-$$
$$-\left(\varepsilon\left(1+\frac{\alpha_a^2}{\rho^2}\right)-\frac{m_\varphi\alpha_a}{\rho^2}+\frac{\alpha_{em}}{\rho}+\left|1-\frac{\alpha}{\rho}\right|\right)g_1=0,$$
$$\left(1-\frac{\alpha}{\rho}\right)^2\frac{dg_1}{d\rho}-\frac{\lambda\left|1-\frac{\alpha}{\rho}\right|}{\rho}g_1+$$
$$+\left(\varepsilon\left(1+\frac{\alpha_a^2}{\rho^2}\right)-\frac{m_\varphi\alpha_a}{\rho^2}+\frac{\alpha_{em}}{\rho}-\left|1-\frac{\alpha}{\rho}\right|\right)f_1=0. \quad (70)$$

Волновые функции определены в интервале $\rho\in(0,\infty)$ за исключением окрестности около «горизонта событий». Поведение волновых функций вблизи «горизонта событий» имеет вид:

при $\rho \to \alpha \; (\rho > \alpha)$

$$f_1(\rho) = -A \sin \times$$
$$\times \left[\alpha^2 \left(\varepsilon + \frac{\varepsilon \alpha_a^2}{\alpha^2} - \frac{m_\varphi \alpha_a}{\alpha^2} + \frac{\alpha_{em}}{\alpha} \right) \frac{1}{\rho - \alpha} + \varphi_{K-N}^+ \right],$$
$$g_1(\rho) = A \cos \times \tag{71}$$
$$\times \left[\alpha^2 \left(\varepsilon + \frac{\varepsilon \alpha_a^2}{\alpha^2} - \frac{m_\varphi \alpha_a}{\alpha^2} + \frac{\alpha_{em}}{\alpha} \right) \frac{1}{\rho - \alpha} + \varphi_{K-N}^+ \right];$$

при $\rho \to \alpha \; (\rho < \alpha)$

$$f_1(\rho) = B \cos \times$$
$$\times \left[\alpha^2 \left(\varepsilon + \frac{\varepsilon \alpha_a^2}{\alpha^2} - \frac{m_\varphi \alpha_a}{\alpha^2} + \frac{\alpha_{em}}{\alpha} \right) \frac{1}{\alpha - \rho} + \varphi_{K-N}^- \right],$$
$$g_1(\rho) = -B \sin \times \tag{72}$$
$$\times \left[\alpha^2 \left(\varepsilon + \frac{\varepsilon \alpha_a^2}{\alpha^2} - \frac{m_\varphi \alpha_a}{\alpha^2} + \frac{\alpha_{em}}{\alpha} \right) \frac{1}{\alpha - \rho} + \varphi_{K-N}^- \right].$$

Система уравнений (70) с граничными условиями, обсужденными в п. 2.4, обладает дискретным стационарным вещественным спектром для дираковских частиц, находящихся либо над поверхностью внешней эргосферы, либо под поверхностью внутренней эргосферы поля Керра – Ньюмена. Поверхности внешней и внутренней эргосфер играют роль бесконечно больших потенциальных барьеров, запрещающих квантово-механическим частицам со спином ½ пересекать их с любой стороны.

Случай «голой» сингулярности реализуется при $\alpha < \sqrt{\alpha_a^2 + \alpha_Q^2}$ $\left(\frac{r_0}{2} < \sqrt{a^2 + r_Q^2} \right)$.

В этом случае внешний и внутренний «горизонты событий» исчезают, величины ρ_{K-N}^+ и ρ_{K-N}^- становятся комплексными числами.

Как уже отмечалось в п. 2.5, анализ уровней энергии дираковских частиц в случае «голой» сингулярности поля Керра – Ньюмена требует специального рассмотрения, связанного с проведением численных расчетов решения уравнений (54), (61) с соответствующими граничными условиями.

На рис. 1, 2 в координатах $\left(r' = \frac{2r}{r_0}, \theta \right)$ приведены области определения волновых функций уравнения Дирака в полях Керра и Керра – Ньюмена при некоторых значениях $a' = \frac{2a}{r_0}$ и $r_Q' = \frac{2r_Q}{r_0}$.

Цветом указаны области, где из-за условия Гильберта $g_{00} > 0$ волновые функции должны быть равны нулю.

Цветными жирными линиями показаны внешние и внутренние поверхности эргосфер.

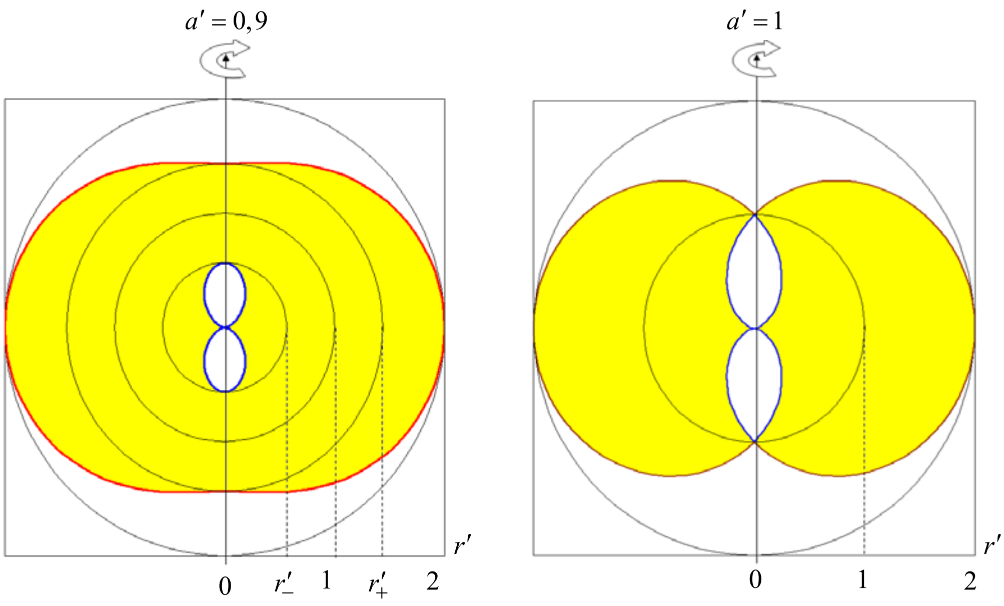

Рис. 1. Области определения волновых функций уравнения Дирака в поле Керра для некоторых значений $a' = \frac{2a}{r_0}$ (см. также с. 14)

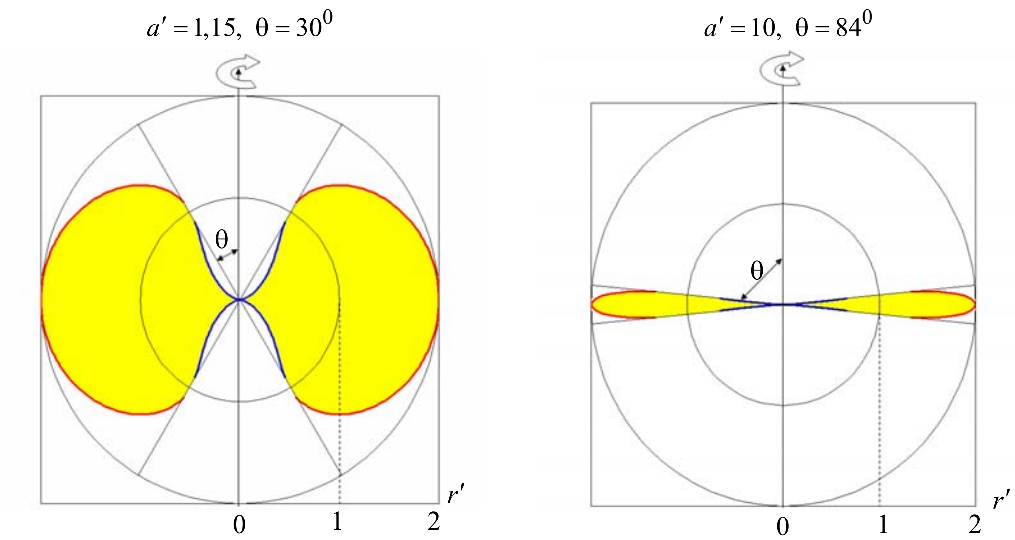

Рис. 1. Окончание

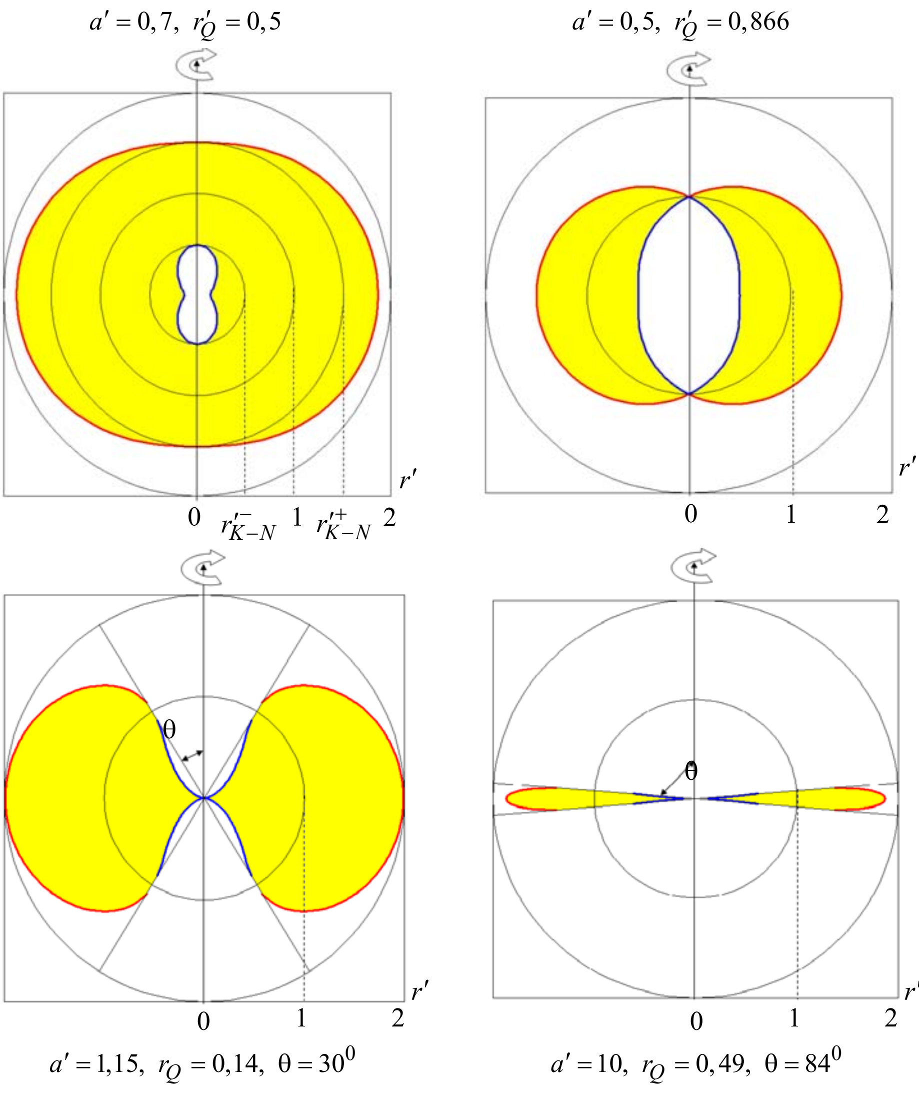

Рис. 2. Области определения волновых функций в поле Керра – Ньюмена для некоторых значений $a' = \frac{2a}{r_0}$, $a'_Q = \frac{2r_Q}{r_0}$

Заключение

По результатам данной работы можно сделать следующие выводы:

1. Для метрик Керра и Керра – Ньюмена показана возможность существования стационарных связанных состояний частиц со спином 1/2.

2. Связанные состояния с вещественным энергетическим спектром могут существовать для дираковских частиц, находящихся как над поверхностями внешних эргосфер, так и под поверхностями внутренних эргосфер полей Керра и Керра – Ньюмена.

3. Поверхности внешних и внутренних эргосфер при соблюдении условия Гильберта ($g_{00} > 0$) проявляют себя в роли бесконечно больших потенциальных барьеров, лишающих возможности их пересечения квантово-механическими дираковскими частицами.

4. Волновая функция частиц со спином ½ в области между поверхностями внешних и внутренних эргосфер равна нулю.

Отсюда следует, что возможно существование вращающихся коллапсаров нового типа.

Эти коллапсары:

– инертные (дираковские частицы не могут пересекать поверхности внешней и внутренних эргосфер);

– не излучают по Хокингу [7] (излучение Хокинга требует существования волновой функции (операторов поля Дирака) в объеме между поверхностями внешних и внутренних эргосфер [18–25]);

– по крайней мере при $\alpha \geq \sqrt{\alpha_a^2 + \alpha_Q^2}$ $\left(\frac{r_0}{2} \geq \sqrt{a^2 + r_Q^2}\right)$ обеспечивают существование стационарных связанных состояний дираковских частиц над внешними и под внутренними поверхностями эргосфер полей Керра и Керра – Ньюмена.

Таким образом, результаты данной работы и работ [4–6] могут быть полезными в совершенствовании некоторых аспектов стандартной космологической модели, связанных с эволюцией Вселенной и с взаимодействием вращающихся коллапсаров с окружающей средой.

Авторы благодарят за большую техническую помощь в подготовке работы А. Л. Новоселову, Ю. В. Петрова.

Список литературы

1. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. // Phys. Rev. 2010. Vol. D82. P. 104056; arxiv: 1007.4631v1 (gr-qc).

2. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. // Phys. Rev. 2011. Vol. D83. P. 105002; arxiv: 1102.4067v1 (gr-qc).

3. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. arxiv: 1107.0844 (gr-qc).

4. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. arxiv: 1205.4348 (gr-qc).

5. Вронский М. А., Горбатенко М. В., Колесников Н. С., Незнамов В. П., Попов Е. Ю., Сафронов И. И. arxiv: 1301.7595 (gr-qc).

6. Горбатенко М. В., Незнамов В. П. arxiv: 1302.2557 (gr-qc).

7. Hawking S. W. // Commun. math. Phys. 1975. Vol. 43. P. 199–220.

8. Kerr R.P. // Phys. Rev. Lett. 1963. Vol. 11. P. 237.

9. Newman E. T., Couch E., Chinnapared K., Exton A., Prakash A. and Torrence R. // J.Math.Phys. 1965. Vol. 6. P. 918.

10. Chandrasekhar S. // Proc. Roy. Soc (London). 1976. Vol. A349. P. 571.

11. Newman E. T., Penrose R. // J.Math.Phys. 1962. Vol. 3. P. 566.

12. Kinnersley W. // J.Math.Phys. 1969. Vol. 10. P. 1195.

13. Ternov I. M., Gaina A. B., Chizhov G. A. // Sov. Phys. J. 1980. Vol. 23. P. 695–700.

14. Dolan S. R. Trinity Hall and Astrophysics Group, Cavendish Laboratory. Dissertation, 2006.

15. Parker L. // Phys. Rev. 1980. Vol. D22. P. 1922.

16. Page D. // Phys. Rev. 1976. Vol. D14. P. 1509.

17. Batic D., Schmid H. arxiv: gr-qc/0606050.

18. Srinivasan K., Padmanabhan T. // Phys. Rev. 1999. Vol. D60. P. 024007. [gr-qc/9812028].

19. Shankaranarayanan S., Srinivasan K., Padmanabhan T. // Mod. Phys. Lett. 2001. Vol. A16. P. 571–578. [gr-qc/0007022].

20. Shankaranarayanan S., Padmanabhan T., Srinivasan K. // Class. Quant. Grav. 2002. Vol. 19. P. 2671–2688. [gr-qc/0010042].

21. Parikh M. K., Wilczek F. // Phys. Rev. Lett. 2000. Vol. 85. P. 5042. [arXiv:hep-th/9907001].

22. Vagenas E. C. // Phys. Lett. 2002. Vol. B533. P. 302. [hep-th/0109108].

23. Robinson S. P., Wilczek F. // Phys. Rev. Lett. 2005. Vol. 95. P. 011303. [arXiv:gr-qc/0502074].

24. Vagenas E. C., Das S. JHEP 0610:025 (2006) [hep-th/0606077].

25. Zampeli A., Singleton D., Vagenas E. C., arXiv: [gr-qc] 1206.0879v1.

Статья поступила в редакцию 04.04.2013