УДК 530.145.7; 514.764.2

СТАЦИОНАРНЫЕ СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ ЧАСТИЦ СО СПИНОМ ½ В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ РАЙССНЕРА – НОРДСТРЁМА

М. В. Горбатенко, В. П. Незнамов[1]

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, Саров Нижегородской обл.

Для гравитационного поля Райсснера – Нордстрёма с использованием самосопряженного гамильтониана с плоским скалярным произведением волновых функций впервые обоснована возможность существования стационарных связанных состояний пробных частиц со спином ½. Связанные состояния дираковских частиц с вещественным дискретным энергетическим спектром возможны как для частиц, находящихся вне внешнего «горизонта событий», так и для частиц, находящихся под внутренним «горизонтом событий» – горизонтом Коши. Для получения дискретного энергетического спектра введено граничное условие, при котором компоненты вектора плотности тока рассматриваемых дираковских частиц равны нулю вблизи «горизонтов событий». По результатам работы можно сделать предположение о существовании нового типа заряженных коллапсаров, для которых отсутствует механизм излучения по Хокингу. Результаты работы могут привести к корректировке некоторых аспектов стандартной космологической модели, связанных с эволюцией Вселенной и с взаимодействием заряженных коллапсаров с окружающей средой.

Ключевые слова: уравнение Дирака, гравитационное поле Райсснера – Нордстрёма, стационарные связанные состояния, самосопряженные гамильтонианы, дискретный энергетический спектр.

1. Введение

Авторами в работах [1–3] с помощью методов псевдоэрмитовой квантовой механики для произвольных внешних гравитационных полей, в том числе зависящих от времени, разработан алгоритм получения самосопряженных дираковских гамильтонианов с плоским скалярным произведением волновых функций.

Из одночастичной квантовой механики следует, что при существовании эрмитовости гамильтониана, при наличии квадратично интегрируемых волновых функций и при установлении соответствующих граничных условий самосопряженные гамильтонианы, не зависящие от времени, должны обеспечивать существование стационарных связанных состояний частиц с вещественным энергетическим спектром.

В работах [4, 5] для гравитационного поля Шварцшильда с использованием самосопряженного гамильтониана с плоским скалярным произведением волновых функций для любых значений гравитационной константы связи впервые получены стационарные связанные состояния частиц со спином ½, не распадающиеся со временем. Для получения дискретного энергетического спектра введено граничное условие, при котором компоненты вектора плотности тока частиц равны нулю вблизи «горизонта событий».

При квантово-механическом рассмотрении «горизонт событий» является фактически бесконечно большим потенциальным барьером, который лишает возможности пересекать его пробным дираковским частицам. Этим же свойством обладают метрики Шварцшильда в изотропных [6] и гармонических [7] координатах.

В настоящей работе по аналогии с работами [4, 5] проводится анализ возможности существования стационарных связанных состояний дираковских частиц в гравитационном поле Райсснера – Нордстрёма [8, 9]. В результате анализа делается вывод, что связанные состояния частиц со спином ½ с вещественным энергетическим спектром могут существовать как вне внешнего «горизонта событий», так и под внутренним «горизонтом событий» – горизонтом Коши. Результаты

[1] E-mail: neznamov@vniief.ru

численного определения энергетического спектра и радиальных волновых функций будут приведены в следующей работе.

Данная работа построена следующим образом. В разделах 2, 3 определяется вид самосопряженного дираковского гамильтониана в поле Райсснер – Нордстрёма. В разделах 4, 5 проводится разделение переменных, определяются уравнения и асимптотика для радиальных волновых функций. В разделах 6–8 определяется плотность тока дираковских частиц, доказывается эрмитовость гамильтониана и вводятся граничные условия вблизи «горизонтов событий». В разделе 9 обсуждаются случай экстремального поля Райсснера – Нордстрёма и случай голой сингулярности. В Заключении приведены основные выводы проведенного анализа.

2. Метрика Райсснера – Нордстрёма

Решение уравнений ОТО Райсснера – Нордстрёма характеризуется точечным сферически-симметричным источником гравитационного поля с массой M и электрического поля с зарядом Q. Метрика Райсснера – Нордстрёма является диагональной

$$ds^2 = -f_{R-N}dt^2 + \frac{dr^2}{f_{R-N}} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right). \quad (1)$$

В формуле (1) $g_{00} = -f_{R-N}$; $g^{00} = -\dfrac{1}{f_{R-N}}$; $f_{R-N} = \left(1 - \dfrac{r_0}{r} + \dfrac{r_Q^2}{r^2}\right)$; $r_0 = \dfrac{2GM}{c^2}$; $r_Q = \dfrac{\sqrt{G}Q}{c^2}$, M, Q – масса и заряд точечного источника гравитационного и электрического полей.

Условие Гильберта $\left(-g_{00}\right) > 0$ приводит к необходимости рассмотрения лишь положительных значений $f_{R-N} > 0$.

3. Самосопряженный гамильтониан частиц со спином ½ в поле Райсснера – Нордстрёма

Ниже будем использовать систему единиц $\hbar = c = 1$ и обозначения $\gamma^\alpha, \gamma^{\underline{\alpha}}$ соответственно для мировых и локальных матриц Дирака.

Общий вид гамильтониана во внешнем гравитационном и электромагнитном полях для дираковской частицы с массой m, зарядом $(-e)$ и с диагональными тетрадами в калибровке Швингера можно записать в виде [10]

$$\tilde{H} = -\frac{im}{\left(-g^{00}\right)}\tilde{\gamma}^0 + \frac{i}{\left(-g^{00}\right)}\tilde{\gamma}^0\tilde{\gamma}^k\frac{\partial}{\partial x^k} - -i\left(\tilde{\Phi}_0 - ieA_0\right) + \frac{i}{\left(-g^{00}\right)}\tilde{\gamma}^0\tilde{\gamma}^k\left(\tilde{\Phi}_k - ieA_k\right). \quad (2)$$

В выражении (2) знак ~ над определенными величинами означает, что они вычисляются с использованием тетрад в калибровке Швингера; через $\tilde{\Phi}_\mu$ и A_μ $(\mu = 0,1,2,3)$ обозначены соответственно биспинорные связанности и вектор-потенциал внешнего электромагнитного поля; $\tilde{\gamma}^\mu$ – мировые матрицы Дирака. Величины $\tilde{\gamma}^\mu$ связаны через тетрады с локальными матрицами Дирака $\gamma^{\underline{\beta}}$ $\left(\tilde{\gamma}^\mu = \tilde{H}^\mu_{\underline{\beta}}\gamma^{\underline{\beta}}\right)$.

Ненулевые тетрады в калибровке Швингера для рассматриваемой метрики (1) равны

$$H^0_{\underline{0}} = \frac{1}{\sqrt{f_{R-N}}};\ H^1_{\underline{1}} = \sqrt{f_{R-N}};\ H^2_{\underline{2}} = \frac{1}{r}; \quad H^3_{\underline{3}} = \frac{1}{r\sin\theta}. \quad (3)$$

Авторы в работе [3] доказали, что для диагональных метрик самосопряженный гамильтониан в η-представлении с плоским скалярным произведением волновых функций можно получить из выражения

$$H_\eta = \frac{1}{2}\left(\tilde{H}_{red} + \tilde{H}^+_{red}\right), \quad (4)$$

где через $\tilde{H}_{red}$ обозначена сокращенная часть гамильтониана (2) без биспинорных связностей $\tilde{\Phi}_\mu$.

$$\tilde{H}_{red} = \tilde{H} + i\tilde{\Phi}_0 - \frac{i}{\left(-g^{00}\right)}\tilde{\gamma}^0\tilde{\gamma}^k\tilde{\Phi}_k. \quad (5)$$

Учитывая, что для метрики Райсснера – Нордстрёма $A_k = 0$, $A_0 = \dfrac{Q}{r}$, и принимая во внимание (3)–(5), можно получить следующее выражение для гамильтониана $H_\eta = H^+_\eta$

$$H_\eta = im\sqrt{f_{R-N}}\gamma_{\underline{0}} - -i\gamma_{\underline{0}}\gamma_{\underline{1}}\left(f_{R-N}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} - \frac{r_0}{2r^2}\right) - i\sqrt{f_{R-N}}\frac{1}{r}\times \times\left[\gamma_{\underline{0}}\gamma_{\underline{2}}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{2}\mathrm{ctg}\theta\right) + \gamma_{\underline{0}}\gamma_{\underline{3}}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right] + \frac{eQ}{r}. \quad (6)$$

Волновая функция уравнения Дирака с гамильтонианом (6) ψ_η связана с начальной функцией $\tilde{\psi}$ преобразованием подобия [1–3].

$$\psi_\eta = \eta^{-1}\tilde{\psi}. \qquad (7)$$

Для метрики Райсснера – Нордстрёма

$$\eta = \left(-g^{00}\right)^{1/4} = f_{R-N}^{-1/4}. \qquad (8)$$

4. Разделение переменных

Выражение в квадратных скобках для гамильтониана (6) зависит только от угловых координат, остальные слагаемые зависят только от радиальной координаты. Отсюда видно, что разделение переменных в уравнении Дирака с гамильтонианом (6) можно производить таким же образом, как и для поля Шварцшильда [4, 5] с заменой $f \to f_{R-N}$; $E \to E + \dfrac{eQ}{r}$.

Для разделения переменных определим биспинор $\psi_\eta(\mathbf{r},t)$ в виде

$$\psi_\eta(r,\theta,\varphi,t) = \begin{pmatrix} F(r) & \xi(\theta) \\ -iG(r) & \sigma^3\xi(\theta) \end{pmatrix} e^{im_\varphi\varphi}e^{-iEt} \qquad (9)$$

и используем следующее уравнение (см., например, [11]):

$$\left[-\sigma^2\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{2}\mathrm{ctg}\theta\right) + i\sigma^1 m_\varphi \frac{1}{\sin\theta}\right]\xi(\theta) = i\kappa\xi(\theta). \qquad (10)$$

В равенствах (9), (10) $\xi(\theta)$ – сферические гармоники для спина 1/2, σ^i – двумерные матрицы Паули, m_φ – магнитное квантовое число, κ – квантовое число уравнения Дирака:

$$\kappa = \pm1, \pm2 ... = \begin{cases} -(l+1), & j = l + 1/2, \\ l, & j = l - 1/2. \end{cases} \qquad (11)$$

В формуле (11) j, l – квантовые числа полного и орбитального момента дираковской частицы соответственно.

$\xi(\theta)$ можно представить в виде [12]:

$$\xi(\theta) = \begin{pmatrix} {}_{-1/2}Y_{jm_\varphi}(\theta) \\ {}_{1/2}Y_{jm_\varphi}(\theta) \end{pmatrix} = (-1)^{m_\varphi + 1/2}\sqrt{\frac{1}{4\pi}\frac{(j-m_\varphi)!}{(j+m_\varphi)!}} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \cos\theta/2 & \sin\theta/2 \\ -\sin\theta/2 & \cos\theta/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\kappa - m_\varphi + \frac{1}{2}\right) P_l^{m_\varphi - 1/2}(\theta) \\ P_l^{m_\varphi + 1/2}(\theta) \end{pmatrix}. \qquad (12)$$

В выражении (12) $P_l^{m_\varphi \pm 1/2}(\theta)$ – присоединенные полиномы Лежандра.

В результате разделения переменных при $f_{R-N} > 0$ получаем уравнения для вещественных радиальных функций $F(r), G(r)$.

5. Уравнения и асимптотика для радиальных волновых функций

Система уравнений для функций $F(r), G(r)$ имеет вид

$$\begin{aligned} & f_{R-N}\frac{dF}{dr} + \left(\frac{1+\kappa\sqrt{f_{R-N}}}{r} - \frac{r_0}{2r^2}\right)F - \\ & -\left(E + \frac{eQ}{r} + m\sqrt{f_{R-N}}\right)G = 0, \\ & f_{R-N}\frac{dG}{dr} + \left(\frac{1-\kappa\sqrt{f_{R-N}}}{r} - \frac{r_0}{2r^2}\right)G + \\ & +\left(E + \frac{eQ}{r} - m\sqrt{f_{R-N}}\right)F = 0. \end{aligned} \qquad (13)$$

В соответствии с метрикой (1) рассматриваем лишь положительные значения f_{R-N}. В этом случае функции $F(r), G(r)$ являются вещественными.

Введем безразмерные переменные $\varepsilon = \dfrac{E}{m}$; $\rho = \dfrac{r}{l_C}$; $\dfrac{r_0}{l_C} = \dfrac{2GMm}{\hbar c} = 2\alpha$; $\alpha_Q = \dfrac{r_Q}{l_C} = \dfrac{\sqrt{G}Qm}{\hbar c}$; $\alpha_{em} = \dfrac{eQ}{\hbar c}$.

Величину f_{R-N} можно представить в виде

$$f_{R-N} = \left(1 - \frac{\rho_+}{\rho}\right)\left(1 - \frac{\rho_-}{\rho}\right), \qquad (14)$$

где

$$\rho_+ = \alpha + \sqrt{\alpha^2 - \alpha_Q^2}, \qquad (15)$$

$$\rho_- = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - \alpha_Q^2}. \qquad (16)$$

Уравнения (13) в безразмерных переменных имеют вид

$$\left(1-\frac{\rho_+}{\rho}\right)\left(1-\frac{\rho_-}{\rho}\right)\frac{dF}{d\rho}+\left(\frac{1+\kappa\sqrt{\left(1-\frac{\rho_+}{\rho}\right)\left(1-\frac{\rho_-}{\rho}\right)}}{\rho}-\frac{\alpha}{\rho^2}\right)F-\left(\varepsilon+\frac{\alpha_{em}}{\rho}+\sqrt{\left(1-\frac{\rho_+}{\rho}\right)\left(1-\frac{\rho_-}{\rho}\right)}\right)G=0,$$

$$\left(1-\frac{\rho_+}{\rho}\right)\left(1-\frac{\rho_-}{\rho}\right)\frac{dG}{d\rho}+\left(\frac{1-\kappa\sqrt{\left(1-\frac{\rho_+}{\rho}\right)\left(1-\frac{\rho_-}{\rho}\right)}}{\rho}-\frac{\alpha}{\rho^2}\right)G+\left(\varepsilon+\frac{\alpha_{em}}{\rho}-\sqrt{\left(1-\frac{\rho_+}{\rho}\right)\left(1-\frac{\rho_-}{\rho}\right)}\right)F=0. \quad (17)$$

Поскольку подкоренные выражения в уравнениях (17) положительны лишь при $\rho>\rho_+$ и $\rho<\rho_-$, то волновые функции $F(\rho),G(\rho)$ определены на интервалах $\rho\in[0,\rho_-)$ и $\rho\in(\rho_+,\infty)$. В области $\rho_-\le\rho\le\rho_+$ волновые функции равны нулю. Величины ρ_+ и ρ_- являются радиусами внешнего и внутреннего «горизонтов событий».

Если заряд $Q=0\ (\alpha_Q=0)$, то $\rho_+=2\alpha;\ \rho_-=0$ и система (17) будет совпадать с системой радиальных уравнений для поля Шварцшильда с одним «горизонтом событий» ($r=r_0$ или $\rho=2\alpha$).

Рассмотрим асимптотику волновых функций $F(\rho),G(\rho)$ при $\rho\to\infty$; $\rho\to\rho_+\ (\rho>\rho_+)$; $\rho\to\rho_-\ (\rho<\rho_-)$; $\rho\to 0$.

При $\rho\to\infty$ асимптотическое поведение волновых функций для финитного движения является стандартным для центрально-симметричных гравитационных полей [4, 5], [12].

При $\rho\to\infty$

$$F=Ce^{-\rho\sqrt{1-\varepsilon^2}};\qquad G=-\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}F. \quad (18)$$

При $\rho\to\rho_+\ (\rho>\rho_+)$

$$F=\frac{A}{\sqrt{\rho-\rho_+}}\sin\left(M_+\ln(\rho-\rho_+)+\varphi_+\right),\qquad G=\frac{A}{\sqrt{\rho-\rho_+}}\cos\left(M_+\ln(\rho-\rho_+)+\varphi_+\right). \quad (19)$$

В выражении (19)

$$M_+=\frac{\rho_+^2}{2\sqrt{\alpha^2-\alpha_Q^2}}\left(\varepsilon+\frac{\alpha_{em}}{\rho_+}\right). \quad (20)$$

При $\rho\to\rho_-\ (\rho<\rho_-)$

$$F=\frac{B}{\sqrt{\rho_--\rho}}\cos\left(M_-\ln(\rho_--\rho)+\varphi_-\right),\qquad G=\frac{B}{\sqrt{\rho_--\rho}}\sin\left(M_-\ln(\rho_--\rho)+\varphi_-\right). \quad (21)$$

В формуле (21)

$$M_-=\frac{\rho_-^2}{2\sqrt{\alpha^2-\alpha_Q^2}}\left(\varepsilon+\frac{\alpha_{em}}{\rho_-}\right). \quad (22)$$

При $\rho\to 0$

$$F=C_1e^{\frac{(\alpha-\kappa\alpha_Q)}{\alpha_Q^2}\rho},\qquad G=C_2e^{\frac{(\alpha+\kappa\alpha_Q)}{\alpha_Q^2}\rho}. \quad (23)$$

В соотношениях (18), (19), (21), (23) $C,A,B,\varphi_+,\varphi_-,C_1,C_2$ являются постоянными интегрирования.

Как и в случае поля Шварцшильда осциллирующие функции F и G плохо определены на внешнем и внутреннем «горизонтах событий» и расходятся при $\rho\to\rho_+\ (\rho>\rho_+)$ или при $\rho\to\rho_-\ (\rho<\rho_-)$. Для обеспечения квадратичной интегрируемости рассматриваемых функций необходимо сужение их области определения до интервала $\left[\rho_+^{\min},\infty\right)$, где $\rho_+^{\min}>\rho_+$, и до интервала $\left[0,\rho_-^{\max}\right]$, где $\rho_-^{\max}<\rho_-$.

6. Плотность тока дираковских частиц

По определению плотность тока равна

$$j_\mu=\psi^+\gamma_{\underline{0}}\gamma^\mu\psi. \quad (24)$$

Для поля Райсснера–Нордстрёма и тетрад в калибровке Швингера (3)

$$\gamma^0 = f_{R-N}^{-1/2}\gamma^{\underline{0}},\ \ \gamma^1 = f_{R-N}^{1/2}\gamma^{\underline{1}},\ \ \gamma^2 = \frac{1}{r}\gamma^{\underline{2}},$$
$$\gamma^3 = \frac{1}{r\sin\theta}\gamma^{\underline{3}}. \qquad (25)$$

После перехода в η-представление [1–3], в котором представлен гамильтониан (6), получаем

$$\tilde{\psi} = \eta^{-1}\psi_\eta;\ \ \eta = \left(-g^{00}\right)^{1/4} = \left(f_{R-N}\right)^{-1/4}. \qquad (26)$$

Если использовать функции (9) в виде

$$\psi_\eta(\rho,\theta,\varphi) = \frac{1}{\rho}\frac{1}{\sqrt{f_{R-N}}}\begin{pmatrix} f(\rho) & \xi(\theta) \\ -ig(\rho) & \sigma^3\xi(\theta)\end{pmatrix} e^{im_\varphi\varphi}, \qquad (27)$$

то компоненты плотности тока (24) с учетом (25)–(27) можно представить в виде

$$j^0 = \frac{1}{\rho^2}\frac{1}{f_{R-N}}\left(f^2(\rho) + g^2(\rho)\right)\left[\xi^+(\theta)\xi(\theta)\right], \qquad (28)$$

$$j^r = j^1 = -\frac{2}{\rho^2} f(\rho) g(\rho)\left[\xi^+(\theta)\sigma^2\xi(\theta)\right], \qquad (29)$$

$$j^\theta = j^2 = \frac{2}{\rho^3 f_{R-N}^{1/2}} f(\rho) g(\rho)\left[\xi^+(\theta)\sigma^1\xi(\theta)\right], \qquad (30)$$

$$j^\varphi = j^3 = -\frac{i}{\rho^3\sin\theta}\frac{1}{f_{R-N}^{1/2}} f(\rho) g(\rho)\times$$
$$\times\left[\xi^+(\theta)\left(\sigma^3\sigma^3 - \sigma^3\sigma^3\right)\xi(\theta)\right]. \qquad (31)$$

С учетом явного вида угловых функций (12) радиальная плотность тока $j^1(\rho)$ равна нулю во всей области изменения ρ, кроме $\rho\to 0$. Аналогично $j^3 = 0$, кроме области $\rho \to 0$.

7. Эрмитовость дираковского гамильтониана в поле Райсснера – Нордстрёма

Эрмитовость гамильтониана будем рассматривать для двух случаев области определения ρ.

Первый случай – это область вне «внешнего горизонта событий»

$$\infty > \rho > \rho_+ . \qquad (32)$$

Второй случай – область под «внутренним горизонтом событий»

$$\rho_- > \rho \geq 0 . \qquad (33)$$

Для рассматриваемых случаев гамильтониан (6) является эрмитовым. Это можно показать, используя общее условие эрмитовости дираковских гамильтонианов во внешних гравитационных полях, доказанное в [1].

$$\oint dS_k\left(\sqrt{-g}\, j^k\right) = 0 . \qquad (34)$$

Для сферически-симметричного поля Райсснера – Нордстрёма и рассматриваемых случаев условие (34) сводится к

$$4\pi\rho^2 j^1(\rho\to\infty) + 4\pi\rho^2 j^1(\rho\to\rho_+) = 0, \qquad (35)$$

$$4\pi\rho^2 j^1(\rho\to\rho_-) = 0. \qquad (36)$$

Из рассмотрения в п. 6 видно, что условие эрмитовости гамильтониана (6) выполняется для каждой из двух рассматриваемых областей определения радиальных волновых функций $F(\rho), G(\rho)$.

Таким образом, для каждого случая при введении граничных условий система уравнений (17) будет обладать стационарным вещественным энергетическим спектром связанных состояний частиц со спином ½.

8. Граничные условия вблизи «горизонтов событий»

Из соотношений (29)–(31) видно, что при равенстве нулю компонент тока j^r и φ^φ θ-компонента неограниченно растет при $\rho\to\rho_+\left(\rho>\rho_+\right)$ и при $\rho\to\rho_-\left(\rho<\rho_-\right)$.

Отсюда, как и для поля Шварцшильда [4, 5], естественным граничным условием вблизи «горизонтов событий» является ограничение θ-компоненты дираковского тока при $\rho = \rho_+^{\min}$ и при $\rho=\rho_-^{\max}$. С учетом вида функций (9), (12), (19), (21), (27) простейшим ограничением являются условия

$$f\left(\rho_+^{\min}\right) g\left(\rho_+^{\min}\right) = 0 \ \text{для области определения (32)},$$
$$f\left(\rho_-^{\max}\right) g\left(\rho_-^{\max}\right) = 0 \ \text{для области определения (33)}. \qquad (37)$$

С учетом (19)–(22), (27) условия (37) преобразуются к виду

$$\sin 2\left(M_+ \ln\left(\rho_+^{\min} - \rho_+\right) + \varphi_+\right) = 0,$$
$$M_+ \ln\left(\rho_+^{\min} - \rho_+\right) + \varphi_+ = \frac{\pi}{2}N,\quad N = \pm 1, 3, 5..., \qquad (38)$$

$$\sin 2\left(M_- \ln\left(\rho_- - \rho_-^{\max}\right) + \varphi_-\right) = 0,$$
$$M_- \ln\left(\rho_- - \rho_-^{\max}\right) + \varphi_- = \frac{\pi}{2}N,\quad N = \pm 1, 3, 5... \qquad (39)$$

Условия (38), (39) определяют вещественный энергетический спектр системы уравнений (17) для областей определения волновых функций (32), (33).

В условиях (38), (39) используются лишь нечетные значения N по соображениям, изложенным в [5].

9. Экстремальное поле Райсснера – Нордстрёма и голая сингулярность

Экстремальное поле реализуется при $\alpha = \alpha_Q \left(\sqrt{G}2M = Q\right)$. В этом случае внешний и внутренний «горизонты событий» совпадают, их радиусы равны

$$\rho_+ = \rho_- = \alpha . \tag{40}$$

Для данного случая система уравнений для радиальных волновых функций $F(\rho)$ и $G(\rho)$ имеет вид

$$\begin{gathered}
\left(1-\frac{\alpha}{\rho}\right)^2 \frac{dF}{d\rho} + \left(\frac{1+\kappa\left|1-\dfrac{\alpha}{\rho}\right|}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2}\right) F - \\
-\left(\varepsilon + \frac{\alpha_{em}}{\rho} + \left|1-\frac{\alpha}{\rho}\right|\right) G = 0, \\
\left(1-\frac{\alpha}{\rho}\right)^2 \frac{dG}{d\rho} + \left(\frac{1-\kappa\left|1-\dfrac{\alpha}{\rho}\right|}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2}\right) G + \\
+\left(\varepsilon + \frac{\alpha_{em}}{\rho} - \left|1-\frac{\alpha}{\rho}\right|\right) F = 0.
\end{gathered} \tag{41}$$

Волновые функции определены в интервале $\rho \in [0,\infty)$ за исключением окрестности около «горизонта событий». Поведение волновых функций вблизи «горизонта событий» имеет вид

$$\left.\begin{aligned}
F(\rho) &= -\frac{A}{\rho-\alpha}\sin\left(\alpha^2\left(\varepsilon+\frac{\alpha_{em}}{\alpha}\right)\frac{1}{\rho-\alpha}+\varphi_+\right) \\
G(\rho) &= \frac{A}{\rho-\alpha}\cos\left(\alpha^2\left(\varepsilon+\frac{\alpha_{em}}{\alpha}\right)\frac{1}{\rho-\alpha}+\varphi_+\right)
\end{aligned}\right\} \quad \rho \to \alpha \ (\rho > \alpha) \tag{42}$$

$$\left.\begin{aligned}
F(\rho) &= \frac{B}{\alpha-\rho}\cos\left(\alpha^2\left(\varepsilon+\frac{\alpha_{em}}{\alpha}\right)\frac{1}{\alpha-\rho}+\varphi_-\right) \\
G(\rho) &= -\frac{B}{\alpha-\rho}\sin\left(\alpha^2\left(\varepsilon+\frac{\alpha_{em}}{\alpha}\right)\frac{1}{\alpha-\rho}+\varphi_-\right)
\end{aligned}\right\} \quad \rho \to \alpha \ (\rho < \alpha) \tag{43}$$

Граничные условия (38), (39) для рассматриваемого случая имеют вид

$$\begin{gathered}
\sin 2\left(\alpha^2\left(\varepsilon+\frac{\alpha_{em}}{\alpha}\right)\frac{1}{\rho_+^{\min}-\alpha}+\varphi_+\right) = 0, \\
\alpha^2\left(\varepsilon+\frac{\alpha_{em}}{\alpha}\right)\frac{1}{\rho_+^{\min}-\alpha}+\varphi_+ = \frac{\pi}{2}N, \quad N = \pm 1,3,5...
\end{gathered} \tag{44}$$

$$\begin{gathered}
\sin 2\left(\alpha^2\left(\varepsilon+\frac{\alpha_{em}}{\alpha}\right)\frac{1}{\alpha-\rho_-^{\max}}+\varphi_-\right) = 0, \\
\alpha^2\left(\varepsilon+\frac{\alpha_{em}}{\alpha}\right)\frac{1}{\alpha-\rho_-^{\max}}+\varphi_- = \frac{\pi}{2}N, \quad N = \pm 1,3,5...
\end{gathered} \tag{45}$$

Система уравнений (41) с граничными условиями (44), (45) обладает дискретным стационарным вещественным энергетическим спектром для дираковских заряженных и незаряженных частиц, находящихся как под, так и над «горизонтом событий». Гравитационный радиус $\rho = \alpha$ является особой точкой, играющей роль бесконечно большого потенциального барьера, запрещающего квантово-механическим частицам со спином ½ пересекать с любой стороны «горизонт событий».

Рассмотрим кратко случай голой сингулярности, который реализуется при $\alpha_Q > \alpha$, т. е. при $Q > \sqrt{G}2M$.

В этом случае внешний и внутренний «горизонты событий» исчезают, величины ρ_+, ρ_- в (15), (16) становятся комплексными числами. Асимптотики (18), (23) показывают отсутствие стационарных связанных состояний частиц со спином ½.

10. Заключение

По результатам данной работы можно сделать следующие выводы:

1. Для метрики Райсснера – Нордстрёма показана возможность существования стационарных

связанных состояний дираковских частиц с массой m и с зарядом $(-e)$.

2. Связанные состояния с вещественным энергетическим спектром могут существовать как вне внешнего «горизонта событий», так и под внутренним «горизонтом событий» – горизонтом Коши.

3. Внешний и внутренний «горизонты событий» выступают в роли бесконечно больших потенциальных барьеров, лишающих возможности их пересечения пробными дираковскими частицами. Волновая функция дираковской частицы в интервале между внутренним и внешним «горизонтом событий» равна нулю. Для экстремального поля Райсснера – Нордстрёма, когда $\alpha = \alpha_Q$, роль такого барьера играет оставшийся единственный «горизонт событий» с радиусом $\rho_+ = \rho_- = \alpha$.

По результатам проведенного анализа вместе с результатами работ [4, 5] можно сделать предположение о существовании нового типа коллапсаров. Эти коллапсары:

– инертные (дираковские частицы не могут проникать под «горизонты событий»);

– не излучают по Хокингу [13] (излучение Хокинга требует существования волновой функции (операторов поля Дирака) между внешним и внутренним «горизонтом событий» [14–21]);

– при $\alpha \geq \alpha_Q$ обеспечивают существование стационарных связанных состояний частиц со спином ½ над внешним и под внутренним «горизонтами событий».

Таким образом, результаты данной работы и работ [4, 5] могут быть полезными в совершенствовании некоторых аспектов стандартной космологической модели, связанных с эволюцией Вселенной и с взаимодействием коллапсаров с окружающей средой.

Авторы благодарят за большую техническую помощь в подготовке работы А. Л. Новоселову.

Список литературы

1. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. // Phys. Rev. 2010. Vol. D82. P. 104056; arxiv: 1007.4631v1 (gr-qc).

2. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. // Phys. Rev. 2011. Vol. D83. P. 105002; arxiv: 1102.4067v1 (gr-qc).

3. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. arxiv: 1107.0844 (gr-qc).

4. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. arxiv: 1205.4348 (gr-qc).

5. Вронский М. А., Горбатенко М. В., Колесников Н. С., Незнамов В. П., Попов Е. Ю., Сафронов И. И.. arxiv: 1301.7595 (gr-qc).

6. Лайтман А., Пресс В., Прайс Р., Тюкольски С. Сборник задач по теории относительности и гравитации. Москва, «Мир», 1979.

Lightman A., Press W., Price R., Teukolsky S. Problem Book in Relativity and Gravutation (Princeton University Press, Princeton, NJ. 1975).

Obukhov Yu. N. // Phys. Rev. Lett. 2001. Vol. 86. P. 192: Forschr. Phys. 2002. Vol. 50. P. 711.

7. Логунов А. А., Мествиришвили М. А. Релятивистская теория гравитации. М.: Наука, 1989.

8. Reissner H. // Ann. Phys. 1916. Vol. 50. P. 106.

9. Nordstrem C. // Proc.K.Akad.Wet.Amsterdam 1918. Vol. 20. P. 1238.

10. Горбатенко М. В., Незнамов В. П.. arxiv: 1105.4709 (gr-qc, hep-th).

11. Brill D. R., Wheeler J. A. // Rev. of Modern Physics. 1957. Vol. 29. P. 465–479.

12. Dolan S. R. // Trinity Hall and Astrophysics Group, Cavendish Laboratory. Dissertation, 2006.

13. Hawking S. W. // Commun. math. Phys. 1975. Vol. 43. P. 199–220.

14. Srinivasan K., Padmanabhan T. // Phys. Rev. 1999. Vol. **D60**. P. 024007. [gr-qc/9812028].

15. Shankaranarayanan S., Srinivasan K., Padmanabhan T. // Mod. Phys. Lett. 2001. Vol. A16. P. 571–578. [gr-qc/0007022].

16. Shankaranarayanan S., Padmanabhan T., Srinivasan K. // Class. Quant. Grav. 2002. Vol. 19. P. 2671–2688. [gr-qc/0010042].

17. Parikh M. K., Wilczek F. // Phys. Rev. Lett. 2000. Vol. 85. P. 5042. [arXiv:hep-th/9907001].

18. Vagenas E. C. // Phys. Lett. 2002. Vol. B533. P. 302. [hep-th/0109108].

19. Robinson S. P., Wilczek F. // Phys. Rev. Lett. 2005. Vol. 95. P. 011303. [arXiv:gr-qc/0502074].

20. Vagenas E. C., Das S. JHEP 0610:025 (2006) [hep-th/0606077].

21. Zampeli A., Singleton D., Vagenas E. C., arXiv: [gr-qc] 1206.0879v1.

Статья поступила в редакцию 04.04.2013