УДК 530.145.7; 514.764.2

ОТСУТСТВИЕ ПРОБЛЕМЫ НЕЕДИНСТВЕННОСТИ ДИРАКОВСКОЙ ТЕОРИИ В ИСКРИВЛЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ. СВЯЗЬ СПИН-ВРАЩЕНИЕ НЕ ЯВЛЯЕТСЯ ФИЗИЧЕСКИ ЗНАЧИМЫМ ЭФФЕКТОМ

М. В. Горбатенко, В. П. Незнамов[1]

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, Саров Нижегородской обл.

В противовес утверждениям Arminjon в работе еще раз обосновывается и иллюстрируется на ряде примеров отсутствие проблемы неединственности дираковской теории в искривленном и плоском пространстве-времени. Дираковские гамильтонианы в произвольных гравитационных полях, в том числе зависящих от времени, однозначно определяют физические характеристики квантово-механических систем независимо от выбора системы тетрадных векторов. Прямая связь спин-вращение появляющаяся при определенном выборе тетрадных векторов, не проявляет себя в конечных физических характеристиках рассматриваемых систем и поэтому не является физически значимым эффектом.

Ключевые слова: дираковские гамильтонианы в искревленном пространстве-времени, единственность теории Дирака, связь спин-вращение, квантово-механические системы, тетрадные поля.

В последнее время вновь появились работы [1–3], в которых провозглашается и обосновывается тезис о неединственности дираковской теории в искривленном и даже плоском пространстве-времени. Основным доказательством является демонстрация зависимости вида дираковских гамильтонианов от выбора тетрадных векторов. На наш взгляд этого совершенно недостаточно. Для демонстрации неэквивалентности дираковских гамильтонианов необходимо обнаружение разницы в физических характеристиках рассматриваемой системы при выборе разных тетрад. Такими характеристиками могут быть энергетические спектры гамильтонианов, средние значения физических величин, различные амплитуды перехода и т. д.

Авторы данной работы придерживаются выводов прежних исследований [4, 5] о независимости физических характеристик дираковской теории от выбора тетрадных векторов.

В работах [6–8] с помощью методов псевдоэрмитовой квантовой механики [9–11] для произвольных гравитационных полей, в том числе зависящих от времени, авторы разработали алгоритм перевода любого дираковского гамильтониана в искривленном пространстве-времени с произвольным выбором тетрадных векторов в η-представление, в котором гамильтониан превращается в самосопряженный, а скалярное произведение волновых функций становится плоским. При выборе для одной и той же физической системы разных тетрадных векторов в η-представлении могут получаться разные по виду самосопряженные гамильтонианы. Однако они всегда будут связаны унитарными преобразованиями, обязанными пространственно-временным вращениям матриц Дирака. Очевидно, такие гамильтонианы являются физически эквивалентными. Выбор тетрадных векторов для исследователя диктуется соображениями удобства.

Можно работать с дираковскими гамильтонианами в искривленном пространстве-времени, используя в скалярном произведении волновых функций весовой оператор Паркера [12], либо работать в η-представлении с плоским скалярным произведением, используя обычный аппарат квантовой механики. При этом для обоих случаев физические характеристики рассматриваемых систем остаются идентичными.

Для иллюстрации вышесказанного приведем некоторые примеры.

Ниже используется система единиц $\hbar = c = G = 1$, где $\hbar$ – постоянная Планка, c – скорость света, G – гравитационная постоянная

[1] E-mail: neznamov@vniief.ru

Для первых трех примеров используется сигнатура

$$\eta_{\underline{\alpha}\underline{\beta}} = \mathrm{diag}\left[-1,1,1,1\right]. \qquad (1)$$

Локальные индексы подчеркиваются, мировые индексы не подчеркиваются. Отсюда для γ-матриц Дирака

$$\gamma^{\underline{\alpha}}\gamma^{\underline{\beta}} + \gamma^{\underline{\beta}}\gamma^{\underline{\alpha}} = 2\eta^{\underline{\alpha}\underline{\beta}}E; \qquad (2)$$

$$\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta} + \gamma^{\beta}\gamma^{\alpha} = 2g^{\alpha\beta}E. \qquad (3)$$

В соотношениях (2), (3) E – единичная 4×4 матрица.

Тетрадные векторы определяются соотношением

$$H^{\mu}_{\underline{\alpha}}H^{\nu}_{\underline{\beta}}g_{\mu\nu} = \eta_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}. \qquad (4)$$

Связь между γ^{α} и $\gamma^{\underline{\alpha}}$ определяется равенством

$$\gamma^{\alpha} = H^{\alpha}_{\underline{\beta}}\gamma^{\underline{\beta}}. \qquad (5)$$

Весовой оператор Паркера равен

$$\rho = \sqrt{-g}\,\gamma_{\underline{0}}\gamma^{0}. \qquad (6)$$

<u>Пример 1</u>. В работе [6] для слабого поля Керра получены три гамильтониана, соответствующие трем системам тетрадных векторов, и самосопряженный гамильтониан в η-представлении:

а) киллинговая система тетрадных векторов

$$H_k = im\gamma_{\underline{0}} - im\frac{M}{R}\gamma_{\underline{0}} - i\gamma_{\underline{0}}\gamma^{k}\frac{\partial}{\partial x^k} + 2i\frac{M}{R}\gamma_{\underline{0}}\gamma^{k}\frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{i}{2}\frac{MR_k}{R^3}\gamma_{\underline{0}}\gamma^{\underline{k}} + 2i\frac{M\left(J_{kl}R_l\right)}{R^3}\frac{\partial}{\partial x^k} - 2im\frac{M\left(J_{kl}R_l\right)}{R^3}\gamma^{\underline{k}} + 2i\frac{M\left(J_{ml}R_l\right)}{R^3}S_{\underline{mk}}\frac{\partial}{\partial x^k} - \frac{i}{2}\left\{\frac{M}{R^3}J_k - 3\frac{M\left(J_lR_l\right)R_k}{R^5}\right\}\gamma_{\underline{5}}\gamma_{\underline{0}}\gamma_{\underline{k}}; \qquad (7)$$

$$\rho = 1 + \frac{3M}{R} + 2\frac{M\left(J_{km}R_m\right)}{R^3}\gamma_{\underline{0}}\gamma_{\underline{k}}; \qquad (8)$$

б) система тетрадных векторов в симметричной калибровке

$$H_s = im\gamma_{\underline{0}} - i\gamma_{\underline{0}}\gamma_{\underline{k}}\frac{\partial}{\partial x^k} - im\frac{M}{R}\gamma_{\underline{0}} + 2i\frac{M}{R}\gamma_{\underline{0}}\gamma^{\underline{k}}\frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{i}{2}\frac{MR_k}{R^3}\gamma_{\underline{0}}\gamma^{\underline{k}} + 2i\frac{M\left(J_{kl}R_l\right)}{R^3}\frac{\partial}{\partial x^k} - im\frac{M\left(J_{kl}R_l\right)}{R^3}\cdot\gamma^{\underline{k}} + i\frac{M\left(J_{ml}R_l\right)}{R^3}S_{\underline{mk}}\frac{\partial}{\partial x^k}; \qquad (9)$$

$$\rho = 1 + \frac{3M}{R} + \frac{MJ_{km}R_m}{R^3}\gamma_{\underline{0}}\gamma_{\underline{k}}; \qquad (10)$$

в) система тетрадных векторов Hehl и Ni [13]

$$H_{H-N} = im\gamma_{\underline{0}} - im\frac{M}{R}\gamma_{\underline{0}} - i\gamma_{\underline{0}}\gamma_{\underline{k}}\frac{\partial}{\partial x^k} + 2i\frac{M}{R}\gamma_{\underline{0}}\gamma^{\underline{k}}\frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{i}{2}\frac{MR_k}{R^3}\gamma_{\underline{0}}\gamma^{\underline{k}} + 2i\frac{M\left(J_{kl}R_l\right)}{R^3}\frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{i}{2}\left\{\frac{M}{R^3}J_k - 3\frac{M\left(J_lR_l\right)R_k}{R^5}\right\}\gamma_{\underline{5}}\gamma_{\underline{0}}\gamma_{\underline{k}}; \qquad (11)$$

$$\rho = 1 + \frac{3M}{R}; \qquad (12)$$

г) самосопряженный гамильтониан в η-представлении

$$H_{\eta} = im\gamma_{\underline{0}} - im\frac{M}{R}\gamma_{\underline{0}} - i\gamma_{\underline{0}}\gamma_{\underline{k}}\frac{\partial}{\partial x^k} + 2i\frac{M}{R}\gamma_{\underline{0}}\gamma^{\underline{k}}\frac{\partial}{\partial x^k} - i\frac{MR_k}{R^3}\gamma_{\underline{0}}\gamma^{\underline{k}} + 2i\frac{M\left(J_{kl}R_l\right)}{R^3}\frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{i}{2}\left\{\frac{M}{R^3}J_k - 3\frac{M\left(J_lR_l\right)R_k}{R^5}\right\}\gamma_{\underline{5}}\gamma_{\underline{0}}\gamma_{\underline{k}}; \qquad (13)$$

$$\rho = 1. \qquad (14)$$

В выражениях (7)–(14) M – масса источника гравитационного поля Керра, J_{km} – тензор углового момента поля Керра $S_{\underline{mk}} = \frac{1}{2}\left(\gamma_{\underline{m}}\gamma_{\underline{k}} - \gamma_{\underline{k}}\gamma_{\underline{m}}\right)$.

Каждый из гамильтонианов (7), (9), (11), (13) отличается по виду друг от друга, однако при переходе в η-представление все гамильтонианы совпадают друг с другом, что доказывает их физическую эквивалентность.

<u>Пример 2.</u> Известно, что свободный дираковский гамильтониан в сферической системе координат пространства Минковского можно записать двумя способами, приводящими к существенно разным по виду выражениям (см., например, [14])

$$H_1 = im\gamma_{\underline{0}} - i\gamma_{\underline{0}}\left\{\gamma_{\underline{1}}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\gamma_{\underline{2}}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{2}\mathrm{ctg}\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\gamma_{\underline{3}}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right\}; \qquad (15)$$

$$H_2 = im\gamma_{\underline{0}} - i\gamma_{\underline{0}}\left\{\gamma_{\underline{r}}\frac{\partial}{\partial r} + \gamma_{\underline{\theta}}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \gamma_{\underline{\varphi}}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right\}. \qquad (16)$$

В выражении (16)

$$\gamma_{\underline{r}} = \sin\theta\left[\gamma_{\underline{1}}\cos\varphi + \gamma_{\underline{2}}\sin\varphi\right] + \gamma_{\underline{3}}\cos\theta = R\gamma_{\underline{1}}R^{-1};$$

$$\gamma_{\underline{\theta}} = \cos\theta\left[\gamma_{\underline{1}}\cos\varphi + \gamma_{\underline{2}}\sin\varphi\right] - \gamma_{\underline{3}}\sin\theta = R\gamma_{\underline{2}}R^{-1}; \qquad (17)$$

$$\gamma_{\underline{\varphi}} = -\gamma_{\underline{1}}\sin\varphi + \gamma_{\underline{2}}\cos\varphi = R\gamma_{\underline{3}}R^{-1}.$$

Ряд $\left\{\gamma_{\underline{r}},\gamma_{\underline{\theta}},\gamma_{\underline{\varphi}}\right\}$ связан с рядом $\left\{\gamma_{\underline{1}},\gamma_{\underline{2}},\gamma_{\underline{3}}\right\}$ через унитарную матрицу R

$$R=R_1T_1R_2T_2;$$

$$R_1=\exp\left(-\frac{\varphi}{2}\gamma_{\underline{1}}\gamma_{\underline{2}}\right);\ T_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\gamma_{\underline{5}}\gamma_{\underline{1}}\left(E+\gamma_{\underline{1}}\gamma_{\underline{2}}\right);\quad(18)$$

$$R_2=\exp\left(-\frac{\theta}{2}\gamma_{\underline{2}}\gamma_{\underline{3}}\right);\ T_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\gamma_{\underline{5}}\gamma_{\underline{2}}\left(E+\gamma_{\underline{3}}\gamma_{\underline{1}}\right).$$

Отсюда видно, что гамильтонианы (15), (16) физически эквивалентны, так как связаны унитарным преобразованием (18)

$$H_2=RH_1R^{-1},\quad R^{-1}=R^{+}.\qquad(19)$$

Пример 3. В работе [8] для слабого поля Керра в координатах Бойера – Линдквиста получен следующий вид дираковского гамильтониана:

$$H_{B-L}=im\left(1-\frac{r_0}{2r}\right)\gamma_{\underline{0}}-i\left(1-\frac{r_0}{r}\right)\gamma_{\underline{0}}\gamma_{\underline{1}}\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\right)-$$

$$-i\left(1-\frac{r_0}{2r}\right)\frac{1}{r}\left[\gamma_{\underline{0}}\gamma_{\underline{2}}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{2}\mathrm{ctg}\theta\right)+\gamma_{\underline{0}}\gamma_{\underline{3}}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]-$$

$$-\gamma_{\underline{0}}\gamma_{\underline{1}}\frac{r_0}{2r^2}-i\frac{r_0a}{r^3}\frac{\partial}{\partial\varphi}-i\frac{3}{4}\frac{r_0a}{r^3}\gamma_{\underline{3}}\gamma_{\underline{1}}\sin\theta.\qquad(20)$$

Сравним этот гамильтониан с гамильтонианом (13). Перепишем выражение (13) в других обозначениях

$$H_\eta=im\left(1-\frac{r_0}{2r}\right)\gamma_{\underline{0}}-i\left(1-\frac{r_0}{r}\right)\gamma_{\underline{0}}\gamma_{\underline{k}}\frac{\partial}{\partial x^k}-$$

$$-i\frac{r_0}{2r^3}\gamma_{\underline{0}}\gamma_{\underline{k}}x_k-i\frac{r_0a}{r^3}\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_2}-x_2\frac{\partial}{\partial x_1}\right)+i\frac{r_0a}{4r^3}\times$$

$$\times\left[\gamma_{\underline{1}}\gamma_{\underline{2}}\left(1-3\frac{x_3^2}{r^2}\right)-\gamma_{\underline{2}}\gamma_{\underline{3}}\frac{3x_3x_1}{r^2}-\gamma_{\underline{3}}\gamma_{\underline{1}}\frac{3x_3x_2}{r^2}\right].\quad(21)$$

В формуле (21) $r_0=2M$, $\mathbf{J}=M\mathbf{a}$, $\mathbf{a}=(0,0,a)$.

В выражениях (20), (21) слагаемые без момента a соответствуют метрике Шварцшильда. В гамильтониане (21) эти слагаемые записаны в декартовых координатах, а в выражении (20) – в сферических координатах, к которым в приближении слабого поля сводятся координаты Бойера – Линдквиста. Эти части гамильтонианов (20) и (21) физически эквивалентны друг другу.

Слагаемые с моментом вращения a в выражениях (20), (21) сильно отличаются друг от друга. Однако в работе [8] с использованием матрицы (17), (18) показывается физическая эквивалентность и этих частей гамильтонианов (20), (21).

В последующих примерах будет использована измененная сигнатура (1)

$$\eta_{\underline{\alpha\beta}}=\mathrm{diag}\left[1,-1,-1,-1\right]\qquad(22)$$

Пример 4. В работах [15] Обухов применительно к метрике

$$ds^2=V^2(\mathbf{x})dx^2-W^2(\mathbf{x})d\mathbf{x}^2\qquad(23)$$

получил самосопряженный гамильтониан с плоским скалярным произведением волновых функций

$$H_{ob}=\beta mV+\frac{1}{2}\left[\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p}\frac{V}{W}+\frac{V}{W}\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p}\right].\qquad(24)$$

В формуле (24) $\beta=\gamma^{\underline{0}}$, $\alpha^k=\gamma^{\underline{0}}\gamma^{\underline{k}}$.

Далее, после унитарного преобразования Эриксена – Колсруда [16] гамильтониан (24) в приближении слабого гравитационного поля становится равным

$$H_{E-K}=\beta\left(mV+\frac{\mathbf{p}^2}{2m}\right)-\frac{\beta}{4m}\left\{p^2,V-1\right\}+$$

$$+\frac{\beta}{2m}\left\{\mathbf{p}^2,\frac{V}{W}-1\right\}+\frac{\beta}{4m}\left[2\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{f}\times\mathbf{p})+\vec{\nabla}\mathbf{f}\right]+\frac{1}{2}(\boldsymbol{\Sigma\Phi}).\ (25)$$

В соотношении (25) $\boldsymbol{\Phi}=\nabla V$; $f=\nabla\left(\frac{V}{W}\right)$; $\boldsymbol{\Sigma}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\sigma} & 0\\ 0 & \boldsymbol{\sigma}\end{pmatrix}$.

Последнее слагаемое в (25) можно трактовать как прямое взаимодействие спина дираковской частицы с гравитацией.

Однако для правильной классической трактовки отдельных слагаемых гамильтониана необходимо исходное выражение (24) подвергнуть унитарному преобразованию Фолди – Ваутхайзена [17–19].

В результате А. Силенко, О. Теряев [18] получили следующие выражения для преобразованого гамильтониана:

$$H_{FW}=\beta\left(mV+\frac{\mathbf{p}^2}{2m}\right)-\frac{\beta}{4m}\left\{p^2,V-1\right\}+$$

$$+\frac{\beta}{2m}\left\{\mathbf{p}^2,\frac{V}{W}-1\right\}+\frac{\beta}{4m}\left[2\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{f}\times\mathbf{p})+\nabla\mathbf{f}\right]-$$

$$-\frac{\beta}{8m}\left[2\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\Phi}\times\mathbf{p})+\nabla\boldsymbol{\Phi}\right].\qquad(26)$$

Последнее слагаемое в (26) вместо прямого взаимодействия спина частицы с гравитацией $\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma\Phi}\right)$ описывает спин-орбитальное и контактное взаимодействие дираковской частицы подобно взаимодействию с электромагнитным полем [17].

Отметим, что все три гамильтониана (24), (25), (26) физически эквивалентны, поскольку связаны друг с другом унитарными преобразованиями. Однако для квазиклассической трактовки членов гамильтониана необходимо использовать представление Фолди – Ваутхайзена [18, 19].

Пример 5. Самосопряженный гамильтониан в поле Керра произвольной интенсивности, полученный авторами в работе [8], сильно отличается от гамильтониана Чандрасекара [20], полученного методом Пенроуза – Ньюмена [21]. Однако, после перевода гамильтониана Чандрасекара в η-представление можно установить, что полученный самосопряженный гамильтониан связан с гамильтонианом работы [8] унитарным преобразованием. Следовательно, оба гамильтониана физически эквивалентны.

В общем случае выражение для оператора η является сложным и громоздким. В случае отсутствия вращения (поле Шварцшильда) оператор η диагонален и имеет вид

$$\eta = \operatorname{diag}\left[\left(1-\frac{r_0}{r}\right)^{-1/2}, 1, 1, \left(1-\frac{r_0}{r}\right)^{-1/2}\right]. \qquad (27)$$

Теперь обратимся к примерам в последней работе Arminjon [3], в которой автор демонстрирует неединственность (по его мнению) дираковской теории даже в плоском пространстве Минковского.

Пример 6. Рассматривается плоское пространство Минковского (t', x', y', z') со свободным дираковским гамильтонианом

$$H' = \boldsymbol{\alpha}'\mathbf{p}' + \beta' m. \qquad (28)$$

Далее рассматривается набор других матриц Дирака, зависящих от времени

$$\begin{aligned} &\beta = \beta';\\ &\alpha^1 = \alpha'^1 \cos\omega t - \alpha'^2 \sin\omega t;\\ &\alpha^1 = \alpha'^1 \cos\omega t + \alpha'^2 \sin\omega t;\\ &\alpha^3 = \alpha'^3. \end{aligned} \qquad (29)$$

В результате для новых тетрадных векторов, приведших к набору матриц α^k (29), получается новый гамильтониан

$$H = \boldsymbol{\alpha}\mathbf{p}' + \beta m - \frac{\omega}{2}\Sigma'^3, \qquad (30)$$

где $\Sigma'^3 = i\alpha'^1\alpha'^2 = i\alpha^1\alpha^2 = \Sigma^3$.

Сравнивая (28), (30), автор [3] еще раз делает вывод о неединственности теории Дирака и задает вопрос о физической значимости прямой связи спин-вращение: $-\frac{\omega}{2}\Sigma'^3$ (этот член присутствует в гамильтониане (30), но отсутствует в гамильтониане (28)).

Обратим внимание, что матрицы α^i (29) связаны с исходными матрицами α'^i унитарной матрицей преобразования $R(t)$

$$\alpha^i = R\alpha'^i R^+, \qquad (31)$$

где

$$R(t) = e^{\frac{\omega t}{2}\alpha'^1\alpha'^2}; \quad R^+(t) = e^{-\frac{\omega t}{2}\alpha'^1\alpha'^2}. \qquad (32)$$

Учитывая, что $R(t)$ зависит от времени, видно, что гамильтонианы (30) и (28) связаны унитарным преобразованием

$$H = RH'R^+ - iR\frac{\partial R^+}{\partial t}. \qquad (33)$$

Следовательно, гамильтонианы (28) и (30) физически эквивалентны. Переходя в свободном гамильтониане (28) в представление Фолди – Ваутхайзена, получаем известный гамильтониан [17]

$$H_{FW} = \beta\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}. \qquad (34)$$

Отсюда видно, что связь спин-вращение в гамильтониане (30) не является физически значимой. Она может появляться при выборе определенной системы тетрадных векторов, но при вычислениях физических характеристик системы она никак не влияет на их величины.

Пример 7. В работе [3] автор рассматривает также вращающуюся систему отсчета

$$\begin{aligned} &t = t';\\ &x = x'\cos\omega t + y'\sin\omega t;\\ &y = -x'\sin\omega t + y'\cos\omega t;\\ &z = z'. \end{aligned} \qquad (35)$$

Метрика, соответствующая координатам (35), имеет вид

$$ds^2 = \left[1 - \omega^2\left(x^2 + y^2\right)\right]dt^2 + 2\omega\left(ydx - xdy\right)dt - \\ -\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right), \qquad (36)$$

В формуле (36) для обеспечения $g_{00} > 0$ необходимо выполнение условия $\omega\sqrt{x^2 + y^2} < 1$.

γ-матрицы, соответствующие выбранной системе тетрадных векторов, имеют вид

$$\begin{aligned} &\gamma^0 = \gamma'^0;\\ &\gamma^1 = \gamma'^1\cos\omega t + \gamma'^2\sin\omega t + \gamma'^0\,\omega y;\\ &\gamma^2 = -\gamma'^1\sin\omega t + \gamma'^2\cos\omega t - \gamma'^0\,\omega x;\\ &\gamma^3 = \gamma'^3. \end{aligned} \qquad (37)$$

В результате можно получить самосопряженный гамильтониан

$$H_{\omega}=\boldsymbol{\alpha}'\mathbf{p}'+\beta m-\omega\left(y\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial y}\right). \qquad (38)$$

С другим набором тетрадных векторов автор в [3] получает следующий вид γ-матриц:

$$\begin{aligned}&\gamma^{0}_{Ar.}=\gamma'^{0};\\&\gamma^{1}_{Ar.}=\gamma'^{1}+\gamma'^{0}\,\omega y;\\&\gamma^{2}_{Ar.}=\gamma'^{2}-\gamma'^{0}\,\omega x;\\&\gamma^{3}_{Ar.}=\gamma'^{3}.\end{aligned} \qquad (39)$$

В данной постановке получается следующий вид самосопряженного гамильтониана

$$H_{Ar.}=\boldsymbol{\alpha}_{Ar.}\mathbf{p}'+\beta m-i\omega\left(y\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial y}\right)-\frac{\omega}{2}\Sigma'^{3}. \qquad (40)$$

Обратим внимание, что матрицы γ^1,γ^2 в (37) можно записать в виде

$$\begin{aligned}&\gamma^{1}=R^{+}\gamma'^{1}R+\gamma'^{0}\,\omega y;\\&\gamma^{2}=R^{+}\gamma'^{2}R-\gamma'^{0}\,\omega x.\end{aligned} \qquad (41)$$

Отсюда видно, что матрицы (39) и (37) связаны унитарным преобразованием

$$\gamma^{\mu}_{Ar.}=R\gamma^{\mu}R^{+}. \qquad (42)$$

Тогда гамильтонианы (38) и (40), так же как гамильтонианы (28), (30), физически эквивалентны, поскольку они связаны унитарным преобразованием $R(t)$

$$H_{Ar.}=RH_{\omega}R^{+}-iR\frac{\partial R^{+}}{\partial t}. \qquad (43)$$

Таким образом, в результате нашего рассмотрения можно сделать следующие выводы.

1. Проблемы неединственности физических предсказаний дираковской теорией в искривленном пространстве-времени не существует. При правильном обращении дираковские гамильтонианы всегда будут определять правильные физические характеристики рассматриваемых систем независимо от выбора тетрадных векторов.

2. Связь спин-вращение для дираковских частиц в контексте рассмотрения в работе [3] не является физически значимой величиной. Она может появляться при определенном выборе тетрадных векторов, но связь спин-вращение не влияет на конечные физические характеристики рассматриваемых квантово-механических систем.

Список литературы

1. Arminjon M., Reiffer F. // Ann. Phys. (Berlin). 2011. Vol. 523. P. 531–551; arxiv: 0905.3686 [gr-qc].
2. Arminjon M. // Ann. Phys. (Berlin). 2011. Vol. 523. P. 1008–1028; arxiv: 1107.4556v2 [gr-qc].
3. Arminjon M.. arxiv: 1211.1855v1 [gr-qc].
4. Brill D. R., Wheeler J. A. // Rev. Modern Physics. 1957. Vol. 29. P. 465–479. Erratum: Rev. Modern. Phys. 1961. Vol. 33. P. 623–624.
5. Chapman T. C., Leiter D. J. // Ann. J.Phys. 1976. Vol. 44, № 9. P. 858–862.
6. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. // Phys. Rev. 2010. Vol. D82. P. 104056; arxiv: 1007.4631 [gr-qc].
7. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. // Phys. Rev. 2011. Vol. D83. P. 105002; arxiv: 1102.4067v1 [gr-qc].
8. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. arxiv: 1102.0844v4 [gr-qc].
9. Bender C. M., Brody D., Jones H. F. // Phys. Rev. Lett. 2002. Vol. **89.** P. 2704041; Phys. Rev. 2004. Vol. D70. P. 025001.
10. Mostafazadeh A. // J.Math Phys. (N.Y.) 2002. Vol. **43**. P. 205, 2002. Vol. **43**. P. 2814; 2002. Vol. **43.** P. 3944; arXiv: 0810.5643v3[quant-ph].
11. Bagchi B., Fring A. // Phys. Lett. 2009. Vol. A373. P. 4307.
12. Parker L. // Phys. Rev. 1980. Vol. D22. P. 1922.
13. Hehl F. W., Ni W. T. // Phys. Rev. 1990. Vol. D42. P. 2045.
14. Dolan S. R. Trinity hall and astrophysics group, Cavendish Laboratory. Dissertation, 2006.
15. Obukhov Yu. N. // Phys. Rev. Lett. 2001. Vol. 86. P. 192; Forschr. Phys. 2002. Vol. 50. P. 711.
16. Eriksen E., Kolsrud M., Nuovo Cim. 1960. 18; Nikitin A. G. // J.Phys.A: Math Gen. 1998. Vol. A31. P. 3297.
17. Foldy L. L., Wouthuysen S. A. // Phys. Rev. 1950. Vol. 78. P. 29.
18. Silenko A. J., Teryaev J. V. // Phys. Rev. 2005. Vol. D71. P. 064016.
19. Neznamov V. P., Silenko A. J. // J. Math. Phys. 2009. Vol. 50. P. 122302.
20. Chadrasekhar F. R. S. // Proc. R.Soc.Lond. 1976. Vol. A.349. P. 571–575.
21. Newman E. T., Penrose R. // J.Math.Phys. 1962. Vol. 3. P. 566.

Статья поступила в редакцию 04.04.2013