

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ НАЧАЛЬНОГО СПЕКТРА ВОЗМУЩЕНИЙ НА РАЗВИТИЕ ГРАВИТАЦИОННОГО ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕМЕШИВАНИЯ

Ю. В. Янилкин, В. П. Стаценко, О. Г. Синькова, О. Н. Чернышова,
В. Б. Розанов, Н. В. Змитренко

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Численно исследуется развитие гравитационного турбулентного перемешивания при вариации начального спектра гармонических и случайных 3D возмущений контактной границы между тяжелым и легким веществами. Результаты расчетов сравниваются с соответствующими расчетами, выполненными ранее на более грубой сетке со случайными начальными возмущениями на КГ. Расчеты проводились по 3D методике ТРЭК.

Ключевые слова: турбулентность, гравитационное перемешивание, спектр гармоник.

Введение

В задачах, относящихся к турбулентному перемешиванию в сложных течениях, важным является тестирование имеющихся численных методик на наиболее простых задачах данного класса. Именно к такого рода задачам относится гравитационное турбулентное перемешивание при постоянном поле тяжести. Эта задача рассматривалась в ряде работ (см., например, [1–3]), в том числе и авторами [4–8].

Рассматриваемое течение выходит на автомодельный режим. Однако переходная к этому режиму стадия может сильно зависеть от начальных данных задачи. Для достижения автомодельности требуется, чтобы в течении реализовалось развитое турбулентное перемешивание, т. е., чтобы в нем присутствовал представительный спектр вихрей и полномасштабный инерционный интервал, другими словами, течение должно забыть начальные данные. Много лет исследователи обсуждают проблему определения величины константы α_b для закона роста «пузырей» на автомодельной стадии. И она разная у разных авторов (разброс данных составляет 0,015–0,075), при этом наиболее отличаются расчетные и экспериментальные данные.

Вторая проблема – это выход на автомодельную стадию, а именно, когда происходит этот выход и какова скорость роста ширины зоны турбулентного перемешивания (ЗП) до выхода на нее. Анализ экспериментальных данных в [9] и численных расчетов в наших работах [7, 8] показыва-

ет, что на начальном участке течения число Рейнольдса (в численных расчетах – схемное число Рейнольдса, определяемое схемной вязкостью) недостаточно велико и автомодельность отсутствует. Поэтому константа α_b может быть корректно определена лишь при достижении достаточно большого числа Рейнольдса. Формально «константа» α_b , определяемая по наклону кривой $\sqrt{L}(t)$, на начальном участке больше, чем на автомодельном, и уменьшается со временем: $\alpha_b \sim \sqrt{L}/t$. Некоторые авторы включают начальный участок течения в зону автомодельности, при этом получая не совсем корректные данные по константе автомодельности [9]. Другие авторы считают, что начальные данные помнятся так долго, что теоретический автомодельный участок течения вообще не наступает или же наступает с другими значениями константы α_b [2, 10]. В этих работах численно получено, что «константа» α_b зависит от начального спектра возмущений контактной границы. Рассматривалась также экспериментально и расчетно-теоретически задача о влиянии на закон роста ЗП локальных возмущений [11–13].

Данная работа представляет собой попытку разобраться в вопросе о влиянии начальных данных, т. е. спектра 3D начальных возмущений контактной границы, на развитие турбулентности, в частности ЗП. Расчеты проводились по коду ТРЭК [14] для сжимаемой среды, поэтому несжимаемая среда аппроксимировалась заданием дос-

таточно большого начального давления P_0 . В работе исследуется также вопрос о влиянии на решение величины «несжимаемости» $\xi \equiv P_0/\rho_1 g L_x$, то есть значения P_0 .

Некоторые вопросы данных исследований представлены в работе [10].

1. Постановка расчетов

Начальная геометрия расчетов показана на рис. 1, размеры счетной области $L_x = L_y = L_z = 2\pi$; $g_z = -1$; $\rho_1 = 1$; $\rho_2 = 3$. Начальный профиль давления задавался исходя из условия гидростатического равновесия $p(z) = p_0 + g \cdot \int_z^{z_2} \rho(z') \cdot dz'$. Во всех вариантах расчета $p_0 = 50$, что соответствует показателю несжимаемости $\xi \equiv P_0/\rho_1 g L_y = 8$.

В трех расчетах задавались начальные возмущения границы по формуле

$$a(x, y) = \sum a_n \cos(k_n x) \cos(k_n y), \quad k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n}. \quad (1)$$

$$\lambda_n = 0,007i_n + 0,063. \quad (2)$$

$$a_n = a_0 \left(\frac{\lambda_{\min}}{1,43\lambda_n} \right), \quad a_0 = 0,1/3, \quad \lambda_{\min} = 0,1. \quad (3)$$

Выбираем i_n такие, чтобы k_n было целым или полуцелым:

$i_n = [11,87437 \quad 12,89263 \quad 14,01533 \quad 30,02599 \quad 30,89324 \quad 31,7999 \quad 85,48399 \quad 90,7331 \quad 96,59975]$, что дает: $k_n = [43 \quad 41 \quad 39 \quad 23 \quad 22,5 \quad 22 \quad 9,5 \quad 9 \quad 8,5]$.

Значения k_n в разных вариантах приведены в табл. 1.

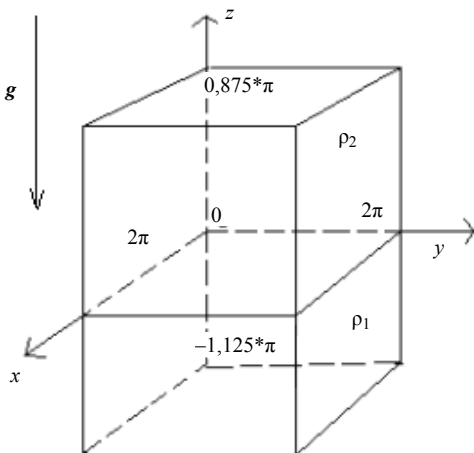


Рис. 1. Геометрия задачи

Таблица 1

Варианты 3D расчетов

| Вариант | Особенности постановки начальных условий |
|---------|---|
| 1 | $k_n = 43 \quad 41 \quad 39 \quad 23 \quad 22,5 \quad 22 \quad 9,5 \quad 9 \quad 8,5$ |
| 2 | $k_n = 23 \quad 22,5 \quad 22 \quad 9,5 \quad 9 \quad 8,5$ |
| 3 | $k_n = 43 \quad 41 \quad 39$ |
| 4 | Случайные возмущения границы (10 % h) |
| 5 | [4, 5], сетка $200^2 \times 400$, случайные возмущения плотности (10 %) |

В варианте 4 задавались случайные возмущения контактной границы амплитудой 10 % от размера счетной ячейки. В этом случае в начальном спектре отклонений границы ζ от среднего значения $z = 0$ присутствует полный набор однородно и случайно распределенных мод. Рассмотрим двумерное фурье-разложение взятой на контактной границе величины $\zeta(x, y)$ на момент $t = 0$: $f_{2\varphi}(\vec{k})$. Для наглядности на рис. 2 приводится одномерный спектр $f_{2\varphi}(k_x, k_y = 0,5 \max(k_y))$, в среднем сечении полученного подобным образом двумерного спектра $f_{2\varphi}(\vec{k})$.

Расчеты проводились на эйлеровой сетке 1000^3 ячеек, но для которой возмущенная контактная граница являлась линией сетки, а узлы сетки в поперечном к контактной границе направлении строились равномерно по расстоянию между этой поверхностью и внешней границей. Таким образом, в начальный момент времени смешанные ячейки на контактной границе отсутствуют. В табл. 1 также приводятся данные расчета из работ [4, 5].

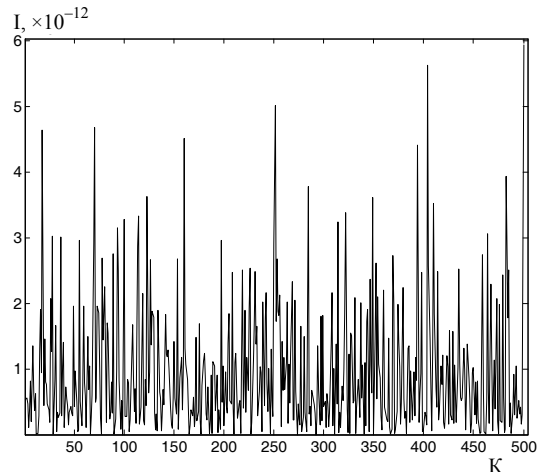


Рис. 2. Начальный одномерный спектр для варианта 4 в среднем сечении двумерного спектра

2. Результаты расчетов

2.1. Общая картина течения

Эволюция течения, полученная в расчетах, в целом аналогична предыдущим расчетам [4–8]: наблюдается укрупнение со временем максимальных в спектре вихрей (рис. 3).

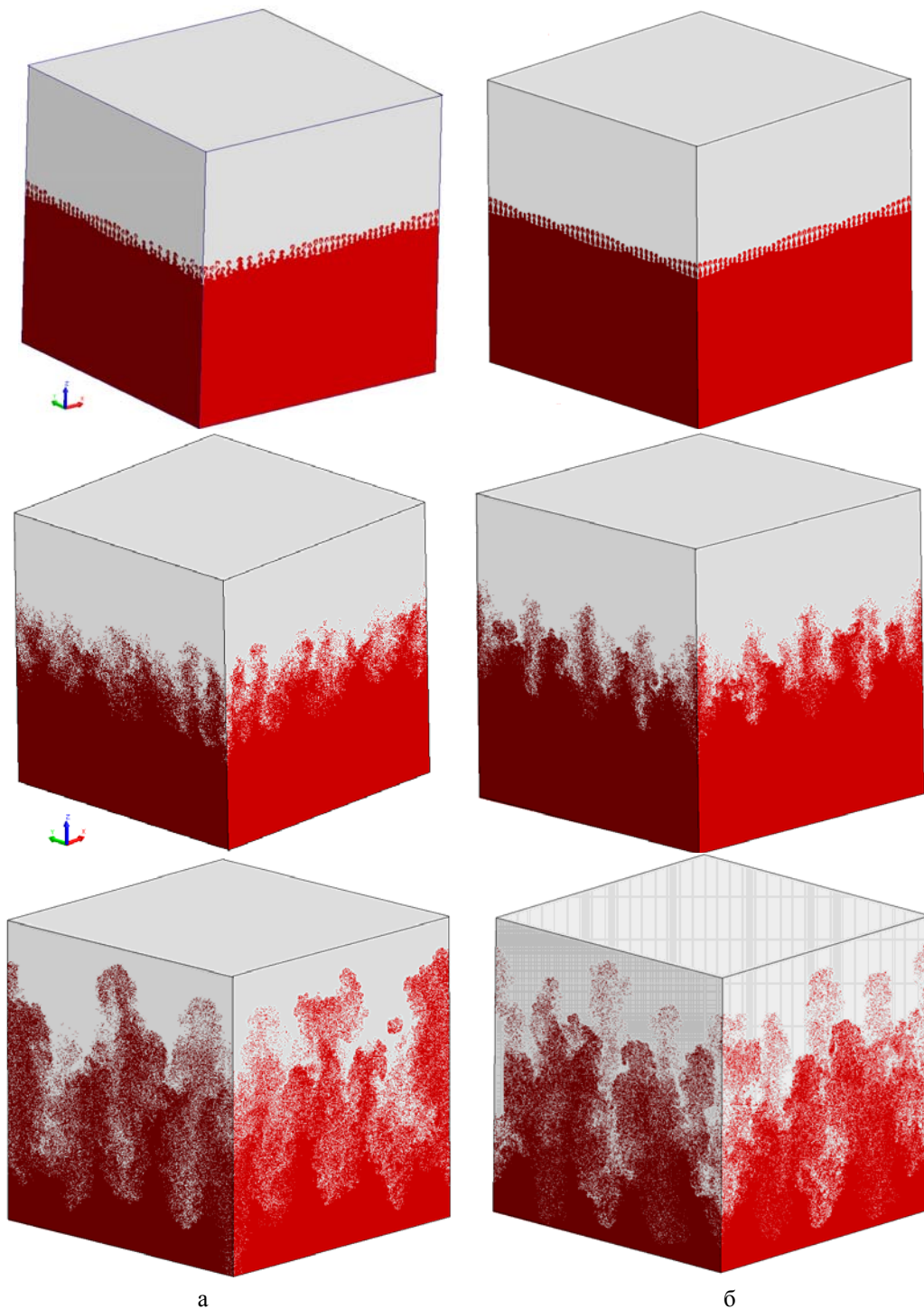


Рис. 3. Распределение доли легкого вещества, варианты: 1 (а), 3 (б), 2 (в), 4 (г). Сверху вниз: $\tau = 0,4; 2,0; 3,6$ (см. также с. 32)

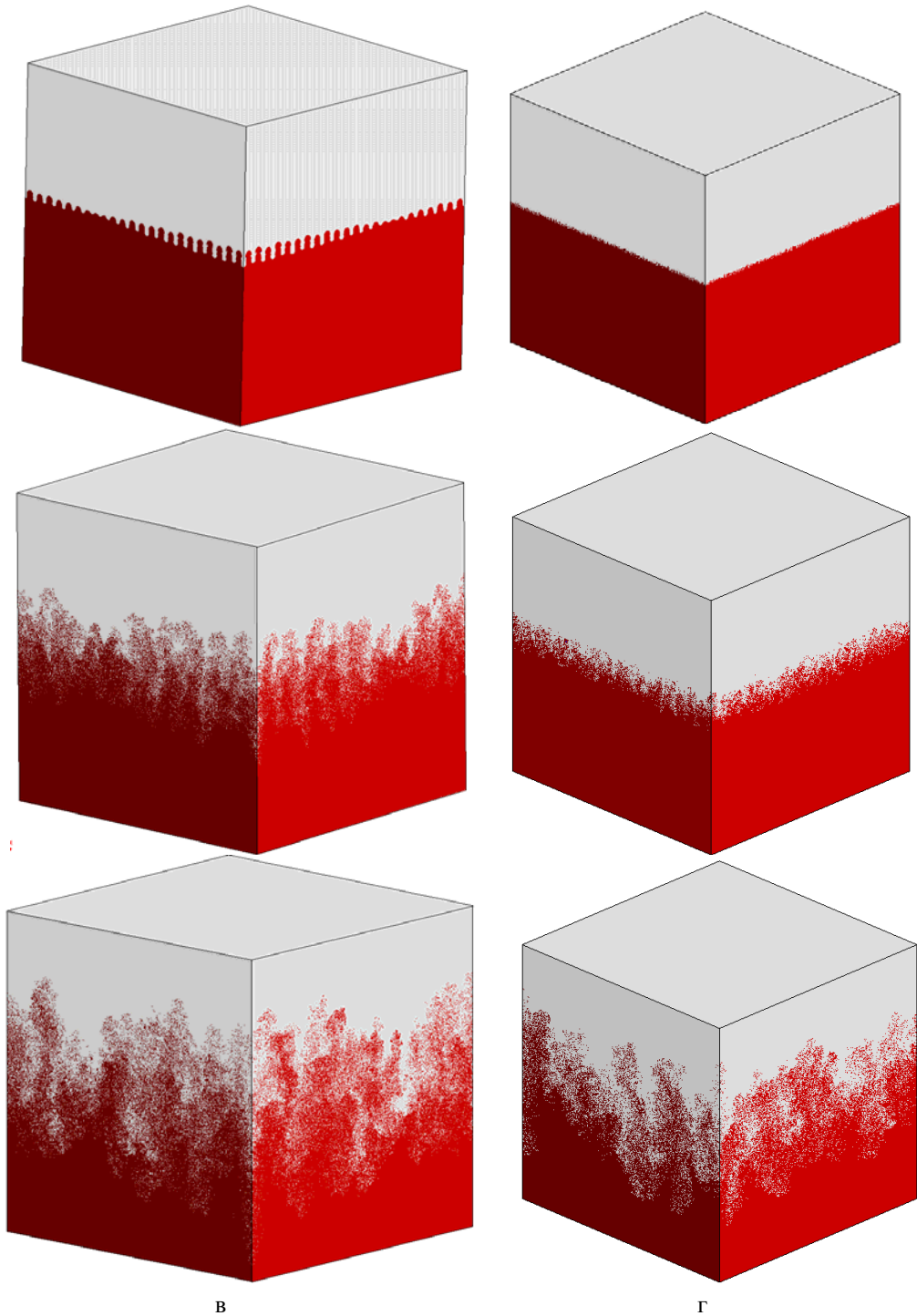


Рис. 3. Окончание

2.2. Выход на автомодельный режим.

Интегральные величины зоны перемешивания

Автомодельный режим для данной задачи выражается, прежде всего, в выходе на линейную зависимость от времени функции ширины ЗТП $F(\tau)$ и функции координаты границы легкого вещества в тяжелом $F_b(\tau)$:

$$F \equiv \frac{1}{t_0} \sqrt{\frac{L_t}{Ag}}, \quad (4)$$

$$F_b \equiv \frac{1}{t_0} \sqrt{\frac{|z_b - z_c|}{Ag}}. \quad (5)$$

Здесь время $\tau \equiv t/t_0$, где $t_0 \equiv \sqrt{L_z/g}$, а величина $L_t = z_b - z_s$ — ширина ЗТП по направлению z ,

определяемая по точкам z_b, z_s , в которых объемная доля вещества β достигает значений ε и $1-\varepsilon$ (ниже полагаем $\varepsilon = 0,05$); z_c – координата контактной границы, z_b – координата границы легкого в тяжелом (bubbles), z_s – координата границы тяжелого в легком (spikes).

На рис. 4 приведены расчетные зависимости $F(\tau)$ и $F_b(\tau)$. По этим зависимостям можно выделить условно три этапа.

Начальный этап в основном определяется коротковолновыми возмущениями, имеющимися в начальном спектре, длительность этапа для разных вариантов $\tau \lesssim 0,5-1$. В соответствии с этим зависимости $F(\tau), F_2(\tau)$ для вариантов 1 и 3 практически совпадают на начальном участке, так как в них присутствует одинаковая высокочастотная часть спектра. В варианте 2 поведение кривых с самого начала несколько иное, нежели в вариантах 1 и 3 в соответствии с начальным спектром. Отличается от этих вариантов рост ЗТП в вариантах 4 и 5 со случайными возмущениями контактной границы. Последние отличаются и друг от друга, что объясняется использованием разных сеток и разных начальных возмущений.

Далее следует этап ($0,7-1 \lesssim \tau \lesssim 1,7-2,5$), на котором существенную роль начинают играть более длинные моды. Поэтому ширина ЗТП в варианте 2 больше по сравнению с вариантом 3, в котором начальные длинные моды отсутствуют. Общим для всех вариантов является то, что рост ЗТП на этом этапе замедляется.

И наконец, на третьем этапе $\tau \gtrsim 2-2,5$ происходит выход на автомодельный режим, на котором происходит установление постоянной скорости роста ширины ЗТП. Заметим, что хотя скорость роста ЗТП на этом этапе и константа, однако величина этой константы разная для разных вариантов. Это говорит о том, что даже на этой стадии для некоторых задач течение помнит начальные возмущения, что не соответствует теоретическому пониманию автомодельности. Строго говоря, этот этап для таких течений теоретически не является автомодельным, и правильней было бы применять более адекватный термин «квазиавтомодельный». Однако далее мы используем более принятый термин, включая в это понятие и квазиавтомодельный случай.

Отметим, что величины $dF/d\tau, dF_b/d\tau$ определяют значение коэффициентов $\alpha_a = (dF/d\tau)^2, \alpha_b = (dF_b/d\tau)^2$. Полученные таким образом значения α_a, α_b приближаются к постоянному значению $\alpha_a \rightarrow \alpha = \text{const}, \alpha_b \rightarrow \alpha_2 = \text{const}$ на автомодельной стадии, где:

$$L_t = \alpha_a A g t^2, |z_b - z_c| = \alpha_2 A g t^2. \quad (6)$$

Это происходит если $\tau \gg \tau_0$ (фигурирующий здесь момент τ_0 показан для кривой 5 на рис. 4).

В наших расчетах это приводит к выходу на зависимость, весьма далекую от стационарной, как видно из рис. 5.

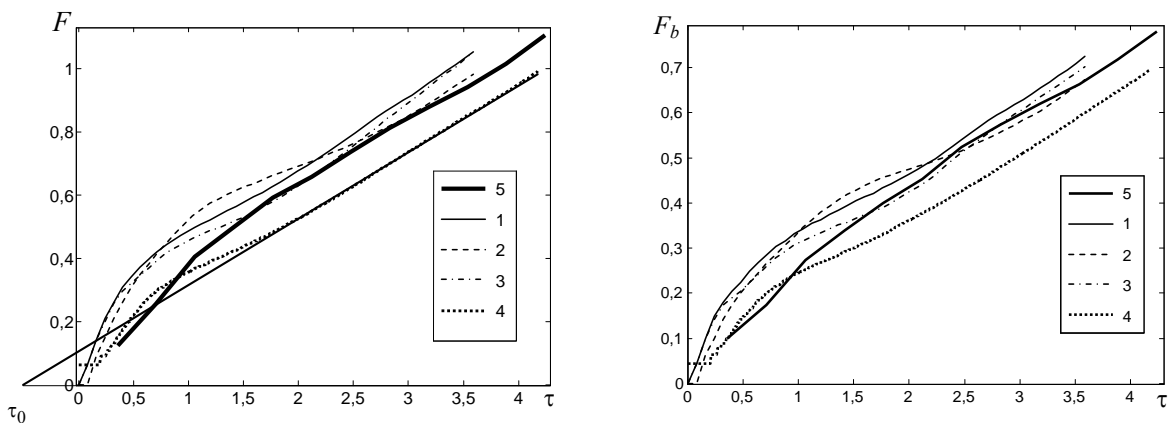


Рис. 4. Зависимости F и F_b : 1–5 – варианты 1–5 соответственно

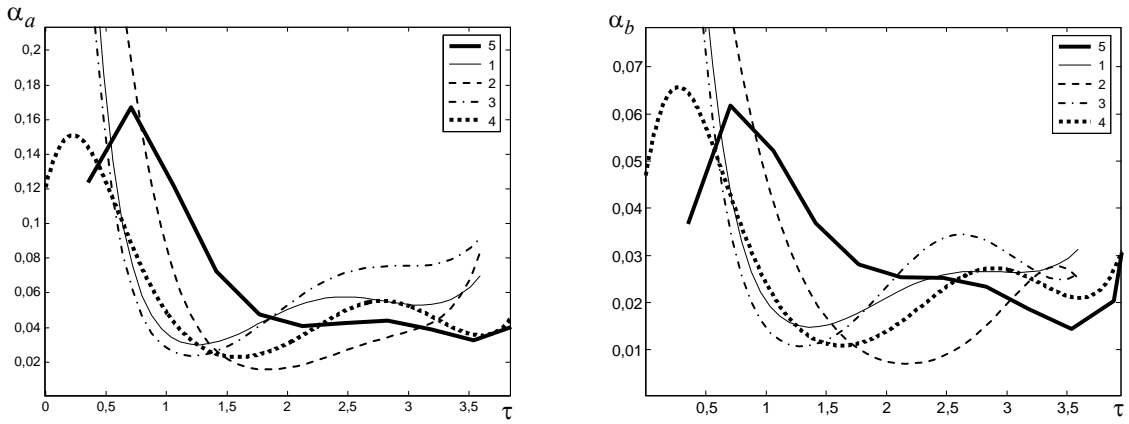


Рис. 5. Зависимости α_a и α_b : 1–5 – варианты 1–5 соответственно

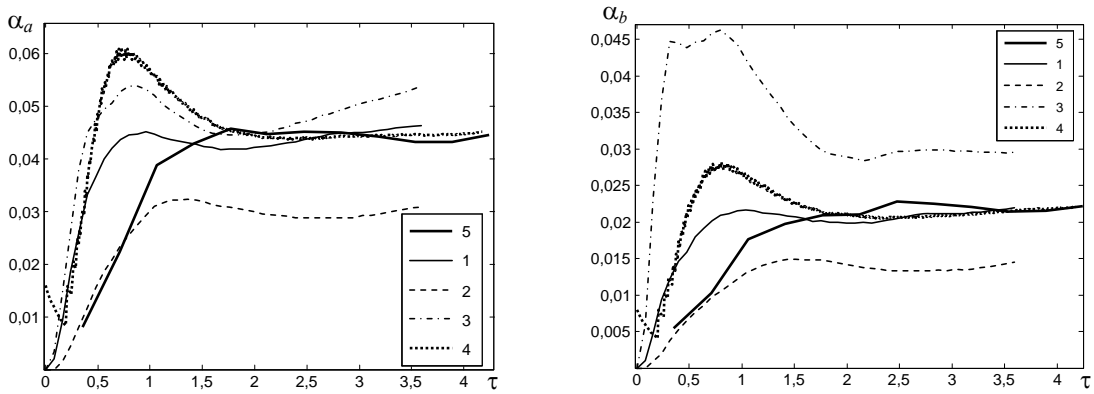


Рис. 6. Зависимости α_a и α_b : 1–5 – варианты 1–5 соответственно

Определим $\hat{\alpha}_a$ и $\hat{\alpha}_b$ следующим образом:

$$\hat{\alpha}_a = \frac{L_t}{AL_z (\tau - \tau_0)^2}; \quad (7)$$

$$\hat{\alpha}_b = \frac{y_b - y_c}{AL_z (\tau - \tau_0)^2}. \quad (8)$$

Выход на автомодельный режим более отчетливо можно видеть на рис.6, на котором приводятся зависимости $\hat{\alpha}_a$ и $\hat{\alpha}_b$ от времени. Видно, что происходит выход на одинаковое значение $\hat{\alpha}_a$ и $\hat{\alpha}_b$ в вариантах с наиболее широким спектром начальных возмущений (1, 4 и 5). Отличаются варианты 2 и 3, что является следствием малой ширины спектра начальных возмущений: в варианте 3 $\alpha_b > \frac{1}{2}\alpha_a$; сильнее же всего отличается от прочих вариант 2, в котором отсутствуют высокочастотные гармоники.

На рис. 7 приводятся зависимости от времени приведенного к безразмерному виду максимально-го в ЗТП значения турбулентной энергии $E_m(\tau)$.

Как видно из рис. 7, поведение величины $E_m(\tau)$ происходит в соответствии с указанным выше делением течений на три этапа по поведению функции ширины ЗТП. На последнем этапе они выходят на приблизительно постоянные значения. Как и выше, сильнее всего отличается от прочих вариант 2, в котором отсутствуют высокочастотные гармоники, а ближе всех к автомодельному режиму вариант 4 со случайными начальными возмущениями.

На рис. 7 приведены также зависимости от времени максимального в ЗТП значения относительной квадратичной пульсации плотности. На автомодельной стадии значения $R_m(\tau)$ выходят приблизительно на постоянное значение, близкое для всех вариантов, но несколько меньшее, чем в варианте 5, выполненном на более грубой счетной сетке.

Наконец, приведем значения величин α и α_2 , а также E_m на автомодельной (квазиавтомодельной) стадии в расчетах (табл. 2).

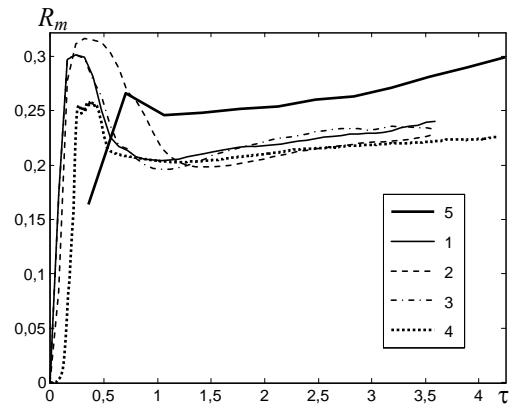
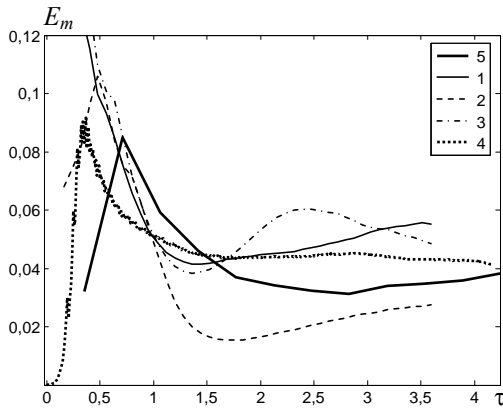


Рис. 7. Зависимости $E_m(\tau)$ и $R_m(\tau)$: 1–5 – варианты 1–5 соответственно

Таблица 2

Значения интегральных величин в расчетах

| Вариант | α | α_2 | E_m |
|---------|----------|------------|-------|
| 1 | 0,045 | 0,022 | 0,045 |
| 2 | 0,03 | 0,015 | 0,022 |
| 3 | 0,045 | 0,03 | 0,05 |
| 4 | 0,045 | 0,022 | 0,043 |
| 5 | 0,045 | 0,022 | 0,035 |

2.3. Фурье-анализ

Рассмотрим двумерное фурье-разложение взятой вблизи контактной границы $z=0$ величины $\varphi(x, y, z=0): f_{2\varphi}(\vec{k})$. Пусть $\varphi = u_z$ на момент $t=9$. Распределение двумерной спектральной плотности этой величины $F_{2\varphi} = f_{2\varphi} f_{2\varphi}^*$ изотропно. Поэтому произведем усреднение полученной величины по окружности радиуса k , где:

$$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}; \quad k_x = \frac{2\pi}{L_y} n_x; \quad k_y = \frac{2\pi}{L_y} n_y;$$

$$L_x = L_y = 2\pi; \quad n_x = n_y = 1:500.$$

Получим одномерную спектральную плотность

$$F_{1\varphi}(k) = \frac{2\pi}{\Delta k} \int_k^{k+\Delta k} F_{2\varphi}(\vec{k}') k' dk'. \quad (9)$$

На рис. 8 эта величина показана для вариантов 1–4. Как видно из рис. 8, в низкочастотной части спектры в вариантах 1–3 отличаются мало. Тем не менее, есть прямая корреляция между максимальными амплитудами длинноволновых возмущений и шириной ЗТП. Так, в варианте 4 ширина ЗТП и максимальные амплитуды низкочастотных мод заметно меньше по сравнению с вариантами 1–3.

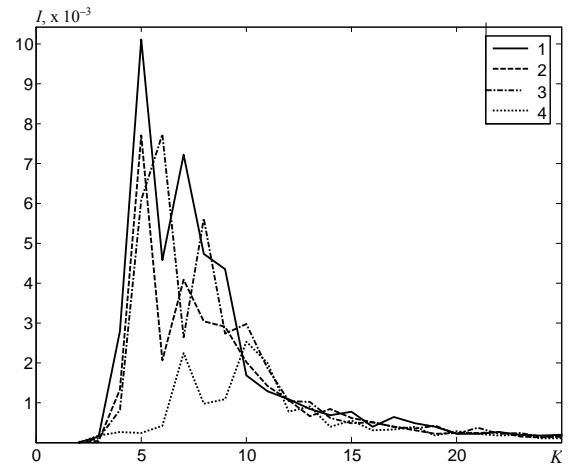


Рис. 8. Одномерная спектральная плотность $u_z, t=9$: 1–4 – варианты 1–4 соответственно

Колмогоровский закон для одномерной спектральной плотности в инерциальном интервале 2D турбулентности

$$F_{\varphi 2D}^{(K)}(k) = A_{\varphi 2D}^{(K)} k^{-3}. \quad (10)$$

Для 3D турбулентности соответствующий закон

$$F_{\varphi 3D}^{(K)}(k) = A_{\varphi 3D}^{(K)} k^{-5/3}. \quad (11)$$

Здесь $A_{\varphi}^{(i)} = \text{const}$ подбираются так, чтобы в высокочастотной области имелась близость различного вида спектров (10)–(11) с полученными в расчетах.

Получаем, что для $\varphi = u_z$ все варианты в низкочастотной области наиболее близки к зависимости (11) (рис. 9).

Из спектральных характеристик турбулентности можно также извлечь пространственный масштаб турбулентности. Как известно [15], Λ_{int} – характерный масштаб, совпадающий по порядку величины с расстоянием, на протяжении которого

еще сохраняются заметные корреляционные связи между значениями поля в двух точках

$$\Lambda_{\text{int}} = \frac{\pi}{2} \frac{\int_0^{\infty} K^{-1} F_1(K) dK}{\int_0^{\infty} F_1(K) dK}, \quad (12)$$

где $F_1(K)$ – одномерная спектральная плотность 3D турбулентности.

Полученное в вариантах 1–4 спектральное распределение масштабов Λ_{int} (рис. 10) в низкочастотной области наиболее близко к зависимости, определяемой функцией $F_1(K) \sim K^{-5/3}$.

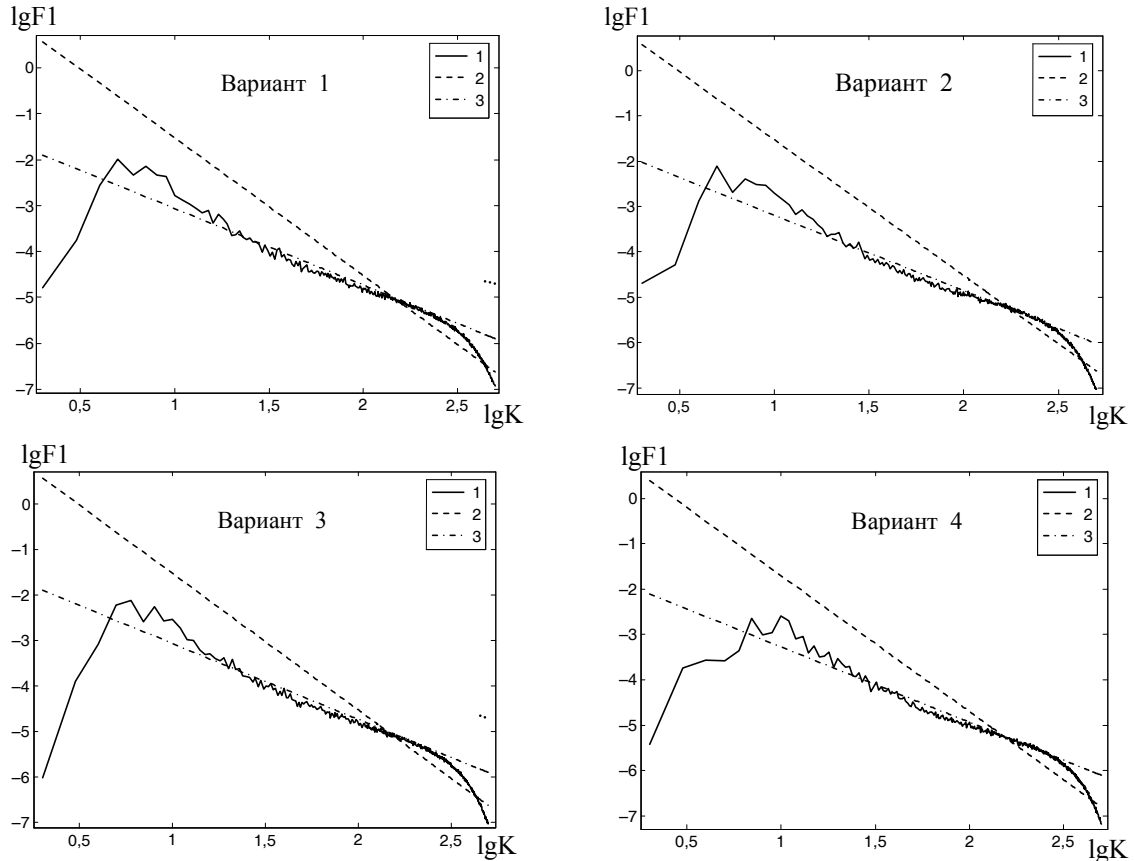


Рис. 9. Одномерная спектральная плотность u_z , $\tau = 3,6$.

Варианты 1–4: 1 – расчет, 2 – $A_{\varphi 3D}^{(K)} k^{-5/3}$, 3 – $A_{\varphi 2D}^{(K)} k^{-3}$

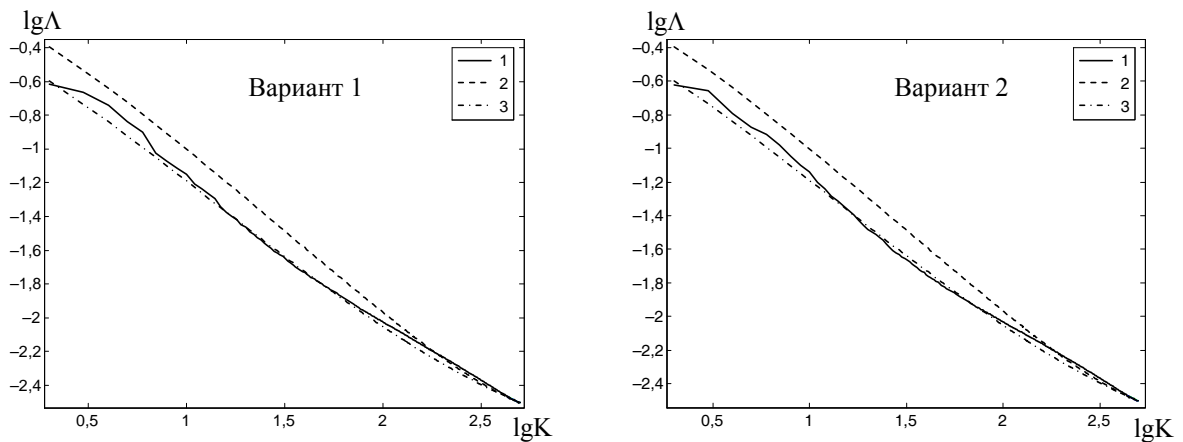


Рис. 10. Интегральный пространственный масштаб турбулентности величины u_z , $\tau = 3,6$:

1 – расчет, 2 – $F_1(K) \sim A_{\varphi 3D}^{(K)} k^{-5/3}$, 3 – $F_1(K) \sim A_{\varphi 2D}^{(K)} k^{-3}$ (см. также с. 37)

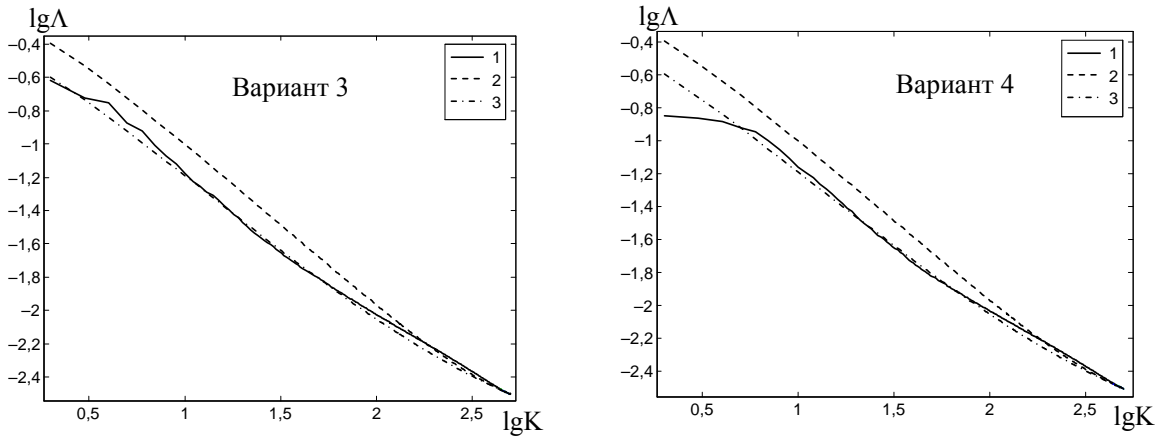


Рис. 10. Окончание

3. Влияние постановки расчетов на результаты моделирования

В этом разделе исследуется влияние на результаты расчетов значения константы ξ , которая отражает степень приближения наших расчетов к несжимаемому случаю.

Кроме вариантов 4 и 5 здесь рассматриваются для сравнения также расчеты [16] – см. табл. 3, в которой приводятся и другие данные расчетов.

Зависимости $F(\tau)$ и $F_b(\tau)$ для данных вариантов, сглаженные полиномом 6-й степени, показаны на рис. 11. Видно, что у всех кривых имеется начальный неавтомоделный участок с большим наклоном. Его длительность тем меньше, чем подробнее сетка, т. е. чем меньше схемная вязкость. Затем имеется короткий переходный участок, сменяющийся выходом на автомоделную стадию.

Таблица 3

Варианты расчетов со случайными возмущениями

| Вариант | Источник | Размеры счетной области $L_x \times L_y \times L_z$ | ξ | g | Счетная сетка $N_x \times N_y \times N_z$ |
|---------|----------|---|-------|-----|---|
| 4 | | $2\pi \times 2\pi \times 2\pi$ | 8 | 1 | 1000^3 |
| 5 | | $1 \times 1 \times 2$ | 2,5 | 1 | $200 \times 200 \times 400$ |
| 6 | [16] | $1 \times 1 \times 2$ | 100 | 0,1 | $100 \times 100 \times 200$ |
| 7 | [16] | $1 \times 1 \times 2$ | 100 | 0,1 | $200 \times 200 \times 400$ |
| 8 | [16] | $1 \times 1 \times 2$ | 10 | 0,1 | $100 \times 100 \times 200$ |

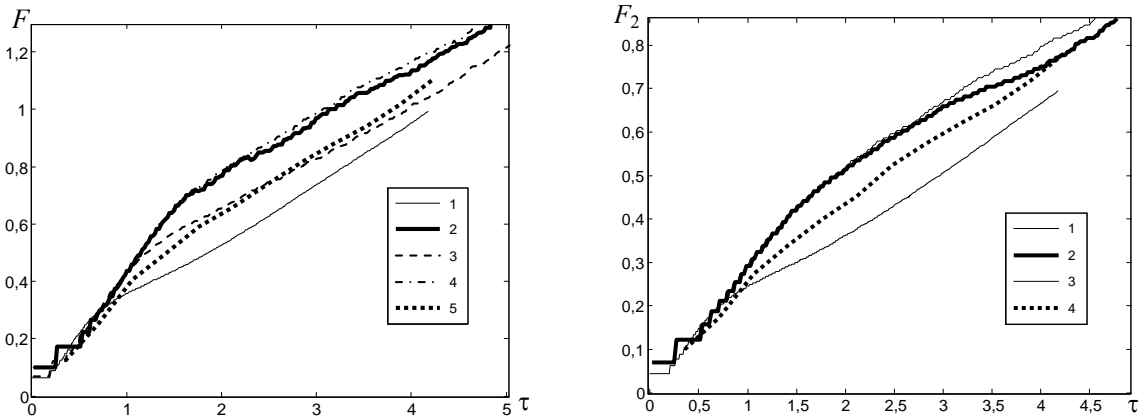


Рис. 11. Зависимости $F(\tau)$ и $F_b(\tau)$. Большое давление: 2,3 – варианты 6–7 соответственно; малое давление: 1 – вариант 4, 4 – вариант 8, 5 – вариант 5

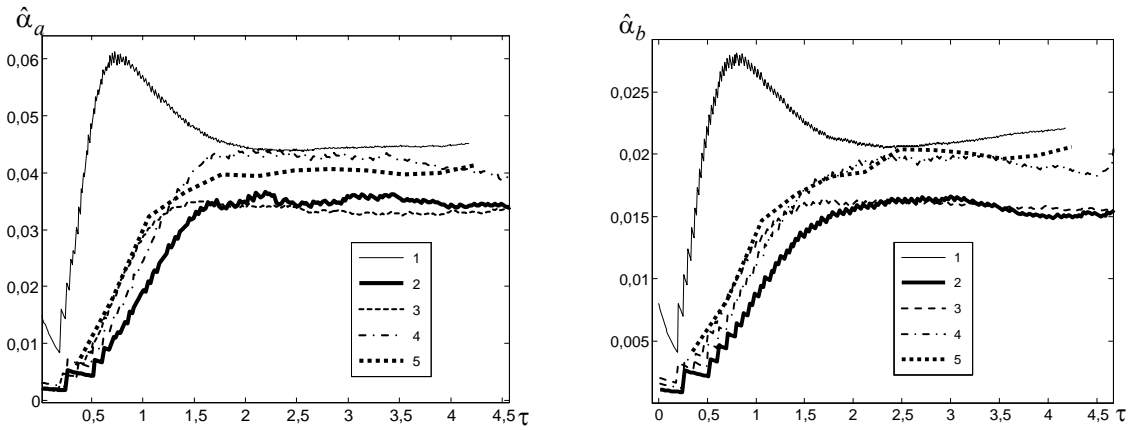


Рис. 12. Зависимости α_a и α_b . Большое давление: 2,3 – варианты 6–7 соответственно; малое давление: 1– вариант 4, 4 – вариант 8, 5 – вариант 5

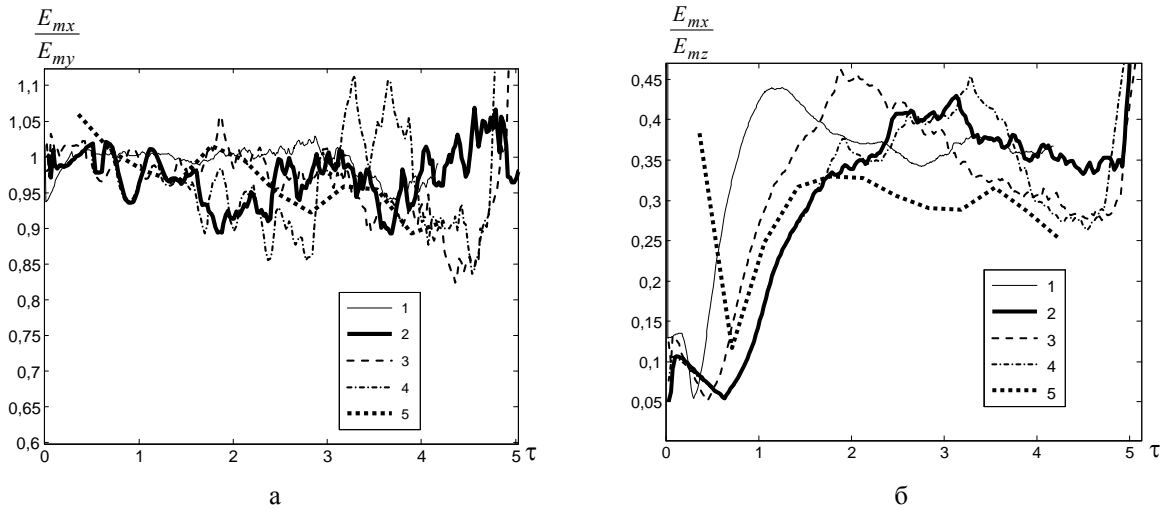


Рис. 13. Зависимости E_{mx}/E_{my} (а) и E_{mx}/E_{mz} (б). Большое давление: 2,3 – варианты 6–7 соответственно; малое давление: 1– вариант 4, 4 – вариант 8, 5 – вариант 5

Отчетливый выход на автомодельный режим можно видеть на рис. 12, на котором приводятся величины $\hat{\alpha}_a$ и $\hat{\alpha}_b$. Рисунки показывают, что переход к автомодельному режиму (на котором величины $\hat{\alpha}_a$ и $\hat{\alpha}_b$ постоянны) происходит тем быстрее, чем подробнее счетная сетка. Кроме того, величины $\hat{\alpha}_a$ и $\hat{\alpha}_b$ оказываются больше для меньших относительных давлений. Очевидно, это связано с большими амплитудами волн, возникающих на контактной границе и воздействующих на ЗТП.

Исходя из известного определения тензора Рейнольдса R_{ij} , введем тензор E_{ij}

$$R_{ij} \equiv \rho \langle u'_i u'_j \rangle \equiv \rho E_{ij}. \quad (13)$$

Найдем диагональные компоненты тензора E_{ij} : $E_i \equiv E_{ii}$ – суммирование по i нет. Максималь-

ные по ширине ЗТП значения диагональных компонент: $E_{mi} = \max(E_i)$. Их отношения показаны на рис. 13. Из рис. 13 видно, что на автомодельной стадии указанные величины не зависят от постановки расчета. Отношение горизонтальной компоненты E_{mx} к вертикальной E_{mz} приблизительно постоянно и близко к 0,3–0,4, а горизонтальных компонент E_{mx}/E_{my} также постоянно и близко к единице. Полученные результаты согласуются с результатами феноменологической модели [17].

Максимальное в ЗТП значение величины $k = E_{ii}/2$ (турбулентная энергия), приведенное к безразмерному виду

$$E_m = k/(L_t g), \quad (14)$$

показано на рис. 14 в зависимости от времени. На автомодельной стадии оно не зависит от постановки расчета, при этом приблизительно постоянно

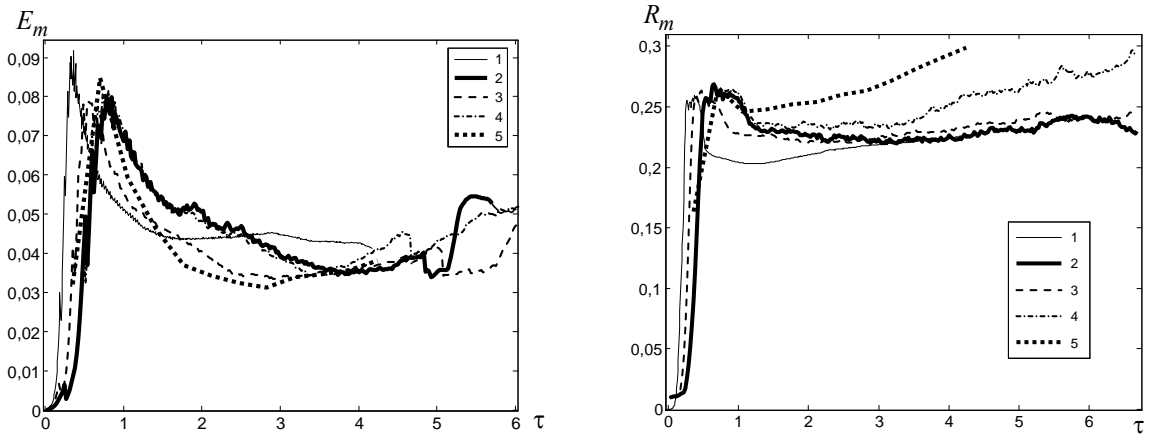


Рис. 14. Зависимости $E_m(\tau)$ и $R_m(\tau)$. Большое давление: 2,3 – варианты 6–7 соответственно; малое давление: 1 – вариант 4, 4 – вариант 8, 5 – вариант 5

и близко к значению 0,04, что согласуется с результатами феноменологической модели [17] и $k-\varepsilon$ модели [18].

На рис. 14 показана также зависимость от времени максимального в ЗТП значения относительной квадратичной пульсации плотности R_m . На автомодельной стадии значения R_m также выходят приблизительно на постоянное значение, близкое для всех вариантов с большим относительным давлением.

Для расчетов с малым относительным давлением на автомодельной стадии наблюдается небольшое, но отчетливое возрастание R_m . Это согласуется с тем фактом, что на контактной границе воздействуют волны сжатия-разрежения (дивергентного типа), движущиеся по вертикали. Амплитуда их возрастает с уменьшением относительного давления, что увеличивает дивергентную составляющую скорости относительно сдвиговой. Амплитуда также возрастает со временем из-за роста турбулентных пульсаций скорости, также имеющих дивергентную составляющую.

Заключение

Таким образом, 3D расчеты демонстрируют сильную зависимость ширины ЗТП от амплитуды и состава начального спектра возмущений в течение достаточно длительного времени. В этой ситуации «константа автомодельности» на достаточно большом интервале времени не является константой, а представляет собой функцию, зависящую от начальных данных задачи. Наиболее близок к автомодельности вариант со случайными возмущениями контактной границы.

Одномерная спектральная плотность пульсаций вертикальной компоненты скорости для всех расчетов в инерционном интервале близка к колмогоровскому закону $F_\varphi^{(0)}(K) = \text{const} K^{-5/3}$. То же самое относится к спектральному распределению турбулентного масштаба Λ_{int} .

Список литературы

1. Анучина Н. Н., Кучеренко Ю. А., Неуважаев В. Е. и др. Турбулентное перемешивание на ускоряющейся границе разноплотных жидкостей // МЖГ. № 6. 1978.
2. Youngs D. L. 3D numerical simulation of turbulent mixing by Rayleigh-Taylor instability // Phys. Fluids. 1991. Vol. A3(5). P. 1312–1319.
3. Dimonte G., Youngs D. L., Dimits A. et al. A comparative study of the turbulent Rayleigh-Taylor instability using high-resolution three-dimensional numerical simulations: The Alpha-Group collaboration // Phys. Fluids. 2004. Vol. 16, № 5. P. 1668–1693.
4. Stadnik A. A., Statsenko V. P., Yanilkin Yu. V., Zhmailo V. A. Direct Numerical simulation of gravitational turbulent mixing // 5rd International Workshop on the Physics of compressible turbulent mixing, Stony Brook (USA), 1995.
5. Жмайло В. А., Стадник А. Л., Стаценко В. П., Янилкин Ю. В. Прямое численное моделирование гравитационного турбулентного перемешивания // Вопросы атомной науки и техники. Сер.: Теоретическая и прикладная физика. 1996. Вып. 1–2, С. 29–37.
6. Sin'kova O. G., Stadnik A. L., Statsenko V. P., Yanilkin Yu. V., Zhmailo V. A., Three-Dimensional Direct Numerical Simulation of Gravitational Turbulent Mixing // 6th International Workshop on the

Physics of compressible turbulent mixing, Marseille, France, 1997. 470–479.

7. Yanilkin Yu. V., Statsenko V. P., Rebrov S. V., Sin'kova O. G., Stadnik A. L. Study of gravitational turbulent mixing at large density differences using direct 3D numerical simulation // Report to 8th International Seminar on Turbulent Mixing of Compressible Matter. 8th IWPCTM, Pasadena, USA, 2001.

8. Янилкин Ю. В., Стаценко В. П., Ребров С. В., Синькова О. Г., Стадник А. Л. Исследование гравитационного турбулентного перемешивания при больших разностях с помощью прямого трехмерного численного моделирования // Вопросы атомной науки и техники. Сер.: Математическое моделирование физических процессов. 2002. Вып. 2. С. 3–9.

9. Кучеренко Ю. А., Шестаченко О. Е., Пискунов Ю. А. и др. Экспериментальные исследования автомодельного режима перемешивания разнородных газов в поле тяжести Земли // VI Забабахинские научные чтения, Снежинск, 2001.

10. Kuchugov P., Zmitrenko N., Rozanov V., Yanilkin Yu., Sin'kova O., Statsenko V. & Chernyshova O. The Evolution Model of Rayleigh-Taylor Instability development // Journal of Russian Laser Research, 2012.

11. Сотсков Е. А., Невмержицкий Н. В., Мешков Е. Е., Блинецов М. В., Дреннов А. О., Сеньковский Е. Д. Исследование развития локального возмущения и его взаимодействия с зоной турбулентного перемешивания на границе газ-студень // Вопросы атомной науки и техники. Сер.: Теоретическая и прикладная физика. 2003. Вып. 1–2. С. 57–59.

12. Раевский В. А., Сеницына С. Н., Янилкин Ю. В. Численное моделирование влияния зоны турбулентного перемешивания на рост локального возмущения в условиях неустойчивости Рэлея-Тейлора // Там же. С. 28–33.

13. Гаранин С. Ф. Автомодельное развитие неустойчивости Рэлея–Тейлора в районе угловых точек // Там же. 1994/95. Вып. 3/1. С. 12–17.

14. Стадник А. Л., Шанин А. А., Янилкин Ю. В. Эйлерова методика ТРЭК для расчета трехмерных газодинамических течений многокомпонентной среды // Там же. Сер.: Математическое моделирование физических процессов. 1994. Вып. 4. С. 71–78.

15. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. Ч. 2. М.: Наука. 1967.

16. Глазырин С. И., Егузова М. Ю., Жмайло В. А., Стаценко В. П., Янилкин Ю. В. Исследование гравитационного перемешивания в присутствии магнитного поля // XI Забабахинские научные чтения, Снежинск, 2012.

17. Стаценко В. П. Тестирование модели турбулентности с анизотропией тензора Рейнольдса // Вопросы атомной науки и техники. Сер.: Теоретическая и прикладная физика. 1996. Вып. 3. С. 43–51.

18. Гужова А. Р., Павлушин А. С., Стаценко В. П. Уточнение констант $k - \varepsilon$ модели турбулентности на основе результатов прямого численного моделирования простейших турбулентных течений и измерений // Там же. 2005. Вып. 3. С. 37–48.

Статья поступила в редакцию 04.04.2013