

# ВОПРОСЫ АТОМНОЙ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ:

**Теоретическая и прикладная  
физика**

**ВЫПУСК 1**

**2013**

ФГУП

«РОССИЙСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ЯДЕРНЫЙ ЦЕНТР – ВНИИЭФ»

# ВОПРОСЫ АТОМНОЙ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ:

**Теоретическая и прикладная  
физика**

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СБОРНИК

ВЫПУСК 1

Издается с 1984 г.

Саров – 2013

## **Уважаемые читатели!**

Редакция н/т сборника «Вопросы атомной науки и техники» серии «Теоретическая и прикладная физика» информирует о том, что начиная со 2-го полугодия 2008 г. журнал распространяется согласно новым правилам подписки.

Теперь подписаться на сборник можно во всех отделениях связи России по каталогу Агентства «Роспечать», раздел «Периодические издания НТИ», подписной индекс 72246.

Цена одного журнала – 200 руб.

В год издается 3 выпуска.

По всем вопросам обращаться по адресу:

*607188 г. Саров Нижегородской обл., пр. Мира, 37, РФЯЦ-ВНИИЭФ, ИТМФ.*

*Редакция журнала ВАНТ, сер. «Теоретическая и прикладная физика».*

Тел. (83130)7-54-96; e-mail: [kul@otd68.vniief.ru](mailto:kul@otd68.vniief.ru)

Главный редактор Ю. А. Трутнев

Редакционная коллегия:

Е. Н. Аврорин – зам. главного редактора, М. В. Горбатенко, В. П. Копышев, Н. В. Лычагина –  
ответственный секретарь, Б. А. Надыкто – зам. главного редактора, А. В. Певницкий,  
В. А. Симоненко, В. П. Соловьев, С. А. Холин

## СТАЦИОНАРНЫЕ СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ ЧАСТИЦ СО СПИНОМ $\frac{1}{2}$ В ГРАВИТАЦИОННЫХ ПОЛЯХ КЕРРА И КЕРРА – НЬЮМЕНА

М. В. Горбатенко, В. П. Незнамов<sup>1</sup>

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, Саров Нижегородской обл.

Для гравитационных полей Керра и Керра – Ньюмена с использованием гамильтониана Чандрасекара обоснована возможность существования стационарных связанных состояний пробных частиц со спином  $\frac{1}{2}$ . При выполнении условия Гильберта  $g_{00} > 0$  связанные состояния дираковских частиц с вещественным дискретным энергетическим спектром возможны как для частиц находящихся вне поверхности внешней эргосферы полей Керра и Керра – Ньюмена, так и для частиц, находящихся под поверхностью внутренней «эргосферы». В этом случае поверхности внешней и внутренней эргосфер играют роль бесконечно больших потенциальных барьеров. Квантово-механические частицы со спином  $\frac{1}{2}$  не могут пересекать поверхности эргосфер полей Керра и Керра – Ньюмена. По результатам работы можно сделать предположение о существовании нового типа вращающихся коллапсаров, для которых отсутствует излучение по Хокингу. Результаты работы могут привести к корректировке некоторых аспектов стандартной космологической модели, связанных с эволюцией Вселенной и с взаимодействием вращающихся коллапсаров с окружающей средой.

*Ключевые слова:* уравнение Дирака, гравитационное поле Керра – Ньюмена, стационарные связанные состояния, самосопряженные гамильтонианы, дискретный энергетический спектр.

### 1. Введение

Авторами в работах [1–3] с помощью методов псевдоэрмитовой квантовой механики для произвольных внешних гравитационных полей, в том числе зависящих от времени, разработан алгоритм получения самосопряженных дираковских гамильтонианов с плоским скалярным произведением волновых функций.

Из одночастичной квантовой механики следует, что при существовании эрмитовости гамильтониана, при наличии квадратично интегрируемых волновых функций и при установлении соответствующих граничных условий самосопряженные гамильтонианы, не зависящие от времени, должны обеспечивать существование стационарных связанных состояний частиц с вещественным энергетическим спектром.

В работах [4, 5] для гравитационного поля Шварцшильда с использованием самосопряженного гамильтониана с плоским скалярным произведением волновых функций для любых значений

гравитационной константы связи в численных расчетах впервые получены стационарные связанные состояния частиц со спином  $\frac{1}{2}$ , не распадающиеся со временем.

Для выполнения условия Гильберта  $g_{00} > 0$  в численных расчетах введено граничное условие, при котором компоненты вектора плотности тока дираковских частиц равны нулю вблизи «горизонта событий».

В работе [6] аналогичный подход был применен к квантово-механическому поведению дираковских частиц в заряженном гравитационном поле Райсснера – Нордстрёма. В результате сделан вывод, что связанные состояния частиц со спином  $\frac{1}{2}$  с вещественным дискретным энергетическим спектром могут существовать как вне внешнего «горизонта событий», так и под внутренним «горизонтом событий» – горизонтом Коши.

При выполнении условия  $g_{00} > 0$  «горизонты событий» полей Шварцшильда и Райсснера – Нордстрёма при квантово-механическом рассмотрении являются бесконечно большими потенциальными барьерами, лишаящими возможности пересекать их пробными дираковскими частицами. Отсюда

<sup>1</sup> E-mail: [neznamov@vniief.ru](mailto:neznamov@vniief.ru)

следует, что такие коллапсары не могут излучать по механизму Хокинга [7].

В настоящей работе по аналогии с работами [4–6] проводится анализ возможности существования стационарных связанных состояний дираковских частиц в гравитационных полях Керра [8] и Керра–Ньюмена [9]. В результате анализа делается вывод, что связанные состояния частиц со спином  $\frac{1}{2}$  с вещественным энергетическим спектром могут существовать как вне поверхности внешней «эргосферы» полей Керра и Керра–Ньюмена, так и под поверхностью внутренней эргосферы.

Результаты численного определения энергетического спектра и волновых функций будут приведены в следующей работе.

Данная работа построена следующим образом. Раздел 2 посвящен квантово-механическому поведению дираковских частиц в поле Керра. В подразделах 2.1, 2.2 вводятся обозначения и приводятся метрика Керра в координатах Бойера–Линдквиста и два дираковских гамильтониана. Один из них – самосопряженный гамильтониан с плоским скалярным произведением волновых функций, полученный авторами в работе [3]. Второй – физически эквивалентный гамильтониан Чандрасекара, полученный в работе [10].

Поскольку Чандрасекаром в [10] для уравнения Дирака в поле Керра была проведена процедура разделения угловых и радиальных переменных, в подразделе 2.3 анализируются уравнения и асимптотика для радиальных волновых функций.

В подразделе 2.4 обсуждаются вопросы эрмитовости гамильтониана, граничные условия для волновых функций и делается вывод о существовании стационарных связанных состояний дираковских частиц с вещественным энергетическим спектром.

В подразделе 2.5 обсуждается случай экстремального поля Керра и случай «голой» сингулярности.

В разделе 3 аналогично исследуется возможность существования стационарных связанных состояний дираковских частиц в поле Керра–Ньюмена.

В Заключении приведены основные выводы проведенного анализа.

## 2. Гравитационное поле Керра

### 2.1. Метрика Керра в координатах Бойера – Линдквиста

Решение уравнений ОТО Керра характеризуется точечным источником гравитационного поля

с массой  $M$ , вращающимся с угловым моментом  $\mathbf{J} = M\mathbf{c}\mathbf{a}$ , где  $c$  – скорость света.

Ниже будем использовать систему единиц  $\hbar = c = 1$ .

Тетрадные векторы определяются соотношением

$$H_{\underline{\alpha}}^{\mu} H_{\underline{\beta}}^{\nu} g_{\mu\nu} = \eta_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}, \quad (1)$$

где

$$\eta_{\underline{\alpha}\underline{\beta}} = \text{diag}[1, -1, -1, -1]. \quad (2)$$

Глобальные (неподчеркнутые) индексы поднимаются и опускаются с использованием метрического тензора  $g_{\mu\nu}$  и обратного тензора  $g^{\mu\nu}$ ; локальные (подчеркнутые) индексы поднимаются и опускаются с использованием тензоров  $\eta_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}$ ,  $\eta^{\underline{\alpha}\underline{\beta}}$ .

Матрицы Дирака удовлетворяют соотношениям:

$$\gamma^{\mu}\gamma^{\alpha} + \gamma^{\alpha}\gamma^{\mu} = 2g^{\alpha\beta}E, \quad (3)$$

$$\gamma^{\underline{\mu}}\gamma^{\underline{\alpha}} + \gamma^{\underline{\alpha}}\gamma^{\underline{\mu}} = 2\eta^{\underline{\alpha}\underline{\beta}}E, \quad (4)$$

где  $E$  – единичная  $4 \times 4$  матрица.

Связь между  $\gamma^{\alpha}$  и  $\gamma^{\underline{\alpha}}$  определяется выражением

$$\gamma^{\alpha} = H_{\underline{\beta}}^{\alpha}\gamma^{\underline{\beta}}. \quad (5)$$

Метрика Керра в координатах Бойера–Линдквиста  $(t, r, \theta, \varphi)$  имеет вид

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_0 r}{\rho_k^2}\right) dt^2 + \frac{2ar_0 r}{\rho_k^2} \sin^2 \theta dt d\varphi - \frac{\rho_k^2}{\Delta} dr^2 - \rho_k^2 d\theta^2 - \left(r^2 + a^2 + \frac{a^2 r_0 r}{\rho_k^2} \sin^2 \theta\right) \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (6)$$

В выражении (6)  $r_0 = \frac{2GM}{c^2}$  – гравитационный радиус («горизонт событий»),  $G$  – гравитационная постоянная,  $\rho_k^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$ ,  $\Delta = r^2 - r_0 r + a^2$ .

В соответствии с условием Гильберта ( $g_{00} > 0$ ) в метрике (6) подразумевается выполнение неравенства

$$\left(1 - \frac{r_0 r}{\rho_k^2}\right) > 0. \quad (7)$$

В координатах  $(r, \theta)$  равенство нулю выражения (7) определяет внешнюю и внутреннюю эргосферы поля Керра.

Контравариантный тензор  $g^{\alpha\beta}$  имеет вид:

$$g^{\alpha\beta} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \frac{1}{\Delta} \left( r^2 + a^2 + \frac{a^2 r_0 r}{\rho_k^2} \sin^2 \theta \right) & 0 & 0 & \frac{ar_0 r}{\Delta \rho_k^2} \\ \hline 0 & -\frac{\Delta}{\rho_k^2} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -\frac{1}{\rho_k^2} & 0 \\ \hline \frac{ar_0 r}{\Delta \rho_k^2} & 0 & 0 & -\frac{1}{\Delta \sin^2 \theta} \left( 1 - \frac{r_0 r}{\rho_k^2} \right) \\ \hline \end{array} \quad (8)$$

## 2.2. Гамильтонианы частиц со спином $\frac{1}{2}$ в поле Керра

В работе [3] для метрики (6) авторами в  $\eta$ -представлении получен самосопряженный дираковский гамильтониан с плоским скалярным произведением волновых функций. Он имеет достаточно сложный вид:

$$\begin{aligned} H_\eta = & \frac{m}{\sqrt{g^{00}}} \gamma^0 - \frac{i\sqrt{\Delta}}{\rho_k \sqrt{g^{00}}} \gamma^0 \gamma^1 \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) - \\ & - \frac{i}{\rho_k \sqrt{g^{00}}} \gamma^0 \gamma^2 \left( \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \text{ctg} \theta \right) - \frac{i}{g^{00} \sqrt{\Delta} \sin \theta} \gamma^0 \gamma^3 \frac{\partial}{\partial \varphi} - \\ & - \frac{i}{g^{00}} \frac{ar_0 r}{\rho_k^2 \Delta} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{i}{2} \gamma^0 \gamma^1 \left[ \frac{\partial}{\partial r} \frac{\sqrt{\Delta}}{\rho_k \sqrt{g^{00}}} \right] - \\ & - \frac{i}{2} \gamma^0 \gamma^2 \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{\rho_k \sqrt{g^{00}}} \right] + \frac{i}{4} \gamma^3 \gamma^1 \times \\ & \times \sqrt{g^{00}} \frac{\Delta}{\rho_k} ar_0 \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r}{g^{00} \rho_k^2 \Delta} \right) - \\ & - \frac{i}{4} \gamma^2 \gamma^3 \sqrt{g^{00}} \frac{\sqrt{\Delta}}{\rho_k} ar_0 \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{r}{g^{00} \rho_k^2 \Delta} \right). \quad (9) \end{aligned}$$

Если в выражении (9) ограничиться линейными членами по  $a$ , мы получим самосопряженный гамильтониан для слабого поля Керра

$$\begin{aligned} H_\eta^{app} = & m\sqrt{f_s} \gamma^0 - if_s \gamma^0 \gamma^1 \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) - \frac{ir_0}{2r^2} \gamma^0 \gamma^1 - \\ & - i\sqrt{f_s} \gamma^0 \left[ \gamma^2 \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \text{ctg} \theta \right) + \gamma^3 \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] - \\ & - \frac{iar_0}{r^3} \frac{\partial}{\partial \varphi} - i \frac{3}{4} \frac{ar_0}{r^3} \sin \theta \gamma^3 \gamma^1. \quad (10) \end{aligned}$$

$$\text{В (10) } f_s = 1 - \frac{r_0}{r}.$$

При  $a=0$  гамильтонианы (9), (10) совпадают с самосопряженным гамильтонианом в поле Шварцшильда [3–5].

В отличие от центрально-симметричных гравитационных полей Шварцшильда, Райсснера–Нордстрёма и др. аксиально-симметричное поле Керра не позволяет использовать для отделения угловых переменных в уравнении Дирака сферические гармоники со спином  $\frac{1}{2}$ .

Чандрасекар в работе [10] провел разделение переменных в дираковском гамильтониане с метрикой (6), используя двухкомпонентный спинорный формализм Пенроуза–Ньюмена [11] и единичную тетраду Kinnersley [12].

Следуя работам [13–14], уравнение Дирака и гамильтониан Чандрасекара можно записать в биспинорной форме

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \Psi_{Ch}}{\partial t} = & H_{Ch} \Psi = \left( \frac{m}{g^{00}} \gamma^0 - \right. \\ & \left. - \frac{i}{g^{00}} \gamma^0 \gamma^k \frac{\partial}{\partial x^k} - i\Phi^0 - \frac{i}{g^{00}} \gamma^0 \gamma^k \Phi^k \right) \Psi_{Ch}. \quad (11) \end{aligned}$$

В выражении (11)  $k=1,2,3$ ,  $\Phi^0$ ,  $\Phi^k$  – биспинорные связности, вычисляемые стандартным образом.

Остальные величины имеют следующий вид:

$$\Psi_{Ch} = \begin{pmatrix} P^A \\ Q_B^* \end{pmatrix}. \quad (12)$$

В уравнении (11)

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \sigma^{\mu AB'} \\ \sqrt{2} [\sigma_{AB'}^\mu]^T & 0 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

$$\sqrt{2} [\sigma^{\mu AB'}] = \sqrt{2} \begin{pmatrix} n^\mu & -m^{*\mu} \\ -m^\mu & l^\mu \end{pmatrix}; \quad (14)$$

$$\sqrt{2} [\sigma_{AB'}^\mu]^T = \sqrt{2} \begin{pmatrix} l^\mu & m^{*\mu} \\ m^\mu & n^\mu \end{pmatrix}.$$

В соотношениях (13), (14) индексы  $A, B'$  принимают значения 0 и 1, значки  $*$  и  $T$  означают комплексное сопряжение и транспонирование.

Компоненты тетрады Kinnersley равны

$$l^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{r^2 + a^2}{\Delta}, 1, 0, \frac{a}{\Delta} \right),$$

$$n^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}\rho_k^2} [r^2 + a^2, -\Delta, 0, a], \quad (15)$$

$$m^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}(r + ia \cos \theta)} \left( ia \sin \theta, 0, 1, \frac{i}{\sin \theta} \right).$$

Обратный метрический тензор (8) выражается через компоненты тетрады (15) следующим образом:

$$g^{\mu\nu} = l^\mu n^\nu + n^\mu l^\nu - m^\mu m^{*\nu} - m^{*\mu} m^\nu. \quad (16)$$

Гамильтониан Чандрасекара (11) физически эквивалентен самосопряженному гамильтониану (9), поскольку они связаны друг с другом преобразованием подобия.

Для волновых функций уравнения Дирака с гамильтонианом Чандрасекара (11) в скалярном произведении присутствует весовой оператор Паркера [1–3], [15]

$$\rho_p = \sqrt{g_G} \gamma^0 \gamma^0, \quad (17)$$

где для метрики Керра в координатах Бойера–Линдквиста  $g_G = \frac{\rho_k^4}{r^4}$  [3].

При использовании самосопряженного гамильтониана (9)  $\rho_p = 1$ .

Если определить оператор  $\eta$  из равенства

$$\rho_p = \eta^\dagger \eta, \quad (18)$$

то гамильтониан Чандрасекара будет связан с гамильтонианом (9) преобразованием подобия

$$H_\eta = \eta H_{Ch} \eta^{-1}. \quad (19)$$

Из формулы (19) следует, что оба гамильтониана имеют одинаковый энергетический спектр.

В общем случае выражение для оператора  $\eta$  является сложным и громоздким. В случае  $a = 0$  (поле Шварцшильда) оператор  $\eta$  диагонален и имеет вид

$$\eta = \text{diag} \left[ \frac{1}{\sqrt{f_s}}, 1, 1, \frac{1}{\sqrt{f_s}} \right]. \quad (20)$$

С учетом вышесказанного для анализа возможности существования стационарных связанных состояний частиц со спином  $\frac{1}{2}$  в поле Керра далее воспользуемся процедурой разделения пе-

ременных, реализованной Чандрасекаром в [10] (см. также [13]).

Для стационарного случая волновую функцию в уравнении (11) можно записать в виде

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \Psi(\mathbf{r}) e^{-iEt}, \quad (21)$$

где  $E$  – энергия пробной дираковской частицы.

Далее, представляя функцию (21) в виде

$$\Psi_{Ch}(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{(r - ia \cos \theta)} R^{(-)}(r) S^{(-)}(\theta) \\ \frac{1}{\sqrt{\Delta}} R^{(+)}(r) S^{(+)}(\theta) \\ \frac{1}{\sqrt{\Delta}} R^{(+)}(r) S^{(-)}(\theta) \\ \frac{1}{(r + ia \cos \theta)} R^{(-)}(r) S^{(+)}(\theta) \end{pmatrix} e^{-iEt} e^{im_\varphi \varphi}, \quad (22)$$

можно получить отдельно два уравнения для угловых функций  $S^{(-)}(\theta), S^{(+)}(\theta)$  и два уравнения для радиальных функций  $R^{(-)}(r), R^{(+)}(r)$ :

$$\left( \frac{d}{d\theta} + aE \sin \theta - m_\varphi \frac{1}{\sin \theta} + \frac{1}{2} \text{ctg} \theta \right) S^{(-)}(\theta) =$$

$$= (\lambda + am \cos \theta) S^{(+)}(\theta), \quad (23)$$

$$\left( \frac{d}{d\theta} - aE \sin \theta + m_\varphi \frac{1}{\sin \theta} + \frac{1}{2} \text{ctg} \theta \right) S^{(+)}(\theta) =$$

$$= (-\lambda + am \cos \theta) S^{(-)}(\theta),$$

$$\Delta^{\frac{1}{2}} \left( \frac{d}{dr} - i \frac{K}{\Delta} \right) R^{(-)}(r) = (\lambda + imr) R^{(+)}(r), \quad (24)$$

$$\Delta^{\frac{1}{2}} \left( \frac{d}{dr} + i \frac{K}{\Delta} \right) R^{(+)}(r) = (\lambda - imr) R^{(-)}(r).$$

В уравнениях (24)

$$K = (r^2 + a^2)E - m_\varphi a. \quad (25)$$

В уравнениях (23), (24) параметр  $\lambda$  является константой разделения. В отличие от центрально симметричных полей Шварцшильда и Райсснера–Нордстрёма кроме стандартной зависимости  $\lambda$  от квантовых чисел  $j, l$  в поле Керра  $\lambda$  зависит также от магнитного квантового числа  $m_\varphi$ , углового момента  $a$ , энергии и массы пробной частицы и для соблюдения условия Гильберта (7) от радиальной координаты  $r$ . Таким образом, при решении радиальных уравнений (24) для каждого значения

энергии  $E$ , момента  $a$ , квантового числа  $m_\phi$ , радиальной координаты  $r$  для определения параметра  $\lambda$  необходимо решать уравнения (23) с граничными условиями, вообще говоря, зависящими от  $r$ .

В диссертации [14] автор, не выполняя условие (7), численно определил константу разделения  $\lambda$  в интервале значений  $aE$  от нуля до восьми и вплоть до  $j = \frac{11}{2}$ .

Угловые функции  $S^{(-)}(\theta)$ ,  $S^{(+)}(\theta)$  являются сфероидальными гармониками. Обзор их широкого применения в теоретической физике можно найти, например, в [14].

Сфероидальные гармоники удовлетворяют следующим соотношениям симметрии:

$$S^{(-)}(\theta) = S^{(+)}(\pi - \theta), \quad (26)$$

$$S_{l,m_\phi,E}^{j=l+\frac{1}{2}}(\theta) = (-1)^{l+m_\phi} S_{l,m_\phi,E}^{j=l-\frac{1}{2}}(\pi - \theta);$$

$$S_{j,l,m_\phi,E}(\theta) = (-1)^j S_{j,l,-m_\phi,-E}(\pi - \theta); \quad (27)$$

$$S_{l,m_\phi,E}^{j=l+\frac{1}{2}}(\theta) = (-1)^{m+\frac{1}{2}} S_{l,-m_\phi,-E}^{j=l-\frac{1}{2}}(\theta). \quad (28)$$

### 2.3. Уравнения и асимптотика для радиальных волновых функций

Поскольку из системы уравнений (24) следует, что  $R^{(+)}(r) = R^{(-)}(r)$ , получим уравнения для вещественных радиальных функций

$$g(r) = R^{(-)}(r) + R^{(+)}(r), \quad (29)$$

$$f(r) = -i \left( R^{(-)}(r) - R^{(+)}(r) \right).$$

Уравнения для функций  $f(r)$  и  $g(r)$  имеют следующий вид:

$$f_K \frac{d}{dr} f + \frac{\sqrt{f_K}}{r} \lambda f - \left( E \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{m_\phi a}{r^2} + \sqrt{f_K} m \right) g = 0, \quad (30)$$

$$f_K \frac{d}{dr} g - \frac{\sqrt{f_K}}{r} \lambda g + \left( E \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{m_\phi a}{r^2} - \sqrt{f_K} m \right) f = 0.$$

В уравнениях (30)

$$f_K = 1 - \frac{r_0}{r} + \frac{a^2}{r^2}. \quad (31)$$

Условие (7) обуславливает рассмотрение лишь положительных значений  $f_K > 0$ . Величину  $f_K$  в (31) можно представить в виде

$$f_K = \left( 1 - \frac{r_+}{r} \right) \left( 1 - \frac{r_-}{r} \right), \quad (32)$$

где

$$r_{\pm} = \frac{r_0}{2} \pm \sqrt{\frac{r_0^2}{4} - a^2}. \quad (33)$$

При  $r_0^2 \geq 4a^2$  величины  $r_{\pm}$  являются внешними и внутренними радиусами «горизонтов событий» поля Керра.

Введем безразмерные переменные  $\varepsilon = \frac{E}{m}$ ;  $\rho = \frac{r}{l_c}$ ;  $2\alpha = \frac{r_0}{l_c} = \frac{2GMm}{\hbar c}$ ;  $\alpha_a = \frac{a}{l_c}$ ;  $l_c = \frac{\hbar}{mc}$  — комптоновская длина волны пробной дираковской частицы.

В безразмерных переменных величины (32), (33) можно представить в виде

$$f_K = \left( 1 - \frac{\rho_+}{\rho} \right) \left( 1 - \frac{\rho_-}{\rho} \right), \quad (34)$$

$$\rho_+ = \alpha + \sqrt{\alpha^2 - \alpha_a^2}, \quad (35)$$

$$\rho_- = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - \alpha_a^2}. \quad (36)$$

Уравнения (30) в безразмерных переменных имеют вид

$$\left( 1 - \frac{\rho_+}{\rho} \right) \left( 1 - \frac{\rho_-}{\rho} \right) \frac{df}{d\rho} + \frac{\lambda \sqrt{\left( 1 - \frac{\rho_+}{\rho} \right) \left( 1 - \frac{\rho_-}{\rho} \right)}}{\rho} f - \left( \varepsilon \left( 1 + \frac{\alpha_a^2}{\rho^2} \right) - \frac{m_\phi \alpha_a}{\rho^2} + \sqrt{\left( 1 - \frac{\rho_+}{\rho} \right) \left( 1 - \frac{\rho_-}{\rho} \right)} \right) g = 0, \quad (37)$$

$$\left( 1 - \frac{\rho_+}{\rho} \right) \left( 1 - \frac{\rho_-}{\rho} \right) \frac{dg}{d\rho} - \frac{\lambda \sqrt{\left( 1 - \frac{\rho_+}{\rho} \right) \left( 1 - \frac{\rho_-}{\rho} \right)}}{\rho} g + \left( \varepsilon \left( 1 + \frac{\alpha_a^2}{\rho^2} \right) - \frac{m_\phi \alpha_a}{\rho^2} - \sqrt{\left( 1 - \frac{\rho_+}{\rho} \right) \left( 1 - \frac{\rho_-}{\rho} \right)} \right) f = 0.$$

Поскольку в уравнениях (30), (37) значения  $f_K > 0$  возможны лишь при  $\rho > \rho_+$  и  $\rho < \rho_-$ , то волновые функции в области между внешним и внутренним «горизонтами событий» ( $\rho_- \leq \rho \leq \rho_+$ ) равны нулю.

При  $\rho > \rho_+$  в соответствии с условием (7) областью определения волновых функций уравнения



Дирака в поле Керра является пространство  $(\rho, \theta, \varphi)$  с радиусами  $\rho(\theta)$  большими, чем радиусы поверхности внешней эргосферы. При  $\rho < \rho_-$  областью определения волновых функций, наоборот, является область с радиусами  $\rho(\theta)$  меньшими, чем радиусы поверхности внутренней эргосферы.

Если угловой момент  $a$  равен нулю, т. е.  $\alpha_a = 0$ , то  $\rho_+ = 2\alpha$ ;  $\rho_- = 0$ . В этом случае уравнения (30), (37) будут совпадать с системой радиальных уравнений для поля Шварцшильда с одним «горизонтом событий» ( $r = r_0$  или  $\rho = 2\alpha$ ); константа разделения  $\lambda$  перестает зависеть от энергии частицы и от расстояния  $\rho$ , и становится равной константе разделения  $k$  в системе дираковских уравнений во внешнем поле кулоновского потенциала

$$k = \pm 1, \pm 2, \dots = \begin{cases} -(l+1), & j = l + \frac{1}{2} \\ l, & j = l - \frac{1}{2} \end{cases}. \quad (38)$$

Рассмотрим асимптотику радиальных волновых функций  $f(\rho), g(\rho)$  при  $\rho \rightarrow \infty$ ;  $\rho \rightarrow \rho_+$  ( $\rho > \rho_+$ );  $\rho \rightarrow \rho_-$  ( $\rho < \rho_-$ );  $\rho \rightarrow 0$ .

При  $\rho \rightarrow \infty$  асимптотическое поведение волновых функций  $f(\rho), g(\rho)$  для финитного движения является таким же, как и для центрально-симметричных гравитационных полей Шварцшильда, Райсснера–Нордстрёма и др. [4–6].

При  $\rho \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} f &= C e^{-\rho \sqrt{1-\varepsilon^2}} \\ g &= -\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}} f. \end{aligned} \quad (39)$$

Поведение волновых функций  $f(\rho), g(\rho)$  вблизи «горизонтов событий» по своей структуре также близко к поведению радиальных функций в случае полей Шварцшильда и Райсснера–Нордстрёма [4–6].

При  $\rho \rightarrow \rho_+$  ( $\rho > \rho_+$ )

$$\begin{aligned} f &= A \sin(M_+ \ln(\rho - \rho_+) + \varphi_+), \\ g &= A \cos(M_+ \ln(\rho - \rho_+) + \varphi_+). \end{aligned} \quad (40)$$

В формуле (40)

$$M_+ = \frac{\rho_+^2}{2\sqrt{\alpha^2 - \alpha_a^2}} \left( \varepsilon \left( 1 + \frac{\alpha_a^2}{\rho_+^2} \right) - \frac{m_\varphi \alpha_a}{\rho_+^2} \right). \quad (41)$$

При  $\rho \rightarrow \rho_-$  ( $\rho < \rho_-$ )

$$\begin{aligned} f &= B \cos(M_- \ln(\rho_- - \rho) + \varphi_-), \\ g &= B \sin(M_- \ln(\rho_- - \rho) + \varphi_-). \end{aligned} \quad (42)$$

В (42)

$$M_- = \frac{\rho_-^2}{2\sqrt{\alpha^2 - \alpha_a^2}} \left( \varepsilon \left( 1 + \frac{\alpha_a^2}{\rho_-^2} \right) - \frac{m_\varphi \alpha_a}{\rho_-^2} \right). \quad (43)$$

При  $\rho \rightarrow 0$  система уравнений (30) сводится к уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{df}{d\rho} + \frac{\lambda(\rho)}{\alpha_a} f - \left( \varepsilon - \frac{m_\varphi}{\alpha_a} \right) g &= 0, \\ \frac{dg}{d\rho} - \frac{\lambda(\rho)}{\alpha_a} g + \left( \varepsilon - \frac{m_\varphi}{\alpha_a} \right) f &= 0. \end{aligned} \quad (44)$$

Зависимость  $\lambda(\rho)$  при  $\rho \rightarrow 0$  должна определяться из решения угловых уравнений (23) с соответствующими граничными условиями, определяемыми выполнением неравенства (7).

В соотношениях (39), (40), (42) величины  $C, A, B, \varphi_+, \varphi_-$  – постоянные интегрирования.

Как и в случае полей Шварцшильда и Райсснера–Нордстрёма [4–6], осциллирующие функции  $f$  и  $g$  плохо определены на внешнем и внутреннем «горизонте событий» и расходятся при  $\rho \rightarrow \rho_+$  ( $\rho > \rho_+$ ) и при  $\rho \rightarrow \rho_-$  ( $\rho < \rho_-$ ). Для обеспечения квадратичной интегрируемости рассматриваемых функций и в соответствии с условием (7) необходимо сужение их области определения до интервала  $[\rho_+^{\min}, \infty)$ , где  $\rho_+^{\min} > \rho_+$ , и до интервала  $(0, \rho_-^{\max}]$ , где  $\rho_-^{\max} < \rho_-$ .

#### 2.4. Эрмитовость гамильтониана Чандрасекара, граничные условия для волновых функций

Согласно общей теореме, доказанной в [2], стационарный гамильтониан Чандрасекара является псевдоэрмитовым или, другими словами, эрмитовым с весовым оператором Паркера (17).

В работах [4–6] эрмитовость исходных гамильтонианов для полей Шварцшильда и Райсснера–Нордстрёма с учетом поведения волновых функций определялась с использованием явного вида сферических гармоник для частиц со спином

$\frac{1}{2}$ . В нашем случае угловые функции  $S^{(-)}(\theta), S^{(+)}(\theta)$  могут быть определены лишь при численном решении уравнений (23) и прямое подтверждение эрмитовости гамильтониана уравнения (11)

$((\Phi, H_{Ch}\Psi) = (H_{Ch}\Phi, \Psi))$  не представляется возможным. Однако сходная с полями Шварцшильда и Райсснера–Нордстрёма структура уравнений для радиальных волновых функций, сходные асимптотики для радиальных функций при  $\rho \rightarrow \infty$  и вблизи «горизонтов событий», гладкие зависимости  $S^{(-)}(\theta), S^{(+)}(\theta)$ , полученные автором [14] в численных расчетах, позволяют с большой долей уверенности считать гамильтониан Чандрасекара также эрмитовым.

Граничные условия для волновых функций определяются выполнением условия Гильберта (7).

При  $2\alpha \leq \rho < \infty$  ( $r_0 \leq r < \infty$ ) угловые функции  $S^{(-)}(\theta), S^{(+)}(\theta)$  и параметр разделения  $\lambda$  при заданном значении  $E, a, m_\varphi$  вычисляются из уравнений (23) с использованием условия регулярности функций в полюсах при  $\cos\theta = \pm 1$  (см., например, [14]).

При  $\rho_+ < \rho < 2\alpha$  ( $r_+ < r < r_0$ ) для выполнения условия (7) необходимо на поверхности внешней эргосферы угловые функции положить равными нулю.

Для другой области определения волновых функций  $0 < \rho < \rho_-$  ( $0 < r < r_-$ ) для выполнения условия (7) угловые функции должны быть равными нулю на поверхности внутренней эргосферы.

При таком задании граничных условий параметр разделения  $\lambda$  будет зависеть от радиальной координаты  $\rho$ . Определяя зависимость  $\lambda(\rho)$  в серии численных расчетов уравнений (23), далее можно определять энергетический спектр, решая систему радиальных уравнений (30).

$$f(\rho) = -A \sin \left( \alpha^2 \left( 2\varepsilon - \frac{m_\varphi}{\alpha} \right) \frac{1}{\rho - \alpha} + \varphi_+ \right) \quad \rho \rightarrow \alpha (\rho > \alpha) \quad (48)$$

$$g(\rho) = A \cos \left( \alpha^2 \left( 2\varepsilon - \frac{m_\varphi}{\alpha} \right) \frac{1}{\rho - \alpha} + \varphi_+ \right)$$

$$f(\rho) = B \cos \left( \alpha^2 \left( 2\varepsilon - \frac{m_\varphi}{\alpha} \right) \frac{1}{\alpha - \rho} + \varphi_- \right) \quad \rho \rightarrow \alpha (\rho < \alpha) \quad (49)$$

$$g(\rho) = -B \sin \left( \alpha^2 \left( 2\varepsilon - \frac{m_\varphi}{\alpha} \right) \frac{1}{\alpha - \rho} + \varphi_- \right)$$

Исходя из эрмитовости исходного гамильтониана и самосопряженности гамильтониана (9), искомый энергетический спектр будет стационарным и вещественным.

## 2.5. Экстремальное поле Керра и «голая» сингулярность

Экстремальное поле реализуется при  $\alpha = \alpha_a \left( a = \frac{r_0}{2} \right)$ . В этом случае внешний и внутренний «горизонты событий» совпадают, их радиус равен

$$\rho_+ = \rho_- = \alpha. \quad (45)$$

Радиусы поверхностей внешней и внутренней эргосфер равны

$$(r_{erg})_{1,2} = \frac{r_0}{2} (1 \pm \sin\theta). \quad (46)$$

Для рассматриваемого случая система уравнений (30) для радиальных волновых функций  $f(\rho), g(\rho)$  сводится к виду

$$\left( 1 - \frac{\alpha}{\rho} \right)^2 \frac{df}{d\rho} + \frac{\lambda \left| 1 - \frac{\alpha}{\rho} \right|}{\rho} f - \left( \varepsilon \left( 1 + \frac{a^2}{\rho^2} \right) - \frac{m_\varphi \alpha}{\rho^2} + \left| 1 - \frac{\alpha}{\rho} \right| \right) g = 0, \quad (47)$$

$$\left( 1 - \frac{\alpha}{\rho} \right)^2 \frac{dg}{d\rho} - \frac{\lambda \left| 1 - \frac{\alpha}{\rho} \right|}{\rho} g + \left( \varepsilon \left( 1 + \frac{a^2}{\rho^2} \right) - \frac{m_\varphi \alpha}{\rho^2} - \left| 1 - \frac{\alpha}{\rho} \right| \right) f = 0.$$

Волновые функции определены в интервале  $\rho \in (0, \infty)$  за исключением окрестности около «горизонта событий». Поведение волновых функций вблизи «горизонта событий» имеет вид

Для экстремального поля Керра подход, выработанный в предыдущих разделах для определения стационарных связанных состояний дираковских частиц, не претерпевает идеологических изменений.

Система уравнений (47) с граничными условиями, обсужденными в подразделе 2.4, обладает дискретным стационарным вещественным спектром для дираковских частиц, находящихся либо над внешней эргосферой, либо под поверхностью внутренней эргосферы. Эти поверхности играют роль бесконечно больших потенциальных барьеров, запрещающих квантово-механическим частицам со спином  $\frac{1}{2}$  пересекать их с любой стороны.

Рассмотрим интересный случай «голой» сингулярности, который реализуется при  $\alpha_a > \alpha \left( a > \frac{r_0}{2} \right)$ .

В этом случае внешний и внутренний «горизонты событий» исчезают, величины  $\rho_+, \rho_-$  в (35), (36) становятся комплексными числами.

По мере возрастания углового момента вращения  $a > \frac{r_0}{2}$  происходит уменьшение области  $(\rho, \theta)$ , где не выполняется условие  $g_{00} > 0$  (7). В пределе бесконечно большого момента  $a$  ограничение области определения волновой функции  $\psi(r, \theta, \varphi)$  сводится к узкой полосе в экваториальной плоскости с  $\theta \approx \frac{\pi}{2}$  и  $0 \leq r \leq r_0$ .

Поскольку выполнение условия Гильберта  $g_{00} > 0$  требует и для случая «голой» сингулярности ограничений на область определения волновой функции уравнения Дирака в поле Керра, анализ уровней энергии дираковских частиц требует специального рассмотрения, связанного с проведением численных расчетов уравнений (30), (37).

### 3. Гравитационное поле Керра – Ньюмена

Решение уравнений ОТО Керра – Ньюмена характеризуется точечным электрически заряженным источником гравитационного поля с массой  $M$  и зарядом  $Q$ , вращающимся с угловым моментом  $\mathbf{J} = M\mathbf{ca}$ .

#### 3.1. Метрика Керра – Ньюмена в координатах Бойера – Линдквиста $(t, r, \theta, \varphi)$

$$ds^2 = \left( 1 - \frac{r_0 r - r_Q^2}{\rho_k^2} \right) dt^2 + \frac{2a(r_0 r - r_Q^2)}{\rho_k^2} \sin^2 \theta dt d\varphi - \frac{\rho_k^2}{\Delta_{K-N}} dr^2 - \rho_k^2 d\theta^2 -$$

$$- \left( r^2 + a^2 + \frac{a^2(r_0 r - r_Q^2)}{\rho_k^2} \sin^2 \theta \right) \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (50)$$

В выражении (50) по сравнению с выражением для метрики Керра (6) присутствуют новые обозначения, связанные с присутствием электрического заряда  $Q$ :

$$r_Q = \frac{\sqrt{GQ}}{c^2}; \quad \Delta_{K-N} = r^2 f_{K-N} = r^2 \left( 1 - \frac{r_0}{r} + \frac{a^2}{r^2} + \frac{r_Q^2}{r^2} \right).$$

В соответствии с условием Гильберта ( $g_{00} > 0$ ) в метрике (50) подразумевается выполнение неравенства

$$\left( 1 - \frac{r_0 r - r_Q^2}{\rho_k^2} \right) > 0. \quad (51)$$

Равенство нулю выражения (51) определяет внешнюю и внутреннюю эргосферы поля Керра – Ньюмена.

#### 3.2. Разделение переменных, уравнения и асимптотика для радиальных волновых функций

Автор работы [16], используя подход Чандraseкара [10], провел разделение переменных в уравнении Дирака в поле Керра – Ньюмена с метрикой (50), используя двухкомпонентный спинорный формализм Пенроуза – Ньюмена [11] и единичную тетраду Kinnersley [12].

В результате уравнения для угловых функций  $S^{(-)}(\theta), S^{(+)}(\theta)$  остаются такими же, как и для поля Керра (см. (23)). Уравнения для радиальных функций  $R_{K-N}^{(-)}(r), R_{K-N}^{(+)}(r)$  имеют вид

$$\begin{aligned} \Delta_{K-N}^{1/2} \left( \frac{d}{dr} - i \frac{K_{K-N}}{\Delta_{K-N}} \right) R_{K-N}^{(-)}(r) &= \\ &= (\lambda + imr) R_{K-N}^{(+)}(r), \\ \Delta_{K-N}^{1/2} \left( \frac{d}{dr} + i \frac{K_{K-N}}{\Delta_{K-N}} \right) R_{K-N}^{(+)}(r) &= \\ &= (\lambda - imr) R_{K-N}^{(-)}(r). \end{aligned} \quad (52)$$

В уравнениях (52)

$$K_{K-N} = (r^2 + a^2) E - m_\varphi a + eQr.$$

Из системы уравнений (52) следует, что  $R_{K-N}^{(+)*}(r) = R_{K-N}^{(-)}(r)$ . Тогда для вещественных функций

$$\begin{aligned} g_1(r) &= R_{K-N}^{(-)}(r) + R_{K-N}^{(+)}(r), \\ f_1(r) &= -i \left( R_{K-N}^{(-)}(r) - R_{K-N}^{(+)}(r) \right). \end{aligned} \quad (53)$$

уравнения (52) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} f_{K-N} \frac{df_1}{dr} + \frac{\lambda \sqrt{f_{K-N}}}{r} f_1 - \\ - \left( E \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{m_\phi a}{r^2} + \frac{eQ}{r} + m \sqrt{f_{K-N}} \right) g_1 = 0, \\ f_{K-N} \frac{dg_1}{dr} + \frac{\lambda \sqrt{f_{K-N}}}{r} g_1 + \\ + \left( E \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{m_\phi a}{r^2} + \frac{eQ}{r} - m \sqrt{f_{K-N}} \right) f_1 = 0. \end{aligned} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} \left( 1 - \frac{\rho_{K-N}^+}{\rho} \right) \left( 1 - \frac{\rho_{K-N}^-}{\rho} \right) \frac{df_1}{d\rho} + \frac{\lambda \sqrt{\left( 1 - \frac{\rho_{K-N}^+}{\rho} \right) \left( 1 - \frac{\rho_{K-N}^-}{\rho} \right)}}{\rho} f_1 - \\ - \left( \varepsilon \left( 1 + \frac{\alpha_a^2}{\rho^2} \right) - \frac{m_\phi \alpha_a}{\rho^2} + \frac{\alpha_{em}}{\rho} + \sqrt{\left( 1 - \frac{\rho_{K-N}^+}{\rho} \right) \left( 1 - \frac{\rho_{K-N}^-}{\rho} \right)} \right) g_1 = 0, \\ \left( 1 - \frac{\rho_{K-N}^+}{\rho} \right) \left( 1 - \frac{\rho_{K-N}^-}{\rho} \right) \frac{dg_1}{d\rho} - \frac{\lambda \sqrt{\left( 1 - \frac{\rho_{K-N}^+}{\rho} \right) \left( 1 - \frac{\rho_{K-N}^-}{\rho} \right)}}{\rho} g_1 + \\ + \left( \varepsilon \left( 1 + \frac{\alpha_a^2}{\rho^2} \right) - \frac{m_\phi \alpha_a}{\rho^2} + \frac{\alpha_{em}}{\rho} - \sqrt{\left( 1 - \frac{\rho_{K-N}^+}{\rho} \right) \left( 1 - \frac{\rho_{K-N}^-}{\rho} \right)} \right) f_1 = 0. \end{aligned} \quad (61)$$

В уравнениях (54)

$$f_{K-N} = 1 - \frac{r_0}{r} + \frac{a^2 + r_Q^2}{r^2}. \quad (55)$$

Условие (51) обуславливает рассмотрение лишь положительных значений  $f_{K-N} > 0$ .

Первоначально рассмотрим случай, когда

$$r_0 \geq 2\sqrt{a^2 + r_Q^2}. \quad (56)$$

В этом случае  $f_{K-N}$  можно представить в виде

$$f_{K-N} = \left( 1 - \frac{r_{K-N}^+}{r} \right) \left( 1 - \frac{r_{K-N}^-}{r} \right), \quad (57)$$

где

$$r_{K-N}^\pm = \frac{r_0}{2} \pm \sqrt{\frac{r_0^2}{4} - a^2 - r_Q^2}. \quad (58)$$

Величины  $r_{K-N}^\pm$  являются внешними и внутренними радиусами «горизонтов событий» поля Керра–Ньюмена.

В безразмерных переменных  $\varepsilon = \frac{E}{m}$ ;  $\rho = \frac{r}{l_c}$ ;

$$2\alpha = \frac{r_0}{l_c} = \frac{2GMm}{\hbar c}; \quad \alpha_Q = \frac{r_Q}{l_c} = \frac{\sqrt{G}Qm}{\hbar c}; \quad \alpha_{em} = \frac{eQ}{\hbar c}$$

выражения (57), (58) можно представить в виде

$$f_{K-N} = \left( 1 - \frac{\rho_{K-N}^+}{\rho} \right) \left( 1 - \frac{\rho_{K-N}^-}{\rho} \right), \quad (59)$$

$$\rho_{K-N}^\pm = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \alpha_a^2 - \alpha_Q^2}. \quad (60)$$

Уравнения (54) в безразмерных переменных имеют вид

Как и для поля Керра, в соответствии с условием (51) область определения волновых функций  $f_1(\rho), g_1(\rho)$  в уравнениях (61) является пространством  $(\rho, \theta, \phi)$  с радиусами большими, чем радиусы поверхности внешней эргосферы и с радиусами  $\rho(\theta)$  меньшими, чем радиусы поверхности внутренней эргосферы поля Керра–Ньюмена.

Асимптотическое поведение радиальных волновых функций для финитного движения по своей структуре такое же, как и для поля Керра.

При  $\rho \rightarrow \infty$

$$f_1 = C e^{-\rho \sqrt{1-\varepsilon^2}}, \quad (62)$$

$$g_1 = -\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}} f_1.$$

При  $\rho \rightarrow \rho_{K-N}^+$  ( $\rho > \rho_{K-N}^+$ )

$$f_1 = A \sin \left( M_{K-N}^+ \ln(\rho - \rho_{K-N}^+) + \Phi_{K-N}^+ \right), \quad (63)$$

$$g_1 = A \cos \left( M_{K-N}^+ \ln(\rho - \rho_{K-N}^+) + \Phi_{K-N}^+ \right),$$

где

$$M_{K-N}^+ = \frac{(\rho_{K-N}^+)^2}{2\sqrt{\alpha^2 - \alpha_a^2 - \alpha_Q^2}} \times \left[ \varepsilon \left( 1 + \frac{\alpha_a^2}{(\rho_{K-N}^+)^2} \right) - \frac{m_\varphi}{(\rho_{K-N}^+)^2} + \frac{\alpha_{em}}{\rho_{K-N}^+} \right]. \quad (64)$$

При  $\rho \rightarrow \rho_{K-N}^-$  ( $\rho < \rho_{K-N}^-$ )

$$f_1 = B \cos \left( M_{K-N}^- \ln(\rho_{K-N}^- - \rho) + \Phi_{K-N}^- \right), \quad (65)$$

$$g_1 = B \sin \left( M_{K-N}^- \ln(\rho_{K-N}^- - \rho) + \Phi_{K-N}^- \right),$$

где

$$M_{K-N}^- = \frac{(\rho_{K-N}^-)^2}{2\sqrt{\alpha^2 - \alpha_a^2 - \alpha_Q^2}} \times \left[ \varepsilon \left( 1 + \frac{\alpha_a^2}{(\rho_{K-N}^-)^2} \right) - \frac{m_\varphi}{(\rho_{K-N}^-)^2} + \frac{\alpha_{em}}{\rho_{K-N}^-} \right]. \quad (66)$$

При  $\rho \rightarrow 0$  система уравнений (61) сводится к уравнениям:

$$\frac{df_1}{d\rho} + \frac{\lambda(\rho)}{\sqrt{\alpha_a^2 + \alpha_Q^2}} f_1 + \left( \varepsilon \frac{\alpha_a^2}{\alpha_a^2 + \alpha_Q^2} - \frac{m_\varphi \alpha_a}{\alpha_a^2 + \alpha_Q^2} \right) g_1 = 0, \quad (67)$$

$$\frac{dg_1}{d\rho} - \frac{\lambda(\rho)}{\sqrt{\alpha_a^2 + \alpha_Q^2}} g_1 + \left( \varepsilon \frac{\alpha_a^2}{\alpha_a^2 + \alpha_Q^2} - \frac{m_\varphi \alpha_a}{\alpha_a^2 + \alpha_Q^2} \right) f_1 = 0.$$

Зависимость  $\lambda(\rho)$  при  $\rho \rightarrow 0$  должна определяться из решения угловых уравнений (23) с соответствующими граничными условиями, определяемыми выполнением неравенства (51).

В (62), (63), (65) величины  $C, A, B, \Phi_{K-N}^+, \Phi_{K-N}^-$  – постоянные интегрирования.

Как и в случае полей Шварцшильда [4, 5], Райсснера–Нордстрёма [6] и Керра (см. (40)–(43)) осциллирующие функции  $f_1$  и  $g_1$  плохо определены на внешнем и внутреннем «горизонте событий» и расходятся при  $\rho \rightarrow \rho_{K-N}^+$  ( $\rho > \rho_{K-N}^+$ ) и при  $\rho \rightarrow \rho_{K-N}^-$  ( $\rho < \rho_{K-N}^-$ ). Для обеспечения квадратичной интегрируемости рассматриваемых

функций и в соответствии с условием (51) необходимо сужение их области определения до интервала  $\left[ (\rho_{K-N}^+)^{\min}, \infty \right)$ , где  $(\rho_{K-N}^+)^{\min} > \rho_{K-N}^+$  и до интервала  $\left( 0, (\rho_{K-N}^-)^{\max} \right]$ , где  $(\rho_{K-N}^-)^{\max} < \rho_{K-N}^-$ .

Эрмитовость дираковского гамильтониана в поле Керра–Ньюмена обосновывается так же как и для поля Керра ((п. 2.4) данной работы, см. также [2, 17]).

Граничные условия для волновых функций определяются также, как и для поля Керра (п. 2.4).

В результате можно заключить, что система уравнений (61) имеет стационарный, вещественный энергетический спектр. Численные величины этого спектра и вид волновых функций будут определены позднее в численных расчетах.

### 3.3. Экстремальное поле Керра – Ньюмена и «голая» сингулярность

Экстремальное поле реализуется при  $\alpha = \sqrt{\alpha_a^2 + \alpha_Q^2}$  ( $\frac{r_0}{2} = \sqrt{a^2 + r_Q^2}$ ). В этом случае внешний и внутренний «горизонты событий» совпадают, их радиус равен

$$\rho_{K-N}^+ = \rho_{K-N}^- = \alpha. \quad (68)$$

Радиусы поверхностей внешней и внутренней эргосфер равны

$$(r_{erg})_{1,2} = \frac{r_0}{2} \left( 1 \pm \frac{2a}{r_0} \sin \theta \right). \quad (69)$$

Для рассматриваемого случая система уравнений (61) сводится к виду

$$\begin{aligned} & \left( 1 - \frac{\alpha}{\rho} \right)^2 \frac{df_1}{d\rho} + \frac{\lambda \left| 1 - \frac{\alpha}{\rho} \right|}{\rho} f_1 - \\ & - \left( \varepsilon \left( 1 + \frac{\alpha_a^2}{\rho^2} \right) - \frac{m_\varphi \alpha_a}{\rho^2} + \frac{\alpha_{em}}{\rho} + \left| 1 - \frac{\alpha}{\rho} \right| \right) g_1 = 0, \\ & \left( 1 - \frac{\alpha}{\rho} \right)^2 \frac{dg_1}{d\rho} - \frac{\lambda \left| 1 - \frac{\alpha}{\rho} \right|}{\rho} g_1 + \\ & + \left( \varepsilon \left( 1 + \frac{\alpha_a^2}{\rho^2} \right) - \frac{m_\varphi \alpha_a}{\rho^2} + \frac{\alpha_{em}}{\rho} - \left| 1 - \frac{\alpha}{\rho} \right| \right) f_1 = 0. \end{aligned} \quad (70)$$

Волновые функции определены в интервале  $\rho \in (0, \infty)$  за исключением окрестности около «горизонта событий». Поведение волновых функций вблизи «горизонта событий» имеет вид:

при  $\rho \rightarrow \alpha$  ( $\rho > \alpha$ )

$$f_1(\rho) = -A \sin \times$$

$$\times \left[ \alpha^2 \left( \varepsilon + \frac{\varepsilon \alpha_a^2}{\alpha^2} - \frac{m_\phi \alpha_a}{\alpha^2} + \frac{\alpha_{em}}{\alpha} \right) \frac{1}{\rho - \alpha} + \Phi_{K-N}^+ \right],$$

$$g_1(\rho) = A \cos \times$$

$$\times \left[ \alpha^2 \left( \varepsilon + \frac{\varepsilon \alpha_a^2}{\alpha^2} - \frac{m_\phi \alpha_a}{\alpha^2} + \frac{\alpha_{em}}{\alpha} \right) \frac{1}{\rho - \alpha} + \Phi_{K-N}^+ \right];$$

при  $\rho \rightarrow \alpha$  ( $\rho < \alpha$ )

$$f_1(\rho) = B \cos \times$$

$$\times \left[ \alpha^2 \left( \varepsilon + \frac{\varepsilon \alpha_a^2}{\alpha^2} - \frac{m_\phi \alpha_a}{\alpha^2} + \frac{\alpha_{em}}{\alpha} \right) \frac{1}{\alpha - \rho} + \Phi_{K-N}^- \right],$$

$$g_1(\rho) = -B \sin \times$$

$$\times \left[ \alpha^2 \left( \varepsilon + \frac{\varepsilon \alpha_a^2}{\alpha^2} - \frac{m_\phi \alpha_a}{\alpha^2} + \frac{\alpha_{em}}{\alpha} \right) \frac{1}{\alpha - \rho} + \Phi_{K-N}^- \right].$$

Система уравнений (70) с граничными условиями, обсужденными в п. 2.4, обладает дискретным стационарным вещественным спектром для дираковских частиц, находящихся либо над поверхностью внешней эргосферы, либо под поверхностью внутренней эргосферы поля Керра–Ньюмена. Поверхности внешней и внутренней эргосфер играют роль бесконечно больших потенци-

альных барьеров, запрещающих квантово-механическим частицам со спином  $\frac{1}{2}$  пересекать их с любой стороны.

Случай «голой» сингулярности реализуется при  $\alpha < \sqrt{\alpha_a^2 + \alpha_Q^2}$  ( $\frac{r_0}{2} < \sqrt{a^2 + r_Q^2}$ ).

В этом случае внешний и внутренний «горизонты событий» исчезают, величины  $\rho_{K-N}^+$  и  $\rho_{K-N}^-$  становятся комплексными числами.

Как уже отмечалось в п. 2.5, анализ уровней энергии дираковских частиц в случае «голой» сингулярности поля Керра–Ньюмена требует специального рассмотрения, связанного с проведением численных расчетов решения уравнений (54), (61) с соответствующими граничными условиями.

На рис. 1, 2 в координатах  $\left( r' = \frac{2r}{r_0}, \theta \right)$  приведены области определения волновых функций уравнения Дирака в полях Керра и Керра–Ньюмена при некоторых значениях  $a' = \frac{2a}{r_0}$  и  $r_Q' = \frac{2r_Q}{r_0}$ .

Цветом указаны области, где из-за условия Гильберта  $g_{00} > 0$  волновые функции должны быть равны нулю.

Цветными жирными линиями показаны внешние и внутренние поверхности эргосфер.

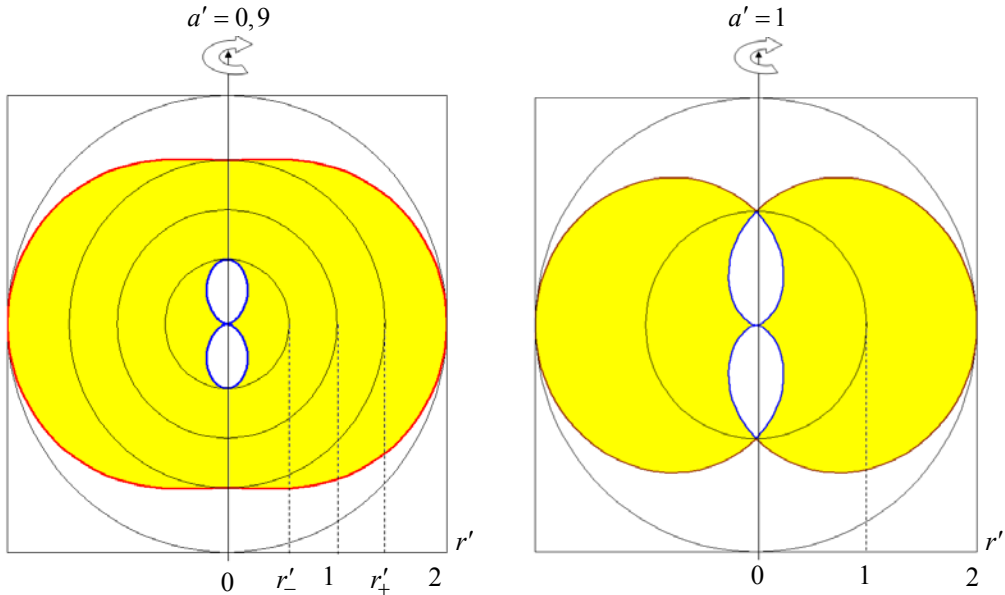


Рис. 1. Области определения волновых функций уравнения Дирака в поле Керра для некоторых значений  $a' = \frac{2a}{r_0}$  (см. также с. 14)

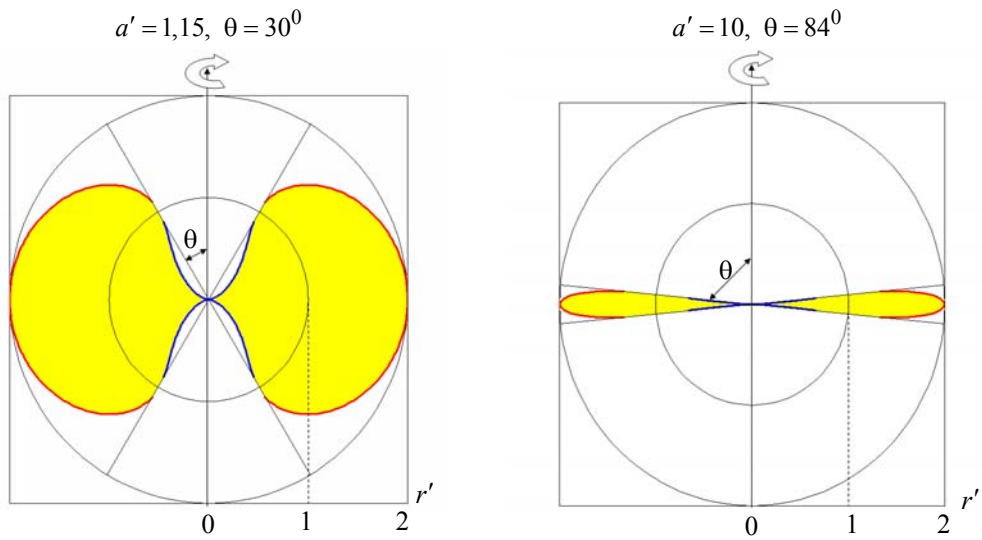


Рис. 1. Окончание

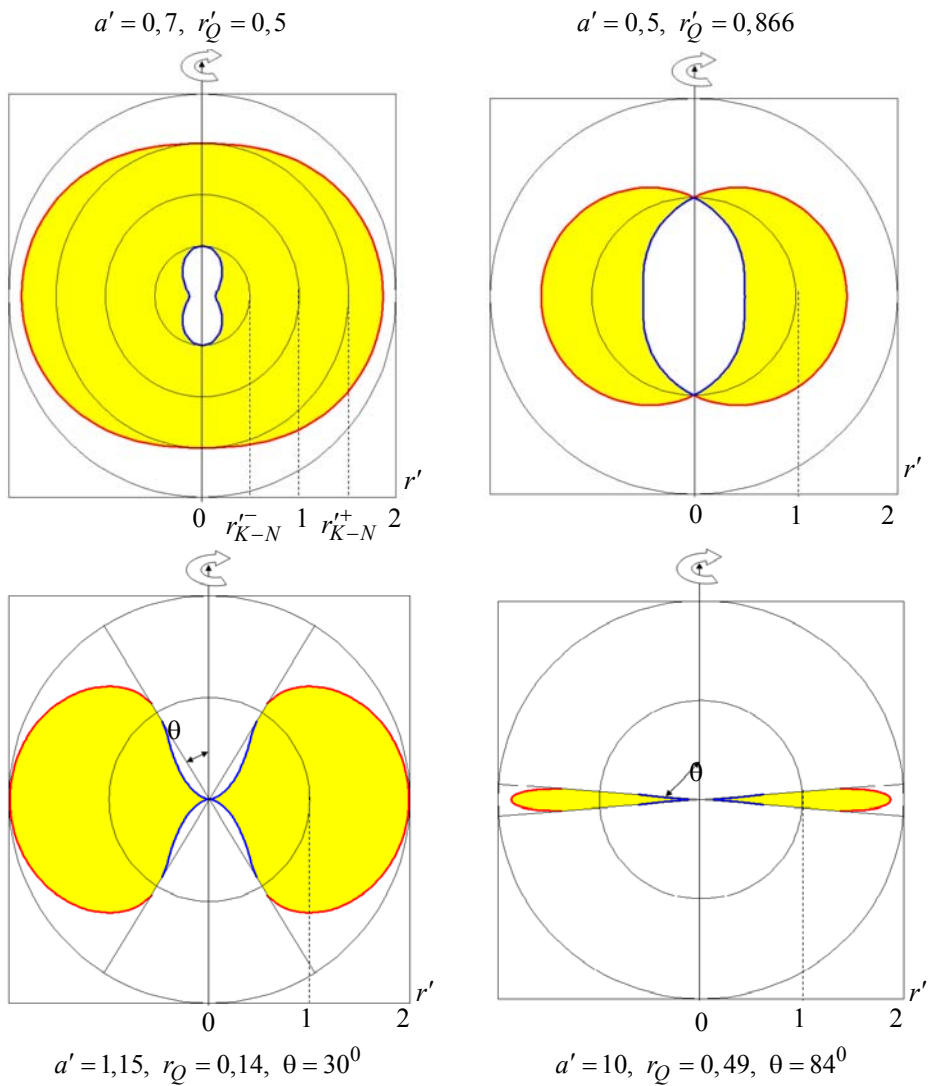


Рис. 2. Области определения волновых функций в поле Керра – Ньюмена

для некоторых значений  $a' = \frac{2a}{r_0}$ ,  $a'_Q = \frac{2r_Q}{r_0}$

## Заклучение

По результатам данной работы можно сделать следующие выводы:

1. Для метрик Керра и Керра–Ньюмена показана возможность существования стационарных связанных состояний частиц со спином  $1/2$ .

2. Связанные состояния с вещественным энергетическим спектром могут существовать для дираковских частиц, находящихся как над поверхностями внешних эргосфер, так и под поверхностями внутренних эргосфер полей Керра и Керра–Ньюмена.

3. Поверхности внешних и внутренних эргосфер при соблюдении условия Гильберта ( $g_{00} > 0$ ) проявляют себя в роли бесконечно больших потенциальных барьеров, лишаящих возможности их пересечения квантово-механическими дираковскими частицами.

4. Волновая функция частиц со спином  $\frac{1}{2}$  в области между поверхностями внешних и внутренних эргосфер равна нулю.

Отсюда следует, что возможно существование вращающихся коллапсаров нового типа.

Эти коллапсары:

– инертные (дираковские частицы не могут пересекать поверхности внешней и внутренних эргосфер);

– не излучают по Хокингу [7] (излучение Хокинга требует существования волновой функции (операторов поля Дирака) в объеме между поверхностями внешних и внутренних эргосфер [18–25]);

– по крайней мере при  $\alpha \geq \sqrt{\alpha_a^2 + \alpha_Q^2} \left( \frac{r_0}{2} \geq \sqrt{a^2 + r_Q^2} \right)$  обеспечивают существование стационарных связанных состояний дираковских частиц над внешними и под внутренними поверхностями эргосфер полей Керра и Керра–Ньюмена.

Таким образом, результаты данной работы и работ [4–6] могут быть полезными в совершенствовании некоторых аспектов стандартной космологической модели, связанных с эволюцией Вселенной и с взаимодействием вращающихся коллапсаров с окружающей средой.

Авторы благодарят за большую техническую помощь в подготовке работы А. Л. Новоселову, Ю. В. Петрова.

## Список литературы

1. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. // Phys. Rev. 2010. Vol. D82. P. 104056; arxiv: 1007.4631v1 (gr-qc).
2. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. // Phys. Rev. 2011. Vol. D83. P. 105002; arxiv: 1102.4067v1 (gr-qc).
3. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. arxiv: 1107.0844 (gr-qc).
4. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. arxiv: 1205.4348 (gr-qc).
5. Вронский М. А., Горбатенко М. В., Колесников Н. С., Незнамов В. П., Попов Е. Ю., Сафронов И. И. arxiv: 1301.7595 (gr-qc).
6. Горбатенко М. В., Незнамов В. П. arxiv: 1302.2557 (gr-qc).
7. Hawking S. W. // Commun. math. Phys. 1975. Vol. 43. P. 199–220.
8. Kerr R.P. // Phys. Rev. Lett. 1963. Vol. 11. P. 237.
9. Newman E. T., Couch E., Chinnapared K., Exton A., Prakash A. and Torrence R. // J.Math.Phys. 1965. Vol. 6. P. 918.
10. Chandrasekhar S. // Proc. Roy. Soc (London). 1976. Vol. A349. P. 571.
11. Newman E. T., Penrose R. // J.Math.Phys. 1962. Vol. 3. P. 566.
12. Kinnersley W. // J.Math.Phys. 1969. Vol. 10. P. 1195.
13. Ternov I. M., Gaina A. B., Chizhov G. A. // Sov. Phys. J. 1980. Vol. 23. P. 695–700.
14. Dolan S. R. Trinity Hall and Astrophysics Group, Cavendish Laboratory. Dissertation, 2006.
15. Parker L. // Phys. Rev. 1980. Vol. D22. P. 1922.
16. Page D. // Phys. Rev. 1976. Vol. D14. P. 1509.
17. Batic D., Schmid H. arxiv: gr-qc/0606050.
18. Srinivasan K., Padmanabhan T. // Phys. Rev. 1999. Vol. D60. P. 024007. [gr-qc/9812028].
19. Shankaranarayanan S., Srinivasan K., Padmanabhan T. // Mod. Phys. Lett. 2001. Vol. A16. P. 571–578. [gr-qc/0007022].



20. Shankaranarayanan S., Padmanabhan T., Srinivasan K. // *Class. Quant. Grav.* 2002. Vol. 19. P. 2671–2688. [gr-qc/0010042].
21. Parikh M. K., Wilczek F. // *Phys. Rev. Lett.* 2000. Vol. 85. P. 5042. [arXiv:hep-th/9907001].
22. Vagenas E. C. // *Phys. Lett.* 2002. Vol. B533. P. 302. [hep-th/0109108].
23. Robinson S. P., Wilczek F. // *Phys. Rev. Lett.* 2005. Vol. 95. P. 011303. [arXiv:gr-qc/0502074].
24. Vagenas E. C., Das S. *JHEP* 0610:025 (2006) [hep-th/0606077].
25. Zampeli A., Singleton D., Vagenas E. C., arXiv: [gr-qc] 1206.0879v1.

Статья поступила в редакцию 04.04.2013

## СТАЦИОНАРНЫЕ СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ ЧАСТИЦ СО СПИНОМ $\frac{1}{2}$ В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ РАЙССНЕРА – НОРДСТРЕМА

М. В. Горбатенко, В. П. Незнамов<sup>1</sup>

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, Саров Нижегородской обл.

Для гравитационного поля Райсснера–Нордстрёма с использованием самосопряженного гамильтониана с плоским скалярным произведением волновых функций впервые обоснована возможность существования стационарных связанных состояний пробных частиц со спином  $\frac{1}{2}$ . Связанные состояния дираковских частиц с вещественным дискретным энергетическим спектром возможны как для частиц, находящихся вне внешнего «горизонта событий», так и для частиц, находящихся под внутренним «горизонтом событий» – горизонтом Коши. Для получения дискретного энергетического спектра введено граничное условие, при котором компоненты вектора плотности тока рассматриваемых дираковских частиц равны нулю вблизи «горизонтов событий». По результатам работы можно сделать предположение о существовании нового типа заряженных коллапсаров, для которых отсутствует механизм излучения по Хокингу. Результаты работы могут привести к корректировке некоторых аспектов стандартной космологической модели, связанных с эволюцией Вселенной и с взаимодействием заряженных коллапсаров с окружающей средой.

*Ключевые слова:* уравнение Дирака, гравитационное поле Райсснера–Нордстрёма, стационарные связанные состояния, самосопряженные гамильтонианы, дискретный энергетический спектр.

### 1. Введение

Авторами в работах [1–3] с помощью методов псевдоэрмитовой квантовой механики для произвольных внешних гравитационных полей, в том числе зависящих от времени, разработан алгоритм получения самосопряженных дираковских гамильтонианов с плоским скалярным произведением волновых функций.

Из одночастичной квантовой механики следует, что при существовании эрмитовости гамильтониана, при наличии квадратично интегрируемых волновых функций и при установлении соответствующих граничных условий самосопряженные гамильтонианы, не зависящие от времени, должны обеспечивать существование стационарных связанных состояний частиц с вещественным энергетическим спектром.

В работах [4, 5] для гравитационного поля Шварцшильда с использованием самосопряженного гамильтониана с плоским скалярным произведением волновых функций для любых значений

гравитационной константы связи впервые получены стационарные связанные состояния частиц со спином  $\frac{1}{2}$ , не распадающиеся со временем. Для получения дискретного энергетического спектра введено граничное условие, при котором компоненты вектора плотности тока частиц равны нулю вблизи «горизонта событий».

При квантово-механическом рассмотрении «горизонт событий» является фактически бесконечно большим потенциальным барьером, который лишает возможности пересекать его пробными дираковскими частицам. Этим же свойством обладают метрики Шварцшильда в изотропных [6] и гармонических [7] координатах.

В настоящей работе по аналогии с работами [4, 5] проводится анализ возможности существования стационарных связанных состояний дираковских частиц в гравитационном поле Райсснера–Нордстрёма [8, 9]. В результате анализа делается вывод, что связанные состояния частиц со спином  $\frac{1}{2}$  с вещественным энергетическим спектром могут существовать как вне внешнего «горизонта событий», так и под внутренним «горизонтом событий» – горизонтом Коши. Результаты

<sup>1</sup> E-mail: [neznamov@vniief.ru](mailto:neznamov@vniief.ru)

численного определения энергетического спектра и радиальных волновых функций будут приведены в следующей работе.

Данная работа построена следующим образом. В разделах 2, 3 определяется вид самосопряженного дираковского гамильтониана в поле Райсснера–Нордстрёма. В разделах 4, 5 проводится разделение переменных, определяются уравнения и асимптотика для радиальных волновых функций. В разделах 6–8 определяется плотность тока дираковских частиц, доказываемся эрмитовость гамильтониана и вводятся граничные условия вблизи «горизонтов событий». В разделе 9 обсуждается случай экстремального поля Райсснера–Нордстрёма и случай голой сингулярности. В Заключение приведены основные выводы проведенного анализа.

## 2. Метрика Райсснера – Нордстрёма

Решение уравнений ОТО Райсснера–Нордстрёма характеризуется точечным сферически-симметричным источником гравитационного поля с массой  $M$  и электрического поля с зарядом  $Q$ . Метрика Райсснера–Нордстрёма является диагональной

$$ds^2 = -f_{R-N} dt^2 + \frac{dr^2}{f_{R-N}} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (1)$$

В формуле (1)  $g_{00} = -f_{R-N}$ ;  $g^{00} = -\frac{1}{f_{R-N}}$ ;

$$f_{R-N} = \left(1 - \frac{r_0}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right); r_0 = \frac{2GM}{c^2}; r_Q = \frac{\sqrt{GQ}}{c^2}, M, Q -$$

масса и заряд точечного источника гравитационного и электрического полей.

Условие Гильберта  $(-g_{00}) > 0$  приводит к необходимости рассмотрения лишь положительных значений  $f_{R-N} > 0$ .

## 3. Самосопряженный гамильтониан частиц со спином $\frac{1}{2}$ в поле Райсснера – Нордстрёма

Ниже будем использовать систему единиц  $\hbar = c = 1$  и обозначения  $\gamma^\alpha, \gamma^\beta$  соответственно для мировых и локальных матриц Дирака.

Общий вид гамильтониана во внешнем гравитационном и электромагнитном полях для дираковской частицы с массой  $m$ , зарядом  $(-e)$  и с

диагональными тетрадами в калибровке Швингера можно записать в виде [10]

$$\tilde{H} = -\frac{im}{(-g^{00})} \tilde{\gamma}^0 + \frac{i}{(-g^{00})} \tilde{\gamma}^0 \tilde{\gamma}^k \frac{\partial}{\partial x^k} - i(\tilde{\Phi}_0 - ieA_0) + \frac{i}{(-g^{00})} \tilde{\gamma}^0 \tilde{\gamma}^k (\tilde{\Phi}_k - ieA_k). \quad (2)$$

В выражении (2) знак  $\sim$  над определенными величинами означает, что они вычисляются с использованием тетрад в калибровке Швингера; через  $\tilde{\Phi}_\mu$  и  $A_\mu$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ) обозначены соответственно биспинорные связности и вектор-потенциал внешнего электромагнитного поля;  $\tilde{\gamma}^\mu$  – мировые матрицы Дирака. Величины  $\tilde{\gamma}^\mu$  связаны через тетрады с локальными матрицами Дирака  $\gamma^\beta$  ( $\tilde{\gamma}^\mu = \tilde{H}^\mu_\beta \gamma^\beta$ ).

Ненулевые тетрады в калибровке Швингера для рассматриваемой метрики (1) равны

$$H_0^0 = \frac{1}{\sqrt{f_{R-N}}}; H_1^1 = \sqrt{f_{R-N}}; H_2^2 = \frac{1}{r}; \quad (3)$$

$$H_3^3 = \frac{1}{r \sin \theta}.$$

Авторы в работе [3] доказали, что для диагональных метрик самосопряженный гамильтониан в  $\eta$ -представлении с плоским скалярным произведением волновых функций можно получить из выражения

$$H_\eta = \frac{1}{2} (\tilde{H}_{red} + \tilde{H}_{red}^+), \quad (4)$$

где через  $\tilde{H}_{red}$  обозначена сокращенная часть гамильтониана (2) без биспинорных связностей  $\tilde{\Phi}_\mu$ .

$$\tilde{H}_{red} = \tilde{H} + i\tilde{\Phi}_0 - \frac{i}{(-g^{00})} \tilde{\gamma}^0 \tilde{\gamma}^k \tilde{\Phi}_k. \quad (5)$$

Учитывая, что для метрики Райсснера–Нордстрёма  $A_k = 0$ ,  $A_0 = \frac{Q}{r}$ , и принимая во внимание

(3)–(5), можно получить следующее выражение для гамильтониана  $H_\eta = H_\eta^+$

$$H_\eta = im\sqrt{f_{R-N}}\gamma_0 - i\gamma_0\gamma_1 \left( f_{R-N} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} - \frac{r_0}{2r^2} \right) - i\sqrt{f_{R-N}} \frac{1}{r} \times$$

$$\times \left[ \gamma_0\gamma_2 \left( \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \text{ctg} \theta \right) + \gamma_0\gamma_3 \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] + \frac{eQ}{r}. \quad (6)$$

Волновая функция уравнения Дирака с гамильтонианом (6)  $\psi_\eta$  связана с начальной функцией  $\tilde{\psi}$  преобразованием подобия [1–3].

$$\psi_\eta = \eta^{-1} \tilde{\psi}. \quad (7)$$

Для метрики Райсснера–Нордстрёма

$$\eta = (-g^{00})^{1/4} = f_{R-N}^{-1/4}. \quad (8)$$

#### 4. Разделение переменных

Выражение в квадратных скобках для гамильтониана (6) зависит только от угловых координат, остальные слагаемые зависят только от радиальной координаты. Отсюда видно, что разделение переменных в уравнении Дирака с гамильтонианом (6) можно производить таким же образом, как и для поля Шварцшильда [4, 5] с заменой  $f \rightarrow f_{R-N}$ ;  $E \rightarrow E + \frac{eQ}{r}$ .

Для разделения переменных определим биспинор  $\psi_\eta(\mathbf{r}, t)$  в виде

$$\psi_\eta(r, \theta, \varphi, t) = \begin{pmatrix} F(r) & \xi(\theta) \\ -iG(r) & \sigma^3 \xi(\theta) \end{pmatrix} e^{im_\varphi \varphi} e^{-iEt} \quad (9)$$

и используем следующее уравнение (см., например, [11]):

$$\left[ -\sigma^2 \left( \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \theta \right) + i\sigma^1 m_\varphi \frac{1}{\sin \theta} \right] \xi(\theta) = i\kappa \xi(\theta). \quad (10)$$

В равенствах (9), (10)  $\xi(\theta)$  – сферические гармоники для спина  $1/2$ ,  $\sigma^i$  – двумерные матрицы Паули,  $m_\varphi$  – магнитное квантовое число,  $\kappa$  – квантовое число уравнения Дирака:

$$\kappa = \pm 1, \pm 2, \dots = \begin{cases} -(l+1), & j = l + 1/2, \\ l, & j = l - 1/2. \end{cases} \quad (11)$$

В формуле (11)  $j, l$  – квантовые числа полного и орбитального момента дираковской частицы соответственно.

$\xi(\theta)$  можно представить в виде [12]:

$$\xi(\theta) = \begin{pmatrix} -1/2 Y_{jm_\varphi}(\theta) \\ 1/2 Y_{jm_\varphi}(\theta) \end{pmatrix} = (-1)^{m_\varphi + 1/2} \sqrt{\frac{1}{4\pi} \frac{(j - m_\varphi)!}{(j + m_\varphi)!}} \times \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left( \kappa - m_\varphi + \frac{1}{2} \right) P_l^{m_\varphi - 1/2}(\theta) \\ P_l^{m_\varphi + 1/2}(\theta) \end{pmatrix}. \quad (12)$$

В выражении (12)  $P_l^{m_\varphi \pm 1/2}(\theta)$  – присоединенные полиномы Лежандра.

В результате разделения переменных при  $f_{R-N} > 0$  получаем уравнения для вещественных радиальных функций  $F(r), G(r)$ .

#### 5. Уравнения и асимптотика для радиальных волновых функций

Система уравнений для функций  $F(r), G(r)$  имеет вид

$$\begin{aligned} f_{R-N} \frac{dF}{dr} + \left( \frac{1 + \kappa \sqrt{f_{R-N}}}{r} - \frac{r_0}{2r^2} \right) F - \\ - \left( E + \frac{eQ}{r} + m \sqrt{f_{R-N}} \right) G = 0, \\ f_{R-N} \frac{dG}{dr} + \left( \frac{1 - \kappa \sqrt{f_{R-N}}}{r} - \frac{r_0}{2r^2} \right) G + \\ + \left( E + \frac{eQ}{r} - m \sqrt{f_{R-N}} \right) F = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

В соответствии с метрикой (1) рассматриваем лишь положительные значения  $f_{R-N}$ . В этом случае функции  $F(r), G(r)$  являются вещественными.

Введем безразмерные переменные  $\varepsilon = \frac{E}{m}$ ;  $\rho = \frac{r}{l_C}$ ;  $\frac{r_0}{l_C} = \frac{2GMm}{\hbar c} = 2\alpha$ ;  $\alpha_Q = \frac{r_Q}{l_C} = \frac{\sqrt{G}Qm}{\hbar c}$ ;  $\alpha_{em} = \frac{eQ}{\hbar c}$ .

Величину  $f_{R-N}$  можно представить в виде

$$f_{R-N} = \left( 1 - \frac{\rho_+}{\rho} \right) \left( 1 - \frac{\rho_-}{\rho} \right), \quad (14)$$

где

$$\rho_+ = \alpha + \sqrt{\alpha^2 - \alpha_Q^2}, \quad (15)$$

$$\rho_- = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - \alpha_Q^2}. \quad (16)$$

Уравнения (13) в безразмерных переменных имеют вид

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\rho_+}{\rho}\right)\left(1 - \frac{\rho_-}{\rho}\right) \frac{dF}{d\rho} + \left[ \frac{1 + \kappa \sqrt{\left(1 - \frac{\rho_+}{\rho}\right)\left(1 - \frac{\rho_-}{\rho}\right)}}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right] F - \left[ \varepsilon + \frac{\alpha_{em}}{\rho} + \sqrt{\left(1 - \frac{\rho_+}{\rho}\right)\left(1 - \frac{\rho_-}{\rho}\right)} \right] G = 0, \\ \left(1 - \frac{\rho_+}{\rho}\right)\left(1 - \frac{\rho_-}{\rho}\right) \frac{dG}{d\rho} + \left[ \frac{1 - \kappa \sqrt{\left(1 - \frac{\rho_+}{\rho}\right)\left(1 - \frac{\rho_-}{\rho}\right)}}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right] G + \left[ \varepsilon + \frac{\alpha_{em}}{\rho} - \sqrt{\left(1 - \frac{\rho_+}{\rho}\right)\left(1 - \frac{\rho_-}{\rho}\right)} \right] F = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Поскольку подкоренные выражения в уравнениях (17) положительны лишь при  $\rho > \rho_+$  и  $\rho < \rho_-$ , то волновые функции  $F(\rho), G(\rho)$  определены на интервалах  $\rho \in [0, \rho_-)$  и  $\rho \in (\rho_+, \infty)$ . В области  $\rho_- \leq \rho \leq \rho_+$  волновые функции равны нулю. Величины  $\rho_+$  и  $\rho_-$  являются радиусами внешнего и внутреннего «горизонтов событий».

Если заряд  $Q = 0$  ( $\alpha_Q = 0$ ), то  $\rho_+ = 2\alpha$ ;  $\rho_- = 0$  и система (17) будет совпадать с системой радиальных уравнений для поля Шварцшильда с одним «горизонтом событий» ( $r = r_0$  или  $\rho = 2\alpha$ ).

Рассмотрим асимптотику волновых функций  $F(\rho), G(\rho)$  при  $\rho \rightarrow \infty$ ;  $\rho \rightarrow \rho_+$  ( $\rho > \rho_+$ );  $\rho \rightarrow \rho_-$  ( $\rho < \rho_-$ );  $\rho \rightarrow 0$ .

При  $\rho \rightarrow \infty$  асимптотическое поведение волновых функций для финитного движения является стандартным для центрально-симметричных гравитационных полей [4, 5], [12].

При  $\rho \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} F &= C e^{-\rho \sqrt{1 - \varepsilon^2}}; \\ G &= -\sqrt{\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}} F. \end{aligned} \quad (18)$$

При  $\rho \rightarrow \rho_+$  ( $\rho > \rho_+$ )

$$\begin{aligned} F &= \frac{A}{\sqrt{\rho - \rho_+}} \sin(M_+ \ln(\rho - \rho_+) + \varphi_+), \\ G &= \frac{A}{\sqrt{\rho - \rho_+}} \cos(M_+ \ln(\rho - \rho_+) + \varphi_+). \end{aligned} \quad (19)$$

В выражении (19)

$$M_+ = \frac{\rho_+^2}{2\sqrt{\alpha^2 - \alpha_Q^2}} \left( \varepsilon + \frac{\alpha_{em}}{\rho_+} \right). \quad (20)$$

При  $\rho \rightarrow \rho_-$  ( $\rho < \rho_-$ )

$$\begin{aligned} F &= \frac{B}{\sqrt{\rho_- - \rho}} \cos(M_- \ln(\rho_- - \rho) + \varphi_-), \\ G &= \frac{B}{\sqrt{\rho_- - \rho}} \sin(M_- \ln(\rho_- - \rho) + \varphi_-). \end{aligned} \quad (21)$$

В формуле (21)

$$M_- = \frac{\rho_-^2}{2\sqrt{\alpha^2 - \alpha_Q^2}} \left( \varepsilon + \frac{\alpha_{em}}{\rho_-} \right). \quad (22)$$

При  $\rho \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} F &= C_1 e^{\frac{(\alpha - \kappa \alpha_Q)}{\alpha_Q^2} \rho}, \\ G &= C_2 e^{\frac{(\alpha + \kappa \alpha_Q)}{\alpha_Q^2} \rho}. \end{aligned} \quad (23)$$

В соотношениях (18), (19), (21), (23)  $C, A, B, \varphi_+, \varphi_-, C_1, C_2$  являются постоянными интегрирования.

Как и в случае поля Шварцшильда осциллирующие функции  $F$  и  $G$  плохо определены на внешнем и внутреннем «горизонтах событий» и расходятся при  $\rho \rightarrow \rho_+$  ( $\rho > \rho_+$ ) или при  $\rho \rightarrow \rho_-$  ( $\rho < \rho_-$ ). Для обеспечения квадратичной интегрируемости рассматриваемых функций необходимо сужение их области определения до интервала  $[\rho_+^{\min}, \infty)$ , где  $\rho_+^{\min} > \rho_+$ , и до интервала  $[0, \rho_-^{\max}]$ , где  $\rho_-^{\max} < \rho_-$ .

## 6. Плотность тока дираковских частиц

По определению плотность тока равна

$$j_\mu = \Psi^\dagger \gamma_0 \gamma^\mu \Psi. \quad (24)$$

Для поля Райсснера–Нордстрёма и тетрадь в калибровке Швингера (3)

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= f_{R-N}^{-1/2} \gamma^0, \quad \gamma^1 = f_{R-N}^{1/2} \gamma^1, \quad \gamma^2 = \frac{1}{r} \gamma^2, \\ \gamma^3 &= \frac{1}{r \sin \theta} \gamma^3. \end{aligned} \quad (25)$$

После перехода в  $\eta$ -представление [1–3], в котором представлен гамильтониан (6), получаем

$$\tilde{\Psi} = \eta^{-1} \Psi_\eta; \quad \eta = (-g^{00})^{1/4} = (f_{R-N})^{-1/4}. \quad (26)$$

Если использовать функции (9) в виде

$$\Psi_\eta(\rho, \theta, \varphi) = \frac{1}{\rho} \frac{1}{\sqrt{f_{R-N}}} \begin{pmatrix} f(\rho) & \xi(\theta) \\ -ig(\rho) & \sigma^3 \xi(\theta) \end{pmatrix} e^{im_\varphi \varphi}, \quad (27)$$

то компоненты плотности тока (24) с учетом (25)–(27) можно представить в виде

$$j^0 = \frac{1}{\rho^2} \frac{1}{f_{R-N}} (f^2(\rho) + g^2(\rho)) [\xi^+(\theta) \xi(\theta)], \quad (28)$$

$$j^r = j^1 = -\frac{2}{\rho^2} f(\rho) g(\rho) [\xi^+(\theta) \sigma^2 \xi(\theta)], \quad (29)$$

$$j^\theta = j^2 = \frac{2}{\rho^3 f_{R-N}^{1/2}} f(\rho) g(\rho) [\xi^+(\theta) \sigma^1 \xi(\theta)], \quad (30)$$

$$\begin{aligned} j^\varphi = j^3 &= -\frac{i}{\rho^3 \sin \theta} \frac{1}{f_{R-N}^{1/2}} f(\rho) g(\rho) \times \\ &\times [\xi^+(\theta) (\sigma^3 \sigma^3 - \sigma^3 \sigma^3) \xi(\theta)]. \end{aligned} \quad (31)$$

С учетом явного вида угловых функций (12) радиальная плотность тока  $j^1(\rho)$  равна нулю во всей области изменения  $\rho$ , кроме  $\rho \rightarrow 0$ . Аналогично  $j^3 = 0$ , кроме области  $\rho \rightarrow 0$ .

## 7. Эрмитовость дираковского гамильтониана в поле Райсснера – Нордстрёма

Эрмитовость гамильтониана будем рассматривать для двух случаев области определения  $\rho$ .

Первый случай – это область вне «внешнего горизонта событий»

$$\infty > \rho > \rho_+. \quad (32)$$

Второй случай – область под «внутренним горизонтом событий»

$$\rho_- > \rho \geq 0. \quad (33)$$

Для рассматриваемых случаев гамильтониан (6) является эрмитовым. Это можно показать, используя общее условие эрмитовости дираковских гамильтонианов во внешних гравитационных полях, доказанное в [1].

$$\oint dS_k (\sqrt{-g} j^k) = 0. \quad (34)$$

Для сферически-симметричного поля Райсснера – Нордстрёма и рассматриваемых случаев условие (34) сводится к

$$4\pi \rho^2 j^1(\rho \rightarrow \infty) + 4\pi \rho^2 j^1(\rho \rightarrow \rho_+) = 0, \quad (35)$$

$$4\pi \rho^2 j^1(\rho \rightarrow \rho_-) = 0. \quad (36)$$

Из рассмотрения в п. 6 видно, что условие эрмитовости гамильтониана (6) выполняется для каждой из двух рассматриваемых областей определения радиальных волновых функций  $F(\rho), G(\rho)$ .

Таким образом, для каждого случая при введении граничных условий система уравнений (17) будет обладать стационарным вещественным энергетическим спектром связанных состояний частиц со спином  $\frac{1}{2}$ .

## 8. Граничные условия вблизи «горизонтов событий»

Из соотношений (29)–(31) видно, что при равенстве нулю компонент тока  $j^r$  и  $\varphi^\varphi$   $\theta$ -компонента неограниченно растет при  $\rho \rightarrow \rho_+$  ( $\rho > \rho_+$ ) и при  $\rho \rightarrow \rho_-$  ( $\rho < \rho_-$ ).

Отсюда, как и для поля Шварцшильда [4, 5], естественным граничным условием вблизи «горизонтов событий» является ограничение  $\theta$ -компоненты дираковского тока при  $\rho = \rho_+^{\min}$  и при  $\rho = \rho_-^{\max}$ . С учетом вида функций (9), (12), (19), (21), (27) простейшим ограничением являются условия

$$f(\rho_+^{\min}) g(\rho_+^{\min}) = 0 \quad \text{для области определения (32),} \quad (37)$$

$$f(\rho_-^{\max}) g(\rho_-^{\max}) = 0 \quad \text{для области определения (33).}$$

С учетом (19)–(22), (27) условия (37) преобразуются к виду

$$\sin 2(M_+ \ln(\rho_+^{\min} - \rho_+) + \varphi_+) = 0, \quad (38)$$

$$M_+ \ln(\rho_+^{\min} - \rho_+) + \varphi_+ = \frac{\pi}{2} N, \quad N = \pm 1, 3, 5, \dots,$$

$$\sin 2(M_- \ln(\rho_- - \rho_-^{\max}) + \varphi_-) = 0, \quad (39)$$

$$M_- \ln(\rho_- - \rho_-^{\max}) + \varphi_- = \frac{\pi}{2} N, \quad N = \pm 1, 3, 5, \dots$$

Условия (38), (39) определяют вещественный энергетический спектр системы уравнений (17)

для областей определения волновых функций (32), (33).

В условиях (38), (39) используются лишь нечетные значения  $N$  по соображениям, изложенным в [5].

### 9. Экстремальное поле Райсснера – Нордстрёма и голая сингулярность

Экстремальное поле реализуется при  $\alpha = \alpha_Q (\sqrt{G}2M = Q)$ . В этом случае внешний и внутренний «горизонты событий» совпадают, их радиусы равны

$$\rho_+ = \rho_- = \alpha. \quad (40)$$

Для данного случая система уравнений для радиальных волновых функций  $F(\rho)$  и  $G(\rho)$  имеет вид

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{\alpha}{\rho}\right)^2 \frac{dF}{d\rho} + \left( \frac{1 + \kappa \left|1 - \frac{\alpha}{\rho}\right|}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right) F - \\ & - \left( \varepsilon + \frac{\alpha_{em}}{\rho} + \left|1 - \frac{\alpha}{\rho}\right| \right) G = 0, \\ & \left(1 - \frac{\alpha}{\rho}\right)^2 \frac{dG}{d\rho} + \left( \frac{1 - \kappa \left|1 - \frac{\alpha}{\rho}\right|}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right) G + \\ & + \left( \varepsilon + \frac{\alpha_{em}}{\rho} - \left|1 - \frac{\alpha}{\rho}\right| \right) F = 0. \end{aligned} \quad (41)$$

Волновые функции определены в интервале  $\rho \in [0, \infty)$  за исключением окрестности около «горизонта событий». Поведение волновых функций вблизи «горизонта событий» имеет вид

$$F(\rho) = -\frac{A}{\rho - \alpha} \sin \left( \alpha^2 \left( \varepsilon + \frac{\alpha_{em}}{\alpha} \right) \frac{1}{\rho - \alpha} + \varphi_+ \right) \quad \rho \rightarrow \alpha (\rho > \alpha) \quad (42)$$

$$G(\rho) = \frac{A}{\rho - \alpha} \cos \left( \alpha^2 \left( \varepsilon + \frac{\alpha_{em}}{\alpha} \right) \frac{1}{\rho - \alpha} + \varphi_+ \right)$$

$$F(\rho) = \frac{B}{\alpha - \rho} \cos \left( \alpha^2 \left( \varepsilon + \frac{\alpha_{em}}{\alpha} \right) \frac{1}{\alpha - \rho} + \varphi_- \right) \quad \rho \rightarrow \alpha (\rho < \alpha) \quad (43)$$

$$G(\rho) = -\frac{B}{\alpha - \rho} \sin \left( \alpha^2 \left( \varepsilon + \frac{\alpha_{em}}{\alpha} \right) \frac{1}{\alpha - \rho} + \varphi_- \right)$$

Граничные условия (38), (39) для рассматриваемого случая имеют вид

$$\sin 2 \left( \alpha^2 \left( \varepsilon + \frac{\alpha_{em}}{\alpha} \right) \frac{1}{\rho_+^{\min} - \alpha} + \varphi_+ \right) = 0, \quad (44)$$

$$\alpha^2 \left( \varepsilon + \frac{\alpha_{em}}{\alpha} \right) \frac{1}{\rho_+^{\min} - \alpha} + \varphi_+ = \frac{\pi}{2} N, \quad N = \pm 1, 3, 5, \dots$$

$$\sin 2 \left( \alpha^2 \left( \varepsilon + \frac{\alpha_{em}}{\alpha} \right) \frac{1}{\alpha - \rho_-^{\max}} + \varphi_- \right) = 0, \quad (45)$$

$$\alpha^2 \left( \varepsilon + \frac{\alpha_{em}}{\alpha} \right) \frac{1}{\alpha - \rho_-^{\max}} + \varphi_- = \frac{\pi}{2} N, \quad N = \pm 1, 3, 5, \dots$$

Система уравнений (41) с граничными условиями (44), (45) обладает дискретным стационарным вещественным энергетическим спектром для дираковских заряженных и незаряженных частиц, находящихся как под, так и над «горизонтом событий». Гравитационный радиус  $\rho = \alpha$  является особой точкой, играющей роль бесконечно большого потенциального барьера, запрещающего квантово-механическим частицам со спином  $\frac{1}{2}$  пересекать с любой стороны «горизонт событий».

Рассмотрим кратко случай голой сингулярности, который реализуется при  $\alpha_Q > \alpha$ , т. е. при  $Q > \sqrt{G}2M$ .

В этом случае внешний и внутренний «горизонты событий» исчезают, величины  $\rho_+, \rho_-$  в (15), (16) становятся комплексными числами. Асимптотики (18), (23) показывают отсутствие стационарных связанных состояний частиц со спином  $\frac{1}{2}$ .

### 10. Заключение

По результатам данной работы можно сделать следующие выводы:

1. Для метрики Райсснера – Нордстрёма показана возможность существования стационарных

связанных состояний дираковских частиц с массой  $m$  и с зарядом  $(-e)$ .

2. Связанные состояния с вещественным энергетическим спектром могут существовать как вне внешнего «горизонта событий», так и под внутренним «горизонтом событий» – горизонтом Коши.

3. Внешний и внутренний «горизонты событий» выступают в роли бесконечно больших потенциальных барьеров, лишаящих возможности их пересечения пробными дираковскими частицами. Волновая функция дираковской частицы в интервале между внутренним и внешним «горизонтом событий» равна нулю. Для экстремального поля Райсснера–Нордстрёма, когда  $\alpha = \alpha_Q$ , роль такого барьера играет оставшийся единственный «горизонт событий» с радиусом  $\rho_+ = \rho_- = \alpha$ .

По результатам проведенного анализа вместе с результатами работ [4, 5] можно сделать предположение о существовании нового типа коллапсаров. Эти коллапсары:

- инертные (дираковские частицы не могут проникать под «горизонты событий»);
- не излучают по Хокингу [13] (излучение Хокинга требует существования волновой функции (операторов поля Дирака) между внешним и внутренним «горизонтом событий» [14–21]);
- при  $\alpha \geq \alpha_Q$  обеспечивают существование стационарных связанных состояний частиц со спином  $\frac{1}{2}$  над внешним и под внутренним «горизонтами событий».

Таким образом, результаты данной работы и работ [4, 5] могут быть полезными в совершенствовании некоторых аспектов стандартной космологической модели, связанных с эволюцией Вселенной и с взаимодействием коллапсаров с окружающей средой.

Авторы благодарят за большую техническую помощь в подготовке работы А. Л. Новоселову.

### Список литературы

1. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. // Phys. Rev. 2010. Vol. D82. P. 104056; arxiv: 1007.4631v1 (gr-qc).
2. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. // Phys. Rev. 2011. Vol. D83. P. 105002; arxiv: 1102.4067v1 (gr-qc).

3. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. arxiv: 1107.0844 (gr-qc).
4. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. arxiv: 1205.4348 (gr-qc).
5. Вронский М. А., Горбатенко М. В., Колесников Н. С., Незнамов В. П., Попов Е. Ю., Сафронов И. И. arxiv: 1301.7595 (gr-qc).
6. Лайтман А., Пресс В., Прайс Р., Тюкольски С. Сборник задач по теории относительности и гравитации. Москва, «Мир», 1979.
- Lightman A., Press W., Price R., Teukolsky S. Problem Book in Relativity and Gravitation (Princeton University Press, Princeton, NJ. 1975).
- Obukhov Yu. N. // Phys. Rev. Lett. 2001. Vol. 86. P. 192; Forsch. Phys. 2002. Vol. 50. P. 711.
7. Логунов А. А., Мествиришвили М. А. Релятивистская теория гравитации. М.: Наука, 1989.
8. Reissner H. // Ann. Phys. 1916. Vol. 50. P. 106.
9. Nordstrom C. // Proc. K. Akad. Wet. Amsterdam 1918. Vol. 20. P. 1238.
10. Горбатенко М. В., Незнамов В. П. arxiv: 1105.4709 (gr-qc, hep-th).
11. Brill D. R., Wheeler J. A. // Rev. of Modern Physics. 1957. Vol. 29. P. 465–479.
12. Dolan S. R. // Trinity Hall and Astrophysics Group, Cavendish Laboratory. Dissertation, 2006.
13. Hawking S. W. // Commun. math. Phys. 1975. Vol. 43. P. 199–220.
14. Srinivasan K., Padmanabhan T. // Phys. Rev. 1999. Vol. D60. P. 024007. [gr-qc/9812028].
15. Shankaranarayanan S., Srinivasan K., Padmanabhan T. // Mod. Phys. Lett. 2001. Vol. A16. P. 571–578. [gr-qc/0007022].
16. Shankaranarayanan S., Padmanabhan T., Srinivasan K. // Class. Quant. Grav. 2002. Vol. 19. P. 2671–2688. [gr-qc/0010042].
17. Parikh M. K., Wilczek F. // Phys. Rev. Lett. 2000. Vol. 85. P. 5042. [arXiv:hep-th/9907001].
18. Vagenas E. C. // Phys. Lett. 2002. Vol. B533. P. 302. [hep-th/0109108].
19. Robinson S. P., Wilczek F. // Phys. Rev. Lett. 2005. Vol. 95. P. 011303. [arXiv:gr-qc/0502074].
20. Vagenas E. C., Das S. JHEP 0610:025 (2006) [hep-th/0606077].
21. Zampeli A., Singleton D., Vagenas E. C., arXiv: [gr-qc] 1206.0879v1.

Статья поступила в редакцию 04.04.2013



## ОТСУТСТВИЕ ПРОБЛЕМЫ НЕЕДИНСТВЕННОСТИ ДИРАКОВСКОЙ ТЕОРИИ В ИСКРИВЛЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ. СВЯЗЬ СПИН-ВРАЩЕНИЕ НЕ ЯВЛЯЕТСЯ ФИЗИЧЕСКИ ЗНАЧИМЫМ ЭФФЕКТОМ

М. В. Горбатенко, В. П. Незнамов<sup>1</sup>

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, Саров Нижегородской обл.

В противовес утверждениям Arminjon в работе еще раз обосновывается и иллюстрируется на ряде примеров отсутствие проблемы неединственности дираковской теории в искривленном и плоском пространстве-времени. Дираковские гамильтонианы в произвольных гравитационных полях, в том числе зависящих от времени, однозначно определяют физические характеристики квантово-механических систем независимо от выбора системы тетрадных векторов. Прямая связь спин-вращение появляющаяся при определенном выборе тетрадных векторов, не проявляет себя в конечных физических характеристиках рассматриваемых систем и поэтому не является физически значимым эффектом.

*Ключевые слова:* дираковские гамильтонианы в искривленном пространстве-времени, единственность теории Дирака, связь спин-вращение, квантово-механические системы, тетрадные поля.

В последнее время вновь появились работы [1–3], в которых провозглашается и обосновывается тезис о неединственности дираковской теории в искривленном и даже плоском пространстве-времени. Основным доказательством является демонстрация зависимости вида дираковских гамильтонианов от выбора тетрадных векторов. Наш взгляд этого совершенно недостаточно. Для демонстрации неэквивалентности дираковских гамильтонианов необходимо обнаружение разницы в физических характеристиках рассматриваемой системы при выборе разных тетрад. Такими характеристиками могут быть энергетические спектры гамильтонианов, средние значения физических величин, различные амплитуды перехода и т. д.

Авторы данной работы придерживаются выводов прежних исследований [4, 5] о независимости физических характеристик дираковской теории от выбора тетрадных векторов.

В работах [6–8] с помощью методов псевдоэрмитовой квантовой механики [9–11] для произвольных гравитационных полей, в том числе зависящих от времени, авторы разработали алгоритм перевода любого дираковского гамильтониана в искривленном пространстве-времени с произвольным выбором тетрадных векторов в  $\eta$ -пред-

ставление, в котором гамильтониан превращается в самосопряженный, а скалярное произведение волновых функций становится плоским. При выборе для одной и той же физической системы разных тетрадных векторов в  $\eta$ -представлении могут получаться разные по виду самосопряженные гамильтонианы. Однако они всегда будут связаны унитарными преобразованиями, обязанными пространственно-временным вращениям матриц Дирака. Очевидно, такие гамильтонианы являются физически эквивалентными. Выбор тетрадных векторов для исследователя диктуется соображениями удобства.

Можно работать с дираковскими гамильтонианами в искривленном пространстве-времени, используя в скалярном произведении волновых функций весовой оператор Паркера [12], либо работать в  $\eta$ -представлении с плоским скалярным произведением, используя обычный аппарат квантовой механики. При этом для обоих случаев физические характеристики рассматриваемых систем остаются идентичными.

Для иллюстрации вышесказанного приведем некоторые примеры.

Ниже используется система единиц  $\hbar = c = G = 1$ , где  $\hbar$  – постоянная Планка,  $c$  – скорость света,  $G$  – гравитационная постоянная

<sup>1</sup> E-mail: [neznamov@vniief.ru](mailto:neznamov@vniief.ru)

Для первых трех примеров используется сигнатура

$$\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}[-1, 1, 1, 1]. \quad (1)$$

Локальные индексы подчеркиваются, мировые индексы не подчеркиваются. Отсюда для  $\gamma$ -матриц Дирака

$$\gamma^\alpha \gamma^\beta + \gamma^\beta \gamma^\alpha = 2\eta^{\alpha\beta} E; \quad (2)$$

$$\gamma^\alpha \gamma^\beta - \gamma^\beta \gamma^\alpha = 2g^{\alpha\beta} E. \quad (3)$$

В соотношениях (2), (3)  $E$  – единичная  $4 \times 4$  матрица.

Тетрадные векторы определяются соотношением

$$H_\alpha^\mu H_\beta^\nu g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta}. \quad (4)$$

Связь между  $\gamma^\alpha$  и  $\gamma^\alpha$  определяется равенством

$$\gamma^\alpha = H_\beta^\alpha \gamma^\beta. \quad (5)$$

Весовой оператор Паркера равен

$$\rho = \sqrt{-g} \gamma_0 \gamma^0. \quad (6)$$

**Пример 1.** В работе [6] для слабого поля Керра получены три гамильтониана, соответствующие трем системам тетрадных векторов, и самосопряженный гамильтониан в  $\eta$ -представлении:

а) киллинговая система тетрадных векторов

$$H_k = im\gamma_0 - im \frac{M}{R} \gamma_0 - i\gamma_0 \gamma^k \frac{\partial}{\partial x^k} + 2i \frac{M}{R} \gamma_0 \gamma^k \frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{i}{2} \frac{MR_k}{R^3} \gamma_0 \gamma^k + 2i \frac{M(J_{kl} R_l)}{R^3} \frac{\partial}{\partial x^k} - 2im \frac{M(J_{kl} R_l)}{R^3} \gamma^k + 2i \frac{M(J_{ml} R_l)}{R^3} S_{mk} \frac{\partial}{\partial x^k} - \frac{i}{2} \left\{ \frac{M}{R^3} J_k - 3 \frac{M(J_l R_l) R_k}{R^5} \right\} \gamma_\pm \gamma_0 \gamma_k; \quad (7)$$

$$\rho = 1 + \frac{3M}{R} + 2 \frac{M(J_{km} R_m)}{R^3} \gamma_0 \gamma_k; \quad (8)$$

б) система тетрадных векторов в симметричной калибровке

$$H_s = im\gamma_0 - i\gamma_0 \gamma_k \frac{\partial}{\partial x^k} - im \frac{M}{R} \gamma_0 + 2i \frac{M}{R} \gamma_0 \gamma^k \frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{i}{2} \frac{MR_k}{R^3} \gamma_0 \gamma^k + 2i \frac{M(J_{kl} R_l)}{R^3} \frac{\partial}{\partial x^k} - im \frac{M(J_{kl} R_l)}{R^3} \gamma^k + i \frac{M(J_{ml} R_l)}{R^3} S_{mk} \frac{\partial}{\partial x^k}; \quad (9)$$

$$\rho = 1 + \frac{3M}{R} + \frac{MJ_{km} R_m}{R^3} \gamma_0 \gamma_k; \quad (10)$$

в) система тетрадных векторов Nehl и Ni [13]

$$H_{H-N} = im\gamma_0 - im \frac{M}{R} \gamma_0 - i\gamma_0 \gamma_k \frac{\partial}{\partial x^k} + 2i \frac{M}{R} \gamma_0 \gamma^k \frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{i}{2} \frac{MR_k}{R^3} \gamma_0 \gamma^k + 2i \frac{M(J_{kl} R_l)}{R^3} \frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{i}{2} \left\{ \frac{M}{R^3} J_k - 3 \frac{M(J_l R_l) R_k}{R^5} \right\} \gamma_\pm \gamma_0 \gamma_k; \quad (11)$$

$$\rho = 1 + \frac{3M}{R}; \quad (12)$$

г) самосопряженный гамильтониан в  $\eta$ -представлении

$$H_\eta = im\gamma_0 - im \frac{M}{R} \gamma_0 - i\gamma_0 \gamma_k \frac{\partial}{\partial x^k} + 2i \frac{M}{R} \gamma_0 \gamma^k \frac{\partial}{\partial x^k} - i \frac{MR_k}{R^3} \gamma_0 \gamma^k + 2i \frac{M(J_{kl} R_l)}{R^3} \frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{i}{2} \left\{ \frac{M}{R^3} J_k - 3 \frac{M(J_l R_l) R_k}{R^5} \right\} \gamma_\pm \gamma_0 \gamma_k; \quad (13)$$

$$\rho = 1. \quad (14)$$

В выражениях (7)–(14)  $M$  – масса источника гравитационного поля Керра,  $J_{km}$  – тензор углового момента поля Керра  $S_{mk} = \frac{1}{2} (\gamma_m \gamma_k - \gamma_k \gamma_m)$ .

Каждый из гамильтонианов (7), (9), (11), (13) отличается по виду друг от друга, однако при переходе в  $\eta$ -представление все гамильтонианы совпадают друг с другом, что доказывает их физическую эквивалентность.

**Пример 2.** Известно, что свободный дираковский гамильтониан в сферической системе координат пространства Минковского можно записать двумя способами, приводящими к существенно разным по виду выражениям (см., например, [14])

$$H_1 = im\gamma_0 - i\gamma_0 \left\{ \gamma_1 \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \gamma_2 \left( \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \text{ctg} \theta \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \gamma_3 \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\}; \quad (15)$$

$$H_2 = im\gamma_0 - i\gamma_0 \left\{ \gamma_r \frac{\partial}{\partial r} + \gamma_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \gamma_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\}. \quad (16)$$

В выражении (16)

$$\gamma_r = \sin \theta [\gamma_1 \cos \varphi + \gamma_2 \sin \varphi] + \gamma_3 \cos \theta = R\gamma_1 R^{-1};$$

$$\gamma_\theta = \cos \theta [\gamma_1 \cos \varphi + \gamma_2 \sin \varphi] - \gamma_3 \sin \theta = R\gamma_2 R^{-1}; \quad (17)$$

$$\gamma_\varphi = -\gamma_1 \sin \varphi + \gamma_2 \cos \varphi = R\gamma_3 R^{-1}.$$

Ряд  $\{\gamma_r, \gamma_\theta, \gamma_\varphi\}$  связан с рядом  $\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$  через унитарную матрицу  $R$

$$R = R_1 T_1 R_2 T_2;$$

$$R_1 = \exp\left(-\frac{\varphi}{2} \gamma_1 \gamma_2\right); T_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \gamma_5 \gamma_1 (E + \gamma_1 \gamma_2); \quad (18)$$

$$R_2 = \exp\left(-\frac{\theta}{2} \gamma_2 \gamma_3\right); T_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \gamma_5 \gamma_2 (E + \gamma_2 \gamma_3).$$

Отсюда видно, что гамильтонианы (15), (16) физически эквивалентны, так как связаны унитарным преобразованием (18)

$$H_2 = R H_1 R^{-1}, \quad R^{-1} = R^+. \quad (19)$$

**Пример 3.** В работе [8] для слабого поля Керра в координатах Бойера–Линдквиста получен следующий вид дираковского гамильтониана:

$$\begin{aligned} H_{B-L} = im \left( 1 - \frac{r_0}{2r} \right) \gamma_0 - i \left( 1 - \frac{r_0}{r} \right) \gamma_0 \gamma_1 \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) - \\ - i \left( 1 - \frac{r_0}{2r} \right) \frac{1}{r} \left[ \gamma_0 \gamma_2 \left( \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \theta \right) + \gamma_0 \gamma_3 \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] - \\ - \gamma_0 \gamma_1 \frac{r_0}{2r^2} - i \frac{r_0 a}{r^3} \frac{\partial}{\partial \varphi} - i \frac{3 r_0 a}{4 r^3} \gamma_3 \gamma_1 \sin \theta. \quad (20) \end{aligned}$$

Сравним этот гамильтониан с гамильтонианом (13). Перепишем выражение (13) в других обозначениях

$$\begin{aligned} H_\eta = im \left( 1 - \frac{r_0}{2r} \right) \gamma_0 - i \left( 1 - \frac{r_0}{r} \right) \gamma_0 \gamma_k \frac{\partial}{\partial x^k} - \\ - i \frac{r_0}{2r^3} \gamma_0 \gamma_k x_k - i \frac{r_0 a}{r^3} \left( x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + i \frac{r_0 a}{4r^3} \times \\ \times \left[ \gamma_1 \gamma_2 \left( 1 - 3 \frac{x_3^2}{r^2} \right) - \gamma_2 \gamma_3 \frac{3x_3 x_1}{r^2} - \gamma_3 \gamma_1 \frac{3x_3 x_2}{r^2} \right]. \quad (21) \end{aligned}$$

В формуле (21)  $r_0 = 2M$ ,  $\mathbf{J} = \mathbf{M}\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{a} = (0, 0, a)$ .

В выражениях (20), (21) слагаемые без момента  $a$  соответствуют метрике Шварцшильда. В гамильтониане (21) эти слагаемые записаны в декартовых координатах, а в выражении (20) – в сферических координатах, к которым в приближении слабого поля сводятся координаты Бойера–Линдквиста. Эти части гамильтонианов (20) и (21) физически эквивалентны друг другу.

Слагаемые с моментом вращения  $a$  в выражениях (20), (21) сильно отличаются друг от друга. Однако в работе [8] с использованием матрицы (17), (18) показывается физическая эквивалентность и этих частей гамильтонианов (20), (21).

В последующих примерах будет использована измененная сигнатура (1)

$$\eta_{\alpha\beta} = \operatorname{diag}[1, -1, -1, -1] \quad (22)$$

**Пример 4.** В работах [15] Обухов применительно к метрике

$$ds^2 = V^2(\mathbf{x}) dx^2 - W^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x}^2 \quad (23)$$

получил самосопряженный гамильтониан с плоским скалярным произведением волновых функций

$$H_{ob} = \beta m V + \frac{1}{2} \left[ \boldsymbol{\alpha} \mathbf{p} \frac{V}{W} + \frac{V}{W} \boldsymbol{\alpha} \mathbf{p} \right]. \quad (24)$$

В формуле (24)  $\beta = \gamma^0$ ,  $\alpha^k = \gamma^0 \gamma^k$ .

Далее, после унитарного преобразования Эриксона–Колсруда [16] гамильтониан (24) в приближении слабого гравитационного поля становится равным

$$\begin{aligned} H_{E-K} = \beta \left( m V + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \right) - \frac{\beta}{4m} \{ p^2, V - 1 \} + \\ + \frac{\beta}{2m} \left\{ \mathbf{p}^2, \frac{V}{W} - 1 \right\} + \frac{\beta}{4m} [2\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{f} \times \mathbf{p}) + \bar{\nabla} \mathbf{f}] + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\Sigma} \Phi). \quad (25) \end{aligned}$$

В соотношении (25)  $\Phi = \nabla V$ ;  $f = \nabla \left( \frac{V}{W} \right)$ ;

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}.$$

Последнее слагаемое в (25) можно трактовать как прямое взаимодействие спина дираковской частицы с гравитацией.

Однако для правильной классической трактовки отдельных слагаемых гамильтониана необходимо исходное выражение (24) подвергнуть унитарному преобразованию Фолди–Ваутхайзена [17–19].

В результате А. Силенко, О. Теряев [18] получили следующие выражения для преобразованного гамильтониана:

$$\begin{aligned} H_{FW} = \beta \left( m V + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \right) - \frac{\beta}{4m} \{ p^2, V - 1 \} + \\ + \frac{\beta}{2m} \left\{ \mathbf{p}^2, \frac{V}{W} - 1 \right\} + \frac{\beta}{4m} [2\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{f} \times \mathbf{p}) + \nabla \mathbf{f}] - \\ - \frac{\beta}{8m} [2\boldsymbol{\Sigma}(\Phi \times \mathbf{p}) + \nabla \Phi]. \quad (26) \end{aligned}$$

Последнее слагаемое в (26) вместо прямого взаимодействия спина частицы с гравитацией

$\left( \frac{1}{2} \boldsymbol{\Sigma} \Phi \right)$  описывает спин-орбитальное и контактное взаимодействие дираковской частицы подобно взаимодействию с электромагнитным полем [17].

Отметим, что все три гамильтониана (24), (25), (26) физически эквивалентны, поскольку связаны друг с другом унитарными преобразованиями. Однако для квазиклассической трактовки членов гамильтониана необходимо использовать представление Фолди – Ваутхайзена [18, 19].

**Пример 5.** Самосопряженный гамильтониан в поле Керра произвольной интенсивности, полученный авторами в работе [8], сильно отличается от гамильтониана Чандрасекара [20], полученного методом Пенроуза – Ньюмена [21]. Однако, после перевода гамильтониана Чандрасекара в  $\eta$ -представление можно установить, что полученный самосопряженный гамильтониан связан с гамильтонианом работы [8] унитарным преобразованием. Следовательно, оба гамильтониана физически эквивалентны.

В общем случае выражение для оператора  $\eta$  является сложным и громоздким. В случае отсутствия вращения (поле Шварцшильда) оператор  $\eta$  диагонален и имеет вид

$$\eta = \text{diag} \left[ \left( 1 - \frac{r_0}{r} \right)^{-1/2}, 1, 1, \left( 1 - \frac{r_0}{r} \right)^{-1/2} \right]. \quad (27)$$

Теперь обратимся к примерам в последней работе Arminjon [3], в которой автор демонстрирует неединственность (по его мнению) дираковской теории даже в плоском пространстве Минковского.

**Пример 6.** Рассматривается плоское пространство Минковского  $(t', x', y', z')$  со свободным дираковским гамильтонианом

$$H' = \alpha' p' + \beta' m. \quad (28)$$

Далее рассматривается набор других матриц Дирака, зависящих от времени

$$\begin{aligned} \beta &= \beta'; \\ \alpha^1 &= \alpha'^1 \cos \omega t - \alpha'^2 \sin \omega t; \\ \alpha^2 &= \alpha'^1 \sin \omega t + \alpha'^2 \cos \omega t; \\ \alpha^3 &= \alpha'^3. \end{aligned} \quad (29)$$

В результате для новых тетрадных векторов, приведших к набору матриц  $\alpha^k$  (29), получается новый гамильтониан

$$H = \alpha p + \beta m - \frac{\omega}{2} \Sigma^3, \quad (30)$$

где  $\Sigma^3 = i\alpha^1 \alpha^2 = i\alpha^1 \alpha^2 = \Sigma^3$ .

Сравнивая (28), (30), автор [3] еще раз делает вывод о неединственности теории Дирака и задает вопрос о физической значимости прямой связи спин-вращение:  $-\frac{\omega}{2} \Sigma^3$  (этот член присутствует в

гамильтониане (30), но отсутствует в гамильтониане (28)).

Обратим внимание, что матрицы  $\alpha^i$  (29) связаны с исходными матрицами  $\alpha'^i$  унитарной матрицей преобразования  $R(t)$

$$\alpha^i = R \alpha'^i R^+, \quad (31)$$

где

$$R(t) = e^{\frac{\omega t}{2} \alpha'^1 \alpha'^2}; \quad R^+(t) = e^{-\frac{\omega t}{2} \alpha'^1 \alpha'^2}. \quad (32)$$

Учитывая, что  $R(t)$  зависит от времени, видно, что гамильтонианы (30) и (28) связаны унитарным преобразованием

$$H = R H' R^+ - i R \frac{\partial R^+}{\partial t}. \quad (33)$$

Следовательно, гамильтонианы (28) и (30) физически эквивалентны. Переходя в свободном гамильтониане (28) в представление Фолди – Ваутхайзена, получаем известный гамильтониан [17]

$$H_{FW} = \beta \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}. \quad (34)$$

Отсюда видно, что связь спин-вращение в гамильтониане (30) не является физически значимой. Она может появляться при выборе определенной системы тетрадных векторов, но при вычислениях физических характеристик системы она никак не влияет на их величины.

**Пример 7.** В работе [3] автор рассматривает также вращающуюся систему отсчета

$$\begin{aligned} t &= t'; \\ x &= x' \cos \omega t + y' \sin \omega t; \\ y &= -x' \sin \omega t + y' \cos \omega t; \\ z &= z'. \end{aligned} \quad (35)$$

Метрика, соответствующая координатам (35), имеет вид

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left[ 1 - \omega^2 (x^2 + y^2) \right] dt^2 + 2\omega (y dx - x dy) dt - \\ &\quad - (dx^2 + dy^2 + dz^2), \end{aligned} \quad (36)$$

В формуле (36) для обеспечения  $g_{00} > 0$  необходимо выполнение условия  $\omega \sqrt{x^2 + y^2} < 1$ .

$\gamma$ -матрицы, соответствующие выбранной системе тетрадных векторов, имеют вид

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \gamma'^0; \\ \gamma^1 &= \gamma'^1 \cos \omega t + \gamma'^2 \sin \omega t + \gamma'^0 \omega y; \\ \gamma^2 &= -\gamma'^1 \sin \omega t + \gamma'^2 \cos \omega t - \gamma'^0 \omega x; \\ \gamma^3 &= \gamma'^3. \end{aligned} \quad (37)$$

В результате можно получить самосопряженный гамильтониан

$$H_{\omega} = \mathbf{a}' \mathbf{p}' + \beta m - \omega \left( y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right). \quad (38)$$

С другим набором тетрадных векторов автор в [3] получает следующий вид  $\gamma$ -матриц:

$$\begin{aligned} \gamma_{Ar.}^0 &= \gamma^{i0}; \\ \gamma_{Ar.}^1 &= \gamma^{i1} + \gamma^{i0} \omega y; \\ \gamma_{Ar.}^2 &= \gamma^{i2} - \gamma^{i0} \omega x; \\ \gamma_{Ar.}^3 &= \gamma^{i3}. \end{aligned} \quad (39)$$

В данной постановке получается следующий вид самосопряженного гамильтониана

$$H_{Ar.} = \mathbf{a}_{Ar.} \mathbf{p}' + \beta m - i\omega \left( y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right) - \frac{\omega}{2} \Sigma^3. \quad (40)$$

Обратим внимание, что матрицы  $\gamma^1, \gamma^2$  в (37) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \gamma^1 &= R^+ \gamma^{i1} R + \gamma^{i0} \omega y; \\ \gamma^2 &= R^+ \gamma^{i2} R - \gamma^{i0} \omega x. \end{aligned} \quad (41)$$

Отсюда видно, что матрицы (39) и (37) связаны унитарным преобразованием

$$\gamma_{Ar.}^{\mu} = R \gamma^{\mu} R^+. \quad (42)$$

Тогда гамильтонианы (38) и (40), так же как гамильтонианы (28), (30), физически эквивалентны, поскольку они связаны унитарным преобразованием  $R(t)$

$$H_{Ar.} = R H_{\omega} R^+ - iR \frac{\partial R^+}{\partial t}. \quad (43)$$

Таким образом, в результате нашего рассмотрения можно сделать следующие выводы.

1. Проблемы неединственности физических предсказаний дираковской теорией в искривленном пространстве-времени не существует. При правильном обращении дираковские гамильтонианы всегда будут определять правильные физические характеристики рассматриваемых систем независимо от выбора тетрадных векторов.

2. Связь спин-вращение для дираковских частиц в контексте рассмотрения в работе [3] не является физически значимой величиной. Она может появляться при определенном выборе тетрадных векторов, но связь спин-вращение не влияет на конечные физические характеристики рассматриваемых квантово-механических систем.

## Список литературы

1. Arminjon M., Reiffer F. // Ann. Phys. (Berlin). 2011. Vol. 523. P. 531–551; arxiv: 0905.3686 [gr-qc].
2. Arminjon M. // Ann. Phys. (Berlin). 2011. Vol. 523. P. 1008–1028; arxiv: 1107.4556v2 [gr-qc].
3. Arminjon M. arxiv: 1211.1855v1 [gr-qc].
4. Brill D. R., Wheeler J. A. // Rev. Modern Physics. 1957. Vol. 29. P. 465–479. Erratum: Rev. Modern Physics. 1961. Vol. 33. P. 623–624.
5. Chapman T. C., Leiter D. J. // Ann. J.Phys. 1976. Vol. 44, № 9. P. 858–862.
6. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. // Phys. Rev. 2010. Vol. D82. P. 104056; arxiv: 1007.4631 [gr-qc].
7. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. // Phys. Rev. 2011. Vol. D83. P. 105002; arxiv: 1102.4067v1 [gr-qc].
8. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. arxiv: 1102.0844v4 [gr-qc].
9. Bender C. M., Brody D., Jones H. F. // Phys. Rev. Lett. 2002. Vol. 89. P. 2704041; Phys. Rev. 2004. Vol. D70. P. 025001.
10. Mostafazadeh A. // J.Math Phys. (N.Y.) 2002. Vol. 43. P. 205, 2002. Vol. 43. P. 2814; 2002. Vol. 43. P. 3944; arXiv: 0810.5643v3[quant-ph].
11. Bagchi B., Fring A. // Phys. Lett. 2009. Vol. A373. P. 4307.
12. Parker L. // Phys. Rev. 1980. Vol. D22. P. 1922.
13. Hehl F. W., Ni W. T. // Phys. Rev. 1990. Vol. D42. P. 2045.
14. Dolan S. R. Trinity hall and astrophysics group, Cavendish Laboratory. Dissertation, 2006.
15. Obukhov Yu. N. // Phys. Rev. Lett. 2001. Vol. 86. P. 192; Forsch. Phys. 2002. Vol. 50. P. 711.
16. Eriksen E., Kolsrud M., Nuovo Cim. 1960. 18; Nikitin A. G. // J.Phys.A: Math Gen. 1998. Vol. A31. P. 3297.
17. Foldy L. L., Wouthuysen S. A. // Phys. Rev. 1950. Vol. 78. P. 29.
18. Silenko A. J., Teryaev J. V. // Phys. Rev. 2005. Vol. D71. P. 064016.
19. Neznamov V. P., Silenko A. J. // J. Math. Phys. 2009. Vol. 50. P. 122302.
20. Chadrasekhar F. R. S. // Proc. R.Soc.Lond. 1976. Vol. A.349. P. 571–575.
21. Newman E. T., Penrose R. // J.Math.Phys. 1962. Vol. 3. P. 566.

Статья поступила в редакцию 04.04.2013

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ НАЧАЛЬНОГО СПЕКТРА ВОЗМУЩЕНИЙ НА РАЗВИТИЕ ГРАВИТАЦИОННОГО ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕМЕШИВАНИЯ

Ю. В. Янилкин, В. П. Стаценко, О. Г. Синькова, О. Н. Чернышова,  
В. Б. Розанов, Н. В. Змитренко

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Численно исследуется развитие гравитационного турбулентного перемешивания при вариации начального спектра гармонических и случайных 3D возмущений контактной границы между тяжелым и легким веществами. Результаты расчетов сравниваются с соответствующими расчетами, выполненными ранее на более грубой сетке со случайными начальными возмущениями на КГ. Расчеты проводились по 3D методике ТРЭК.

*Ключевые слова:* турбулентность, гравитационное перемешивание, спектр гармоник.

### Введение

В задачах, относящихся к турбулентному перемешиванию в сложных течениях, важным является тестирование имеющихся численных методик на наиболее простых задачах данного класса. Именно к такого рода задачам относится гравитационное турбулентное перемешивание при постоянном поле тяжести. Эта задача рассматривалась в ряде работ (см., например, [1–3]), в том числе и авторами [4–8].

Рассматриваемое течение выходит на автомодельный режим. Однако переходная к этому режиму стадия может сильно зависеть от начальных данных задачи. Для достижения автомодельности требуется, чтобы в течении реализовалось развитое турбулентное перемешивание, т. е., чтобы в нем присутствовал представительный спектр вихрей и полномасштабный инерционный интервал, другими словами, течение должно забыть начальные данные. Много лет исследователи обсуждают проблему определения величины константы  $\alpha_b$  для закона роста «пузырей» на автомодельной стадии. И она разная у разных авторов (разброс данных составляет 0,015–0,075), при этом наиболее отличаются расчетные и экспериментальные данные.

Вторая проблема – это выход на автомодельную стадию, а именно, когда происходит этот выход и какова скорость роста ширины зоны турбулентного перемешивания (ЗТП) до выхода на нее. Анализ экспериментальных данных в [9] и численных расчетов в наших работах [7, 8] показыва-

ет, что на начальном участке течения число Рейнольдса (в численных расчетах – схемное число Рейнольдса, определяемое схемной вязкостью) недостаточно велико и автомодельность отсутствует. Поэтому константа  $\alpha_b$  может быть корректно определена лишь при достижении достаточно большого числа Рейнольдса. Формально «константа»  $\alpha_b$ , определяемая по наклону кривой  $\sqrt{L}(t)$ , на начальном участке больше, чем на автомодельном, и уменьшается со временем:  $\alpha_b \sim \sqrt{L}/t$ . Некоторые авторы включают начальный участок течения в зону автомодельности, при этом получая не совсем корректные данные по константе автомодельности [9]. Другие авторы считают, что начальные данные помнятся так долго, что теоретический автомодельный участок течения вообще не наступает или же наступает с другими значениями константы  $\alpha_b$  [2, 10]. В этих работах численно получено, что «константа»  $\alpha_b$  зависит от начального спектра возмущений контактной границы. Рассматривалась также экспериментально и расчетно-теоретически задача о влиянии на закон роста ЗТП локальных возмущений [11–13].

Данная работа представляет собой попытку разобраться в вопросе о влиянии начальных данных, т. е. спектра 3D начальных возмущений контактной границы, на развитие турбулентности, в частности ЗТП. Расчеты проводились по коду ТРЭК [14] для сжимаемой среды, поэтому несжимаемая среда аппроксимировалась заданием дос-

таточно большого начального давления  $P_0$ . В работе исследуется также вопрос о влиянии на решение величины «несжимаемости»  $\xi \equiv P_0/\rho_1 g L_x$ , то есть значения  $P_0$ .

Некоторые вопросы данных исследований представлены в работе [10].

### 1. Постановка расчетов

Начальная геометрия расчетов показана на рис. 1, размеры счетной области  $L_x = L_y = L_z = 2\pi$ ;  $g_z = -1$ ;  $\rho_1 = 1$ ;  $\rho_2 = 3$ . Начальный профиль давления задавался исходя из условия гидростатического равновесия  $p(z) = p_0 + g \cdot \int_z^{z_2} \rho(z') \cdot dz'$ . Во всех вариантах расчета  $p_0 = 50$ , что соответствует показателю несжимаемости  $\xi \equiv P_0/\rho_1 g L_y = 8$ .

В трех расчетах задавались начальные возмущения границы по формуле

$$a(x, y) = \sum a_n \cos(k_n x) \cos(k_n y), \quad k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n}. \quad (1)$$

$$\lambda_n = 0,007i_n + 0,063. \quad (2)$$

$$a_n = a_0 \left( \frac{\lambda_{\min}}{1,43\lambda_n} \right), \quad a_0 = 0,1/3, \quad \lambda_{\min} = 0,1. \quad (3)$$

Выбираем  $i_n$  такие, чтобы  $k_n$  было целым или полуцелым:

$i_n = [11,87437 \quad 12,89263 \quad 14,01533 \quad 30,02599 \quad 30,89324 \quad 31,7999 \quad 85,48399 \quad 90,7331 \quad 96,59975]$ , что дает:  $k_n = [43 \quad 41 \quad 39 \quad 23 \quad 22,5 \quad 22 \quad 9,5 \quad 9 \quad 8,5]$ .

Значения  $k_n$  в разных вариантах приведены в табл. 1.

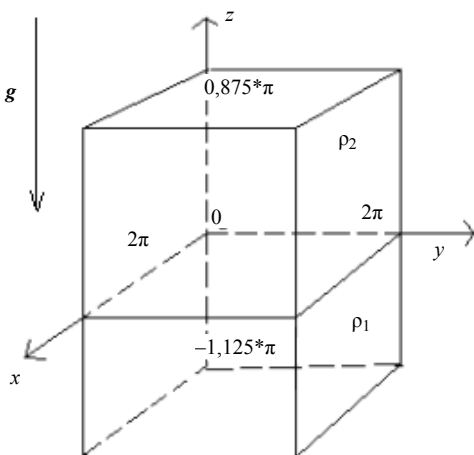


Рис. 1. Геометрия задачи

Таблица 1

Варианты 3D расчетов

Вариант	Особенности постановки начальных условий
1	$k_n = 43 \quad 41 \quad 39 \quad 23 \quad 22,5 \quad 22 \quad 9,5 \quad 9 \quad 8,5$
2	$k_n = 23 \quad 22,5 \quad 22 \quad 9,5 \quad 9 \quad 8,5$
3	$k_n = 43 \quad 41 \quad 39$
4	Случайные возмущения границы (10 % $h$ )
5	[4, 5], сетка $200^2 \times 400$ , случайные возмущения плотности (10 %)

В варианте 4 задавались случайные возмущения контактной границы амплитудой 10 % от размера счетной ячейки. В этом случае в начальном спектре отклонений границы  $\zeta$  от среднего значения  $z = 0$  присутствует полный набор однородно и случайно распределенных мод. Рассмотрим двумерное фурье-разложение взятой на контактной границе величины  $\zeta(x, y)$  на момент  $t = 0$ :  $f_{2\varphi}(\vec{k})$ . Для наглядности на рис. 2 приводится одномерный спектр  $f_{2\varphi}(k_x, k_y = 0,5 \max(k_y))$ , в среднем сечении полученного подобным образом двумерного спектра  $f_{2\varphi}(\vec{k})$ .

Расчеты проводились на эйлеровой сетке  $1000^3$  ячеек, но для которой возмущенная контактная граница являлась линией сетки, а узлы сетки в поперечном к контактной границе направлении строились равномерно по расстоянию между этой поверхностью и внешней границей. Таким образом, в начальный момент времени смешанные ячейки на контактной границе отсутствуют. В табл. 1 также приводятся данные расчета из работ [4, 5].

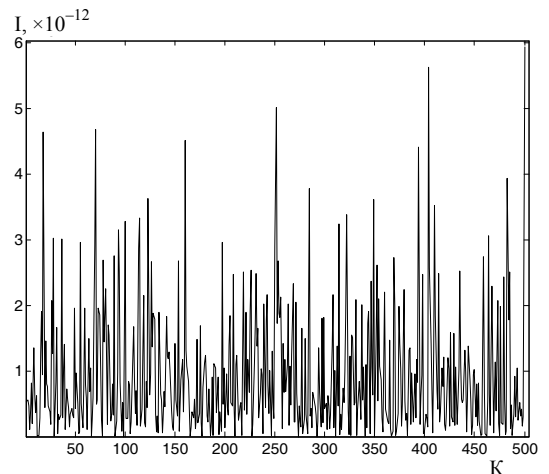


Рис. 2. Начальный одномерный спектр для варианта 4 в среднем сечении двумерного спектра

## 2. Результаты расчетов

### 2.1. Общая картина течения

Эволюция течения, полученная в расчетах, в целом аналогична предыдущим расчетам [4–8]: наблюдается укрупнение со временем максимальных в спектре вихрей (рис. 3).

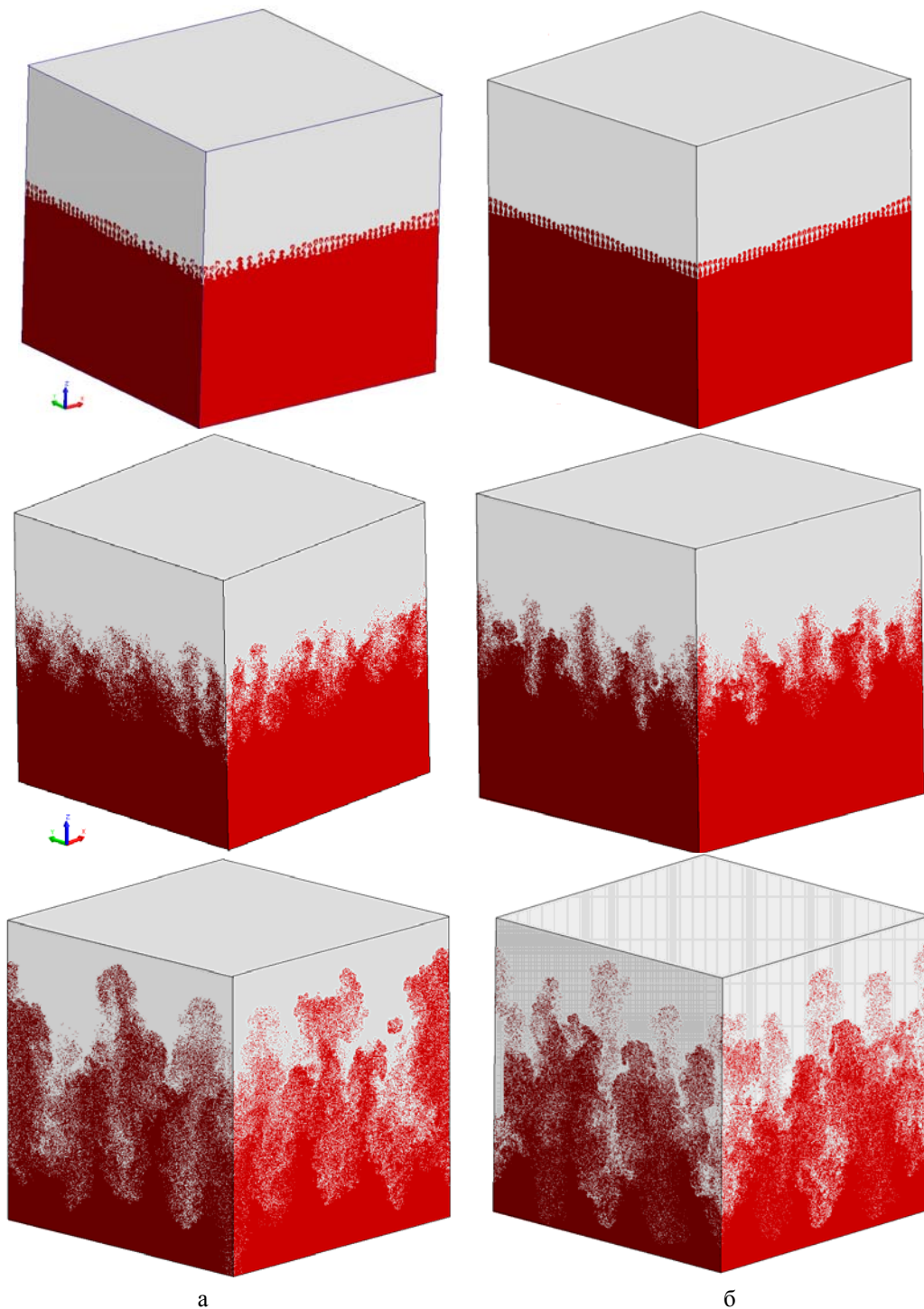


Рис. 3. Распределение доли легкого вещества, варианты: 1 (а), 3 (б), 2 (в), 4 (г). Сверху вниз:  $\tau = 0,4; 2,0; 3,6$  (см. также с. 32)



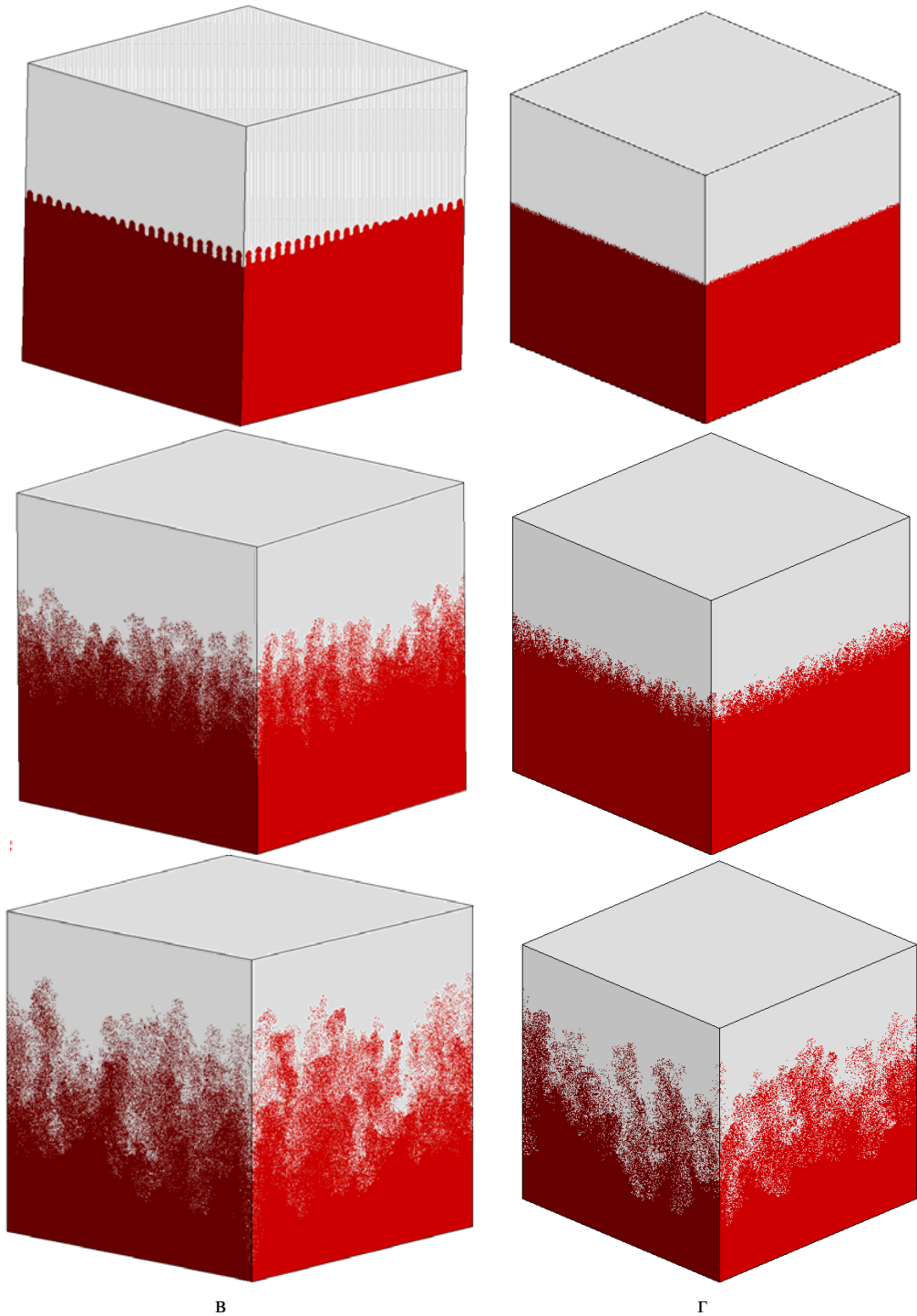


Рис. 3. Окончание

## 2.2. Выход на автомодельный режим.

### Интегральные величины зоны перемешивания

Автомодельный режим для данной задачи выражается, прежде всего, в выходе на линейную зависимость от времени функции ширины ЗТП  $F(\tau)$  и функции координаты границы легкого вещества в тяжелом  $F_b(\tau)$ :

$$F \equiv \frac{1}{t_0} \sqrt{\frac{L_t}{Ag}}, \quad (4)$$

$$F_b \equiv \frac{1}{t_0} \sqrt{\frac{|z_b - z_c|}{Ag}}. \quad (5)$$

Здесь время  $\tau \equiv t/t_0$ , где  $t_0 \equiv \sqrt{L_z/g}$ , а величина  $L_t = z_b - z_s$  – ширина ЗТП по направлению  $z$ ,

определяемая по точкам  $z_b, z_s$ , в которых объемная доля вещества  $\beta$  достигает значений  $\varepsilon$  и  $1-\varepsilon$  (ниже полагаем  $\varepsilon = 0,05$ );  $z_c$  – координата контактной границы,  $z_b$  – координата границы легкого в тяжелом (bubbles),  $z_s$  – координата границы тяжелого в легком (spikes).

На рис. 4 приведены расчетные зависимости  $F(\tau)$  и  $F_b(\tau)$ . По этим зависимостям можно выделить условно три этапа.

Начальный этап в основном определяется коротковолновыми возмущениями, имеющимися в начальном спектре, длительность этапа для разных вариантов  $\tau \lesssim 0,5-1$ . В соответствии с этим зависимости  $F(\tau), F_2(\tau)$  для вариантов 1 и 3 практически совпадают на начальном участке, так как в них присутствует одинаковая высокочастотная часть спектра. В варианте 2 поведение кривых с самого начала несколько иное, нежели в вариантах 1 и 3 в соответствии с начальным спектром. Отличается от этих вариантов рост ЗТП в вариантах 4 и 5 со случайными возмущениями контактной границы. Последние отличаются и друг от друга, что объясняется использованием разных сеток и разных начальных возмущений.

Далее следует этап ( $0,7-1 \lesssim \tau \lesssim 1,7-2,5$ ), на котором существенную роль начинают играть более длинные моды. Поэтому ширина ЗТП в варианте 2 больше по сравнению с вариантом 3, в котором начальные длинные моды отсутствуют. Общим для всех вариантов является то, что рост ЗТП на этом этапе замедляется.

И наконец, на третьем этапе  $\tau \gtrsim 2-2,5$  происходит выход на автомодельный режим, на котором происходит установление постоянной скорости роста ширины ЗТП. Заметим, что хотя скорость роста ЗТП на этом этапе и константа, однако величина этой константы разная для разных вариантов. Это говорит о том, что даже на этой стадии для некоторых задач течение помнит начальные возмущения, что не соответствует теоретическому пониманию автомодельности. Строго говоря, этот этап для таких течений теоретически не является автомодельным, и правильней было бы применять более адекватный термин «квазиавтомодельный». Однако далее мы используем более принятый термин, включая в это понятие и квазиавтомодельный случай.

Отметим, что величины  $dF/d\tau, dF_b/d\tau$  определяют значение коэффициентов  $\alpha_a = (dF/d\tau)^2, \alpha_b = (dF_b/d\tau)^2$ . Полученные таким образом значения  $\alpha_a, \alpha_b$  приближаются к постоянному значению  $\alpha_a \rightarrow \alpha = \text{const}, \alpha_b \rightarrow \alpha_2 = \text{const}$  на автомодельной стадии, где:

$$L_t = \alpha_a A g t^2, |z_b - z_c| = \alpha_2 A g t^2. \quad (6)$$

Это происходит если  $\tau \gg \tau_0$  (фигурирующий здесь момент  $\tau_0$  показан для кривой 5 на рис. 4).

В наших расчетах это приводит к выходу на зависимость, весьма далекую от стационарной, как видно из рис. 5.

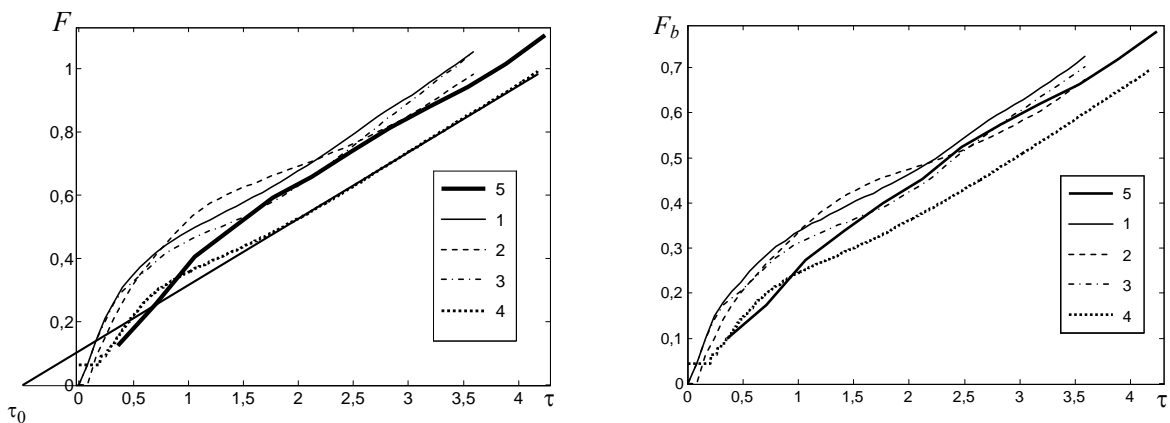


Рис. 4. Зависимости  $F$  и  $F_b$ : 1–5 – варианты 1–5 соответственно

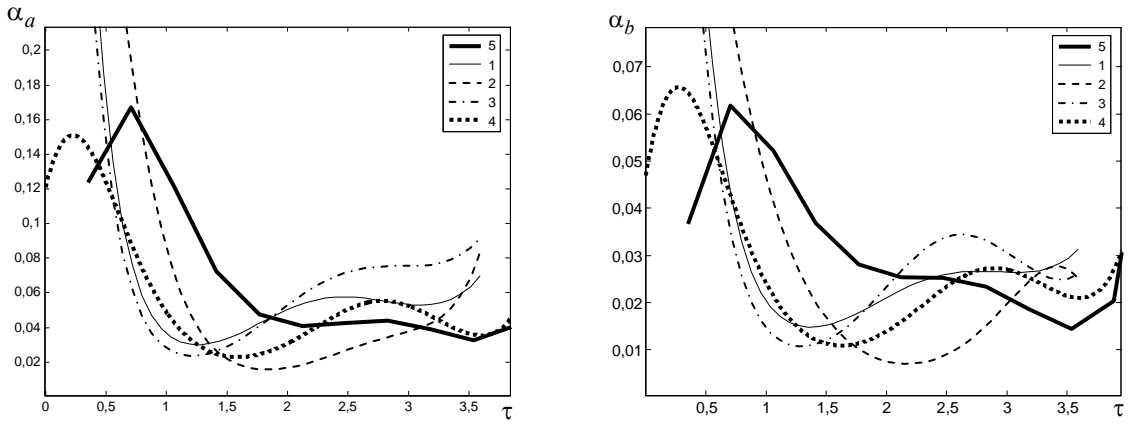


Рис. 5. Зависимости  $\alpha_a$  и  $\alpha_b$ : 1–5 – варианты 1–5 соответственно

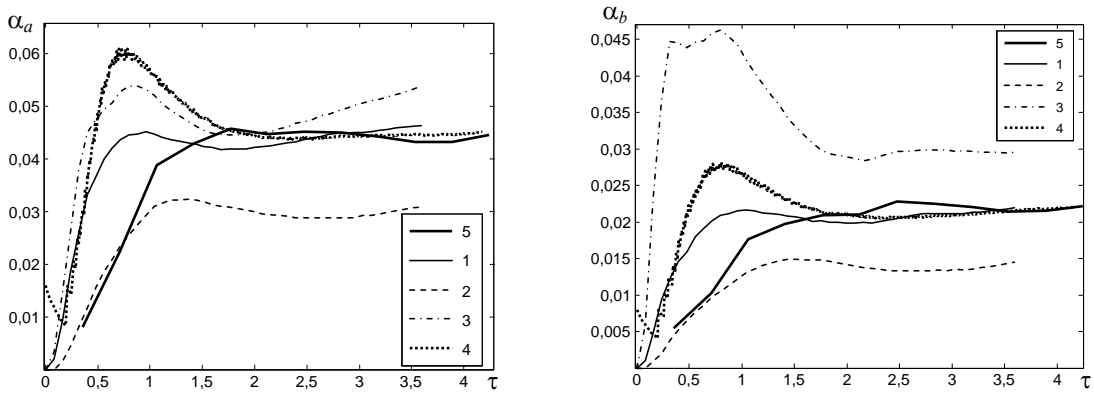


Рис. 6. Зависимости  $\alpha_a$  и  $\alpha_b$ : 1–5 – варианты 1–5 соответственно

Определим  $\hat{\alpha}_a$  и  $\hat{\alpha}_b$  следующим образом:

$$\hat{\alpha}_a = \frac{L_t}{AL_z (\tau - \tau_0)^2}; \quad (7)$$

$$\hat{\alpha}_b = \frac{y_b - y_c}{AL_z (\tau - \tau_0)^2}. \quad (8)$$

Выход на автомодельный режим более отчетливо можно видеть на рис.6, на котором приводятся зависимости  $\hat{\alpha}_a$  и  $\hat{\alpha}_b$  от времени. Видно, что происходит выход на одинаковое значение  $\hat{\alpha}_a$  и  $\hat{\alpha}_b$  в вариантах с наиболее широким спектром начальных возмущений (1, 4 и 5). Отличаются варианты 2 и 3, что является следствием малой ширины спектра начальных возмущений: в варианте 3  $\alpha_b > \frac{1}{2}\alpha_a$ ; сильнее же всего отличается от прочих вариант 2, в котором отсутствуют высокочастотные гармоники.

На рис. 7 приводятся зависимости от времени приведенного к безразмерному виду максимально-го в ЗТП значения турбулентной энергии  $E_m(\tau)$ .

Как видно из рис. 7, поведение величины  $E_m(\tau)$  происходит в соответствии с указанным выше делением течений на три этапа по поведению функции ширины ЗТП. На последнем этапе они выходят на приблизительно постоянные значения. Как и выше, сильнее всего отличается от прочих вариант 2, в котором отсутствуют высокочастотные гармоники, а ближе всех к автомодельному режиму вариант 4 со случайными начальными возмущениями.

На рис. 7 приведены также зависимости от времени максимального в ЗТП значения относительной квадратичной пульсации плотности. На автомодельной стадии значения  $R_m(\tau)$  выходят приблизительно на постоянное значение, близкое для всех вариантов, но несколько меньшее, чем в варианте 5, выполненном на более грубой счетной сетке.

Наконец, приведем значения величин  $\alpha$  и  $\alpha_2$ , а также  $E_m$  на автомодельной (квазиавтомодельной) стадии в расчетах (табл. 2).

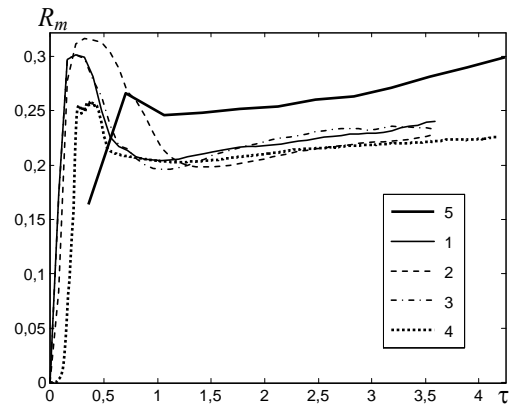
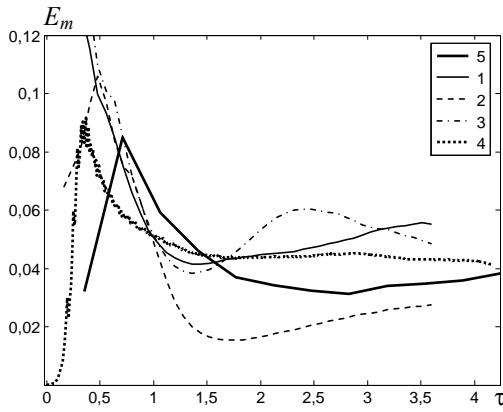


Рис. 7. Зависимости  $E_m(\tau)$  и  $R_m(\tau)$ : 1–5 – варианты 1–5 соответственно

Таблица 2

Значения интегральных величин в расчетах

Вариант	$\alpha$	$\alpha_2$	$E_m$
1	0,045	0,022	0,045
2	0,03	0,015	0,022
3	0,045	0,03	0,05
4	0,045	0,022	0,043
5	0,045	0,022	0,035

### 2.3. Фурье-анализ

Рассмотрим двумерное фурье-разложение взятой вблизи контактной границы  $z=0$  величины  $\varphi(x, y, z=0): f_{2\varphi}(\vec{k})$ . Пусть  $\varphi = u_z$  на момент  $t=9$ . Распределение двумерной спектральной плотности этой величины  $F_{2\varphi} = f_{2\varphi} f_{2\varphi}^*$  изотропно. Поэтому произведем усреднение полученной величины по окружности радиуса  $k$ , где:

$$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}; \quad k_x = \frac{2\pi}{L_y} n_x; \quad k_y = \frac{2\pi}{L_y} n_y;$$

$$L_x = L_y = 2\pi; \quad n_x = n_y = 1:500.$$

Получим одномерную спектральную плотность

$$F_{1\varphi}(k) = \frac{2\pi}{\Delta k} \int_k^{k+\Delta k} F_{2\varphi}(\vec{k}') k' dk'. \quad (9)$$

На рис. 8 эта величина показана для вариантов 1–4. Как видно из рис. 8, в низкочастотной части спектры в вариантах 1–3 отличаются мало. Тем не менее, есть прямая корреляция между максимальными амплитудами длинноволновых возмущений и шириной ЗТП. Так, в варианте 4 ширина ЗТП и максимальные амплитуды низкочастотных мод заметно меньше по сравнению с вариантами 1–3.

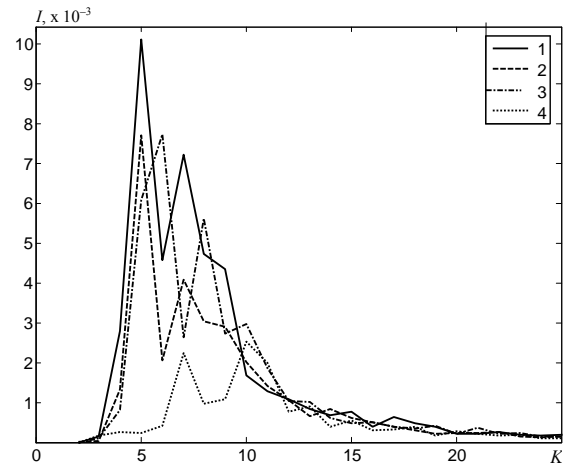


Рис. 8. Одномерная спектральная плотность  $u_z, t=9$ : 1–4 – варианты 1–4 соответственно

Колмогоровский закон для одномерной спектральной плотности в инерциальном интервале 2D турбулентности

$$F_{\varphi 2D}^{(K)}(k) = A_{\varphi 2D}^{(K)} k^{-3}. \quad (10)$$

Для 3D турбулентности соответствующий закон

$$F_{\varphi 3D}^{(K)}(k) = A_{\varphi 3D}^{(K)} k^{-5/3}. \quad (11)$$

Здесь  $A_{\varphi}^{(i)} = \text{const}$  подбираются так, чтобы в высокочастотной области имелась близость различного вида спектров (10)–(11) с полученными в расчетах.

Получаем, что для  $\varphi = u_z$  все варианты в низкочастотной области наиболее близки к зависимости (11) (рис. 9).

Из спектральных характеристик турбулентности можно также извлечь пространственный масштаб турбулентности. Как известно [15],  $\Lambda_{\text{int}}$  – характерный масштаб, совпадающий по порядку величины с расстоянием, на протяжении которого

еще сохраняются заметные корреляционные связи между значениями поля в двух точках

$$\Lambda_{\text{int}} = \frac{\pi}{2} \frac{\int_0^{\infty} K^{-1} F_1(K) dK}{\int_0^{\infty} F_1(K) dK}, \quad (12)$$

где  $F_1(K)$  – одномерная спектральная плотность 3D турбулентности.

Полученное в вариантах 1–4 спектральное распределение масштабов  $\Lambda_{\text{int}}$  (рис. 10) в низкочастотной области наиболее близко к зависимости, определяемой функцией  $F_1(K) \sim K^{-5/3}$ .

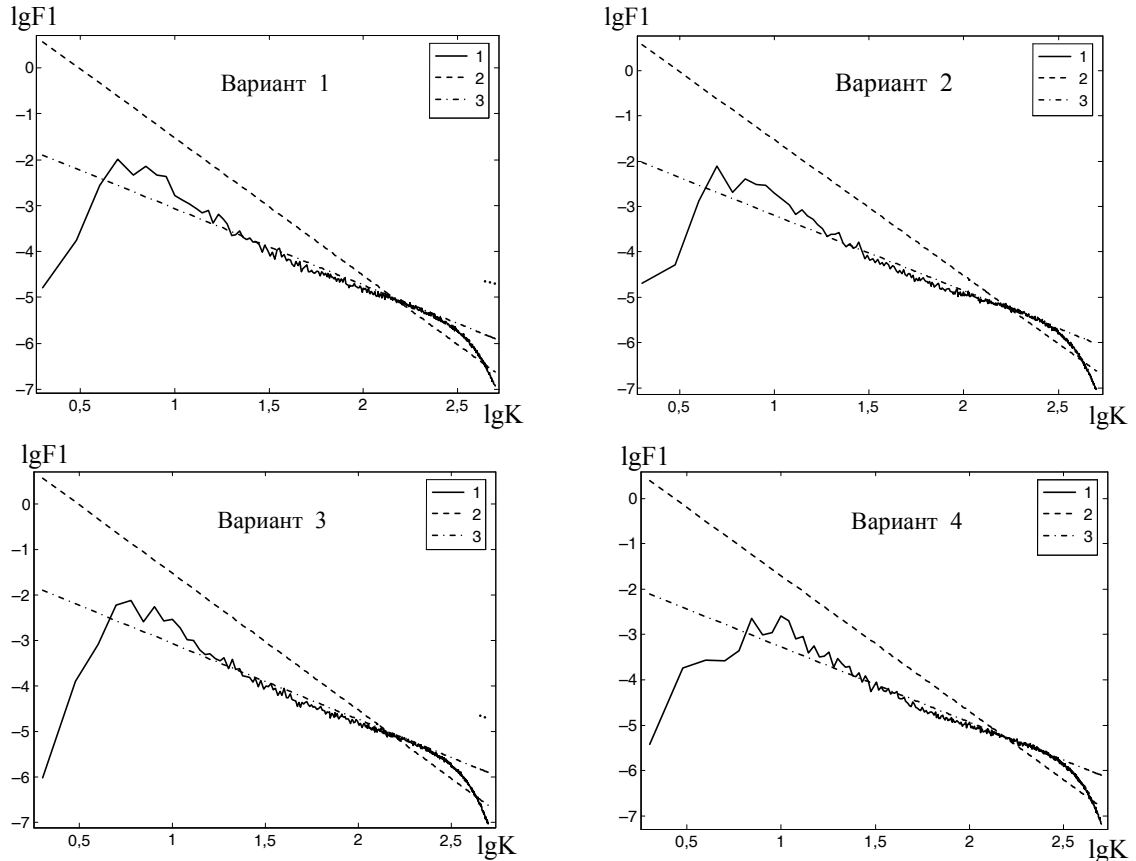


Рис. 9. Одномерная спектральная плотность  $u_z$ ,  $\tau = 3,6$ .

Варианты 1–4: 1 – расчет, 2 –  $A_{\varphi 3D}^{(K)} k^{-5/3}$ , 3 –  $A_{\varphi 2D}^{(K)} k^{-3}$

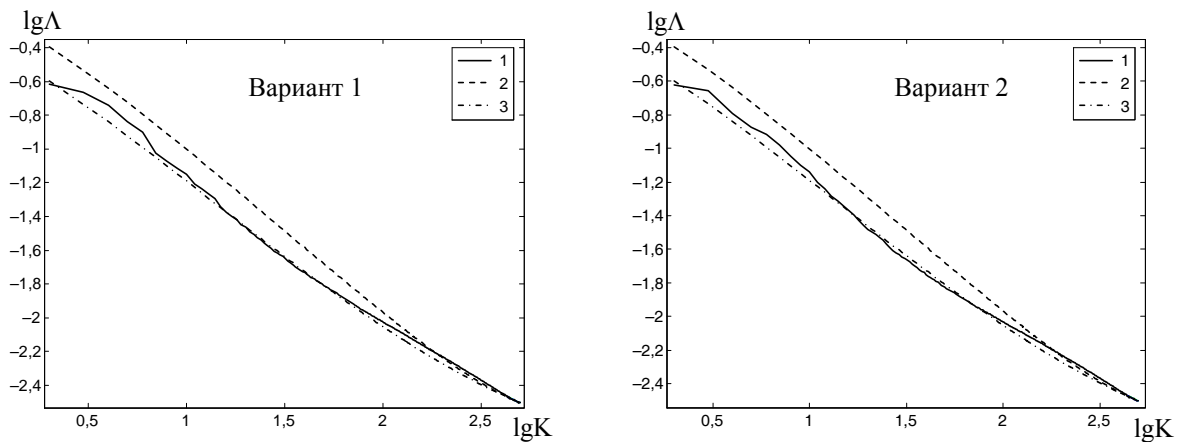


Рис. 10. Интегральный пространственный масштаб турбулентности величины  $u_z$ ,  $\tau = 3,6$ :

1 – расчет, 2 –  $F_1(K) \sim A_{\varphi 3D}^{(K)} k^{-5/3}$ , 3 –  $F_1(K) \sim A_{\varphi 2D}^{(K)} k^{-3}$  (см. также с. 37)

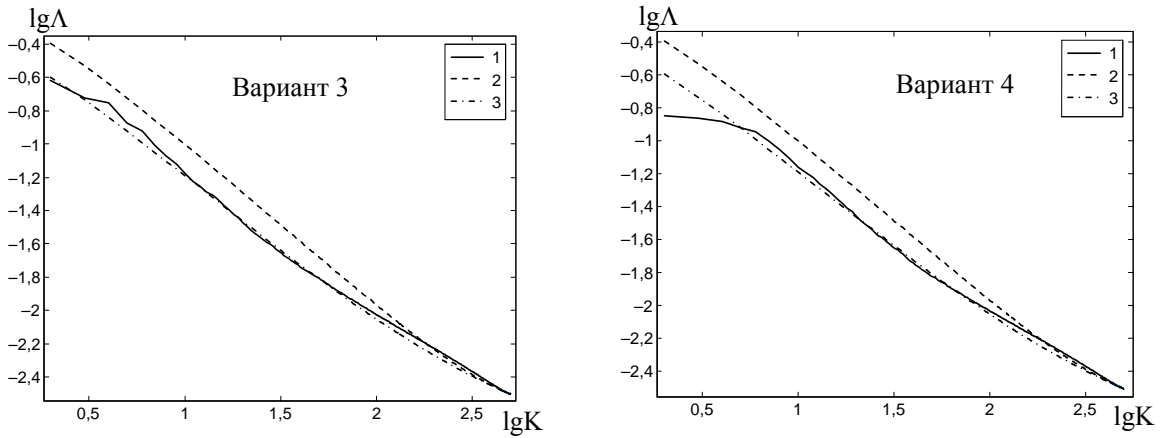


Рис. 10. Окончание

### 3. Влияние постановки расчетов на результаты моделирования

В этом разделе исследуется влияние на результаты расчетов значения константы  $\xi$ , которая отражает степень приближения наших расчетов к несжимаемому случаю.

Кроме вариантов 4 и 5 здесь рассматриваются для сравнения также расчеты [16] – см. табл. 3, в которой приводятся и другие данные расчетов.

Зависимости  $F(\tau)$  и  $F_b(\tau)$  для данных вариантов, сглаженные полиномом 6-й степени, показаны на рис. 11. Видно, что у всех кривых имеется начальный неавтомоделный участок с большим наклоном. Его длительность тем меньше, чем подробнее сетка, т. е. чем меньше схемная вязкость. Затем имеется короткий переходный участок, сменяющийся выходом на автомоделную стадию.

Таблица 3

Варианты расчетов со случайными возмущениями

Вариант	Источник	Размеры счетной области $L_x \times L_y \times L_z$	$\xi$	g	Счетная сетка $N_x \times N_y \times N_z$
4		$2\pi \times 2\pi \times 2\pi$	8	1	$1000^3$
5		$1 \times 1 \times 2$	2,5	1	$200 \times 200 \times 400$
6	[16]	$1 \times 1 \times 2$	100	0,1	$100 \times 100 \times 200$
7	[16]	$1 \times 1 \times 2$	100	0,1	$200 \times 200 \times 400$
8	[16]	$1 \times 1 \times 2$	10	0,1	$100 \times 100 \times 200$

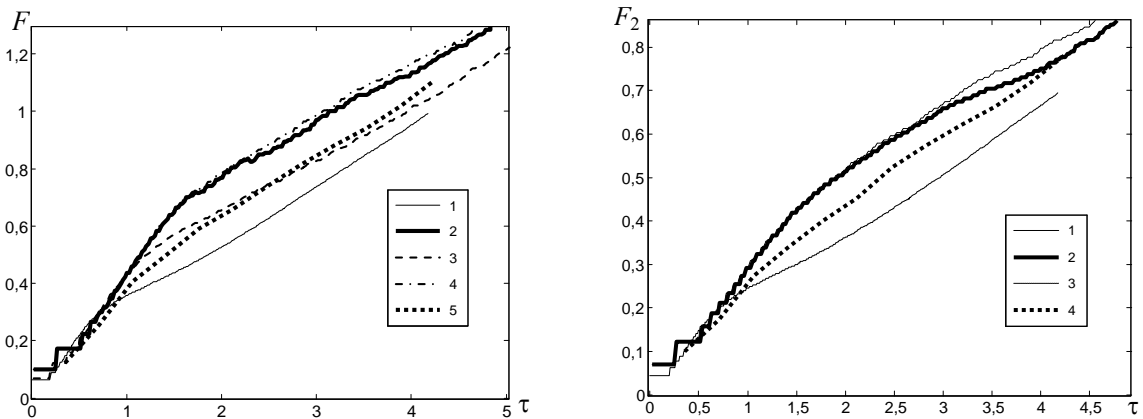


Рис. 11. Зависимости  $F(\tau)$  и  $F_b(\tau)$ . Большое давление: 2,3 – варианты 6–7 соответственно; малое давление: 1 – вариант 4, 4 – вариант 8, 5 – вариант 5

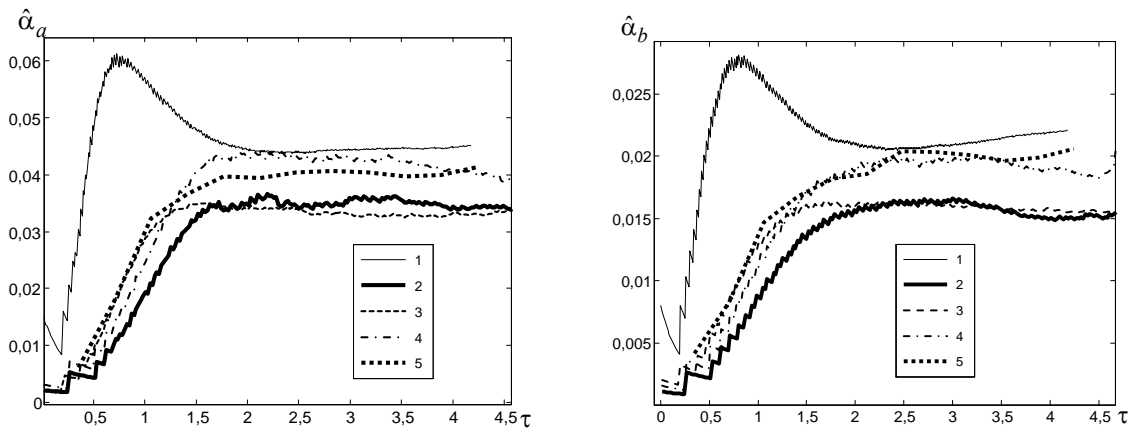


Рис. 12. Зависимости  $\alpha_a$  и  $\alpha_b$ . Большое давление: 2,3 – варианты 6–7 соответственно; малое давление: 1– вариант 4, 4 – вариант 8, 5 – вариант 5

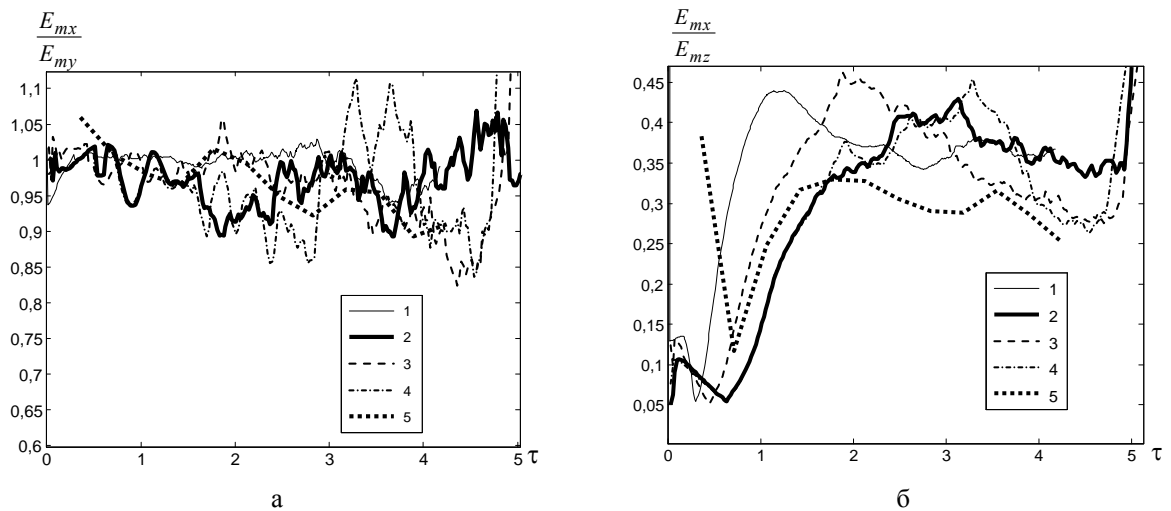


Рис. 13. Зависимости  $E_{mx}/E_{my}$  (а) и  $E_{mx}/E_{mz}$  (б). Большое давление: 2,3 – варианты 6–7 соответственно; малое давление: 1– вариант 4, 4 – вариант 8, 5 – вариант 5

Отчетливый выход на автомодельный режим можно видеть на рис. 12, на котором приводятся величины  $\hat{\alpha}_a$  и  $\hat{\alpha}_b$ . Рисунки показывают, что переход к автомодельному режиму (на котором величины  $\hat{\alpha}_a$  и  $\hat{\alpha}_b$  постоянны) происходит тем быстрее, чем подробнее счетная сетка. Кроме того, величины  $\hat{\alpha}_a$  и  $\hat{\alpha}_b$  оказываются больше для меньших относительных давлений. Очевидно, это связано с большими амплитудами волн, возникающих на контактной границе и воздействующих на ЗТП.

Исходя из известного определения тензора Рейнольдса  $R_{ij}$ , введем тензор  $E_{ij}$

$$R_{ij} \equiv \rho \langle u'_i u'_j \rangle \equiv \rho E_{ij}. \quad (13)$$

Найдем диагональные компоненты тензора  $E_{ij}$ :  $E_i \equiv E_{ii}$  – суммирование по  $i$  нет. Максималь-

ные по ширине ЗТП значения диагональных компонент:  $E_{mi} = \max(E_i)$ . Их отношения показаны на рис. 13. Из рис. 13 видно, что на автомодельной стадии указанные величины не зависят от постановки расчета. Отношение горизонтальной компоненты  $E_{mx}$  к вертикальной  $E_{mz}$  приблизительно постоянно и близко к 0,3–0,4, а горизонтальных компонент  $E_{mx}/E_{my}$  также постоянно и близко к единице. Полученные результаты согласуются с результатами феноменологической модели [17].

Максимальное в ЗТП значение величины  $k = E_{ii}/2$  (турбулентная энергия), приведенное к безразмерному виду

$$E_m = k/(L_t g), \quad (14)$$

показано на рис. 14 в зависимости от времени. На автомодельной стадии оно не зависит от постановки расчета, при этом приблизительно постоянно

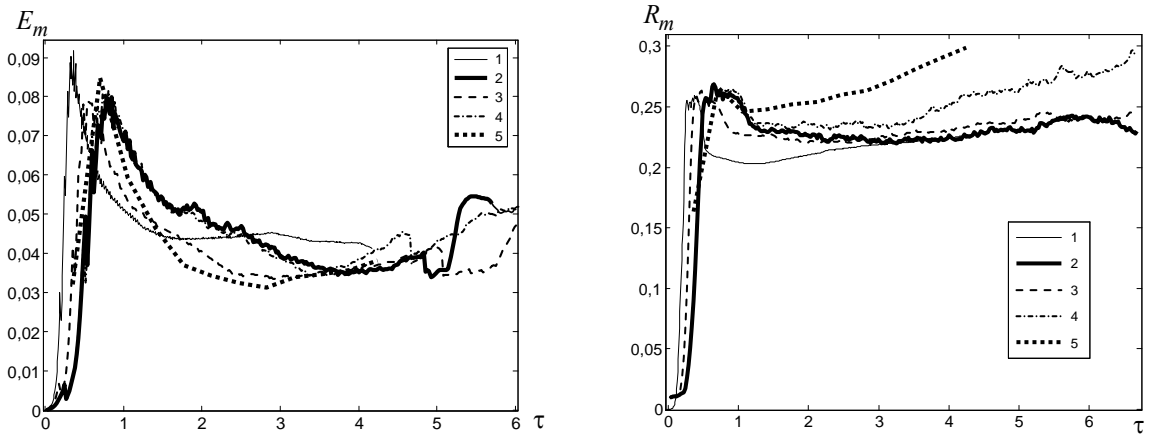


Рис. 14. Зависимости  $E_m(\tau)$  и  $R_m(\tau)$ . Большое давление: 2,3 – варианты 6–7 соответственно; малое давление: 1 – вариант 4, 4 – вариант 8, 5 – вариант 5

и близко к значению 0,04, что согласуется с результатами феноменологической модели [17] и  $k-\varepsilon$  модели [18].

На рис. 14 показана также зависимость от времени максимального в ЗТП значения относительной квадратичной пульсации плотности  $R_m$ . На автомодельной стадии значения  $R_m$  также выходят приблизительно на постоянное значение, близкое для всех вариантов с большим относительным давлением.

Для расчетов с малым относительным давлением на автомодельной стадии наблюдается небольшое, но отчетливое возрастание  $R_m$ . Это согласуется с тем фактом, что на контактной границе воздействуют волны сжатия-разрежения (дивергентного типа), движущиеся по вертикали. Амплитуда их возрастает с уменьшением относительного давления, что увеличивает дивергентную составляющую скорости относительно сдвиговой. Амплитуда также возрастает со временем из-за роста турбулентных пульсаций скорости, также имеющих дивергентную составляющую.

### Заклучение

Таким образом, 3D расчеты демонстрируют сильную зависимость ширины ЗТП от амплитуды и состава начального спектра возмущений в течение достаточно длительного времени. В этой ситуации «константа автомодельности» на достаточно большом интервале времени не является константой, а представляет собой функцию, зависящую от начальных данных задачи. Наиболее близок к автомодельности вариант со случайными возмущениями контактной границы.

Одномерная спектральная плотность пульсаций вертикальной компоненты скорости для всех расчетов в инерционном интервале близка к колмогоровскому закону  $F_\varphi^{(0)}(K) = \text{const} K^{-5/3}$ . То же самое относится к спектральному распределению турбулентного масштаба  $\Lambda_{\text{int}}$ .

### Список литературы

1. Анучина Н. Н., Кучеренко Ю. А., Неуважаев В. Е. и др. Турбулентное перемешивание на ускоряющейся границе разноплотных жидкостей // МЖГ. № 6. 1978.
2. Youngs D. L. 3D numerical simulation of turbulent mixing by Rayleigh-Taylor instability // Phys. Fluids. 1991. Vol. A3(5). P. 1312–1319.
3. Dimonte G., Youngs D. L., Dimits A. et al. A comparative study of the turbulent Rayleigh-Taylor instability using high-resolution three-dimensional numerical simulations: The Alpha-Group collaboration // Phys. Fluids. 2004. Vol. 16, № 5. P. 1668–1693.
4. Stadnik A. A., Statsenko V. P., Yanilkin Yu. V., Zhmailo V. A. Direct Numerical simulation of gravitational turbulent mixing // 5rd International Workshop on the Physics of compressible turbulent mixing, Stony Brook (USA), 1995.
5. Жмайло В. А., Стадник А. Л., Стаценко В. П., Янилкин Ю. В. Прямое численное моделирование гравитационного турбулентного перемешивания // Вопросы атомной науки и техники. Сер.: Теоретическая и прикладная физика. 1996. Вып. 1–2, С. 29–37.
6. Sin'kova O. G., Stadnik A. L., Statsenko V. P., Yanilkin Yu. V., Zhmailo V. A., Three-Dimensional Direct Numerical Simulation of Gravitational Turbulent Mixing // 6th International Workshop on the



Physics of compressible turbulent mixing, Marseille, France, 1997. 470–479.

7. Yanilkin Yu. V., Statsenko V. P., Rebrov S. V., Sin'kova O. G., Stadnik A. L. Study of gravitational turbulent mixing at large density differences using direct 3D numerical simulation // Report to 8th International Seminar on Turbulent Mixing of Compressible Matter. 8th IWPCTM, Pasadena, USA, 2001.

8. Янилкин Ю. В., Стаценко В. П., Ребров С. В., Синькова О. Г., Стадник А. Л. Исследование гравитационного турбулентного перемешивания при больших разностях с помощью прямого трехмерного численного моделирования // Вопросы атомной науки и техники. Сер.: Математическое моделирование физических процессов. 2002. Вып. 2. С. 3–9.

9. Кучеренко Ю. А., Шестаченко О. Е., Пискунов Ю. А. и др. Экспериментальные исследования автомодельного режима перемешивания разнородных газов в поле тяжести Земли // VI Забабахинские научные чтения, Снежинск, 2001.

10. Kuchugov P., Zmitrenko N., Rozanov V., Yanilkin Yu., Sin'kova O., Statsenko V. & Chernyshova O. The Evolution Model of Rayleigh-Taylor Instability development // Journal of Russian Laser Research, 2012.

11. Сотсков Е. А., Невмержицкий Н. В., Мешков Е. Е., Блинецов М. В., Дреннов А. О., Сеньковский Е. Д. Исследование развития локального возмущения и его взаимодействия с зоной турбулентного перемешивания на границе газ-студень // Вопросы атомной науки и техники. Сер.: Теоретическая и прикладная физика. 2003. Вып. 1–2. С. 57–59.

12. Раевский В. А., Сеницына С. Н., Янилкин Ю. В. Численное моделирование влияния зоны турбулентного перемешивания на рост локального возмущения в условиях неустойчивости Рэлея-Тейлора // Там же. С. 28–33.

13. Гаранин С. Ф. Автомодельное развитие неустойчивости Рэлея–Тейлора в районе угловых точек // Там же. 1994/95. Вып. 3/1. С. 12–17.

14. Стадник А. Л., Шанин А. А., Янилкин Ю. В. Эйлерова методика ТРЭК для расчета трехмерных газодинамических течений многокомпонентной среды // Там же. Сер.: Математическое моделирование физических процессов. 1994. Вып. 4. С. 71–78.

15. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. Ч. 2. М.: Наука. 1967.

16. Глазырин С. И., Егузова М. Ю., Жмайло В. А., Стаценко В. П., Янилкин Ю. В. Исследование гравитационного перемешивания в присутствии магнитного поля // XI Забабахинские научные чтения, Снежинск, 2012.

17. Стаценко В. П. Тестирование модели турбулентности с анизотропией тензора Рейнольдса // Вопросы атомной науки и техники. Сер.: Теоретическая и прикладная физика. 1996. Вып. 3. С. 43–51.

18. Гужова А. Р., Павлушин А. С., Стаценко В. П. Уточнение констант  $k - \varepsilon$  модели турбулентности на основе результатов прямого численного моделирования простейших турбулентных течений и измерений // Там же. 2005. Вып. 3. С. 37–48.

Статья поступила в редакцию 04.04.2013

## ВЫМЫВАНИЕ АТМОСФЕРНЫХ ГАЗОВЫХ ПРИМЕСЕЙ ИЗ ПРОИЗВОЛЬНОГО ДИНАМИЧЕСКОГО ИСТОЧНИКА, ДЕЙСТВУЮЩЕГО В ПОДОБЛАЧНОМ СЛОЕ

В. Н. Пискунов, Д. В. Цаплин

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Рассмотрен процесс вымывания газовых примесей в подоблачном слое с учетом испарения примеси из капель и процессов атмосферной турбулентной диффузии. Для решения задачи использован метод расщепления по физическим процессам, в котором динамика вымывания примеси рассматривается отдельно – на фоне атмосферной диффузии и переноса. Тем самым данные процессы создают в подоблачном слое динамический фоновый источник примеси. Получено общее решение уравнений кинетики вымывания для источника с произвольным фоновым распределением. Анализ этого решения выполнен для двух предельных случаев: медленно и быстро меняющихся со временем источников (по сравнению с процессом вымывания). Представлены результаты иллюстративных расчетов, а также приведены практические рекомендации по вычислению скорости вымывания для численных комплексов.

*Ключевые слова:* вымывание примесей осадками, атмосферный перенос, турбулентная диффузия, скорость вымывания, источники примеси

### Введение

Вымывание в подоблачном слое – один из важнейших физических процессов, приводящих к удалению газоаэрозольных примесей из атмосферы под действием осадков (дождевых капель, снега, града). Этот процесс играет ключевую роль в переносе примеси из атмосферы в почву и растения. Описание процесса вымывания важно при анализе последствий аварий с выбросами в атмосферу (в том числе и радиоактивных веществ, например НТО), а также для других экологических проблем: увеличение кислотности почвы и ее загрязнение тяжелыми металлами и стойкими органическими соединениями.

Экспериментально процессы вымывания удобнее всего изучать с помощью трассеров, которые легко выделить на фоне типовых атмосферных газов. Очень важными для практики трассерами являются соединения трития, например, пары тритиевой воды НТО, являющиеся наиболее распространенной формой газообразных соединений трития. Экспериментальное изучение взаимодействия НТО с каплями воды проводилось, как в лабораторных, так и полевых условиях. В работах [1, 2] представлены результаты лабораторных экспериментов по определению скорости обмена К

между парами НТО и падающими каплями воды в отсутствие процессов испарения/конденсации. На основе выполненных экспериментов сделан прогноз кинетики обмена НТО с каплями воды. Аналогичная постановка экспериментов использована ранее в работе [3]. Полевые эксперименты по исследованию обмена НТО между атмосферой и каплями дождя описаны в работах [4–8]. Отметим также работу [9], в которой измерены концентрации трития в окрестности nuclear power plant of Paks, Hungary.

Вымывание газовых примесей зависит от множества процессов, таких как: молекулярная, конвективная и турбулентная диффузия, тепло-массоперенос, испарение газов из капель, химические реакции в жидкой и газовой фазах. Все это делает вымывание одним из сложнейших для описания атмосферным процессом. Тем важнее построение теоретических моделей, которые выделяют наиболее важные факторы в процессе вымывания и могут в упрощенном варианте быть использованы в численных программах, моделирующих перенос примеси.

Среди численных подходов, которые могут учитывать процессы вымывания примесей из атмосферы, можно назвать модели переноса гауссова типа [10, 11], а также более сложные численные

комплексы [12, 13], рассчитывающие перенос загрязнений в атмосфере. При этом используется скорость (или обратное время) вымывания  $\Lambda$ , которая является одной из наиболее универсальных и важных характеристик вымывания газов осадками. Применительно к процессу вымывания трития развиваются квазистационарные модели, использующие Эйлеров подход [14], в которых рассчитываются профили концентраций трития по высоте с учетом этого процесса. Методика для расчета вымывания трития, основанная на средневзвешенном размере капель, предложена в работе [9].

В сложных численных комплексах, моделирующих перенос примесей в атмосфере, обычно не рассчитывается детальная кинетика обмена между газом и каплями. Вместо этого наиболее часто используют простейшее уравнение баланса

$$d_t C_g = -\Lambda_0 C_g, \quad (1)$$

где  $C_g$  – концентрация газовой примеси, а  $\Lambda_0$  – коэффициент вымывания [15]:

$$\Lambda_0 = \pi \int K(D) \varphi(D) D^2 dD. \quad (2)$$

Здесь  $\varphi(D)$  – спектр капель по их размерам  $D$  и  $K(D)$  – константа массообмена газа с поверхностью капли. Величина  $K(D)$  для миллиметровых размеров капель и скоростей падения порядка нескольких метров в секунду хорошо аппроксимируется следующей зависимостью [16, 17]:

$$K(D) = \frac{Dg}{D} \left\{ 2 + 0,6 \left[ \frac{DU}{v} \right]^{1/2} \left[ \frac{v}{Dg} \right]^{1/3} \right\}. \quad (3)$$

где  $Dg$  – коэффициент диффузии газа в воздухе,  $v$  – кинематическая вязкость воздуха и  $U$  – скорость падения капель. Подчеркнем, что  $\Lambda_0$  зависит только от константы массообмена  $K(D)$  и спектров капель  $\varphi(D)$ . Считается, что  $\Lambda_0$  не зависит от поведения концентраций  $C_g(\bar{x}, t)$  и что важен только процесс поглощения газа каплями.

Дальнейшим шагом является учет испарения примеси из капель для летучих соединений. Для этого введем концентрацию примеси в дождевых каплях  $C_{aq}$ . С учетом испарения примеси из капель и для одной пространственной координаты (высоты  $z$ ) имеем [8, 15, 18]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_g}{\partial t} &= -\Lambda_0 \left( C_g - \frac{C_{aq}}{HRT} \right); \\ \frac{\partial C_{aq}}{\partial t} - U \frac{\partial C_{aq}}{\partial z} &= \frac{\Lambda_0}{\omega_L} \left( C_g - \frac{C_{aq}}{HRT} \right), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $U$  – скорость падения капель,  $\omega_L$  – относительный объем жидко-капельной фракции в воздухе,  $H$  – эффективная постоянная Генри,  $R$  – универсальная газовая постоянная,  $T$  – температура.

В случае, когда концентрация газовой примеси  $C_g$  равномерно распределена по высоте в слое вымывания  $0 \leq z \leq h$  и зависит только от времени, уравнение (1) для изменения  $C_g$  модифицируется [8, 15, 18]:

$$\begin{aligned} \frac{dC_g}{dt} &= -\Lambda_{\text{эф}}(z) C_g; \\ \Lambda_{\text{эф}}(z) &= \Lambda_0 \exp \left( -\frac{(h-z)\Lambda_0 w}{U} \right), \end{aligned} \quad (5)$$

где введено обозначение  $w = 1/(\omega_L HRT)$ . Видно, что учет испарения приводит к поправке для скорости вымывания, зависящей от высоты. Необходимо отметить противоречие между исходными предположениями и полученным выражением для  $\Lambda_{\text{эф}}(z)$ . В постановке задачи предполагалось, что концентрация газовой примеси  $C_g$  не зависит от высоты. Однако полученная скорость вымывания  $\Lambda_{\text{эф}}$  явно зависит от  $z$ , т. е. из уравнения (5) мы также получим распределение  $C_g$  по высоте. Поэтому уравнение (5) можно считать первой итерацией к учету профиля концентраций примеси, обусловленного испарением газа из капель. В работе [8] выполнено сравнение между значениями  $\Lambda_0$  и  $\Lambda_{\text{эф}}$  для конкретных условий, реализованных в полевом эксперименте. Для высоты слоя вымывания  $h \approx 30$  м и паров НТО поправка не превысила 10 %. Но для больших высот  $h$  и плохо растворимых газов может реализоваться случай  $\Lambda_{\text{эф}} \ll \Lambda_0$ , т. е. влияние испарения примеси из капель будет очень сильным.

Обратимся теперь к процессам диффузии разного масштаба. Как видно из (3), процесс молекулярной диффузии уже учитывается при определении константы массообмена газа с поверхностью капли  $K(D)$  и параметра  $\Lambda_0$ . В работе [20] изложен подход, в котором уравнения кинетики (4) заменяются на некоторый усредненный процесс диффузии примеси по высоте с конвекцией (направленным сносом, обусловленным падением капель). Соответствующие уравнения конвективной диффузии решаются численно, чтобы определить динамику изменения профиля концентраций примеси со временем.

Для линейного начального профиля концентрации  $C_g$  получены зависимости скорости вымывания  $\Lambda(z, t)$  диоксида серы и аммиака от времени и высоты. Скорости конвективного сноса (фронта вымывания) много меньше скорости падения капель и оказались равными  $1,2 \cdot 10^{-4}$  м/с для  $SO_2$  и  $6,1 \cdot 10^{-3}$  м/с для  $NH_3$ . Необходимо подчеркнуть, что эффективные коэффициенты конвективной диффузии, которые в работе [20] составили  $2,17 \cdot 10^{-5}$  м<sup>2</sup>/с для  $SO_2$  и  $5,97 \cdot 10^{-2}$  м<sup>2</sup>/с для  $NH_3$ , значительно меньше характерных значений коэффициентов атмосферной турбулентной диффузии  $K = 5 \div 50$  м<sup>2</sup>/с [20]. Поэтому в практических задачах зачастую более важным является учет турбулентной диффузии. Первые попытки такого рода сделаны в работе [11], где рассмотрено вымывание постоянно действующих гауссовых источников в слое вымывания. Считается, что сам процесс вымывания концентрацию газа  $C_g$  не меняет. Получены аналитические решения для пяти видов таких источников.

Данная работа посвящена обобщению этой задачи. В ней рассматривается вымывание газовой примеси под действием осадков для произвольного динамического источника, действующего в подоблачном слое. Считается, что вымывание газа происходит на фоне более динамичных процессов: атмосферной турбулентной диффузии и ветрового переноса примеси, а также ее осаждения на подстилающую поверхность [8].

В общем случае при рассмотрении этих задач необходимо совместно решать уравнения атмосферной турбулентной диффузии и уравнения для кинетики вымывания.

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \left( \frac{\partial C}{\partial t} \right)_{\text{атм.диф}} + \left( \frac{\partial C}{\partial t} \right)_{\text{вымыв}}. \quad (6)$$

Процесс вымывания газовой примеси из атмосферы  $C_g(\bar{x}, t)$  определяется уравнением

$$\left( \frac{\partial C_g(\bar{x}, t)}{\partial t} \right)_{\text{вымыв}} = -\Lambda(\bar{x}, t) C_g(\bar{x}, t), \quad (7)$$

где  $\Lambda(\bar{x}, t) = \Lambda(C_g; \bar{x}, t)$  – скорость вымывания газовой примеси, которая в общем случае зависит от всех координат, поля концентраций  $C_g(\bar{x}, t)$ , а также характеристик дождя.

В данной работе при решении (6) нами предлагается использовать метод расщепления по физическим процессам и считать динамику вымывания отдельно – на фоне атмосферного переноса.

В этом случае при численной реализации остается важная проблема – как определить скорость вымывания  $\Lambda(\bar{x}, t)$  в неоднородном и меняющемся со временем поле концентраций  $C_g(\bar{x}, t)$  и  $C_{aq}(\bar{x}, t)$ ? Первым приближением служит уравнение (1) с константой вымывания  $\Lambda_0$ , определяемой из (2). Для однородных по высоте концентраций газовой примеси  $C_g$  учет испарения примеси приводит к поправке (5), зависящей от высоты.

Краткое содержание работы следующее. В разделе 1 выполнена постановка задачи и получено общее решение уравнений для источника с произвольным фоновым распределением  $C_f(z, t)$ .

Анализ этого решения выполнен в разделе 2 для двух предельных случаев: медленно меняющегося по сравнению с процессом вымывания фона (например, для суточных или сезонных колебаний концентраций примеси) и быстро меняющегося источника (импульсные выбросы в подоблачном слое, которые затем переносятся и расплываются за счет атмосферной турбулентной диффузии). В разделе 3 представлены результаты иллюстративных расчетов и приводятся практические рекомендации по вычислению скорости вымывания  $\Lambda(z, t) = \Lambda(C_g; z, t)$  для численных комплексов.

## 1. Постановка задачи и общее решение уравнений кинетики вымывания с источником

Будем считать, что процессы атмосферной турбулентной диффузии и ветрового переноса примеси создают в подоблачном слое динамический фоновый источник, создающий меняющееся со временем и высотой фоновое распределение газовой примеси  $C_f(z, t)$ . Рассмотрим процесс вымывания примеси на фоне этого источника. Учитывая этот источник в уравнениях (4) для кинетики вымывания, получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_g}{\partial t} &= -\Lambda_0 \left( C_g - \frac{C_{aq}}{HRT} \right) + \frac{\partial C_f}{\partial t}; \\ \frac{\partial C_{aq}}{\partial t} - U \frac{\partial C_{aq}}{\partial z} &= \frac{\Lambda_0}{\omega_L} \left( C_g - \frac{C_{aq}}{HRT} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Переходя к безразмерным переменным  $s = \Lambda_0 t$  и  $q = (h - z)/h$ , эти уравнения можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_g}{\partial s} &= -(C_g - wC_a) + \frac{\partial C_f}{\partial s}; \\ \frac{\partial C_a}{\partial s} + u \frac{\partial C_a}{\partial q} &= (C_g - wC_a); \\ w &= 1/(\omega_L HRT), \end{aligned} \quad (9)$$

где  $C_a = \omega_L C_{aq}$ ,  $u = U/\Lambda_0 h$ , а константа  $w$  характеризует обратный поток примеси из капли в атмосферу. В правую часть первого уравнения добавился заданный источник  $\partial C_f/\partial s$  (либо  $\partial C_f/\partial t$ ). При этом распределение примеси удовлетворяет следующему начальному условию  $C_g(z, t)|_{t=0} = C_f(z, 0)$ .

Таким образом, для получения полного решения, учитывающего все процессы, нам нужно сначала решить уравнение атмосферной турбулентной диффузии и определить из этого решения поле концентраций  $[C_g(\bar{x}, t)]_{\text{атм. диф}}$ , которое мы будем в дальнейшем считать фоновым:  $C_f(\bar{x}, t) \equiv [C_g(\bar{x}, t)]_{\text{атм. диф}}$ . Затем, решая уравнения (8) или (9), получим полное решение всей задачи. Возможен и другой вариант, когда решается уравнение (7) со скоростью вымывания  $\Lambda(C_g; \bar{x}, t)$ , учитывающей детали распределения концентраций  $C_g(\bar{x}, t)$ .

Для решения уравнений кинетики вымывания (9) при произвольном фоновом распределении газовой примеси  $C_f(q, s)$  используем преобразование Лапласа по переменной  $s$ :

$$\begin{aligned} p\tilde{C}_g - C_f(q, 0) &= (w\tilde{C}_a - \tilde{C}_g) + p\tilde{C}_f - C_f(q, 0); \\ u \frac{\partial \tilde{C}_a}{\partial q} &= \tilde{C}_g - (p+w)\tilde{C}_a, \end{aligned} \quad (10)$$

где введено обозначение  $\tilde{C}(q, p) = \int_0^\infty e^{-ps} C(q, s) ds$ .

При получении этих уравнений использовано предположение, что в начальный момент времени капля не содержит растворенную примесь  $C_a(q, 0) = 0$ , а также начальное условие  $C_g(q, 0) = C_f(q, 0)$ . Выражая из первого уравнения (10) концентрацию газовой примеси и подставляя ее во второе уравнение, получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{C}_a(q, p)}{\partial q} &= -\frac{1}{u} \left( \frac{wp}{p+1} + p \right) \tilde{C}_a(q, p) + \\ &+ \frac{1}{u} \frac{p}{p+1} \tilde{C}_f(q, p). \end{aligned} \quad (11)$$

Предполагая, что на высоте  $h$  ( $q = 0$ ) концентрация примеси в капле равна нулю  $\tilde{C}_a(0, p) = 0$ , получим решение:

$$\begin{aligned} \tilde{C}_a(q, p) &= \frac{1}{u} \int_0^q d\tau \frac{p}{p+1} \tilde{C}_f(\tau, p) \times \\ &\times \exp \left[ -\frac{q-\tau}{u} \left( \frac{wp}{p+1} + p \right) \right] \end{aligned} \quad (12a)$$

или после обратного преобразования Лапласа:

$$\begin{aligned} C_a(q, s) &= \int_0^{q/u} d\tau e^{-\tau(w-1)} \theta(s-\tau) \times \\ &\times \int_0^s d\eta \frac{\partial C_f(q-\tau u, \eta-\tau)}{\partial \eta} e^{-(s-\eta)} I_0 \left( 2\sqrt{\tau w(s-\eta)} \right) + \\ &+ \int_0^{q/u} d\tau e^{-s} e^{-\tau(w-1)} \theta(s-\tau) C_f(q-\tau u, 0) \times \\ &\times I_0 \left( 2\sqrt{\tau w(s-\tau)} \right), \end{aligned} \quad (12b)$$

где  $I_0$  – модифицированная функция Бесселя первого рода;  $\theta(s) = 0$ , если  $s < 0$  и  $\theta(s) = 1$ , если  $s > 0$ . Концентрация газовой примеси вычисляется с использованием решения (12b) по формуле:

$$\begin{aligned} C_g(q, s) &= \int_0^s [wC_a(q, \xi) - C_f(q, \xi)] e^{-(s-\xi)} d\xi + \\ &+ C_f(q, s). \end{aligned} \quad (12c)$$

Данное решение является общим для источника с произвольным фоновым распределением  $C_f(z, t)$ .

Для анализа временного поведения этого решения рассмотрим фоновое распределение, профиль которого не зависит от  $q$ , а временное поведение имеет экспоненциальный вид:  $C_f(q, s) = A \exp(-as)$ . Тогда  $\tilde{C}_a(q, p) = A(p+a)^{-1}$  и решение определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} C_a(q, s) &= \\ &= A e^{-s} \int_0^{R(q, s)/u} e^{-\tau(w-1)} \left[ e^{-(s-\tau)(a-1)} + F(s, \tau) \right] d\tau, \\ &\text{где } R(q, s) = \min \{ q, su \}, \\ &F(s, \tau) = \int_0^{s-\tau} e^{-\mu(a-1)} \left[ \sqrt{\frac{\tau w}{s-\tau-\mu}} \times \right. \\ &\left. \times I_1 \left( 2\sqrt{\tau w(s-\tau-\mu)} \right) - I_0 \left( 2\sqrt{\tau w(s-\tau-\mu)} \right) \right] d\mu. \end{aligned} \quad (13)$$

Решение (13) понадобится нам в дальнейшем.

## 2. Анализ результатов

Рассмотрим решение для вымывания газовой примеси дождевыми каплями в подоблачном слое атмосферы (12) для двух предельных случаев: медленно и быстро меняющихся со временем источников фоновой концентрации  $C_f(q, t)$ .

*Решение для медленно меняющегося со временем фонового источника*

В случае медленно меняющегося по сравнению с процессом вымывания фона (например, для суточных или сезонных колебаний концентраций примеси) распределение примеси можно представить в окрестности точки  $s = 0$  следующим рядом:

$$C_f(q, s) = C_f(q, 0) + C'_f(q, 0)s + \frac{1}{2}C''_f(q, 0)s^2 + O(s^3), \quad (14)$$

где введено обозначение  $C_f^{(k)}(q, 0) = \partial^k C_f / \partial_s^k \Big|_{s=0}$ .

Лаплас-образ ряда (14) имеет вид:

$$\tilde{C}_f(q, s) = \frac{C_f(q, 0)}{p} + \frac{C'_f(q, 0)}{p^2} + \frac{C''_f(q, 0)}{p^3} + O\left(\frac{1}{p^3}\right). \quad (15)$$

В нулевом приближении, когда фоновое распределение, создаваемое источником, не меняется со временем (однако оно может иметь профиль по высоте)  $C_f(q, s) = C_f(q, 0) = C_0(q)$ ;  $\tilde{C}_f(q, s) \approx C_0(q)/p$ , из (12а) получим решение:

$$\tilde{C}_a(q, p) = \frac{1}{u} \int_0^q d\tau \frac{C_0(\tau)}{p+1} \exp\left[-\frac{q-\tau}{u} \left(\frac{wp}{p+1} + p\right)\right], \quad (16)$$

после обратного преобразования Лапласа от этого выражения:

$$C_a(q, s) = \frac{e^{-s}}{u} \int_0^q d\tau C_0(q-\tau) \times \exp\left(-\frac{\tau}{u}(w-1)\right) I_0\left(2\sqrt{w\frac{\tau}{u}\left(s-\frac{\tau}{u}\right)}\right). \quad (17)$$

Решение для газовой концентрации находится подстановкой (17) в выражение (12с):

$$C_g(q, s) = C_0(q)e^{-s} + w \int_0^s C_a(q, \xi) e^{-(s-\xi)} d\xi. \quad (18)$$

Скорость вымывания вычисляется из следующего соотношения, вытекающего из (6), (7), (9):

$$\Lambda(q, s)/\Lambda_0 = 1 - wC_a(q, s)/C_g(q, s). \quad (19)$$

*Решение для быстро меняющегося со временем источника*

Другой важный для практики случай – быстро меняющиеся по сравнению с процессом вымывания примеси источники. Это могут быть, например, импульсные выбросы в подоблачном слое, которые затем переносятся и расплываются за счет атмосферной турбулентной диффузии. В качестве примера мы возьмем одномерный (зависящий только от  $z$ ) источник:

$$C_f(z, t) = \frac{\theta(t)Q}{\sqrt{4\pi K(t+t_0)}} \times \left\{ \exp\left[-\frac{(H_0-z)^2}{4K(t+t_0)}\right] + \exp\left[-\frac{(H_0+z)^2}{4K(t+t_0)}\right] \right\}. \quad (20)$$

Это выражение описывает мгновенный точечный источник, задействованный на высоте  $H_0$  во время  $-t_0$  перед началом вымывания (которое начинается в момент  $t = 0$ ). На подстилающей поверхности  $z = 0$  поставлено условие полного отражения,  $K$  – коэффициент вертикальной атмосферной диффузии. Источник (20) иллюстративный, но он имеет гауссов вид и является решением уравнения турбулентной диффузии [20]. Такие источники широко используются и на практике: в аппроксимациях Пасквилла, Смита–Хоскера и др. [21]. Подчеркнем, что гауссовы источники рассматриваются и в статье [11], результаты которой мы обобщаем.

Характерное время динамики источника  $t_{\text{дин}} \approx h^2/4K$ . Для  $h = 100$  м,  $K = 10$  м<sup>2</sup>/с получим  $t_{\text{дин}} \approx 250$  с, что значительно меньше характерных времен вымывания  $t_{\text{вымыв}} = \Lambda^{-1} \approx 10^3 - 10^5$  с. Тем самым для данных параметров источник (20) можно считать быстро меняющимся.

Основным физическим предположением, используемым для быстрых источников, является слабое изменение концентрации газовой фазы за счет вымывания. Фактически предполагается, что концентрация примеси в газовой фазе следует за источником и не успевает меняться за счет вымывания:

$$C_g(q, s) = C_f(q, s) \quad (21)$$

В этом случае из второго уравнения (10) получим решение:

$$\tilde{C}_a(q, p) = \frac{1}{u} \int_0^q d\tau \tilde{C}_f(\tau, p) \exp\left[-\frac{q-\tau}{u}(w+p)\right]. \quad (22)$$

Сделав обратное преобразование Лапласа от выражения (22), получим:

$$C_a(q, s) = \frac{1}{u} \int_0^{R(q, s)} d\tau C_f \left( q - \tau, s - \frac{\tau}{u} \right) \exp \left( -\frac{\tau}{u} w \right). \quad (23)$$

Напомним, что концентрация газовой примеси в этом приближении просто равна фоновой (21).

Методический интерес представляет постановка задачи, когда выполняется условие (21), но фоновая концентрация постоянна со временем  $C_g(q, s) = C_f(q, 0) = C_0(q)$ . Данное предположение рассматривается в работе [11] для стационарных гауссовых источников (например, для стационарной струи). В этом случае концентрация примеси в каплях определяется выражением:

$$C_a(q) = \frac{1}{u} \int_0^q d\tau C_0(\tau) \exp \left( \frac{w(\tau - q)}{u} \right), \quad (24)$$

$$\frac{\Lambda(q)}{\Lambda_0} = 1 - \frac{\int_0^q w d\tau C_0(\tau) \exp[w(\tau - q)/u]}{u C_0(q)}.$$

Формула (24) для  $C_a(q)$  обобщает результаты [11] на произвольные профили  $C_0(q)$ , а выражение для  $\Lambda(q)$  обобщает выражение (5) для  $\Lambda_{эф}$ , поскольку в частном случае  $C_a(q) = \text{const}$  оно дает  $\Lambda_{эф}$ .

Другой случай – это распределение, профиль которого не зависит от  $q$ , а временное поведение имеет экспоненциальный вид:  $C_f(q, s) = A \exp(-as)$ . Для него получено общее решение (13), рассмотрим его в приближении быстро меняющегося источника. Из (23) получим достаточно простое решение

$$C_a(q, s) = \frac{A e^{-s}}{a - w} \left[ \exp \left( \frac{R(q, s)(a - w)}{u} \right) - 1 \right], \quad (25)$$

которое полезно сравнить с (13) для проверки точности и работоспособности приближения быстрого источника.

### 3. Иллюстративные расчеты и рекомендации

*Расчеты для заданного начального профиля примеси*

В численных расчетах для заданного начального профиля примеси (решения (17)–(19)) использовались следующие значения параметров вымывания:  $h = 100$  м,  $U = 4$  м/с,  $p = 1$  мм/ч,  $\Lambda_0 = 10^{-4}$  с<sup>-1</sup>,  $w = 33,84U/p$  ( $T = 10$  °C), соответствующие вымыванию паров НТО [8]. На рис. 1 показаны вертикальные профили относительных

скоростей вымывания  $\Lambda_{эф}/\Lambda_0$  и  $\Lambda/\Lambda_0$  с фоновым распределением  $C_0(q) = 1+q$  на момент времени  $s = 1$ , вычисленных по выражениям (5) и (19) соответственно. Черной кривой на рисунке показана скорость вымывания  $\Lambda_{эф}$ , штрихпунктирной кривой показано отношение скоростей вымывания  $\Lambda/\Lambda_{эф}$ .

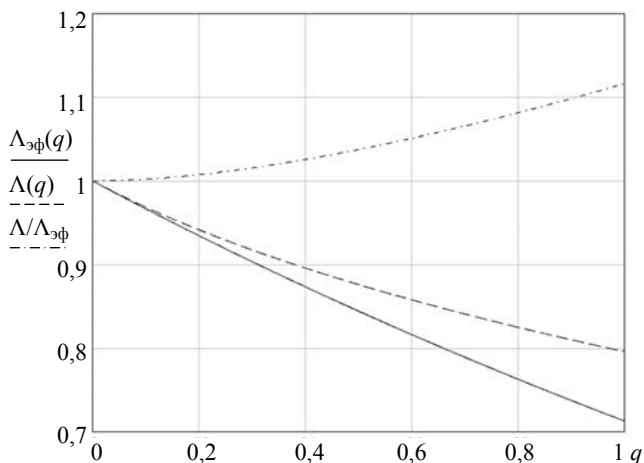


Рис. 1. Профили скоростей вымывания  $\Lambda_{эф}/\Lambda_0$  и  $\Lambda/\Lambda_0$  паров НТО с фоновым распределением  $C_0(q) = 1+q$

Из рисунка видно, что отличие профилей скоростей вымывания, рассчитанных по выражениям (5) и (19) достигает величины порядка 10%. Это связано с тем, что в формуле для  $\Lambda_{эф}$  не учитывается пространственный профиль концентрации газовой примеси.

На рис. 2 изображены профили концентраций примеси в газовой фазе  $C_g$  и эквивалентной кон-

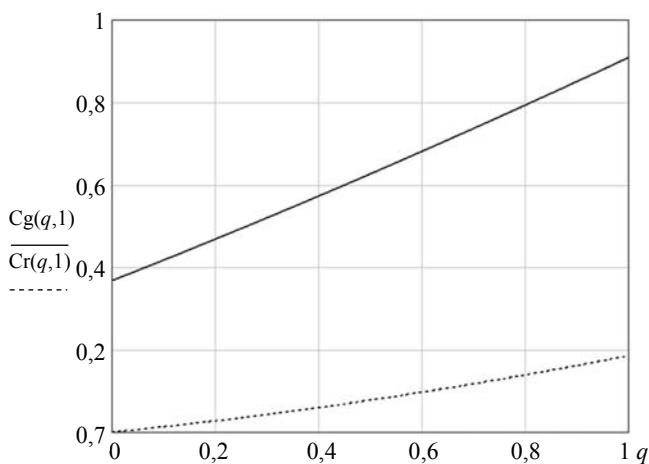


Рис. 2. Профили концентраций примеси в газовой фазе  $C_g$  и в дождевых каплях  $C_r = wC_a$  на момент времени  $s = 1$

центрации в дождевых каплях  $C_r = wC_a$ , рассчитанные на тот же момент времени, а рис. 3 показывает изменение концентраций примеси у поверхности ( $q = 1$ ) со временем.

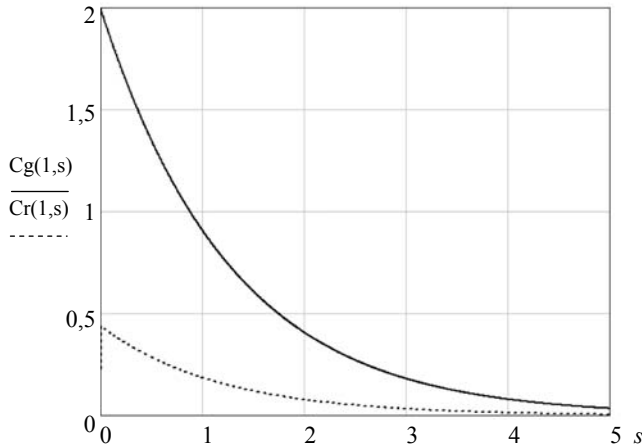


Рис. 3. Изменение концентраций примеси у поверхности со временем

Для заданного начального профиля примеси можно получить следующие балансные равенства:

$$\int_0^{\infty} ds C_g(q, s) = w \int_0^{\infty} ds C_a(q, s) + C_0(q),$$

$$\int_0^{\infty} ds \frac{\partial C_a(q, s)}{\partial q} = \frac{C_0(q)}{u}, \quad \int_0^{\infty} ds C_a(q, s) = \frac{1}{u} \int_0^q d\tau C_0(\tau).$$

Чтобы убедиться в хорошей точности, в приведенных выше расчетах контролировалось выполнение этих равенств. Расхождение не превышало единиц в четвертом знаке.

Рассмотрим результаты расчетов потоков примеси на поверхность. Количество газовой примеси, вымываемой осадками, за время  $s$  на высоте  $q$  определяется следующим интегралом:

$$J(q, s) = u \int_0^s \frac{\partial C_a(q, r)}{\partial q} dr.$$

Для быстрых источников (22) и (23) этот интеграл после несложных преобразований сводится к выражению:

$$J(q, s) = -C_a(q, s) + \int_0^s C_f(q, r) dr - w \int_0^s C_a(q, r) dr. \quad (26)$$

В приближении  $\Lambda_{эф}$  (5) количество газовой примеси, вымываемой осадками, определяется интегралом:

$$J_{эф}(q, s) = \int_0^s \int_0^q C_f(\tau, r) e^{-\frac{\tau w}{u}} d\tau dr. \quad (27)$$

Численные расчеты выполнены для вымывания паров НТО – параметры вымывания были указаны ранее. Динамический источник задавался в виде (20), при этом использовалось приближение (21) для быстро действующего источника. Параметры источника:  $Q = 10^3$  кг/м<sup>2</sup>,  $H_0 = 30$  м,  $K = 10$  м<sup>2</sup>/с,  $t_0 = 100$  с. На рис. 4 изображена динамика роста  $J(q, s)$  и  $J_{эф}(q, s)$  у поверхности  $q = 1$  в диапазоне  $0 \leq s \leq 1$ . Из рисунка видно, что отличие потоков, рассчитанных по формулам (26) и (27), достигает величины порядка 10 %.

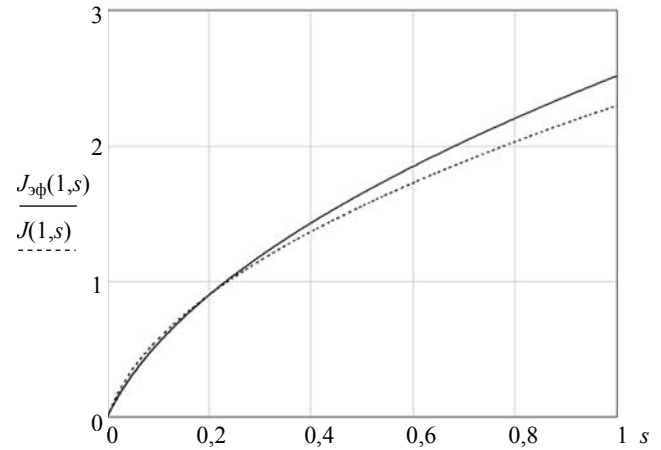


Рис. 4. Динамика потоков  $J(q, s)$  и  $J_{эф}(q, s)$  у поверхности

#### Проверка работоспособности приближения быстрого источника

Для распределения, профиль которого не зависит от  $q$ , а временное поведение имеет экспоненциальный вид  $C_f(q, s) = A \exp(-as)$ , в приближении быстрого источника получено решение (25). Полезно сравнить его с общим решением (13) для такого же профиля, чтобы проверить работоспособность данного приближения. Из общих соображений хорошее совпадение должно получаться для параметра  $a \gg 1$ , поскольку мы работаем с безразмерным временем  $s$ , которое порядка единицы для процесса вымывания. Результаты расчетов показывают хорошую работоспособность приближения быстрого источника уже для значений параметра  $a \approx 3-5$ . Так, например, для  $a = 5$  и  $A = 1$  вплоть до значений безразмерного времени  $s = 10$  различие между (13) и (25) не превышает 1 %. Однако уже для значения  $a = 1$ , когда совпадают темпы изменения источника и скорости процесса вымывания, отличие при  $s = 1$  достигает десятка раз.



*Расчет скорости вымывания в задачах атмосферного переноса*

Как отмечалось выше, в общем случае необходимо совместно решать уравнения атмосферной турбулентной диффузии и уравнения для кинетики вымывания. Если применить метод расщепления по физическим процессам, то в каждой лагранжевой ячейке можно считать динамику вымывания отдельно – на фоне атмосферного переноса. Сформулируем алгоритм расчета скорости вымывания  $\Lambda(\vec{x}, t)$  в неоднородном и меняющемся со временем поле концентраций  $C(\vec{x}, t)$ .

Сначала рассмотрим задачу с одной пространственной координатой  $z$ . В принципе, можно воспользоваться общей формулой (19):

$$\Lambda(q, s) / \Lambda_0 \equiv -\partial \ln C_g / \partial s = 1 - w C_a(q, s) / C_g(q, s).$$

Однако в расчетах переноса примеси нет необходимости определять поля концентраций примеси в каплях  $C_a(q, s)$ , а достаточно выдавать только поток на подстилающую поверхность (поначалу без траекторий капель). Поэтому пользоваться (19) нецелесообразно. Для расчета  $\Lambda(q, s)$  в общем случае воспользуемся наиболее простой формулой (24), но вместо  $C_0(q)$  будем использовать концентрацию примеси в газовой фазе на текущий момент времени:

$$\frac{\Lambda(q, s)}{\Lambda_0} = 1 - w \frac{C_a(q, s)}{C_g(q, s)} = 1 - \frac{\int_0^q d\tau C_g(\tau, s) \exp[w(\tau - q)/u]}{u C_g(q, s)}. \quad (28)$$

Видно, что в данном случае скорость вымывания зависит от поля концентраций:  $\Lambda(q, s) = \Lambda(C_g; q, s)$ . Если в качестве  $q$  брать безразмерную длину дуги по траектории капли, то эта формула также работает и можно вычислить скорость вымывания  $\Lambda(\vec{x}, t)$  с учетом реальных траекторий капель в произвольной пространственной точке  $\vec{x}$ . При использовании метода Монте-Карло легко реализовать розыгрыш по размерам капель и определить реальные траектории капель в пространстве.

Чтобы не считать интегралы, в формуле (28) для  $\Lambda(q, s)$  можно использовать разложение по  $q$ . С точностью до линейных членов:

$$\frac{\Lambda(q, s)}{\Lambda_0} = \frac{e^{-qw/u} + uA(s)(1 - \exp(-qw/u))/w}{1 + qA(s)}, \quad (29)$$

$$A(s) = [C_g(1, s) - C_g(0, s)] / C_g(0, s).$$

Для больших градиентов концентраций  $C_0(q)$  применение более точных формул (28), (29) может дать значительное отличие от  $\Lambda_{эф}$ , вычисленной по (5). На рис. 5 показаны сравнительные результаты расчетов  $\Lambda$  по этим трем формулам для начального распределения примеси  $C_0(q) = \exp(-q)$ .

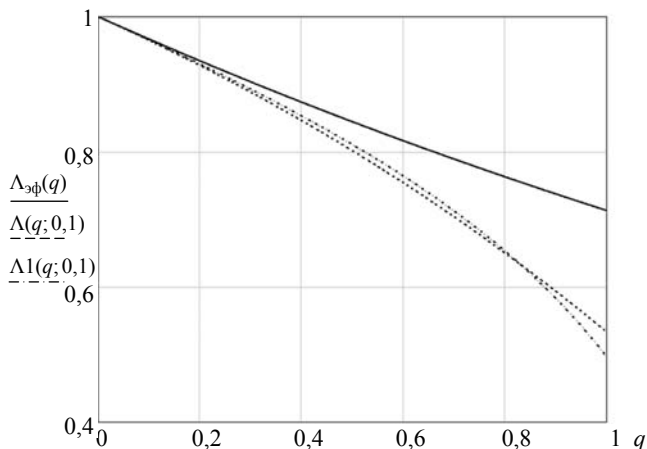


Рис. 5. Сравнительные результаты расчетов  $\Lambda / \Lambda_0$  для момента времени  $s = 0,1$  по формулам: (5) (непрерывная линия), (28) (пунктирная кривая) и (29) (штрихпунктирная кривая)

Интересно отметить, что при очень больших градиентах начальной концентрации возможны отрицательные значения  $\Lambda$  (вблизи подстилающей поверхности). Этот факт проиллюстрирован на рис. 6 для начального распределения примеси  $C_0(q) = \exp(-3q)$ .

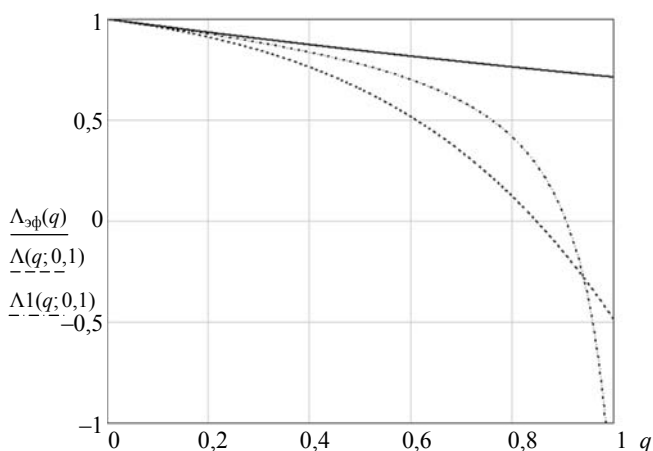


Рис. 6. Сравнительные результаты расчетов  $\Lambda / \Lambda_0$  для момента времени  $s = 0,1$  по формулам: (5) (непрерывная линия), (28) (пунктирная кривая) и (29) (штрихпунктирная кривая). Начальное распределение  $C_0(q) = \exp(-3q)$

Отрицательные значения  $\Lambda$  вблизи границы  $q = 1$  означают, что происходит рост газовой фазы за счет капель, которые при падении сначала собирают газ вверху, а затем внизу начинают испаряться и подпитывать газовую фазу (см. рис. 7).

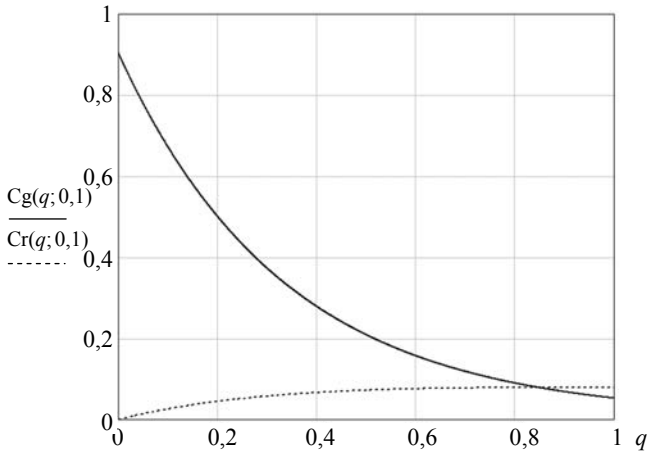


Рис. 7. Профили концентраций примеси в газовой фазе  $C_g$  и в дождевых каплях  $C_r = wC_a$  на момент времени  $s = 0,1$  для начального распределения  $C_0(q) = \exp(-3q)$

Отметим, что совпадение между скоростями вымывания, рассчитанными по формулам (28) и (29), достаточно хорошее, даже для резких профилей.

### Заключение

Рассмотрено вымывание газовой примеси в подоблачном слое под действием осадков. В практических задачах физики атмосферы вымывание газа происходит на фоне более динамичных процессов атмосферной турбулентной диффузии и ветрового переноса примеси, т. е. в общем случае при рассмотрении этих задач необходимо совместно решать уравнения атмосферной турбулентной диффузии и уравнения для кинетики вымывания. Для решения этой задачи предлагается использовать метод расщепления по физическим процессам, в котором динамика вымывания примеси рассматривается отдельно – на фоне турбулентной диффузии и ветрового переноса. Тем самым данные процессы создают в подоблачном слое динамический фоновый источник примеси. Для получения полного решения, учитывающего все процессы, нам нужно сначала решить уравнение атмосферной турбулентной диффузии и определить из этого решения поле концентраций, которое мы будем в дальнейшем считать фоновым.

Затем, решая уравнения кинетики вымывания (8), (9) с заданными фоновыми источниками, получим полное решение всей задачи.

Получено общее аналитическое решение (12a), (12b), (12c) уравнений кинетики вымывания (9) для источника с произвольным фоновым распределением. Анализ этого решения выполнен для двух предельных случаев: медленно меняющегося по сравнению с процессом вымывания фона (например, для суточных или сезонных колебаний концентраций примеси) и быстро меняющегося источника (импульсные выбросы в подоблачном слое, которые затем переносятся и расплываются за счет атмосферной турбулентной диффузии).

Для медленно меняющегося источника в нулевом приближении получено аналитическое решение (17), (18), когда фоновое распределение, создаваемое источником, не меняется со временем (однако оно может иметь профиль по высоте). Это приближение эквивалентно заданию в начальный момент некоего профиля концентраций газовой примеси, т. е. задаче Коши для уравнений кинетики без источника. Получено выражение (19) для вычисления скорости вымывания  $\Lambda(z, t)$  в этом приближении.

Основным физическим предположением, используемым при получении решения для быстрых источников, является слабое изменение концентрации газовой фазы за счет вымывания. Фактически предполагается (21), что концентрация примеси в газовой фазе следует за источником и не успевает меняться за счет вымывания. Показано, что для постоянной со временем фоновой концентрации данное решение обобщает результаты [11] на произвольные профили  $C_0(q)$ , а выражение для скорости вымывания (24) обобщает известное решение (5) для  $\Lambda_{эф}$ .

Полученные решения проиллюстрированы численными расчетами. Приведены рабочие формулы (28), (29) для скорости вымывания  $\Lambda(z, t)$ , которые рекомендуется использовать в практических расчетах по численным комплексам.

### Список литературы

1. Беловодский Л. Ф., Гаевой В. К., Кошелева Т. А. Обмен между парами окиси трития и поверхностью воды // Атомная энергия. 1982. Т. 52. Вып. 4. С. 252.
2. Belovodsky L. F., Gaevo V. K., Golubev A. V., Kosheleva T. A. Tritium oxide wash-out by drops //

- J. Environ. Radioactivity. 1997. Vol. 36, N 2–3. P. 129–139.
3. Booker D. V. Exchange between water droplets and tritiated water vapor // *Quart. J. Roy. Meteorol. Soc.* 1965. Vol. 91. P. 73–79.
4. Dana M. T., Wogman N. A., Wolf M. A. Rain scavenging of tritiated water (HTO): a field experiment and theoretical consideration // *Atmospheric Environment*. 1978. Vol. 42. P. 1623–1529.
5. Golubev A., Khabibulin M., Mavrin S. Studies of HTO washout and deposition in the vicinity of emission source. *Radioprotection-Colloques* 37, C1, 2000.
6. Golubev A. V., Aleinikov A. Y., Golubeva V. N. Studies of HTO washout and deposition in the vicinity of emission source II: model-experiment intercomparison // *Fusion Science and Technology*. 2002. Vol. 41. P. 474–477.
7. Golubev A. V., Aleinikov A. Y., Golubeva V. N. Studies of ht and hto behavior in the vicinity of long-term emission source: model-experiment intercomparison WM'03 Conference, February 23–27, 2003.
8. Piskunov V. N., Golubev A. V., Balashov Yu. S., Mavrin S. V., Golubeva V. N., Aleinikov A. Yu., Kovalenko V. P., Solomatin I. I. The effect of rain characteristics on scavenging rate of tritium-oxide from the atmosphere // *Atmospheric Environment*. 2012. Vol. 62. P. 573–583.
9. Köllö Z., Palcsu L., Major Z., Papp L., Molnár M., Ranga T., Dombóvári P., Manga L. Experimental investigation and modelling of tritium washout by precipitation in the area of the nuclear power plant of Paks, Hungary, *Environ. Radioactivity*. 2011. Vol. 102. P. 53–59.
10. Belot Y. Predicting the Washout of Tritiated Water from the Atmospheric Plumes. Workshop of the IEA Task Group on Tritium Safety and Environmental Effect. AECL, Chalk River, Canada, 1998.
11. Hales J. M. Wet removal of pollutants from gaussian plumes: basic linear equations and computational approaches // *Journal of Applied Meteorology*, 2002. Vol. 41. P. 905–918.
12. Loosmore G. A., Cederwall R. T. Precipitation scavenging of atmospheric aerosols for emergency response applications: testing an updated model with new real-time data // *Atmospheric Environment*. 2004. Vol. 38. P. 993–1003.
13. Алоян А. Е., Пискунов В. Н. Моделирование региональной динамики газовых примесей и аэрозолей // *Известия РАН. Физика атмосферы и океана*. 2005. Т. 41. Вып. 3. С. 328–340 (in Russian).
14. Atanassov D., Galeriu D. Rain scavenging of tritiated water vapour: a numerical Eulerian stationary model, *Environ. Radioactivity*. 2011. Vol. 102. P. 43–52.
15. Seinfeld J., Pandis S. *Atmospheric Chemistry and Physics. From Air Pollution to Climate Change*. John Wiley & Sons, New York, 2006.
16. Seinfeld J. *Atmospheric Physics and Chemistry of Air Pollution*. Wiley, New York, 1985.
17. Williams M.M.R., Loyalka S.K. *Aerosol Science. Theory and Practice*, Pergamon Press, Oxford, 1991.
18. Sportisse B., Du Bois L. Numerical and theoretical investigation of a simplified model for the parameterization of below-cloud scavenging by falling raindrops // *Atmospheric Environment*. 2002. Vol. 36. P. 5719–5727.
19. Elperin T., Fominykh A., Krasovtsov B. and Vikhansky A. Effect of rain scavenging on altitudinal distribution of soluble gaseous pollutants in the atmosphere // *Atmospheric Environment*. 2011. Vol. 45. P. 2427–2433.
20. Пискунов В. Н. *Динамика аэрозолей*. М.: Физматлит, 2010.
21. Pasquill F. *Atmospheric Diffusion*, 2nd Ed.-N.Y.: John Wiley and Sons. 1971.

Статья поступила в редакцию 04.04.2013

<b>Горбатенко М. В., Незнамов В. П.</b> Стационарные связанные состояния частиц со спином $\frac{1}{2}$ в гравитационных полях Керра и Керра–Ньюмена . . . . .	3	<b>Gorbatenko M. V., Neznamov V. P.</b> Stationary bound states of spin-half particles in the Kerr and Kerr–Newman gravitational fields . . . . .	3
<b>Горбатенко М. В., Незнамов В. П.</b> Стационарные связанные состояния частиц со спином $\frac{1}{2}$ в гравитационном поле Райсснера–Нордстрёма . . . . .	17	<b>Gorbatenko M. V., Neznamov V. P.</b> Stationary bound states of spin-half particles in the Reissner–Nordström gravitational field . . . . .	17
<b>Горбатенко М. В., Незнамов В. П.</b> Отсутствие проблемы неединственности дираковской теории в искривленном пространстве-времени. Связь спин-вращение не является физически значимым эффектом . . . . .	24	<b>Gorbatenko M. V., Neznamov V. P.</b> Absence of the non-uniqueness problem of the dirac theory in a curved spacetime. Spin-rotation coupling is not physically relevant . . . . .	24
<b>Янилкин Ю. В., Стаценко В. П., Синькова О. Г., Чернышова О. Н., Розанов В. Б., Змитренко Н. В.</b> Численное моделирование влияния начального спектра возмущений на развитие гравитационного турбулентного перемешивания . . . . .	29	<b>Yanilkin Yu. V., Statsenko V. P., Sinkova O. G., Chernyshova O. N., Rozanov V. B., Zmitrenko N. V.</b> Numerical study of the effect of initial perturbation spectrum on the development of gravitational turbulent mixing . . . . .	29
<b>Пискунов В. Н., Цаплин Д. В.</b> Вымывание атмосферных газовых примесей из произвольного динамического источника, действующего в подоблачном слое . . . . .	41	<b>Piskunov V. N., Tsaplin D. V.</b> Scavenging of atmospheric gaseous impurities from arbitrary dynamic source that acting in the sub-cloud layer . . . . .	41

Редактор *Н. П. Мишкина*

Компьютерная подготовка оригинала-макета *М. С. Мещерякова*

---

Подписано в печать 10.07.2013      Формат 60 × 84 1/8  
 Офсетн. печ.      Усл. печ. л. 6,9      Уч.-изд. л. 6,2  
 Тираж 200 экз.      Зак. тип. 896-2013      5 статей      Индекс 3657

---

Отпечатано в ИПК ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ»  
 607188, г. Саров Нижегородской области, ул. Силкина, д. 23

ISSN 0234-0763      **ВОПРОСЫ АТОМНОЙ НАУКИ И ТЕХНИКИ**

С е р и я :

**ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ ФИЗИКА**

2013. Вып. 1. 1–51

## ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ

К авторским оригиналам, передаваемым для издания, предъявляются следующие требования:

1. Экземпляр статьи должен быть отпечатан на одной стороне листа формата А4 шрифтом Times New Roman 12 пунктов через 2 интервала, левое поле 3 см. Статья сопровождается дискетой 3,5' (zip100, zip250, cd-r/rw, USB Flash Drive) с электронным вариантом текста (шрифт 11 пунктов через 1 интервал) в редакторе Word for Windows версии 97. Статья должна быть составлена в следующем порядке: УДК; название статьи; инициалы и фамилии авторов; аннотация (не более 10 строк); ключевые слова – все вышеперечисленное на русском и английском языках; текст; список литературы; пронумерованные рисунки и подписи (на отдельном листе); таблицы с нумерационным и тематическим заголовками, каждая таблица на отдельном листе, а в электронном виде представляется отдельным файлом. Кавычки в тексте ставятся при английской раскладке клавиатуры («...»). Название файла должно состоять из фамилии первого автора и краткого названия статьи.

2. Файлы иллюстраций должны быть представлены отдельно – в виде файлов, в формате TIFF (.TIF) или JPEG (.JPG) (максимальное качество) с разрешением не менее 250 точек на дюйм (dpi или inch). Название файла иллюстрации должно включать фамилию первого автора и порядковый номер рисунка в статье, например: Dzyuba\_03.tif. Не допускается представлять иллюстрации, созданные с использованием внутренних инструментов Word.

3. При написании статьи следует использовать общепринятые термины, единицы измерения и условные обозначения. Все употребляемые авторами обозначения должны быть определены при их первом появлении в тексте. Необходимо обращать внимание на написание прописных и строчных букв: латинские буквы (*A, I, d, h* и т. п.) набираются курсивом, греческие буквы ( $\alpha, \beta, \gamma$ ), названия функций ( $\sin, \cos, \exp$ ), химических элементов ( $H_2O, H_2C_5OH$ ) и единиц измерения (см, МВт/см<sup>2</sup>, с) – прямым (обычным) шрифтом. Символы ( $\Re, \varnothing, \otimes \in$  и т. п.) следует оговаривать на полях рукописи. Обозначения матриц и векторов набираются полужирным шрифтом прямо.

4. Формулы создаются в виде целых математических выражений в формульном редакторе Word или редакторе Math Type 5.2 и нумеруются в круглых скобках. Нумерация формул должна быть сплошной по статье (не по разделам), нумерация типа (2а), (2б) нежелательна. Нумеровать следует только те формулы и уравнения, на которые есть ссылка в последующем изложении.

5. Ссылки на литературу в тексте даются по порядку, арабскими цифрами в квадратных скобках. Список литературы составляется в той же последовательности, в которой приводятся ссылки на литературу в тексте. Библиографические ссылки оформляются по следующим правилам:

– для книг: фамилии и инициалы авторов, название книги, место издания, издательство (без кавычек), год (для трудов конференций – город, страна, год);

– для статей в журнале: фамилии и инициалы авторов, название статьи, название журнала (без кавычек), год, том, выпуск, страницы;

– для авторефератов диссертаций: фамилия и инициалы автора, название автореферата диссертации, степень, место защиты (город) и год;

– для препринтов: фамилии и инициалы авторов, название препринта, место издания, год и номер;

– для патентов: вид патентного документа (А.с. или Пат.), его номер, название страны, выдавшей документ, индекс международной классификации изобретения, название издания, в котором опубликована формула изобретения, год и номер издания;

– для электронных источников – полный электронный адрес (включая дату обращения к источнику), позволяющий обратиться к публикации.

При необходимости в заголовке библиографической ссылки на работу четырех и более авторов могут быть указаны имена всех авторов или первых трех с добавлением слов «и др.». В списке литературы инициалы должны стоять после фамилий.

6. В конце текста (перед списком литературы) указывается контактная информация обо всех авторах статьи: фамилия, имя, отчество (полностью), место работы, должность, телефон, e-mail и по желанию автора – домашний почтовый адрес.

Все материалы по статьям должны направляться по адресу:

607188, г. Саров Нижегородской обл., пр. Мира, 37, РФЯЦ-ВНИИЭФ, ИТМФ, в редакцию журнала ВАНТ, сер. «Теоретическая и прикладная физика». Тел. (83130) 2-77-01. E-mail: [Nadykto@vniief.ru](mailto:Nadykto@vniief.ru)