

## О МЕТОДЕ ПРИБЛИЖЕННЫХ ОЦЕНОК НЕЙТРОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ОПТИЧЕСКИ ТОЛСТЫХ ОДНОРОДНЫХ СИСТЕМ, СОСТОЯЩИХ ИЗ ЛЕГКИХ ЯДЕР С ПРИМЕСЯМИ ДЕЛЯЩИХСЯ ВЕЩЕСТВ И ПОГЛОТИТЕЛЕЙ

Н. Б. Бабичев, С. А. Серов

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Представлен приближенный метод определения спектра нейтронов и других физических характеристик в однородных бесконечных и оптически толстых средах, состоящих из легких ядер с массовым числом  $A \neq 1$ , а также примесей делящихся веществ и поглотителей нейтронов. В полученных приближенных формулах учтено тепловое движение легких ядер, которое существенно влияет на формирование спектра медленных нейтронов в процессе их термализации.

*Ключевые слова:* кинетическое уравнение, функция распределения частиц, плотность и спектр нейтронов.

### Введение

В работе [1] разработана приближенная методика нахождения спектров нейтронов в бесконечных и оптически толстых однородных водородосодержащих средах (например, полиэтилен  $\text{CH}_2$  или вода  $\text{H}_2\text{O}$  с примесями делящихся материалов и поглотителей нейтронов). Ниже рассматриваются среды, в которых вместо водорода имеются легкие ядра с массовым числом  $A \neq 1$  ( $\text{CD}_2$ ,  $\text{D}_2\text{O}$ , гелий-4).

Целью этой статьи является обобщение результатов [1] на случай легких рассеивающих нейтроны ядер с  $A \neq 1$ . Основные упрощающие физические предположения, использованные в работе [1], ниже остаются в силе. Далее о них говорится по мере изложения материалов.

Задача о спектре решается отдельно в области замедления нейтронов и в тепловой области. Затем полученные спектры сшиваются при некотором значении энергии нейтронов  $E_* \gg T$  ( $T$  – температура среды) в надтепловой области. Задача определения спектра в тепловой области ниже решается в рамках так называемой газовой модели (не учитываются химические связи атомов в молекулах, т.е. предполагается, что все атомы свободны).

### 1. Спектр быстрых и надтепловых нейтронов

Для функции распределения нейтронов  $\tilde{\Psi}(t, \vec{r}, E, \vec{\Omega})$  ( $E$  – энергия нейтрона,  $\vec{\Omega} = \frac{\vec{V}}{V}$ ,  $\vec{V}$  – вектор скорости нейтрона) запишем кинетическое уравнение (см., например, [2, 3]), справедливое в точке наблюдения с радиус-вектором  $\vec{r}$  в момент времени  $t$ :

$$\frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\Psi}(t, \vec{r}, E, \vec{\Omega}) + (\vec{\Omega} \nabla) \tilde{\Psi} + \alpha_{tot} \tilde{\Psi} = \int dE' d\vec{\Omega}' K(E', \vec{\Omega}', E, \vec{\Omega}) \tilde{\Psi}(t, \vec{r}, E', \vec{\Omega}') + S, \quad (1)$$

$S$  – источник нейтронов спектра деления ( $g = g(E', E)$ ):

$$S(E) = \frac{1}{4\pi} \int dE' v(E') \alpha_f(E') g(E', E) \times \int d\vec{\Omega}' \tilde{\Psi}(t, \vec{r}, E', \vec{\Omega}'), \quad (2)$$

$\nabla = \frac{\partial}{\partial \vec{r}}$  – набла-оператор,  $v(E')$  – среднее число вторичных нейтронов, возникающее в одном акте деления ядра нейтроном с энергией  $E'$ .

В случае рассматриваемых здесь пространственно-однородных объектов макроскопические сечения рассеяния, деления, захвата и полное за-

висят только от энергии нейтрона, т. е.  $\alpha_s = \alpha_s(E)$ ,  $\alpha_f = \alpha_f(E)$ ,  $\alpha_c = \alpha_c(E)$  и  $\alpha_{tot} = \alpha_s + \alpha_f + \alpha_c = \alpha_{tot}(E)$ . Макроскопические сечения взаимодействия нейтронов с ядрами  $k$ -го сорта пересчитываются из микроскопических  $(\sigma_{s,f,c,tot}^k)$  так:

$$\alpha_{s,f,c,tot}^k(E) = N_{AD} \frac{\mu_k \sigma_{s,f,c,tot}^k(E)}{\sum_k \mu_k A_k}. \quad (3)$$

Очевидно, что полное макроскопическое сечение в уравнении (1) равно  $\alpha_{tot}(E) = \sum_k \alpha_{tot}^k(E)$ .

Если среда включает в себя разные делящиеся материалы, то под произведением  $v(E')\alpha_f(E')g(E',E)$  в формуле (2) следует подразумевать следующее отношение:

$$\frac{N_{AD} \sum_k \mu_k \sigma_f^k(E) g^k(E',E)}{\sum_k \mu_k A_k}. \quad \text{Здесь и выше } N_A -$$

число Авогадро,  $\rho$  – плотность среды,  $\mu_k$  и  $A_k$  – соответственно концентрации и массовые числа ядер компонентов смеси.

Будем предполагать, что все входящие в смесь активные вещества характеризуются одним и тем же спектром деления и он не зависит от энергии  $E'$  подлетающего к ядру нейтрона. В таком случае  $g^k(E',E) = g(E)$  и функция  $g(E)$  выносится из-под знака интеграла в формуле (2).

Далее используется  $\lambda$ -приближение, которому соответствует простая экспоненциальная зависимость функции распределения нейтронов  $\tilde{\Psi}(t, \vec{r}, E, \vec{\Omega})$  от времени ( $\tilde{\Psi}(t, \vec{r}, E, \vec{\Omega}) = \Psi(\vec{r}, E, \vec{\Omega})e^{\lambda t}$ ), и исходное уравнение переноса нейтронов принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} & (\vec{\Omega} \nabla) \Psi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) + \left[ \alpha_t(E) + \frac{\lambda}{V} \right] \Psi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = \\ & = \int dE' \int d\vec{\Omega}' K(E', \vec{\Omega}', E, \vec{\Omega}) \Psi(\vec{r}, E', \vec{\Omega}') + \\ & + g(E) \int_0^\infty dE' v(E') \alpha_f(E') \int d\vec{\Omega}' \Psi(\vec{r}, E', \vec{\Omega}'). \quad (4) \end{aligned}$$

Для существенного упрощения задачи предположим, что замедление нейтронов происходит только на ядрах одного самого легкого вещества, массовое число которого обозначим через  $A_\Lambda$ . Сбросом же энергии нейтронов на всех других яд-

рах смеси пренебрежем. В этом случае ядро интеграла столкновений выражается в виде суперпозиции

$$\begin{aligned} K(E', \vec{\Omega}', E, \vec{\Omega}) &= K_\Lambda(E', \vec{\Omega}', E, \vec{\Omega}) + \\ & + K_0(\vec{\Omega}', \vec{\Omega}) \delta(E' - E), \quad (5) \end{aligned}$$

Считая, что рассеяние нейтронов на самом легком замедлителе изотропно в системе центра масс, имеем (см. [2, 3]):

$$\begin{aligned} K_\Lambda(E', E, \vec{\Omega}', \vec{\Omega}) &= \frac{\alpha_\Lambda(E')}{2\pi(1-a_\Lambda)E'} \delta \times \\ & \times \left[ \vec{\Omega}' \vec{\Omega} - \frac{1+A_\Lambda}{2} \sqrt{\frac{E'}{E}} - \frac{A_\Lambda-1}{2} \sqrt{\frac{E'}{E}} \right], \quad (6) \end{aligned}$$

$$a_\Lambda = \left( \frac{A_\Lambda - 1}{A_\Lambda + 1} \right)^2. \quad (7)$$

$\alpha_\Lambda$  – макроскопическое сечение рассеяния на самых легких ядрах. При этом  $\alpha_t = \alpha_s + \alpha_f + \alpha_c = \alpha_\Lambda + \alpha_0 + \alpha_f + \alpha_c$  и  $\alpha_s = \alpha_\Lambda + \alpha_0$ , где  $\alpha_0$  – соответствующее полное макроскопическое сечение рассеяния на всех остальных ядрах смеси.

Введем обозначения скалярного и векторного потоков:

$$\Psi(\vec{r}, E) = \int d\vec{\Omega} \Psi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}), \quad (8)$$

$$\vec{j}(\vec{r}, E) = \int d\vec{\Omega} \vec{\Omega} \Psi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \quad (9)$$

и проинтегрируем уравнение переноса нейтронов (4) по углам с учетом того, что  $\int dE' \int d\vec{\Omega}' K_0(\vec{\Omega}', \vec{\Omega}) \delta(E' - E) \Psi(\vec{r}, E', \vec{\Omega}') = \alpha_0(E)$ .

После этого усредним полученный результат по объему системы. Можно показать, что в таком случае кинетическое уравнение преобразуется к следующему виду:

$$\begin{aligned} & F(E, \lambda) = \\ & = \int_E^{E/a_\Lambda} \frac{dE'}{(1-a_\Lambda)E'} H_\Lambda(E', \lambda) F(E', \lambda) + g(E), \quad (10) \end{aligned}$$

$$F(E, \lambda) = H(E, \lambda) \Psi(E, \lambda), \quad (11)$$

$$\begin{aligned} H(E, \lambda) &= \alpha_\Lambda(E) + \alpha_c(E) + \\ & + \alpha_f(E) + \frac{\lambda}{V(E)} + W(E), \quad (12) \end{aligned}$$

$$H_\Lambda(E, \lambda) = \frac{\alpha_\Lambda(E)}{H(E, \lambda)}, \quad (13)$$

$$W(E) = \frac{\int d\vec{r} \operatorname{div} \vec{j}(\vec{r}, E)}{\int d\vec{r} \Psi(\vec{r}, E)} = \frac{\int d\vec{S} \vec{j}(E)}{\int d\vec{r} \Psi(\vec{r}, E)}. \quad (14)$$

$W(E)$  – эффективное сечение поглощения нейтронов, связанное с их утечкой (интегралы в числителе и знаменателе берутся соответственно по поверхности и по объему системы);  $V(E) = b_0 \sqrt{E}$  – скорость нейтрона ( $b_0 = \sqrt{2/m_n}$ ,  $m_n$  – масса нейтрона).

Для бесконечной среды  $\Psi$  от  $\vec{r}$  не зависит. В случае оптически толстой системы принято приближение постоянства спектра нейтронов в пространстве и  $\Psi(E)$  – это усредненный по объему системы спектр. Отметим, что в данной работе приняты следующие нормировочные условия:

$$\int_0^{\infty} dE \cdot v(E) \alpha_f(E) \Psi(E, \lambda) = 1; \int_0^{\infty} dE \cdot g(E) = 1. \quad (15)$$

Уравнение (10) решим методом функций Грина. Для функции Грина справедливо уравнение

$$G(E_0, E, \lambda) = \int_E^{E/a_\Lambda} dE' \frac{H_\Lambda(E', \lambda)}{(1-a_\Lambda)E'} G(E_0, E', \lambda) + \delta(E - E_0). \quad (16)$$

Диапазон  $[0, E_0]$  разобьем на три области, в каждой из которых функция Грина находится отдельно, а затем непрерывно сшивается и нормируется.

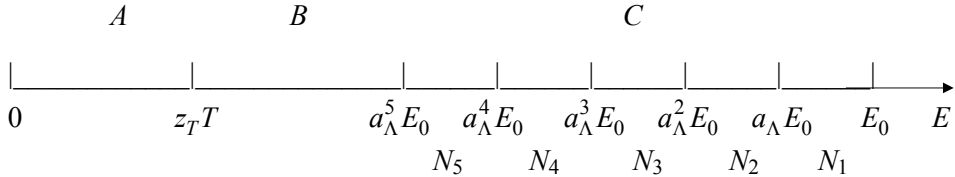


Рис. 1. Схема разбиения диапазона  $[0, E_0]$  на три области, одна из которых (C) включает в себя пять интервалов

Безразмерный параметр равен:  $z_T = 20$ , что много больше единицы. При  $E > E_0$

$$G(E_0, E, \lambda) = 0. \quad (17)$$

Сначала функцию Грина определим в интервале энергии нейтрона

$$a_\Lambda E_0 \leq E \leq E_0, \quad (18)$$

$$G_1^C(E_0, E, \lambda) = \delta(E - E_0) + \frac{H_\Lambda(E_0, \lambda)}{(1-a_\Lambda)E_0} \int_E^{E_0} \frac{dE' \cdot H_\Lambda(E', \lambda)}{(1-a_\Lambda)E'}. \quad (19)$$

Выражение (19) было получено путем сведения уравнения (16) (с постоянным верхним пределом интегрирования  $E_0$ ) к дифференциальному уравнению, которое легко проинтегрировалось. Индексы у функции Грина означают, что она относится к интервалу  $N_1$  внутри области C.

Далее функция Грина ищется во втором интервале

$$E \in [a_\Lambda^2 E_0, a_\Lambda E_0]. \quad (20)$$

Для этого уравнение (16) запишем в виде, который аналогичен (19). Полученное новое уравнение тоже с постоянным верхним пределом интегрирования снова сводится к дифференциальному, решением которого является

$$G_2^C(E_0, E, \lambda) = \int_{a_\Lambda E_0}^{E/a_\Lambda} \frac{dE' H_\Lambda(E', \lambda)}{(1-a_\Lambda)E''} G_1^C(E_0, E', \lambda) + \int_E^{a_\Lambda E_0} \frac{dE' H_\Lambda(E', \lambda)}{(1-a_\Lambda)E'} \exp\left\{ \int_E^{E'} \frac{dE'' H_\Lambda(E'', \lambda)}{(1-a_\Lambda)E''} \right\} \times \int_{a_\Lambda E_0}^{E'/a_\Lambda} \frac{dE'' H_\Lambda(E'', \lambda)}{(1-a_\Lambda)E''} G_1^C(E_0, E'', \lambda). \quad (21)$$

Соотношение (21) перепишем в допускающем дальнейшие обобщения виде

$$G_2^C(E_0, E, \lambda) = \mathfrak{ж}_2(E) + \int_E^{a_\Lambda E_0} \frac{dE' H_\Lambda(E', \lambda) \mathfrak{ж}_2(E')}{(1-a_\Lambda)E'} \times \exp\left\{ \int_E^{E'} \frac{dE'' H_\Lambda(E'', \lambda)}{(1-a_\Lambda)E''} \right\}. \quad (22)$$

В формулу (22) входит функция

$$\mathfrak{ж}_2(E) = \int_{a_\Lambda E_0}^{E/a_\Lambda} \frac{dE' H_\Lambda(E', \lambda)}{(1-a_\Lambda)E'} G_1^C(E_0, E', \lambda). \quad (23)$$

Аналогично определяются решения в остальных интервалах области C. В результате для  $i$ -го диапазона

$$a_\Lambda^i E_0 \leq E \leq a_\Lambda^{i-1} E_0 \quad (24)$$

получается следующий ответ:

$$G_i^C(E_0, E, \lambda) = \mathfrak{ж}_i(E) + \int_E^{a_\Lambda^{i-1} E_0} \frac{dE' H_\Lambda(E', \lambda) \mathfrak{ж}_i(E')}{(1-a_\Lambda)E'} \times \exp\left\{ \int_E^{E'} \frac{dE'' H_\Lambda(E'', \lambda)}{(1-a_\Lambda)E''} \right\}, \quad (25)$$

$$\mathfrak{ж}_1(E) = \delta(E - E_0), \quad (26)$$

$$ж_i(E) = \int_{a_\Lambda^{-1}E_0}^{E/a_\Lambda} \frac{dE' H_\Lambda(E', \lambda)}{(1-a_\Lambda)E'} G_{i-1}^C(E_0, E', \lambda). \quad (27)$$

Наличие  $\delta$ -функции в уравнении (16) приводит к скачку функции Грина в точке  $E = a_\Lambda E_0$ , к скачку ее первой производной в точке  $E = a_\Lambda^2 E_0$  и т. д. Это следует из формул (19), (25). Таким образом в точке  $E = a_\Lambda^5 E_0$  имеется скачок четвертой производной и можно считать, что функция при этом вышла на плавное поведение.

Теперь найдем функцию Грина в области  $B$  промежуточных энергий, пренебрегая влиянием  $\delta$ -функции в уравнении (16). Итак:

$$\begin{aligned} z_T T \leq E \leq a_\Lambda^5 E_0, \quad (28) \\ G^B(E_0, E, \lambda) = \\ = \int_E^{E/a_\Lambda} \frac{dE' H_\Lambda(E', \lambda)}{(1-a_\Lambda)E'} G^B(E_0, E', \lambda). \quad (29) \end{aligned}$$

Решением уравнения (29) в отсутствие поглощения ( $H_\Lambda = 1$ ) является фермиевский спектр:

$$G^B \sim \frac{1}{E}. \quad (30)$$

Теперь решение (29) будем искать в виде:

$$G^B(E_0, E, \lambda) = \frac{\text{const}}{E^\beta}. \quad (31)$$

Восстанавливая зависимость  $H_\Lambda$  от энергии, для определения  $\beta$  получим следующее трансцендентное уравнение:

$$\frac{H_\Lambda(E, \lambda) 1 - a_\Lambda^\beta}{1 - a_\Lambda \beta} = 1. \quad (31)$$

Если  $H_\Lambda$  от энергии зависит слабо, а это в области промежуточных энергий для рассеивающей среды с малыми добавками тяжелых примесей так и есть, то зависимость  $\beta(E)$  тоже должна быть слабой.

Определив константу в (31) из условия непрерывности, имеем:

$$\begin{aligned} G^B(E_0, E, \lambda) = \\ = \frac{(a_\Lambda^5 E_0)^{\beta(E_0, \lambda)} G_5^C(E_0, a_\Lambda^5 E_0, \lambda)}{E^{\beta(E, \lambda)}}. \quad (32) \end{aligned}$$

## 2. Функция Грина в области тепловых нейтронов

Наконец, задачу решим в тепловой области  $A$ :

$$0 \leq E \leq z_T T = E_*. \quad (33)$$

Функцию Грина в области  $A$  определим на основе уравнений Лалетина [4, 5] (в них учтено тепловое движение легких ядер).

$$Q(z, \lambda) = \int_0^z dz' [1 - H_\Lambda(z'T, \lambda)] G^A(E_0, z'T, \lambda), \quad (34)$$

$$\begin{aligned} G^A(E_0, zT, \lambda) = \frac{P_0(z, \lambda)}{1 + \frac{\gamma}{\xi} \frac{1 - H_\Lambda(zT, \lambda)}{H_\Lambda(zT, \lambda)}} \times \\ \times \left\{ \int_0^z \frac{H_\Lambda(z'T, \lambda) P_0(z', \lambda) + \frac{d}{dz'} [H_\Lambda P_0]}{\xi [H_\Lambda P_0]^2} \times \right. \\ \left. \times Q(z', \lambda) dz' + 1 \right\}, \quad (35) \end{aligned}$$

$$P_0(z, \lambda) = z e^{-z} H(zT, \lambda), \quad (36)$$

$$\xi = 1 + \frac{a_\Lambda}{1 - a_\Lambda} \ln a_\Lambda, \quad (37)$$

$$\gamma = \frac{1 - a_\Lambda + a_\Lambda \ln a_\Lambda - \frac{a_\Lambda}{2} (\ln a_\Lambda)^2}{1 - a_\Lambda + a_\Lambda \ln a_\Lambda}.$$

В записанные выше соотношения вошла безразмерная энергия нейтрона  $z = \frac{E}{T}$ .

## 3. Полное решение задачи о спектре нейтронов и отыскание собственного значения кинетического уравнения

Найденные выше решения непрерывно сшиваются и нормируются следующим условием:

$$\int_0^\infty dE [1 - H_\Lambda(E, \lambda)] G(E_0, E, \lambda) = 1. \quad (38)$$

Спектр и собственное значение  $\lambda$  (точнее говоря, главное значение собственного числа) находятся методом последовательных приближений. На очередной итерации спектра имеем:

$$\begin{aligned} \Psi(E, \lambda^{[n]}) = \frac{1}{H(E, \lambda^{[n]})} \int_0^\infty dE_0 g(E_0) \times \\ \times G(E_0, E, \lambda^{[n]}). \quad (39) \end{aligned}$$

Далее спектр нормируется:

$$\Psi_0(E, \lambda^{[n]}) = \frac{\Psi(E, \lambda^{[n]})}{\int_0^\infty dE' v(E') \alpha_f(E') \Psi(E', \lambda^{[n]})}. \quad (40)$$

Параметр  $\lambda$  определяется из следующего уравнения баланса:

$$\int_0^{\infty} dE \left[ \alpha_c(E) + \alpha_f(E) + \frac{\lambda^{[n+1]}}{V(E)} + W(E) \right] \times \Psi_0(E, \lambda^{[n]}) = 1. \quad (41)$$

Здесь принята нормировка (15).

### Некоторые замечания

Для бесконечной среды функция  $W(E)$  (см. (14)) равна нулю при любых  $E$ . В случае конечных систем это не так. Тем не менее если рассматривать оптически толстые однородные системы, утечка частиц из которых сравнительно мала, то справедливо диффузионное приближение. При этом величина  $W(E)$  находится по достаточно простой полуинтерполяционной формуле, которую можно получить на основе диффузионных соотношений, откалиброванных на результаты численных расчетов по методике Монте-Карло (в них уточняется зависимость вероятности вылета нейтрона из системы от его энергии).

С помощью представленной выше приближенной методики можно определять характеристики (спектры нейтронов, величины параметра  $\lambda$  и др.) в случае бесконечных и оптически толстых однородных сред, в которых основным каналом взаимодействия нейтронов с веществом является

рассеяние на легких ядрах. К таким средам можно отнести растворы солей урана в тяжелой воде, а также, например, газообразные смеси дейтерия ( $D_2$ ) либо гелия-4 с гексафторидом урана ( $UF_6$ ).

В данную статью вошли (в сокращенном изложении) материалы неопубликованной дипломной работы С. А. Серова, которая была выполнена в 1979 году под руководством Н. Б. Бабичева.

### Список литературы

1. Бабичев Н. Б., Морозов В. Г., Севастьянов А. А. Приближенный метод определения спектра нейтронов и других характеристик в оптически толстых водородосодержащих системах // ВАНТ. Сер.: Теоретическая и прикладная физика. 2008. Вып. 3. С. 39–43.
2. Дэвисон Б. Теория переноса нейтронов. М.: Изд-во Главного управления по использованию атомной энергии при Совете Министров СССР, 1960.
3. Смелов В. В. Лекции по теории переноса нейтронов. М.: Атомиздат, 1978.
4. Лалетин Н. И. Дифференциальные уравнения для термализации нейтронов в бесконечных однородных средах // Атомная физика. 1963. Т. 14 Вып. 5. С. 402.
5. Лалетин Н. И. Спектры медленных нейтронов в воде с поглотителями // Атомная физика. 1964. Т. 16. Вып. 5. С. 142.

Статья поступила в редакцию 01.11.2013