

ПРОСТОЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМЫ « $Z > 137$ » ДЛЯ УРОВНЕЙ ЭНЕРГИИ ВОДОРОДОПОДОБНЫХ АТОМОВ

В. П. Незнамов¹, И. И. Сафронов

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

«Катастрофа» в решении уравнения Дирака для электрона в поле точечного электрического заряда, возникающая для зарядовых номеров $Z > 137$, устраняется в работе за счет эффективного учета конечных размеров ядер. Для этого на границе ядра $r_N = (1, 2 \div 1, 4) \cdot 10^{-13} \cdot A^{1/3}$ см в численных решениях уравнений для дираковских радиальных волновых функций вводится граничное условие, зануляющее ϕ -компоненту электронной плотности тока. В результате для всех ядер Периодической системы $1 \leq Z \leq 105$ энергетические уровни, полученные в численных расчетах, практически совпадают с уровнями энергии в стандартных решениях уравнения Дирака во внешнем поле кулоновского потенциала точечного заряда. Далее для $Z > 105$ расчетные зависимости уровней энергии $E(Z)$ носят монотонный и гладкий характер. Нижний энергетический уровень $1S_{1/2}$ достигает энергии $E = -mc^2$ («падение» электрона на ядро) при $Z_c \approx 185$. Предложенный метод учета конечных размеров ядер может быть легко использован в численных расчетах уровней энергии многоэлектронных атомов.

Ключевые слова: уравнение Дирака, кулоновский потенциал, уровни энергий водородоподобных атомов, учет конечных размеров ядер, критический заряд ядра.

1. Введение

Сто лет назад, в 1913 г., Н. Бор сформулировал постулаты новой квантовой теории. Уже через три года А. Зоммерфельд [1] на основе теории боровских орбит получил формулу тонкой структуры для энергетических уровней водородоподобных атомов

$$E = \frac{mc^2}{\left(1 + \frac{\alpha_{em}^2 Z^2}{\left(n - |k| + \sqrt{k^2 - \alpha_{em}^2 Z^2}\right)^2}\right)^{1/2}}. \quad (1)$$

После появления дираковской теории в 1928 г. Р. А. М. Dirac [2], С. G. Darwin [3] и W. Gordon [4] получили выражение (1) в результате точного решения уравнения Дирака в кулоновском поле точечного заряда $(-Ze)$.

В формуле (1) m – масса электрона, c – скорость света, $\alpha_{em} = \frac{e^2}{\hbar c}$ – электромагнитная постоянная тонкой структуры, Z – порядковый номер ядра, $n = 1, 2, \dots$ – главное квантовое число, k – квантовое число уравнения Дирака:

$$k = \pm 1 \pm 2 \dots = \begin{cases} -(l+1), & j = l + \frac{1}{2}; \\ l, & j = l - \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (2)$$

В (2) j, l – квантовые числа полного и орбитального момента электрона.

Формула (1) становится комплексным числом при

$$Z > \frac{|k|}{\alpha_{em}} \approx 137|k|. \quad (3)$$

¹ E-mail: neznamov@vniief.ru

С практической точки зрения существования реальных ядер в Периодической системе Менделеева в выражении (3) интерес представляют состояния электрона $c|k|=1$, т. е. $1S_{1/2}$ - и $2P_{1/2}$ -состояния. Для этих состояний комплексность уровней энергии в (1) часто называют «катастрофой – $Z > 137$ ».

Довольно быстро установленной причиной «катастрофы» является неучет конечных размеров рассматриваемых ядер.

В 1945 г. И. Я. Померанчук и Я. А. Смородинский [5] рассмотрели атомную систему с потенциалом

$$U = \begin{cases} -\frac{Ze^2}{r_N} & \text{для } r \leq r_N; \\ U = -\frac{Ze^2}{r} & \text{для } r > r_N, \end{cases} \quad (4)$$

где r_N – радиус ядра.

В результате они оценили величину Z_c , при которой нижний энергетический уровень $1S_{1/2}$ -состояния достигает предельного значения $E = -mc^2$.

$$Z_c = 175 \text{ при } r_N = 0,8 \cdot 10^{-12} \text{ см.} \quad (5)$$

Отсюда следовал важный вывод, что в области $Z_c \geq Z > 137$ должна существовать вещественная зависимость $E(Z)$, а «катастрофа» в формуле (1) действительно возникает из-за неучета конечных размеров ядер.

В 1959 г. Я. Б. Зельдович в работе [6] показал, что изменение кулоновского потенциала в окрестности начала координат слабо влияет на энергетический спектр водородного атома.

Обзор последующих работ, посвященных структуре водородоподобных атомов, при $Z\alpha > 1$ приведен в работе Я. Б. Зельдовича, В. С. Попова [7]. Качественные и количественные результаты [7] при $Z > 105$ уточняют выводы [5] о влиянии на энергетический спектр конечных размеров рассматриваемых ядер.

В [7] кроме потенциала (4) для анализа структуры энергетических уровней использовался также потенциал, соответствующий потенциалу однородно заряженного шара.

$$U_1 = \begin{cases} \frac{Ze^2}{r_N} \left(-\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{r_N} \right)^2 \right) & \text{для } r \leq r_N; \\ -\frac{Ze^2}{r} & \text{для } r > r_N. \end{cases} \quad (6)$$

В работе W. Pieper, W. Greiner [8] для потенциала (6) численно рассчитаны энергетические уровни первых девяти состояний ($1S_{1/2}, 2S_{1/2}, \dots, 3D_{5/2}$) в зависимости от величины Z . Значение Z_c , определенное в [8], составляет $Z_c = 169$ при $r_N = 9,5 \cdot 10^{-12}$ см. Данное значение близко к значениям $Z_c = 170 \div 175$, полученным другими исследователями (см. [5, 7]).

В настоящей работе проблема « $Z > 137$ » решается численными расчетами уравнения Дирака в кулоновском поле за счет введения граничного условия для волновых функций на границе рассматриваемых ядер.

Граничное условие на границе ядер взято по аналогии с исследованиями возможности существования стационарных связанных состояний в гравитационном поле Шварцшильда [9]. Оно состоит в занулении ϕ -компоненты плотности дираковского тока на границе рассматриваемого ядра, что сводится в кулоновском поле к нулевому значению на границе ядра одной из двух радиальных дираковских функций.

Структура работы выглядит следующим образом. В разделе 2 для полноты изложения приводится уравнение Дирака в кулоновском поле, кратко описана процедура разделения переменных, приводится система уравнений для радиальных волновых функций.

В разделе 3 исследуется поведение компонент вектора плотности дираковского тока и вводится граничное условие для волновых функций на границе ядер.

В разделе 4 анализируются результаты численных расчетов энергетических спектров водородоподобных атомов с различными Z .

В Заключение приведены основные результаты представленной работы.

2. Уравнение Дирака в кулоновском поле заряда ($-Ze$)

Ниже будем использовать систему единиц $\hbar = c = 1$, сигнатуру

$$g^{\alpha\beta} = \text{diag}[1, -1, -1, -1]; \quad (7)$$

β, α^k , $k = 1, 2, 3$ – 4×4 матрицы Дирака в представлении Дирака – Паули; σ^k – 2×2 матрицы Паули.

Рассматриваем стационарный случай, когда волновую функцию можно записать в виде $\psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r}) e^{-iEt}$.

Уравнение Дирака в кулоновском поле точечного заряда ($-Ze$) в сферической системе координат (r, θ, φ) можно представить в виде:

$$E\psi(\mathbf{r}) = \left[\beta m - i\alpha^1 \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) - i\alpha^2 \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \text{ctg} \theta \right) - i\alpha^3 \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{Ze^2}{r} \right] \psi(\mathbf{r}). \quad (8)$$

Уравнение (8) допускает разделение переменных, если биспинор $\psi(\mathbf{r}) = \psi(r, \theta, \varphi)$ определить в виде

$$\psi(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} F(r)\xi(\theta) \\ -iG(r)\sigma^3\xi(\theta) \end{pmatrix} e^{im_\varphi\varphi} \quad (9)$$

и использовать следующее уравнение (см., например, [10]):

$$\left[-\sigma^2 \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \text{ctg} \theta \right) + i\sigma^1 m_\varphi \frac{1}{\sin \theta} \right] \xi(\theta) = i\kappa \xi(\theta). \quad (10)$$

В выражениях (9), (10) $\xi(\theta)$ – сферические гармоники для спина $1/2$, m_φ – магнитное квантовое число, κ – квантовое число (2).

$\xi(\theta)$ можно представить в виде [11].

$$\begin{aligned} \xi(\theta) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} Y_{jm_\varphi}(\theta) \\ \frac{1}{2} Y_{jm_\varphi}(\theta) \end{pmatrix} = \\ &= (-1)^{m_\varphi + \frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{4\pi} \frac{(j - m_\varphi)!}{(j + m_\varphi)!}} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} \left(\kappa - m_\varphi + \frac{1}{2} \right) P_l^{m_\varphi - \frac{1}{2}}(\theta) \\ P_l^{m_\varphi + \frac{1}{2}}(\theta) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (11)$$

В (11) $P_l^{m_\varphi \pm \frac{1}{2}}(\theta)$ – присоединенные полиномы Лежандра.

В результате разделения переменных мы получаем систему уравнений для вещественных радиальных функций $F(r), G(r)$. Запишем эти уравнения в безразмерных переменных $\varepsilon = \frac{E}{m}$, $\rho = \frac{r}{l_c}$, где $l_c = \frac{\hbar}{mc}$ – комптоновская длина волны электрона.

$$\frac{dF}{d\rho} + \frac{1+\kappa}{\rho} F - \left(\varepsilon + 1 + \frac{\alpha_{em} Z}{\rho} \right) G = 0; \quad (12)$$

$$\frac{dG}{d\rho} + \frac{1-\kappa}{\rho} G + \left(\varepsilon - 1 + \frac{\alpha_{em} Z}{\rho} \right) F = 0.$$

Если ввести фазу из определения

$$\text{tg} \Phi = \frac{F(\rho)}{G(\rho)}, \quad (13)$$

то энергетический спектр ε_n можно также определять из уравнения для фазы $\Phi = \arctg \frac{F(\rho)}{G(\rho)} + k\pi$,

$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ в форме, предложенной М. А. Вронским [9]

$$\frac{d\Phi}{d\rho} = \varepsilon + \frac{\alpha_{em} Z}{\rho} + \cos 2\Phi - \frac{\kappa}{\rho} \sin 2\Phi. \quad (14)$$

Для финитного движения электрона асимптотика решений уравнений (12) при $\rho \rightarrow \infty$ имеет вид

$$F(\rho) = C_1 e^{-\rho\sqrt{1-\varepsilon^2}}; \quad (15)$$

$$G(\rho) = -\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}} F(\rho).$$

Фаза Φ при $\rho \rightarrow \infty$ равна

$$\Phi = -\arctg \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}. \quad (16)$$

3. Плотность тока электронов, граничные условия для волновых функций на границе ядер

В процессе процедуры разделения переменных при получении из уравнения (8) уравнений (10), (12) была произведена эквивалентная замена матриц Дирака

$$\alpha^1 \rightarrow \alpha^3; \quad \alpha^2 \rightarrow \alpha^1; \quad \alpha^3 \rightarrow \alpha^2. \quad (17)$$

Тогда с учетом (9), (11) компоненты дираковской плотности тока равны

$$\begin{aligned} j^r &= \psi^+ \alpha^3 \psi = \\ &= -iF(\rho)G(\rho) \left[\xi^+(\theta) (\sigma^3 \sigma^3 - \sigma^3 \sigma^3) \xi(\theta) \right] = 0; \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} j^\theta &= \psi^+ \alpha^1 \psi = \\ &= -2F(\rho)G(\rho) \left[\xi^+(\theta) \sigma^2 \xi(\theta) \right] = 0; \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} j^\varphi &= \psi^+ \alpha^2 \psi = \\ &= 2F(\rho)G(\rho) \left[\xi^+(\theta) \sigma^1 \xi(\theta) \right] \neq 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Равенства (18)–(20) совпадают с ранее полученными результатами в [12].

Наше граничное условие состоит в занулении компоненты тока j^{ϕ} на границе ядра ρ_N , что сводится к нулевому значению одной из двух волновых функций $F(\rho_N)$, $G(\rho_N)$ на границе ядра

$$F(\rho_N)G(\rho_N) = 0. \quad (21)$$

Граничное условие (21) аналогично условию вблизи «горизонта событий», введенного в численных расчетах решения уравнения Дирака в поле Шварцшильда [9].

В результате при значениях гравитационной константы связи $\alpha \ll 1$ в расчетах [9] получены уровни энергии, близкие к уровням энергии в атоме водорода.

4. Результаты численных расчетов определения энергетического спектра водородоподобных атомов с эффективным учетом конечных размеров ядер

В расчетах размер ядер определялся из соотношений

$$\begin{aligned} r_N &= 1,3 \cdot 10^{-13} \cdot A^{1/3} \text{ см или} \\ \rho_N &= \frac{1}{300} A^{1/3}. \end{aligned} \quad (22)$$

В (22) A – атомная масса ядра.

Уравнение для фазы (14) решалось неявным методом Рунге–Кутты пятого порядка с контролем размера шага [13]. Использовалась схема Ила для получения трехстадийного метода Радо ПА.

Из двух возможных вариантов реализации условия (21) будем осуществлять его, как и в [9], равенством

$$G(\rho_N) = 0. \quad (23)$$

Некоторым основанием для этого является известная малость функции $G(\rho)$ по сравнению с функцией $F(\rho)$ в нерелятивистском приближении уравнения Дирака.

Из (23) следует, что условие для фазы равно

$$\Phi(\varepsilon, \kappa, z) = k \frac{\pi}{2}, \quad k = \pm 1, \pm 3, \pm 5 \dots \quad (24)$$

В табл. 1–3 приведены значения уровней энергии для атома водорода $Z = 1$, $A = 1$, полученные в численных расчетах решения уравнения (14) с граничными условиями (16), (24) для $\kappa = \pm 1, \pm 2, \pm 3$ и $n = 1 \div 11$.

Там же приведены соответствующие значения энергии, полученные из формулы (1), и вычисленные в процентах относительные отклонения расчетных величин от аналитических значений (1).

Таблица 1

Уровни энергии атома водорода для $S_{1/2}$, $P_{1/2}$ -состояний ($\kappa = \pm 1$)

n	$1 - \varepsilon_{an}$	$1 - \varepsilon_{num}$	$\delta(\%)$	Примечание
1	2.6640E-05	2.6641E-05	-0,004	Для $\kappa = +1$ решения нет
2	6.6600E-06	6.6602E-06	-0,003	
3	2.9600E-06	2.9601E-06	-0,003	
4	1.6650E-06	1.6651E-06	-0,006	
5	1.0656E-06	1.0656E-06	0,000	
6	7.4000E-07	7.3999E-07	0,001	
7	5.4367E-07	5.4367E-07	0,000	
8	4.1625E-07	4.1624E-07	0,002	
9	3.2889E-07	3.2888E-07	0,002	
10	2.6640E-07	2.6639E-07	0,003	
11	2.2016E-07	2.2015E-07	0,006	

Таблица 2

Уровни энергии атома водорода для $P_{3/2}$, $D_{3/2}$ -состояний ($\kappa = \pm 2$)

n	$1 - \varepsilon_{an}$	$1 - \varepsilon_{num}$	$\delta(\%)$	Примечание
2	6.6599E-06	6.6585E-06	0,022	Для $\kappa = +2$ решения нет
3	2.9600E-06	2.9603E-06	-0,009	
4	1.6650E-06	1.6653E-06	-0,016	
5	1.0656E-06	1.0656E-06	0,004	

n	$1 - \varepsilon_{an}$	$1 - \varepsilon_{num}$	$\delta(\%)$	Примечание
6	7.3999E-07	7.3997E-07	0,004	
7	5.4367E-07	5.4367E-07	0,001	
8	4.1625E-07	4.1622E-07	0,007	
9	3.2889E-07	3.2887E-07	0,006	
10	2.6640E-07	2.6637E-07	0,012	
11	2.2016E-07	2.2017E-07	-0,001	

Таблица 3

Уровни энергии атома водорода для $D_{5/2}, F_{5/2}$ -состояний ($\kappa = \pm 3$)

n	$1 - \varepsilon_{an}$	$1 - \varepsilon_{num}$	$\delta(\%)$	Примечание
3	2.9600E-06	2.9597E-06	0,011	Для $\kappa = +3$ решения нет
4	1.6650E-06	1.6652E-06	-0,010	
5	1.0656E-06	1.0657E-06	-0,006	
6	7.3999E-07	7.3997E-07	0,004	
7	5.4367E-07	5.4367E-07	0,000	
8	4.1625E-07	4.1622E-07	0,007	
9	3.2889E-07	3.2887E-07	0,006	
10	2.6640E-07	2.6637E-07	0,012	
11	2.2016E-07	2.2017E-07	-0,001	

Видно хорошее согласие расчетных и аналитических значений уровней энергии с точностью до сотых долей процента $\left(\delta = \frac{\varepsilon_{num} - \varepsilon_{an}}{1 - \varepsilon_{an}} 100\% \right)$.

В пределах указанной точности в расчетах воспроизводится характерное для формулы тонкой структуры (1) вырождение энергетических уровней с одинаковым полным моментом j (с одинаковым значением $|\kappa|$).

Далее уровни энергии одноэлектронных атомов были вычислены для следующих ядер:

$B(Z = 5, A = 10)$, $Ne(Z = 10, A = 21)$, $Mn(Z = 25, A = 55)$, $Sn(Z = 50, A = 119)$, $U(Z = 92, A = 238)$, $(Z = 104, A = 261)$. Для гипотетических ядер $Z > 104$ отношение $\frac{A}{Z}$ выбиралось равным 2,9.

Результаты расчетов для трех нижних уровней и для значений $\kappa = \pm 1, \pm 2, \pm 3$ приведены на рис. 1–6. Там же для сравнения приведены некоторые результаты численных расчетов [8] и аналитические значения из формулы тонкой структуры (1).

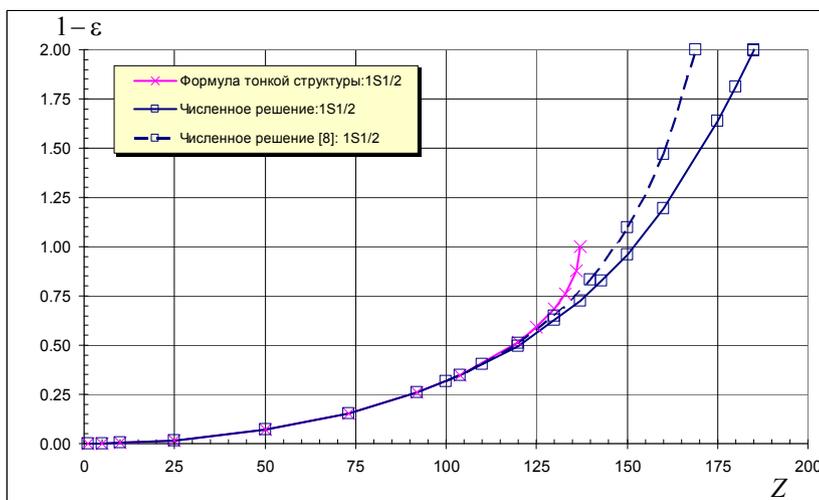


Рис. 1. Зависимости $E(Z)$ для $1S_{1/2}$ -состояния

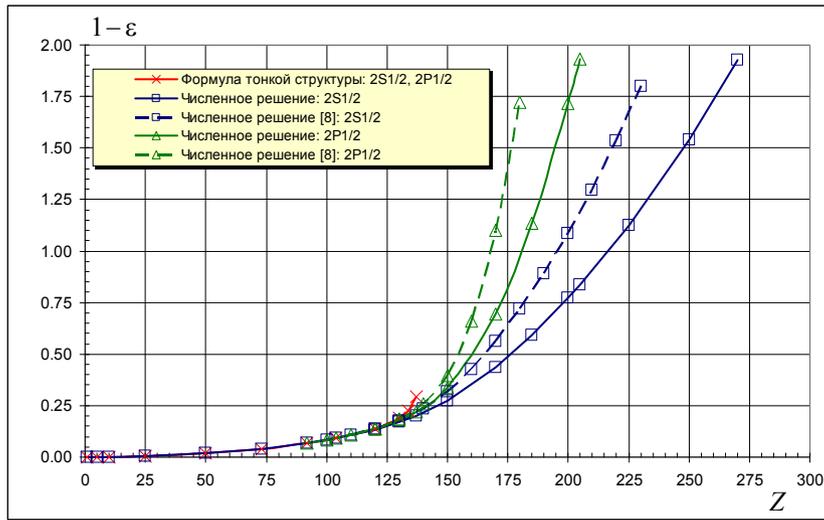


Рис. 2. Зависимости $E(Z)$ для $2S_{1/2}, 2P_{1/2}$ -состояний

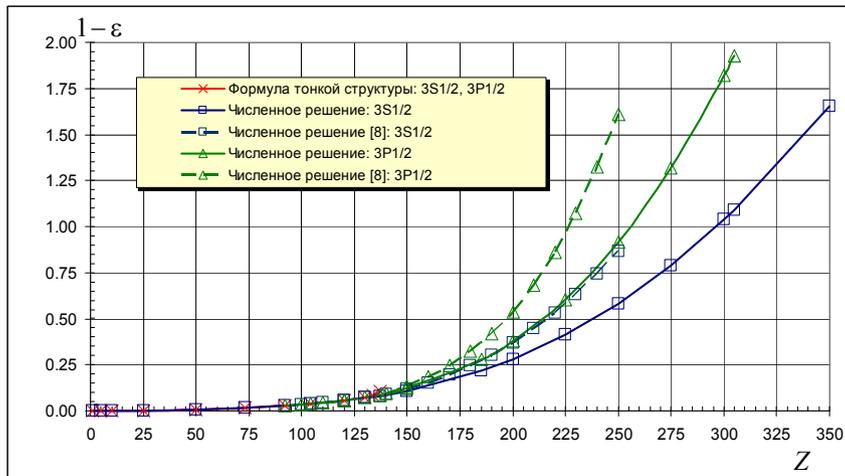


Рис. 3. Зависимости $E(Z)$ для $3S_{1/2}, 3P_{1/2}$ -состояний

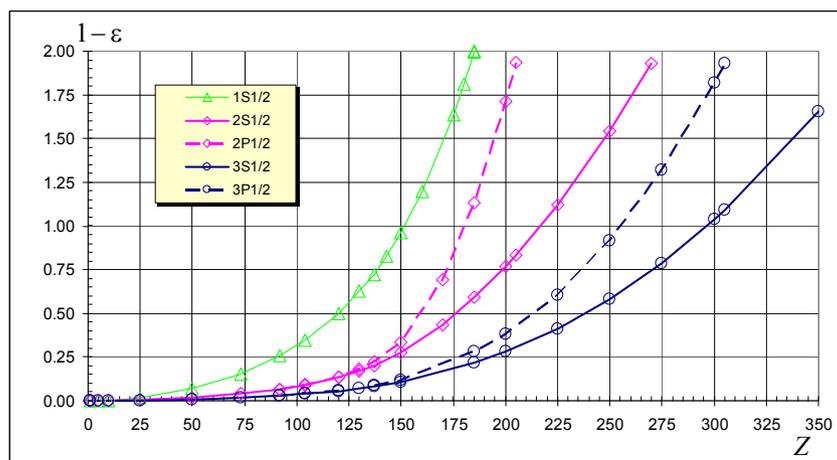


Рис. 4. Расчетные зависимости $E(Z)$ для состояний с $n=1,2,3$ и $\kappa=\pm 1$

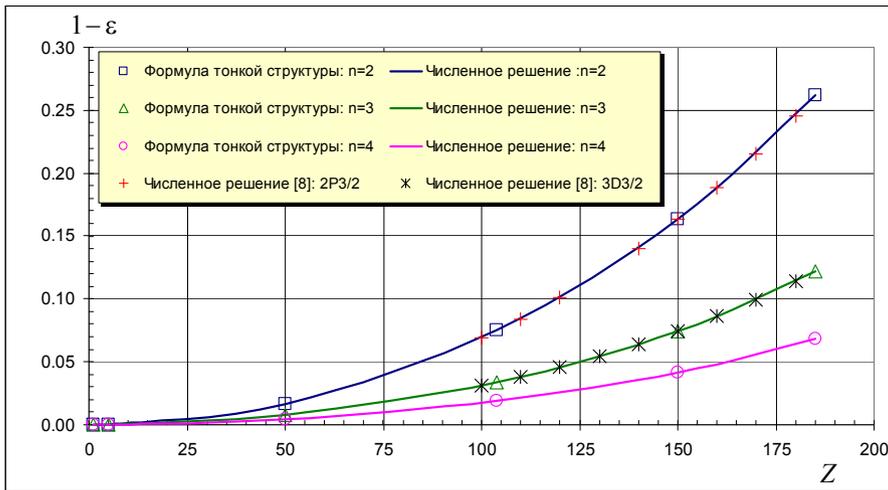


Рис. 5. Зависимости $E(Z)$ для $P_{3/2}, D_{3/2}$ -состояний и $n = 2, 3, 4$

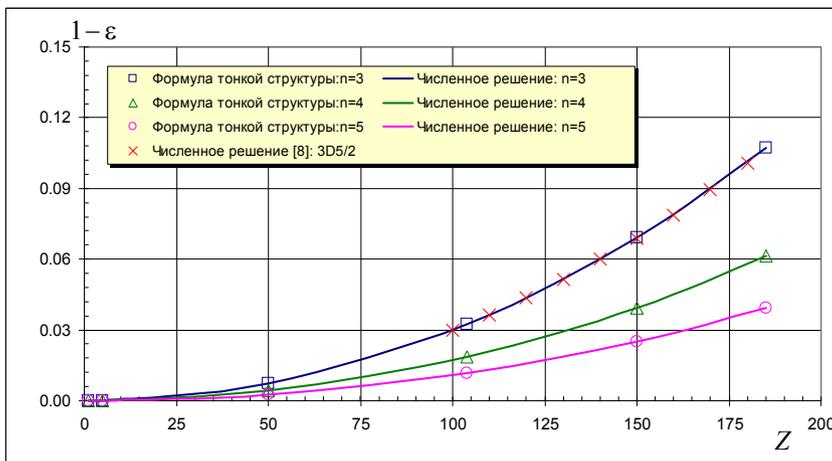


Рис. 6. Зависимости $E(Z)$ для $D_{5/2}, F_{5/2}$ -состояний и $n = 3, 4, 5$

Приведенные данные показывают, что формула (1) находится в хорошем согласии с расчетными величинами уровней энергии для всех известных ядер Периодической системы.

При $\kappa = -1(1S_{1/2})$ сколь либо заметное отклонение для нижнего уровня ($> 1\%$) наступает при $Z > 105$ (см. рис. 1).

Расчетные зависимости $E(Z)$ носят гладкий и монотонный характер.

Нижний уровень $1S_{1/2}$ достигает значения $\varepsilon = -1$ («падение» электрона на ядро) при $Z_c \approx 185$.

Для данного Z_c в расчете использовались $A = 2,9 \cdot Z_c = 536,5$; радиус ядра $r_N = 1,3 \cdot 10^{-13} \times A^{1/3}$ см $= 1,06 \cdot 10^{-12}$ см.

После достижения уровня $1S_{1/2}$ нижнего континуума $\varepsilon = -1$ при $Z > 185$ необходимо исполь-

зовать вместо одночастичной квантовой механики методы многочастичной квантовой теории поля [7].

В данной работе зависимости $E(Z)$ для $Z > 185$ приведены на рис. 2–4 из методических соображений. Эти зависимости не имеют особенностей и качественно подобны зависимостям $E(Z)$ для нижнего энергетического уровня $1S_{1/2}$.

В соответствии с результатами, полученными в [7], на рис. 2–4 видно, что при $Z > 137$ происходит снятие вырождения энергетических уровней с одинаковыми j .

Чем больше значения n и κ , тем при больших величинах Z начинают отличаться уровни энергии с одинаковыми j . Из рис. 5, 6 следует, что уровни $P_{3/2}, D_{3/2}$ и $D_{5/2}, F_{5/2}$ совпадают вплоть до $Z_c = 185$. Для этих уровней также видно хорошее согласие с формулой тонкой структуры.

Эффективный учет конечных размеров ядер с использованием граничного условия для дираковских волновых функций (21), (24) приводит для $Z \leq 105$ к практическому совпадению уровней энергии с формулой тонкой структуры (1) и с результатами работ [7, 8] с использованием эффективных потенциалов ядер (4), (6).

Для $Z > 105$ зависимости $E(Z)$ по результатам данной работы носят менее резкий характер (см. рис. 1–6). Это приводит к несколько большему значению $Z_c = 185$ по сравнению со значениями Z_c в [7, 8]. Различие в зависимостях $E(Z)$ уменьшается с увеличением квантовых чисел n и k .

При практическом использовании уровней энергии $E(Z)$ необходимо использовать вычисленные многими авторами поправки к ним за счет поляризации вакуума, учета спина ядра и т. д.

5. Заключение

Проведенные расчеты определения уровней энергии водородоподобных атомов с эффективным учетом (21) конечных размеров ядер позволяют сделать следующие выводы:

1. Расчеты с $Z=1, A=1$ с точностью $\sim 10^{-4}$ воспроизводят формулу тонкой структуры атома водорода (1).

2. Расчеты хорошо согласуются с формулой тонкой структуры для всех известных ядер Периодической системы. Для нижнего уровня сколь либо заметное отклонение наступает при $Z > 105$.

3. Расчетные зависимости $E(Z)$ носят гладкий и монотонный характер.

4. Нижний уровень $1S_{1/2}$ достигает значения $\varepsilon = -1$ ($E = -mc^2$ – «падение» электрона на ядро) при $Z_c = 185$.

5. Для учета конечных размеров ядер хорошо работающее в одноэлектронном случае граничное

условие (21) можно легко применить в расчетах многоэлектронных атомов, использующих решения уравнения Дирака для радиальных волновых функций.

Авторы благодарят своих коллег – проф. П. П. Физиева, М. А. Вронского и А. А. Садового за плодотворные дискуссии, а также А. Л. Новоселову за большую техническую помощь в подготовке работы.

Список литературы

1. Sommerfeld A. // Ann. D. Phys. 1916. Vol 51. P. 1.
2. Dirac P. A. M. // Proc. Roy. Soc. A117. 1928. Vol. 610, N 118. P. 341.
3. Darwin C. G. // Proc. Roy. Soc. Lond., Ser. A118. 1928. Vol. 654.
4. Gordon W. Z. // Z. Phys. 1928. Vol. 48. P. 11.
5. Померанчук И. Я., Смородинский Я. А. // Jour. Phys, USSR. 1945. Vol. 9. P. 97.
6. Зельдович Я. Б. // Физика твердого тела. 1959. Т. 1, № 11. С. 1637–1641.
7. Зельдович Я. Б., Попов В. С. // УФН. 1971. Т. 105. Вып. 3.
8. Pieper W., Greiner W. // Zs. Phys. 1969. Vol. 218. P. 327.
9. Vronsky M. A., Gorbatenko M. V., Kolesnikov N. S., Neznamov V. P., Popov E. V., Safronov I. I. arxiv: 1301.7595 (gr-qc).
10. Brill D. R., Wheeler J. A. // Rev. of Modern Physics. 1957. Vol. 29. P. 465–479.
11. Dolan S. R. Trinity Hall and Astrophysics Group, Cavendish Laboratory. Dissertation, 2006.
12. Colijn C. and Vrscay E. R. // Foundations of Physics Letters. 2003. Vol. 16, N 4.
13. Hairer E., Wanner G. Solving ordinary differential equations II. Stiff and Differential – Algebraic Problems. Second revised Edition, Springer – Verlag 1991, 1996.

Статья поступила в редакцию 01.11.2013