

ПРОБЛЕМА КОЛЛАПСА В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ И ВОЗМОЖНЫЕ ПОДХОДЫ К ЕЕ РЕШЕНИЮ. ЧАСТЬ 2

М. В. Горбатенко¹

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

На примере сферически симметричных решений показано, что учет вейлевских степеней свободы при гравитационном коллапсе объекта приводит к возникновению не горизонтов событий, а поверхностей разрыва, на которых происходит изменение типа решения – переход с одной ветви решения на другую, в результате чего полное решение является регулярным. Использование уравнений КГД, возможно, позволит избежать коллапсов и сингулярностей не только в сферически симметричных гравитационных полях, но и в полях любой другой конфигурации.

Ключевые слова: черные дыры, коллапс, перенормированный тензор энергии-импульса, конформная геометродинамика.

1. Введение

В части 1 данной работы [1] отмечены концептуальные трудности общей теории относительности (ОТО) и сделан вывод о том, что одним из наиболее перспективных подходов к устранению этих трудностей является учет квантовопольных эффектов. В этом направлении был предпринят ряд попыток, одной из которых является высказанная в докладе [2] на II Сахаровских чтениях в 1996 г. гипотеза Пушкина о том, что перенормированным тензором энергии-импульса (ПТЭИ) квантовой поляризации пространства-времени является тензор энергии-импульса (ТЭИ) конформной геометродинамики (КГД). Другими словами²,

$$(\text{ПТЭИ})_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}^{\text{КГД}}, \quad (1)$$

где тензор $T_{\alpha\beta}^{\text{КГД}}$ входит в уравнения КГД

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R = T_{\alpha\beta}^{\text{КГД}} \quad (2)$$

и имеет вид

$$T_{\alpha\beta}^{\text{КГД}} = -2A_{\alpha}A_{\beta} - g_{\alpha\beta}A^2 - 2g_{\alpha\beta}A^{\nu}_{;\nu} + A_{\alpha;\beta} + A_{\beta;\alpha} + \lambda g_{\alpha\beta}. \quad (3)$$

В этой работе находится сферически-симметричное (СфС) решение уравнений (2), (3) в предположении о том, что гипотеза Пушкина верна. Будет показано, что эволюционный способ построения СфС решения уравнений КГД приводит не к появлению горизонта событий, изменяющего топологию пространства-времени, а к возникновению поверхности разрыва. Построенные таким образом СфС решения являются всюду регулярными.

2. Сферически симметричные решения уравнений КГД

Наиболее привычной формой СфС решения уравнений ОТО для пустого пространства является решение Шварцшильда

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)} + r^2d\Omega^2. \quad (4)$$

Менее известен тот факт, что СфС статическим решением уравнений ОТО с ненулевым Λ -членом является (см. формулу (7.101) в [3]) решение

¹ gorbatenko@vniief.ru.

² Используются обозначения из [1].

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_0}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r_0}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}\right)} + r^2 d\Omega^2. \quad (5)$$

Если выражение (4) является решением Шварцшильда с асимптотикой пространства Минковского, то выражение (5) является аналогом решения Шварцшильда уравнений ОТО с асимптотикой пространства де Ситтера. Поскольку при нулевом векторе Вейля $A_\alpha = 0$ уравнения КГД и уравнения ОТО совпадают (см. [1]), то выражение (5) является также и решением уравнений КГД.

При $r_0 = 0$ и $\Lambda < 0$ выражение (5) также является решением уравнений как ОТО, так и КГД. Это решение может быть записано в виде

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{r^2}{R_0^2}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 + \frac{r^2}{R_0^2}\right)} + r^2 d\Omega^2. \quad (6)$$

Решение (6) описывает пространство анти-де Ситтера. Константа R_0 априори никак не связана с Λ , входящей в выражении (5).

Решения уравнений КГД в отличие от решений уравнений ОТО допускают не только координатные преобразования, но и конформные преобразования, приведенные в работе [1]. Произведем над выражением (6) эти два типа преобразований. Во-первых, сделаем конформное преобразование, в результате которого получим

$$\left. \begin{aligned} ds^{*2} &= -e^{2\sigma} \left(1 + \frac{r^2}{R_0^2}\right) dt^2 + \frac{e^{2\sigma} dr^2}{\left(1 + \frac{r^2}{R_0^2}\right)} + e^{2\sigma} r^2 d\Omega^2, \\ A_\alpha &= \left(0, -\frac{d\sigma}{dr}, 0, 0\right). \end{aligned} \right\} (7)$$

Здесь $\sigma = \sigma(r)$. У вектора Вейля появилась ненулевая радиальная компонента. Во-вторых, сделаем преобразование радиальной переменной,

$$r \rightarrow R = r e^\sigma. \quad (8)$$

Новая радиальная переменная R , как легко заметить, имеет смысл яркостной координаты. После конформного и координатного преобразований получаем:

$$\left. \begin{aligned} ds'^2 &= -e^{2\sigma} \left(1 + \frac{e^{-2\sigma} R^2}{R_0^2}\right) dt^2 + \\ &+ \frac{e^{2\sigma} \left(\frac{dr}{dR}\right)^2 dR^2}{\left(1 + \frac{e^{-2\sigma} R^2}{R_0^2}\right)} + R^2 d\Omega^2, \\ A'_\alpha &= \left(0, -\frac{d\sigma}{dR}, 0, 0\right). \end{aligned} \right\} (9)$$

Из (8) следует, что производная dr/dR может быть записана в виде

$$\frac{dr}{dR} = e^{-\sigma} \left[1 - R \frac{d\sigma}{dR}\right]. \quad (10)$$

С учетом (10) формулы (9) принимают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} ds'^2 &= -e^{2\sigma} \left(1 + \frac{e^{-2\sigma} R^2}{R_0^2}\right) dt^2 + \\ &+ \frac{\left(1 - R \frac{d\sigma}{dR}\right)^2 dR^2}{\left(1 + \frac{e^{-2\sigma} R^2}{R_0^2}\right)} + R^2 d\Omega^2, \\ A'_\alpha &= \left(0, -\frac{d\sigma}{dR}, 0, 0\right). \end{aligned} \right\} (11)$$

В формулах (11) функция $\sigma(r)$ пока остается произвольной. Для ее нахождения потребуем, чтобы элемент 4-мерного объема в координатах (t, R, θ, φ) записывался так же, как и в решении Шварцшильда, т. е. как $dV_4 = R^2 \sin^2 \theta dt dR d\theta d\varphi$. Это приводит к условию

$$g'^*{}_{00} g'^*{}_{11} = -1, \quad (12)$$

из которого следует условие для определения функции $\sigma(r)$:

$$e^{2\sigma} \left(1 - R \frac{d\sigma}{dR}\right)^2 = 1. \quad (13)$$

После извлечения корня получаем

$$e^\sigma \left(1 - R \frac{d\sigma}{dR}\right) = \eta, \quad \eta = \pm 1. \quad (14)$$

В последующем полагаем, что

$$\eta = +1. \quad (15)$$

Решение дифференциального уравнения (14) имеет вид

$$e^\sigma = 1 - \frac{R}{B}, \quad (16)$$

где B – константа интегрирования с размерностью длины. Подстановка (16) в (8) приводит к следующим соотношениям:

$$r = \frac{R}{\left[1 - \frac{R}{B}\right]}, \quad R = \frac{r}{\left[1 + \frac{r}{B}\right]}. \quad (17)$$

Таким образом, наряду с (5) и (6) СФС решением уравнений КГД является:

$$\left. \begin{aligned} ds^2 = & - \left(1 - 2\frac{r}{B} + \left[\frac{1}{B^2} + \frac{1}{R_0^2} \right] r^2 \right) dt^2 + \\ & + \frac{dr^2}{\left(1 - 2\frac{r}{B} + \left[\frac{1}{B^2} + \frac{1}{R_0^2} \right] r^2 \right)} + r^2 d\Omega^2, \\ A_\alpha = & \left(0, -\frac{1}{[r-B]}, 0, 0 \right). \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Здесь опущены штрихи и звездочки у величин, а радиальная переменная вновь обозначена как r .

3. Условия сшивки двух ветвей решений уравнений КГД

Решения уравнений ОТО, как известно, для пустого пространства могут быть разрывными только на светоподобных поверхностях (см., например, [4]). Под разрывами имеются в виду разрывы вторых производных от метрики. Решения уравнений ОТО с разрывами на пространственноподобных поверхностях также могут возникать, но только при наличии ненулевого тензора энергии-импульса. Уравнения КГД можно рассматривать как уравнения ОТО с ненулевым тензором энергии-импульса специфического вида (3). Поэтому общая теория разрывных решений уравнений ОТО не приводит к априорным запретам на поиск разрывных решений для уравнений КГД.

Зададимся вопросом: можно ли сшить два типа СФС решений уравнений КГД – решений (5) и (18)?

Прежде всего, напомним, что в случае уравнений КГД речь может идти только о сшивке различных ветвей решений этих уравнений. Если сшиваются две одинаковые ветви решений, то в силу корректности постановки задачи Коши для уравнений КГД разрыва в принципе быть не может.

Предположим, что поверхность разрыва является 3-мерной пространственноподобной гиперповерхностью (ППГ) и описывается уравнением

$$f(x) \equiv f(x^0, x^1, x^2, x^3) = 0. \quad (19)$$

Будем предполагать, что выбором координат уравнение поверхности разрыва может быть записано в виде

$$x^1 = \text{const}. \quad (20)$$

Если некоторая функция $\Phi(x)$ по одну сторону от этой поверхности имеет значение Φ_1 , а по другую Φ_2 , то величину скачка $\Phi_2 - \Phi_1$ будем обозначать как $[\Phi]$. Таким образом,

$$[\Phi] \equiv \Phi_2 - \Phi_1. \quad (21)$$

Будем придерживаться требований, обычно используемых при рассмотрении разрывных решений, в частности, при рассмотрении ударных волн в релятивистской гидродинамике (см., например, [5]). Для уравнений КГД эти требования сводятся к следующим:

1) Для каждого из 10 уравнений КГД во всей области определения полевых функций должны выполняться соотношения

$$[R_{\alpha\beta}] = [T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} T]. \quad (22)$$

2) Среди 10 уравнений (22) имеются 4 уравнения

$$G_\alpha^1 = T_\alpha^1, \quad (23)$$

к которым предъявляются более жесткие требования. От каждой из величин G_α^1 и T_α^1 , входящих в уравнения $G_\alpha^1 = T_\alpha^1$, требуется, чтобы для них выполнялись не соотношения (22), а соотношения

$$[G_\alpha^1] = 0, \quad (24)$$

$$[T_\alpha^1] = 0. \quad (25)$$

Более жесткие требования (24), (25) означают, что на поверхности разрыва должны быть непрерывными потоки энергии и импульса материи, описываемой геометродинамическим тензором энергии-импульса.

Запишем те компоненты тензора T_α^1 , которые согласно (25) должны быть непрерывными. Индексы, принимающие значения (0, 2, 3), будем обозначать малыми латинскими буквами из начала алфавита.

$$\begin{aligned} T_1^1 = & -3g^{11} A_1 A_1 - 4g^{1a} A_1 A_a - g^{ab} A_a A_b + \\ & + 2g^{ab} A_{a;b} - g^{1a} (A_{1;a} + A_{a;1}) + \lambda. \end{aligned} \quad (26)$$

$$T_a^1 = -2g^{11}A_1A_a - 2g^{1b}A_aA_b + g^{11}(A_{a;1} + A_{1;a}) + g^{1b}(A_{a;b} + A_{b;a}). \quad (27)$$

В (26), (27) входят функции A_1, A_a, λ , а также производные от функций A_1, A_a . Структура выражений (26), (27) такова, что она не запрещает функциям A_1, A_a, λ и первым производным от A_1, A_a испытывать разрывы на пространственноподобных поверхностях разрыва. При этом требуется, чтобы не нарушались условия (25). Величины $A_\alpha(x)$ в целом могут быть кусочно непрерывными, а на кусках относиться к более высокому классу гладкости (C^2 и выше).

Таким образом, поверхность разрыва будем считать допустимой, если при ее наличии уравнения КГД выполняются во всех точках вне поверхности, а на самой поверхности претерпевают разрыв компоненты вектора A_α , функция λ , первые производные от вектора A_α , вторые производные от метрики. При этом имеет место либо равенство скачков в левой и в правой частях уравнений КГД, либо скачки величин взаимно гасят друг друга внутри каждой из частей уравнений КГД (24), (25). В любом случае непрерывными являются компоненты метрики и их первые производные.

4. Как возникает поверхность разрыва?

Еще одним вопросом, непосредственно связанным со сшивкой регулярных ветвей решения уравнения КГД, является вопрос, который в теории нелинейных дифференциальных уравнений называется вопросом о бифуркациях и точках ветвления решений.

Что принуждает решение перепрыгивать с одной ветви на другую?

Для решения этого вопроса рассмотрим эволюцию СфС решения методами теории возмущений. Сначала предположим, что внутри сферы какого-то радиуса возник небольшой избыток энергии. Естественно предположить, что при достаточно малом избытке энергии топология пространства будет мало отличаться от топологии плоского пространства и в каждой точке внутри возмущения наблюдатель может пользоваться всеми атрибутами системы отсчета наблюдателя в пространстве Минковского. Однако, при любом избытке энергии на достаточно больших радиусах гравитационное поле должно описываться внешним решением Шварцшильда, топология которого

качественно отличается от топологии плоского пространства. Переход на какую-то другую ветвь решения при приближении к центру должен произойти неминуемо. Причем этот переход должен произойти на радиусах, превышающих радиус поверхности Шварцшильда, т. е. там, где топология еще не претерпела качественного скачка.

В ОТО также решают задачи о сшивке внешней ветви решения Шварцшильда с внутренней (см., например, [3]). Поверхность сшивки представляет собой поверхность разрыва, на которой должны быть выполнены условия, приведенные в предыдущем разделе. Для удовлетворения этих условий обязательно должны быть сделаны определенные предположения об уравнениях состояния вещества во внутренней части решения. В результате может быть получено регулярное решение во всей области изменения радиальной переменной.

При решении аналогичной задачи для КГД в качестве вещества выступает геометродинамическая среда, уравнение состояния которой предопределены уравнениями КГД. Процедура сшивки внешнего решения с внутренним и есть скачок с одной ветви решения на другую. Из сказанного следует следующий алгоритм нахождения точек бифуркаций и точек ветвления решений:

- Необходимо выбирать для сшивки такие ветви, одна из которых не имеет сингулярности в нуле, а другая на бесконечности.

- Радиус поверхности, на которой производится сшивка, должен выбираться так, чтобы были выполнены условия сшивки, сформулированные в предыдущем разделе.

Описанный выше сценарий возникновения поверхности разрыва будем называть эволюционным. Особенность такого способа сшивки состоит в том, что после сшивки результирующее пространство имеет такую же топологию, что и пространство Минковского. То есть конгруэнции световых конусов обоих пространств могут быть совмещены путем небольших деформаций.

Поверхность разрыва в принципе может возникать на различных радиусах. Однако стационарной она будет только тогда, когда обратится в нуль компонента T_1^1 , имеющая смысл силы, действующей на поверхности и направленной по радиусу. Поэтому виртуально поверхность разрыва может возникать где угодно, но она начнет перемещаться в одну или в другую сторону до тех пор, пока не обратится в нуль сила, определяемая T_1^1 . А это произойдет на том радиусе, на котором нач-

нут выполняться сформулированные в предыдущем разделе условия сшивки.

5. Условия сшивки двух ветвей сферически-симметричного решения

Сформулируем общие требования, приведенные в двух предыдущих разделах, для случая полного СфС решения уравнений КГД. Под полным решением будем понимать решение, состоящее из двух ветвей. Внутренняя ветвь – это решение (18), а внешняя ветвь – это решение (5). То есть

$$ds^2 = \begin{cases} -\left(1 - 2\frac{r}{B} + \left[\frac{1}{B^2} + \frac{1}{R_0^2}\right]r^2\right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - 2\frac{r}{B} + \left[\frac{1}{B^2} + \frac{1}{R_0^2}\right]r^2\right)} + r^2 d\Omega^2, & 0 \leq r \leq \tilde{r}, \\ -\left(1 - \frac{r_0}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r_0}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}\right)} + r^2 d\Omega^2, & r \geq \tilde{r}. \end{cases} \quad (28)$$

$$A_\alpha = \begin{cases} \left(0, -\frac{1}{[r-B]}, 0, 0\right), & 0 \leq r < \tilde{r}, \\ (0, 0, 0, 0), & r \geq \tilde{r}. \end{cases}$$

Радиус поверхности сшивки в (28) обозначен как \tilde{r} .

В точке сшивки двух ветвей должны быть непрерывными как компоненты метрического тензора, так и их первые производные. Поскольку у обеих ветвей совпадают компоненты g_{22}, g_{33} , а компоненты g_{00}, g_{11} удовлетворяют соотношению $g_{00}g_{11} = -1$, то условия сшивки сводятся к требованию равенства в точке сшивки \tilde{r} компонент g_{00} и первых производных от этой компоненты. Первое условие дает:

$$-2\frac{\tilde{r}}{B} + \left[\frac{1}{B^2} + \frac{1}{R_0^2}\right]\tilde{r}^2 = -\frac{r_0}{\tilde{r}}. \quad (29)$$

Второе условие дает:

$$-2\frac{1}{B} + 2\left[\frac{1}{B^2} + \frac{1}{R_0^2}\right]\tilde{r} = \frac{r_0}{\tilde{r}^2}. \quad (30)$$

В условиях (29), (30) исключены члены с космологической константой Λ как малые.

Комбинируя соотношения (29) и (30), получаем два выражения для координаты точки сшивки³:

$$\tilde{r} = \left(2r_0 / \left(\frac{1}{B^2} + \frac{1}{R_0^2}\right)\right)^{1/3}, \quad (31)$$

$$\tilde{r} = \left(\frac{3}{2}Br_0\right)^{1/2}. \quad (32)$$

Приравниваем соотношения (31), (32) и записываем полученное уравнение в безразмерных величинах

$$b \equiv \frac{B}{r_0}, \quad e \equiv \frac{R_0}{r_0}. \quad (33)$$

Получаем алгебраическое уравнение 4-й степени для определения константы b :

$$\left(\frac{b}{e}\right)^4 + 2\left(\frac{b}{e}\right)^2 - \frac{32}{27}e\left(\frac{b}{e}\right) + 1 = 0. \quad (34)$$

Если ввести обозначение

$$z \equiv \frac{b}{e}, \quad (35)$$

то уравнение (34) может быть записано в следующем виде:

$$(z^2 + 1)^2 = \frac{32}{27}ez. \quad (36)$$

Уравнение (36) относительно z представляет собой алгебраическое уравнение четвертой степени, при этом величина e является параметром. Левая часть уравнения (36) больше единицы, а величины e и z положительны. На рис. 1 построены графики левой и правой частей уравнения (36). Видно, что решение существует только при $e \geq 3^{3/2}/2$. В точке, где $e = 3^{3/2}/2$ значение z равно, как легко установить из уравнения (36), $z = 1/\sqrt{3}$.

³ Под «точкой сшивки» на самом деле имеется в виду сферическая поверхность радиуса \tilde{r} .

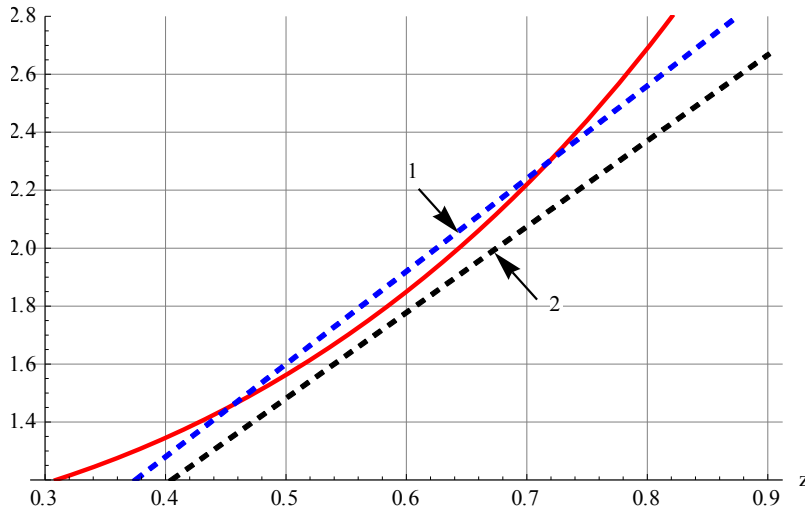


Рис. 1. Графическое решение уравнения (36)

Кривая соответствует левой части уравнения (36). Пунктирная прямая 1 соответствует $e = 2,7$, а прямая 2 – $e = 2,5$. Решение уравнения (36) существует в случае, когда пунктирная кривая либо пересекается со сплошной, либо касается ее. Касание имеет место при

$$e = 3^{3/2}/2 \approx 2,598.$$

Прямое численное решение уравнения (36) с помощью программного комплекса Mathematica9 показывает, что при $e \geq 3^{3/2}/2$ из четырех корней уравнения (36) два являются комплексными и поэтому не подходят для последующего рассмотрения. Из оставшихся двух корней нужно выбрать тот, для которого выполняются два неравенства. Во-первых, неравенство

$$\tilde{x} > 1, \tag{37}$$

где $\tilde{x} = \tilde{r}/r_0$. Это неравенство гарантирует, что внешняя ветвь решения не дойдет до радиуса Шварцшильда и не сделает решение сингулярным. Во-вторых, неравенство

$$b > \tilde{x}. \tag{38}$$

При невыполнении этого неравенства сингулярным становится вектор Вейля, как это следует из выражения (28) для $A_1(r)$. Из (32) и (37) следует неравенство

$$b > \frac{2}{3}. \tag{39}$$

Подстановка (32) в (38) приводит к неравенству

$$b > \frac{3}{2}. \tag{40}$$

Неравенство (40) является более сильным. Если оно удовлетворяется, то удовлетворяется и неравенство (39).

Из двух вещественных корней уравнения (36) только один обеспечивает выполнение неравенства (40). Соотношение (42) дает явное выражение для этого корня, который обозначен как $z_4(e)$. Если ввести обозначение

$$q(e) \equiv \left(-27 + 8e^2 - 4\sqrt{-27 + 8e^2 + 4e^4} \right)^{1/3}, \tag{41}$$

то решение для $z_4(e)$ (далее $z_4(e)$ обозначаем просто как $z(e)$) может быть записано как

$$z(e) = \frac{1}{3} \sqrt{-3 + \frac{9}{q(e)} + q(e)} + \frac{1}{2} \left\{ -\frac{8}{3} - \frac{4}{q(e)} - \frac{4}{9} q(e) + \frac{32e}{9\sqrt{-3 + \frac{9}{q(e)} + q(e)}} \right\}^{1/2}. \tag{42}$$

На рис. 2 приведен график зависимости от параметра $e \equiv \frac{R_0}{r_0}$ двух функций: физического корня

$z(e)$ и величины $b \equiv \frac{B}{r_0} = ez(e)$. На рис. 3 зависи-

мость физического корня $z(e)$ от параметра e приведена с указанием координат точки, начиная с которой корень имеет смысл.

На рис. 4 показан ход компоненты метрики $-g_{00}(r/r_0)$ при различных значениях величины e .

При $e < 3^{3/2}/2$ внутренняя и внешняя ветви СфС решения не могут быть сшиты. При значениях $e > 3^{3/2}/2$ точка сшивки растет по величине, а глубина «ям» во внутренней ветви решения уменьшается.

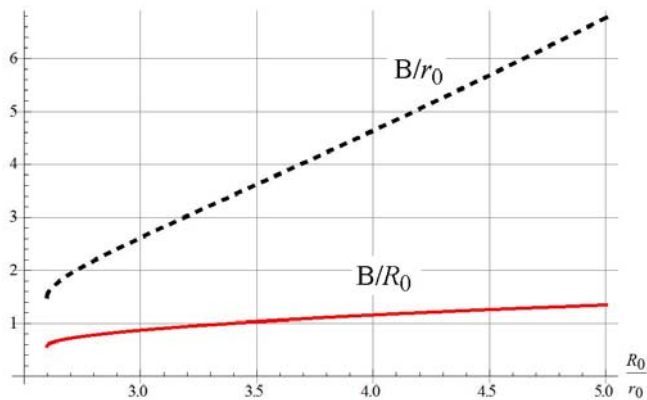


Рис. 2. Зависимость от параметра $e \equiv \frac{R_0}{r_0}$ двух функций: физического корня $z(e)$

$$\text{и величины } b \equiv \frac{B}{r_0} = e z(e)$$

Зависимость корня $z_4(e)$ от параметра e

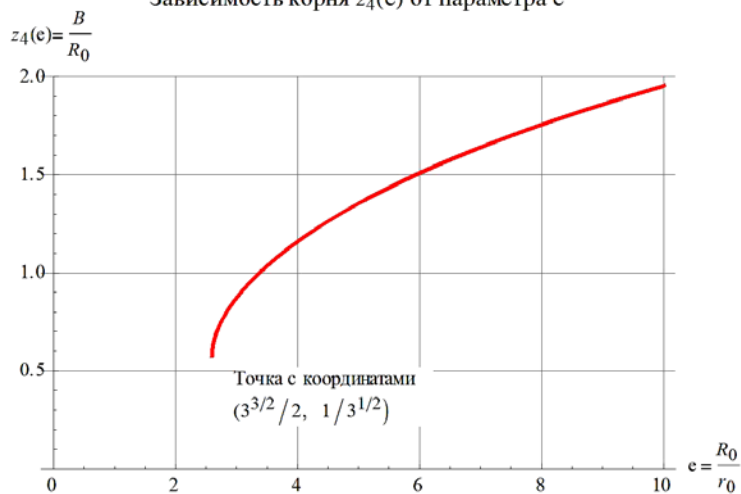


Рис. 3. Зависимость физического корня $z(e)$ от параметра $e \equiv \frac{R_0}{r_0}$

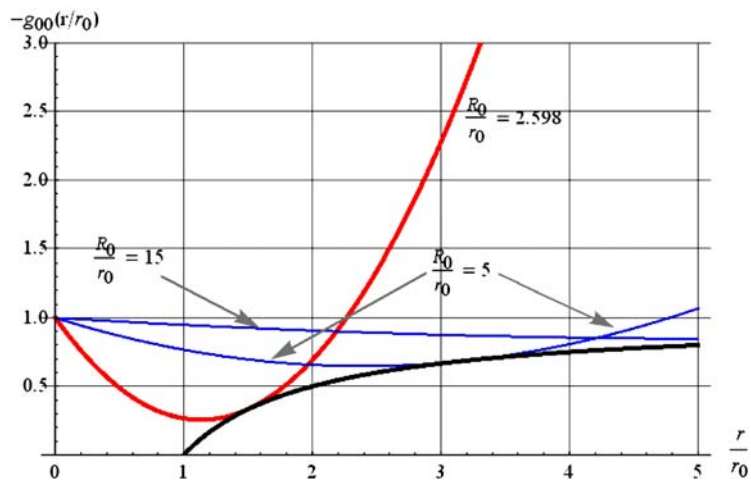


Рис. 4. Возможный ход величины $-g_{00}(r/r_0)$ в зависимости от параметра $e \equiv \frac{R_0}{r_0}$

6. Масса сферически-симметричного объекта, описываемого полным решением

Найдем плотность энергии U и давление P для внутренней ветви полного СфС решения. Исходным выражением в нашем рассмотрении будет выражение (3) для тензора энергии-импульса геометродинамической среды. Для вычисления членов с производными, входящими в (3), необходимы явные выражения для символов Кристоффеля. Для метрики

$$ds^2 = -e^\gamma dt^2 + e^{-\gamma} dr^2 + r^2 [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2] \quad (43)$$

отличными от нуля Кристоффелями являются (см. [3]):

$$\left. \begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 \\ 01 \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \gamma' \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \gamma' e^{-2\gamma} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 00 \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \gamma' e^{2\gamma} \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \gamma' \begin{pmatrix} 1 \\ 22 \end{pmatrix} = -re^\gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 33 \end{pmatrix} = -re^\gamma \sin^2 \theta \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \end{pmatrix} &= \frac{1}{r} \begin{pmatrix} 2 \\ 23 \end{pmatrix} = \text{ctg} \theta \begin{pmatrix} 2 \\ 33 \end{pmatrix} = -\sin \theta \cos \theta \\ \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \end{pmatrix} &= \frac{1}{r} \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

Компоненту A_1 вектора Вейля A_α обозначим просто как A :

$$A_\alpha = (0, A, 0, 0). \quad (45)$$

С использованием (45) и (44) получаем:

$$(A_\mu A_\nu g^{\mu\nu}) = e^\gamma A^2. \quad (46)$$

$$A_{0;0} = -\frac{1}{2} \gamma' e^{2\gamma} A. \quad (47)$$

$$A_{1;1} = A' + \frac{1}{2} A \gamma'. \quad (48)$$

$$A_{2;2} = re^\gamma A, \quad A_{3;3} = \sin^2 \theta \cdot re^\gamma A. \quad (49)$$

$$A^\nu{}_{;\nu} = e^\gamma \left[A' + A \gamma' + \frac{2}{r} A \right]. \quad (50)$$

Выпишем в явном виде выражения для отличных от нуля компонент тензора энергии-импульса.

$$\left. \begin{aligned} T_{00} &= e^{2\gamma} \left[A^2 + 2A' + A \gamma' + \frac{4}{r} A \right] - \lambda e^\gamma, \\ T_{11} &= -3A^2 - A \gamma' - \frac{4}{r} A + \lambda e^{-\gamma}, \\ T_{22} &= r^2 e^\gamma \left[-A^2 - 2A' - 2A \gamma' - \frac{2}{r} A \right] - \lambda r^2, \\ T_{33} &= T_{22} \sin^2 \theta. \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Из (51) следует, что свертка

$$T \equiv (g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}) = -6(g^{\mu\nu} A_\mu A_\nu) - 6(g^{\mu\nu} A_{\mu;\nu}) + 4\lambda \quad (52)$$

приводится к виду

$$T = -6e^\gamma \left[A^2 + A' + A \gamma' + \frac{2}{r} A \right] + 4\lambda. \quad (53)$$

Будем предполагать, что геометродинамическая среда покоится в рассматриваемой системе отсчета. Это означает, что у вектора 4-скорости среды u^α отлична от нуля только компонента u^0 . Из условия

$$u^2 = -1$$

находим, что

$$u^\alpha = (e^{-\gamma/2}, 0, 0, 0). \quad (54)$$

Плотность энергии U и давление P находятся по формулам (см. [6]).

$$U = (u^\mu T_{\mu\nu} u^\nu) = e^\gamma \left[A^2 + 2A' + A \gamma' + \frac{4}{r} A \right] - \lambda, \quad (55)$$

$$P = \frac{1}{3}(U + T) = \frac{1}{3} e^\gamma \left[-5A^2 - 4A' - 5A \gamma' - \frac{8}{r} A \right] + \lambda. \quad (56)$$

Величина U может быть записана в виде суммы пяти слагаемых:

$$U = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5, \quad (57)$$

где

$$U_1 \equiv -\frac{1}{e^2}, \quad (58)$$

$$U_2 \equiv \left(\frac{(z_4 e - x)^2}{z_4^2 e^2} + \frac{x^2}{e^2} \right) \frac{1}{(z_4 e - x)^2}, \quad (59)$$

$$U_3 \equiv \left(\frac{(z_4 e - x)^2}{z_4^2 e^2} + \frac{x^2}{e^2} \right) \frac{2}{(z_4 e - x)^2}, \quad (60)$$

$$U_4 \equiv \left(-\frac{(z_4 e - x)}{z_4^2 e^2} + \frac{x}{e^2} \right) \frac{2}{(z_4 e - x)}, \quad (61)$$

$$U_5 \equiv \left(\frac{(z_4 e - x)^2}{z_4^2 e^2} + \frac{x^2}{e^2} \right) \frac{4}{x(z_4 e - x)}. \quad (62)$$

Здесь использованы формулы для внутренней ветви решения, удовлетворяющей условиям сшивки (31), (32). Функции e^γ и a записываются на этой ветви следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} e^\gamma &= \left[\frac{(x - z_4 e)^2}{z_4^2 e^2} + \frac{x^2}{e^2} \right], \\ a &= -\frac{1}{[x - z_4 e]}. \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

Величина z_4 представляет собой функцию от e , определяемой соотношением (42), а верхний предел интегрирования \tilde{x} равен

$$\tilde{x} = \sqrt{\frac{2}{3} z_4(e) e}. \quad (64)$$

В терминах величин (58)–(62) выражение для P записывается как

$$P = -U_1 - U_2 - U_3 - \frac{5}{3}U_4 - \frac{2}{3}U_5. \quad (65)$$

Вычислим энергию, содержащуюся во внутренней ветви решения. Эта энергия равна:

$$E = \frac{c^4}{8\pi G} 4\pi \int_0^{\tilde{r}} r^2 dr U = Mc^2 I. \quad (66)$$

Здесь

$$I \equiv \left(\frac{1}{r_0} \right) \int_0^{\tilde{r}} r^2 dr \left\{ e^\gamma \left[2A' + \gamma'A + \frac{4}{r}A + A^2 \right] - \frac{1}{R_0^2} \right\}. \quad (67)$$

Интегрирование в (66), (67) производится от нуля до \tilde{r} . В терминах безразмерных величин интеграл (67) записывается как

$$I = \int_0^{\tilde{x}} x^2 dx \left\{ e^\gamma \left[a^2 + 2 \frac{da}{dx} + a \frac{d\gamma}{dx} + \frac{4}{x}a \right] - \frac{1}{e^2} \right\} \quad (68)$$

Интеграл (68) запишем в виде суммы пяти интегралов:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5, \quad (69)$$

где

$$I_1 \equiv \int_0^{\tilde{x}} x^2 dx \left\{ -\frac{1}{e^2} \right\} = -\frac{\tilde{x}^3}{3e^2}, \quad (70)$$

$$I_2 \equiv \int_0^{\tilde{x}} x^2 dx e^\gamma a^2 =$$

$$= \int_0^{\tilde{x}} dx \left\{ \left(\frac{(z_4 e - x)^2}{z_4^2 e^2} + \frac{x^2}{e^2} \right) \frac{x^2}{(z_4 e - x)^2} \right\}, \quad (71)$$

$$I_3 \equiv \int_0^{\tilde{x}} x^2 dx \left\{ e^\gamma 2 \frac{da}{dx} \right\} =$$

$$= 2 \int_0^{\tilde{x}} dx \left\{ \left(\frac{(z_4 e - x)^2}{z_4^2 e^2} + \frac{x^2}{e^2} \right) \frac{x^2}{(z_4 e - x)^2} \right\}, \quad (72)$$

$$I_4 \equiv \int_0^{\tilde{x}} x^2 dx \left\{ e^\gamma a \frac{d\gamma}{dx} \right\} =$$

$$= 2 \int_0^{\tilde{x}} dx \left\{ \left(-\frac{(z_4 e - x)}{z_4^2 e^2} + \frac{x}{e^2} \right) \frac{x^2}{(z_4 e - x)} \right\}, \quad (73)$$

$$I_5 \equiv \int_0^{\tilde{x}} x^2 dx \left\{ e^\gamma \frac{4}{x} a \right\} =$$

$$= \int_0^{\tilde{x}} dx \left\{ \left(\frac{(z_4 e - x)^2}{z_4^2 e^2} + \frac{x^2}{e^2} \right) \frac{4x}{(z_4 e - x)} \right\}. \quad (74)$$

Численные расчеты с использованием программного комплекса Mathematica9 дали следующие результаты:

1) Результаты формулируются в терминах безразмерных величин e , $z(e)$, \tilde{x} , I .

2) Интеграл I (69) ведет себя так, как показано на рис. 5.

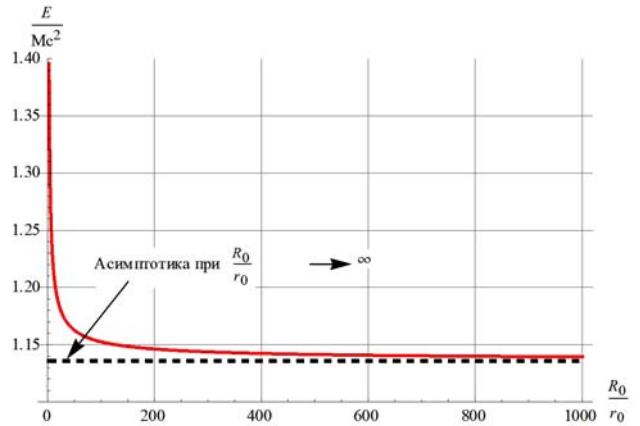


Рис. 5. Зависимость безразмерного интеграла (68)

от параметра $e \equiv \frac{R_0}{r_0}$

При $e \rightarrow \infty$ асимптотика величин $z(e)$ и $\tilde{x}(e)$ имеет следующий вид⁴:

$$b(e) \rightarrow \frac{2^{5/3}}{3} e^{4/3}, \quad (75)$$

$$\tilde{x}(e) \rightarrow \frac{4}{3} e^{2/3}, \quad z(e) \rightarrow \frac{2^{5/3}}{3} e^{1/3}.$$

Подстановка (75) в (69) дает

$$I \xrightarrow{e \rightarrow \infty} \frac{92}{81} = 1,1358. \quad (76)$$

Из рис. 5 видно, что полная энергия (66), заключенная внутри сферы радиуса \tilde{r} , превышает видимую удаленным наблюдателем энергию Mc^2 в 1,14–1,39 раза. Удаленный наблюдатель видит на самом деле не всю энергию объекта, а энергию за вычетом энергии связи. Энергия связи составляет (0,14–0,39) Mc^2 .

⁴ Напомним, что e это не показатель экспоненты, а величина, равная $e \equiv \frac{R_0}{r_0}$ (см. (33)).

7. Частный случай

Величины B и R_0 с размерностью длины возникают при построении СФС решения во внутренней области. Одна из них возникает за счет конформного преобразования, а другая – за счет координатного преобразования. Между ними имеется связь, определяемая из условия сшивки. Но одна из них может быть выбрана произвольно.

Есть три частных случая для выбора величин B и R_0 :

- 1) Случай, когда эти величины выбираются соответствующими предельной точке на рис. 3.
- 2) Случай, когда радиус сшивки полагается равным планковской длине.
- 3) Случай, когда величины B и R_0 равны между собой, т. е.

$$B = R_0 \rightarrow b = e. \quad (77)$$

Далее мы рассмотрим третий случай, хотя и другие случаи могут представить интерес. В случае 3 не может возникнуть рассогласования с точки зрения возникновения сингулярности в векторе Вейля при переходе от одного набора значения r_0, B к другому.

При выполнении (77) из уравнения (34) сразу получаем

$$e = b = 27/8. \quad (78)$$

Величина $z(e) = 1$, а точка сшивки

$$\tilde{x} = 9/4. \quad (79)$$

На рис. 6 приведены три графика зависимости радиальной скорости пробной частицы, начинающей двигаться к центру по радиусу с таким значе-

нием начальной скорости, при которой скорость в точке сшивки $r = \tilde{r} = 2,25r_0$ принимает значения $V_0 = -0,35c$, $V_0 = -0,368c$, $V_0 = -0,389c$. Первая из этих скоростей соответствует случаю, когда частица, не долетев до центра, поворачивает обратно. Вторая скорость соответствует остановке частицы точно в центре. Третья скорость – когда частица проходит через центр и движется по радиусу в противоположном направлении.

Во всех трех случаях до подхода частицы до точки сшивки возникает ускорение, направленное не к центру, а от центра. То есть притяжение сменяется отталкиванием.

8. Обсуждение

Кратко резюмируем основные результаты данной работы.

В работе получила развитие гипотеза Пушкина [2] о том, что перенормированный тензор энергии-импульса, описывающий квантовополевую поляризацию пространства-времени, совпадает с тензором $T_{\alpha\beta}^{КГД}$ вида (3), т. е. с тензором энергии-импульса конформно-инвариантного обобщения уравнений ОТО. Гипотеза допускает обращение с уравнениями КГД как с обычной системой 10 нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных для 15 функций от четырех переменных. При этом у решений уравнений КГД возникают новые свойства, касающиеся отсутствия связей на данные Коши и позволяющие формировать поверхности разрыва



Рис. 6. Зависимости радиальной скорости пробной частицы от радиуса при различных значениях начальных скоростей (значения V_0 приведены к радиусу сшивки $2,25r_0$)

на ППГ. Феномен ветвления полного решения и появление точек бифуркации – хорошо известен в теории нелинейных дифференциальных уравнений (см., например, [7]).

Учет вейлевских степеней свободы открывает качественно новые возможности с точки зрения построения решений уравнений КГД. Новые возможности позволяют составлять полные решения из отдельных регулярных ветвей путем сшивки этих ветвей по правилам построения поверхностей разрыва в релятивистской гидродинамике. Это продемонстрировано на простейшем примере построения полного СфС решения уравнений КГД.

К решениям уравнений КГД может быть предъявлено и удовлетворено такое требование, которое не выполнимо в случае ОТО. А именно: в процессе формирования любого решения нельзя изменять арифметизацию точек пространства-времени, т.е. точки многообразия не должны ни исчезать, ни возникать. По существу, это является требованием об эволюционном характере решения на всех этапах его возникновения. Ясно, что появление в теории горизонтов событий типа поверхности Шварцшильда противоречит этому требованию, поскольку даже свет по часам удаленного наблюдателя не может ни войти под сферу Шварцшильда, ни выйти из нее. С точки зрения удаленного наблюдателя все точки под горизонтом в принципе не познаваемы, а процесс возникновения горизонта событий в принципе не может быть описан методами теории возмущений.

Проведенное в данной работе рассмотрение показывает, что при учете в динамических уравнениях вейлевских степеней свободы радикальным образом меняется характер коллапса. Вместо возникновения горизонта событий возникает поверхность разрыва, на которой происходит изменение типа решения – переход на другую ветвь решения. Это ведет к изменению режима сжатия. Существенно при этом то, что смена ветвей решения происходит с соблюдением всех правил построения разрывных решений, описанных в разделе 6.

Таким образом, предлагаемый в данной работе механизм остановки коллапса состоит в возбуждении в процессе коллапса вейлевских степеней свободы. В обычном состоянии эти степени свободы также существуют в уравнениях КГД, но в пустом пространстве они пренебрежимо малы и не оказывают на динамику пространства никакого влияния. Они находятся в «спящем» состоянии до тех пор, пока состояние пространства не становится

экстремальным, т. е. не возникает режим приближения к сингулярности.

В данной работе не ставилась задача применения полученного полного регулярного СфС решения к описанию реальных звездных объектов. Для такого применения необходимо, по-видимому, дополнить тензор $T_{\alpha\beta}^{\text{КГД}}$ вида (3) такой частью, которая соответствовала бы обычной (видимой) части материи. Кроме того, необходимо учесть, что звездные объекты имеют не только массу, но и моменты импульса, электрические заряды и магнитные моменты, они вращаются и участвуют в других движениях. Полученные в работе СфС решения подходят, скорее, для выяснения концептуальных вопросов теории типа вопроса о коллапсе, чем для описания звездных объектов. Именно эта цель и преследовалась в данной работе.

Наряду с СфС решениями, у которых во внешней ветви отсутствует вектор Вейля, существуют и такие решения, у которых топологические инварианты, построенные из вектора Вейля, не равны нулю в обеих ветвях. Решения такого типа описаны в [6]. В данной работе мы ограничились такими ветвями СфС решения, у которых внешняя ветвь совпадает с решением Шварцшильда.

В настоящее время ОТО обычно применяется по принципу «дальний космос не действует на ближний». На больших масштабах разлет Вселенной с ускорением обусловлен наличием темной энергии (ТЭ), которая приводит к отталкиванию массивных объектов друг от друга. На малых масштабах ситуация принципиально меняется, ТЭ перестает играть какую бы то ни было роль, и все объекты начинают притягиваться друг к другу (либо по закону Ньютона, либо возможно по какому-то другому закону, но притягиваться). Масштаб расстояний, на которых происходит смена роли ТЭ, по оценкам [8] порядка 1–3 Мпс.

В нашем подходе принцип «дальний космос не действует на ближний» нарушается. Вейлевские степени свободы действуют не только на космологических масштабах, но и в тех областях, где инварианты кривизны Петрова начинают неограниченно расти. Это продемонстрировано на примере сферически-симметричных решений уравнений КГД. Существенно, что ветвление решений диктуется теми же степенями свободы, которые при уменьшении инвариантов кривизны, т. е. на больших масштабах, приводят к появлению ТЭ. Оба класса эффектов предсказываются одними и теми же уравнениями КГД.

Список литературы

1. Горбатенко М. В., Незнамов В. П. Проблема коллапса в общей теории относительности и возможные подходы к ее решению (Часть 1) // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2013. Вып. 2. С. 46–57.
2. Pushkin A. V. Monstrous moonshine and Physics // Proceedings of 2-d International Sakharov Conference on Physics. Singapore: World Scientific Publ. 1997. P. 316.
3. Синг Дж. Общая теория относительности. М.: ИЛ, 1963.
4. Захаров В. Д. Гравитационные волны в теории тяготения Эйнштейна. М.: Наука, 1972.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
6. Горбатенко М. В. Конформная геометродинамика. Том I. Динамические уравнения и точные решения. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2012.
7. Малинецкий Г. Г. Хаос. Структуры. Вычислительный эксперимент. М.: УРСС, 2002.
8. Чернин А. Д. Темная энергия в ближней Вселенной: данные телескопа «Хаббл», нелинейная теория, численные эксперименты // УФН. 2013. Т. 183, № 7. С. 741–747.

Статья поступила в редакцию 09.12.2013