УДК 530.145+514.764.2

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ И ЭРМИТОВОСТЬ ДИРАКОВСКИХ ГАМИЛЬТОНИАНОВ В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ КЕРРА

М. В. Горбатенко, В. П. Незнамов*

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

В работе для поля Керра доказана физическая эквивалентность дираковского гамильтониана Чандрасекара и самосопряженного гамильтониана H_η с плоским скалярным произведением волновых функций.

Определен явный вид операторов преобразования гамильтониана и волновых функций Чандрасекара в η-представление с плоским скалярным произведением.

При ограничении области определения волновых функций уравнения Дирака в поле Керра двумерными поверхностями вращения вокруг оси z гамильтониан Чандрасекара и самосопряженный гамильтониан в η-представлении являются эрмитовыми с выполнением равенства скалярных произведений $(\psi, H\varphi) = (H\psi, \varphi)$.

Ключевые слова: гравитационное поле Керра, дираковский гамильтониан Чандрасекара, дираковский гамильтониан в η-представлении.

Введение

Чандрасекар в работе [1] провел разделение угловых и радиальных переменных для уравнения Дирака в гравитационном поле Керра [2]. Пейдж в работе [3] обобщил подход Чандрасекара для уравнения Дирака в гравитационном поле Керра – Ньюмена [4]. В том и другом случаях использовались метрики в координатах Бойера – Линдквиста [5].

Стационарные четырехкомпонентные гамильтонианы Чандрасекара и Пейджа являются псевдоэрмитовыми [6–8, 11], или, другими словами, эрмитовыми с весовым оператором Паркера [9] в скалярных произведениях волновых функций.

Авторами в работах [10–12] с помощью методов псевдоэрмитовой квантовой механики [6–8] для произвольных гравитационных полей, в том числе зависящих от времени, разработан метод получения самосопряженных дираковских гамильтонианов с плоским скалярным произведением волновых функций**. В работе [12], в частности, получен самосопряженный гамильтониан в гравитационном поле Керра. Этот гамильтониан легко обобщается на случай геометрии Керра – Ньюмена.

В данной работе доказывается эквивалентность гамильтониана Чандрасекара с соответствующим самосопряженным гамильтонианом в η-представлении. Для геометрии Керра определяется явный вид операторов преобразования в η-представление.

Для областей определения волновых функций уравнения Дирака в поле Керра, ограниченных двумерными поверхностями вращения вокруг оси z, доказывается выполнение условия эрмитовости гамильтониана Чандрасекара и гамильтониана в η-представлении. К этим поверхностям, в частности, относятся поверхности внешней и внутренней эргосфер поля Керра.

1. Метрика Керра в координатах Бойера – Линдквиста

Решение Керра уравнений ОТО характеризуется точечным источником гравитационного поля

* E-mail: neznamov@vniief.ru.

** Ниже такое представление дираковских гамильтонианов будем называть η-представлением.

с массой M, вращающимся с угловым моментом $\mathbf{J} = Mc\mathbf{a}$, где c – скорость света.

Ниже будем использовать систему единиц $\hbar = c = 1$.

Тетрадные векторы определяются соотношением

$$H^{\mu}_{\underline{\alpha}} H^{\nu}_{\underline{\beta}} g_{\mu\nu} = \eta_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}, \qquad (1)^*$$

где

$$\eta_{\underline{\alpha}\underline{\beta}} = \mathrm{diag}\left[1,-1,-1,-1\right]. \qquad (2)$$

Глобальные (неподчеркнутые) индексы опускаются и поднимаются с использованием метрического тензора $g_{\mu\nu}$ и обратного тензора $g^{\mu\nu}$; локальные (подчеркнутые) индексы опускаются и поднимаются с использованием тензоров $\eta_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}$, $\eta^{\underline{\alpha}\underline{\beta}}$.

Матрицы Дирака удовлетворяют соотношениям

$$\gamma^{\mu}\gamma^{\alpha} + \gamma^{\alpha}\gamma^{\mu} = 2g^{\mu\alpha}E, \qquad (3)$$

$$\gamma^{\underline{\mu}}\gamma^{\underline{\alpha}} + \gamma^{\underline{\alpha}}\gamma^{\underline{\mu}} = 2\eta^{\underline{\mu}\underline{\alpha}}E, \qquad (4)$$

где E – единичная 4×4 матрица. Связь между γ^{α} и $\gamma^{\underline{\alpha}}$ определяется выражением

$$\gamma^{\alpha} = H^{\alpha}_{\underline{\beta}}\gamma^{\underline{\beta}}. \qquad (5)$$

Метрика Керра в координатах Бойера – Линдквиста (t, r, θ, φ) имеет вид

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_0 r}{\rho_K^2}\right)dt^2 + \frac{2ar_0 r}{\rho_K^2}\sin^2\theta dt d\varphi - \frac{\rho_K^2}{\Delta}dr^2 - \\ -\rho_K^2 d\theta^2 - \left(r^2 + a^2 + \frac{a^2 r_0 r}{\rho_K^2}\sin^2\theta\right)\sin^2\theta d\varphi^2. \qquad (6)$$

В выражении (6) $r_0 = \dfrac{2GM}{c^2}$ – гравитационный радиус («горизонт событий») поля Шварцшильда, G – гравитационная постоянная, $\rho_K^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta$, $\Delta = r^2 - r_0 r + a^2$.

В соответствии с условием причинности Гильберта $(g_{00} > 0)$ в метрике (6) подразумевается выполнение неравенства

$$\left(1 - \frac{r_0 r}{\rho_K^2}\right) > 0. \qquad (7)$$

В координатах (r, θ) равенство нулю выражения (7) определяет внешнюю и внутреннюю поверхности эргосфер поля Керра.

Контравариантный тензор $g^{\alpha\beta}$ имеет вид:

$$g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\Delta}\left(r^2 + a^2 + \dfrac{a^2 r_0 r}{\rho_K^2}\sin^2\theta\right) & 0 & 0 & \dfrac{ar_0 r}{\Delta\rho_K^2} \\ 0 & -\dfrac{\Delta}{\rho_K^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{\rho_K^2} & 0 \\ \dfrac{ar_0 r}{\Delta\rho_K^2} & 0 & 0 & -\dfrac{1}{\Delta\sin^2\theta}\left(1 - \dfrac{r_0 r}{\rho_K^2}\right) \end{pmatrix} \qquad (8)$$

2. Гамильтонианы частиц со спином 1/2 в поле Керра

В работе [12] для метрики (6) авторами в η-представлении получен самосопряженный дираковский гамильтониан с плоским скалярным произведением волновых функций. Он имеет достаточно сложный вид:

$$H_{\eta} = \frac{m}{\sqrt{g^{00}}}\gamma^{\underline{0}} - \frac{i\sqrt{\Delta}}{\rho_K\sqrt{g^{00}}}\gamma^{\underline{0}}\gamma^{\underline{1}}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right) - \\ -\frac{i}{\rho_K\sqrt{g^{00}}}\gamma^{\underline{0}}\gamma^{\underline{2}}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{2}\mathrm{ctg}\theta\right) - \frac{i}{g^{00}\sqrt{\Delta}\sin\theta}\gamma^{\underline{0}}\gamma^{\underline{3}}\frac{\partial}{\partial\varphi} - \\ -\frac{i}{g^{00}}\frac{ar_0 r}{\rho_K^2\Delta}\frac{\partial}{\partial\varphi} - \frac{i}{2}\gamma^{\underline{0}}\gamma^{\underline{1}}\left[\frac{\partial}{\partial r}\frac{\sqrt{\Delta}}{\rho_K\sqrt{g^{00}}}\right] - \\ -\frac{i}{2}\gamma^{\underline{0}}\gamma^{\underline{2}}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{1}{\rho_K\sqrt{g^{00}}}\right] + \frac{i}{4}\gamma^{\underline{3}}\gamma^{\underline{1}}\sqrt{g^{00}}\frac{\Delta}{\rho_K}ar_0 \times$$

---

[*] Значки с греческими буквами принимают значения 0, 1, 2, 3, значки с римскими буквами принимают значения 1, 2, 3.

$$\times \sin\theta \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r}{g^{00}\rho_K^2\Delta}\right) -$$

$$-\frac{i}{4}\gamma^{\underline{2}}\gamma^{\underline{3}}\sqrt{g^{00}}\frac{\sqrt{\Delta}}{\rho_K}ar_0\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{r}{g^{00}\rho_K^2\Delta}\right). \quad (9)$$

Если в выражении (9) ограничиться членами линейными по a, мы получим самосопряженный гамильтониан для слабого поля Керра

$$H_\eta^{app} = m\sqrt{f_S}\gamma^{\underline{0}} - if_S\gamma^{\underline{0}}\gamma^{\underline{1}}\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\right) - \frac{ir_0}{2r^2}\gamma^{\underline{0}}\gamma^{\underline{1}} -$$

$$-i\sqrt{f_S}\gamma^{\underline{0}}\left[\gamma^{\underline{2}}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{2}\mathrm{ctg}\theta\right)+\gamma^{\underline{3}}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right] -$$

$$-\frac{iar_0}{r^3}\frac{\partial}{\partial\varphi} - i\frac{3}{4}\frac{ar_0}{r^3}\sin\theta\gamma^{\underline{3}}\gamma^{\underline{1}}. \quad (10)$$

В формуле (10) $f_S = 1-\frac{r_0}{r}$. При $a=0$ гамильтонианы (9), (10) совпадают с самосопряженным гамильтонианом в поле Шварцшильда [12].

В отличие от центрально-симметричных гравитационных полей Шварцшильда, Райсснера–Нордстрёма и др. аксиально-симметричное поле Керра не позволяет использовать для отделения угловых переменных в уравнении Дирака сферические гармоники со спином 1/2.

Чандрасекар в работе [1] провел разделение переменных в дираковском гамильтониане с метрикой (6), используя двухкомпонентный спинорный формализм Пенроуза–Ньюмена [13] и тетраду Kinnersley [14].

Следуя работам [15, 16], уравнение Дирака и гамильтониан Чандрасекара можно записать в биспинорной форме

$$i\frac{\partial\psi_{Ch}}{\partial t} = H_{Ch}\psi_{Ch} =$$

$$=\left(\frac{m}{g^{00}}\gamma^0 - \frac{i}{g^{00}}\gamma^0\gamma^k\frac{\partial}{\partial x^k} - i\Phi^0 - \frac{i}{g^{00}}\gamma^0\gamma^k\Phi^k\right)\psi_{Ch}. \quad (11)$$

В выражении (11) $k=1,2,3,$ Φ^0, Φ^k – биспинорные связности, вычисляемые стандартным образом. Остальные величины имеют следующий вид

$$\psi_{Ch} = \begin{pmatrix} P^A \\ Q_B^* \end{pmatrix}. \quad (12)$$

В уравнении (11)

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}\sigma^{\mu AB'} \\ \sqrt{2}\left[\sigma^\mu_{AB'}\right]^T & 0 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

$$\sqrt{2}\left[\sigma^{\mu AB'}\right] = \sqrt{2}\begin{pmatrix} n^\mu & -m^{*\mu} \\ -m^\mu & l^\mu \end{pmatrix};$$

$$\sqrt{2}\left[\sigma^\mu_{AB'}\right]^T = \sqrt{2}\begin{pmatrix} l^\mu & m^{*\mu} \\ m^\mu & n^\mu \end{pmatrix}. \quad (14)$$

В соотношениях (13), (14) индексы A, B' принимают значения 0 и 1, значки * и T означают комплексное сопряжение и транспонирование.

Компоненты тетрады Kinnersley равны

$$l^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{r^2+a^2}{\Delta}, 1, 0, \frac{a}{\Delta}\right),$$

$$n^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}\rho_K^2}\left[r^2+a^2, -\Delta, 0, a\right] \quad (15)$$

$$m^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}\left(r+ia\cos\theta\right)}\left(ia\sin\theta, 0, 1, \frac{i}{\sin\theta}\right).$$

Обратный метрический тензор (8) выражается через компоненты тетрады (15) следующим образом

$$g^{\mu\nu} = l^\mu n^\nu + n^\mu l^\nu - m^\mu m^{*\nu} - m^{*\mu}m^\nu. \quad (16)$$

Гамильтониан Чандрасекара (11) физически эквивалентен самосопряженному гамильтониану (9), поскольку они связаны друг с другом преобразованием подобия.

Для волновых функций уравнения Дирака с гамильтонианом Чандрасекара (11) в скалярном произведении присутствует весовой оператор Паркера [9, 10–12]

$$\rho_P = \sqrt{g_G}\gamma^{\underline{0}}\gamma^0, \quad (17)$$

где для метрики Керра в координатах Бойера–Линдквиста $g_G = \frac{\rho_K^4}{r^4}$ [12].

При использовании самосопряженного гамильтониана (9) $\rho_P = 1$.

Если определить оператор η из равенства

$$\rho_P = \eta^+\eta, \quad (18)$$

то гамильтониан Чандрасекара будет связан с гамильтонианом (9) преобразованием подобия

$$H_\eta = \eta H_{Ch}\eta^{-1}. \quad (19)$$

Из (19) следует, что оба гамильтониана имеют одинаковый энергетический спектр.

3. Физическая эквивалентность гамильтониана Чандрасекара (11) и самосопряженного гамильтониана (9)

Доказательство эквивалентности будем осуществлять следующим образом.

Первоначально из вида матриц (13), (14) с компонентами тетрады Kinnersley (15) определяем весовой оператор Паркера и с помощью (18) оператор преобразования η.

Далее, с помощью оператора η осуществляем преобразование матриц Дирака (13) в η-представление

$$\gamma_\eta^\mu = \eta \gamma^\mu \eta^{-1}. \tag{20}$$

Будет показано, что матрицы $\gamma_\eta^0, \gamma_\eta^2$ совпадают с матрицами $\tilde{\gamma}^0, \tilde{\gamma}^2$, вычисленными в работе [12] с помощью тетрад в калибровке Швингера. Для совпадения матриц $\gamma_\eta^1, \gamma_\eta^3$ с $\tilde{\gamma}^1, \tilde{\gamma}^3$ необходимо осуществить дополнительное унитарное преобразование, коммутирующее с матрицами $\gamma^{\underline{0}}, \gamma^{\underline{2}}$ и связанное с пространственным поворотом вокруг оси θ.

С матрицами γ_η^μ можно записать часть гамильтониана (11) без биспинорных связностей

$$H_{red} = \frac{m}{g^{00}} \gamma_\eta^0 - \frac{i}{g^{00}} \gamma_\eta^0 \gamma_\eta^k \frac{\partial}{\partial x^k}. \tag{21}$$

Выражения (21) достаточно, чтобы без вычисления биспинорных связностей в η-представлении прийти к виду искомого самосопряженного гамильтониана (9), используя формулу, доказанную в работе [12] для метрик вида (6)

$$H_\eta = \frac{1}{2}\left(H_{red} + H_{red}^{+}\right) + \\ + \frac{i}{4}\left(\frac{\partial \tilde{H}_{\underline{n}o}}{\partial x^p} + \frac{g^{ok}}{g^{00}} \frac{\partial \tilde{H}_{\underline{n}k}}{\partial x^p}\right) \tilde{H}_{\underline{m}}^{\,p} S^{\underline{m}\underline{n}}. \tag{22}$$

В (22) $\tilde{H}_{\underline{n}o}, \tilde{H}_{\underline{n}k}, \tilde{H}_{\underline{m}}^{\,p}$ – тетрады в калибровке Швингера, $S^{\underline{m}\underline{n}} = \frac{1}{2}\left(\gamma^{\underline{m}}\gamma^{\underline{n}} - \gamma^{\underline{n}}\gamma^{\underline{m}}\right)$.

В результате мы докажем физическую эквивалентность двух рассматриваемых гамильтонианов.

Ниже мы будем рассматривать три случая: общий случай поля Керра, случай слабого поля Керра с учетом слагаемых не выше линейных по параметру вращения *a*, шварцшильдовский случай с $a = 0$.

1. Матрицы (13) с компонентами тетрады Kinnersley (15) имеют вид

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_{up}^\mu \\ \gamma_d^\mu & 0 \end{pmatrix}. \tag{23}$$

В (23) $\gamma_{up}^\mu, \gamma_d^\mu$ – 2×2 матрицы.

$$\gamma_{up}^0 = \begin{pmatrix} \dfrac{r^2 + a^2}{\rho_K^2} & \dfrac{ia\sin\theta}{\bar{\rho}_K^*} \\ -\dfrac{ia\sin\theta}{\bar{\rho}_K} & \dfrac{r^2 + a^2}{\Delta} \end{pmatrix}, \tag{24}$$

$$\gamma_d^0 = \begin{pmatrix} \dfrac{r^2 + a^2}{\Delta} & -\dfrac{ia\sin\theta}{\bar{\rho}_K^*} \\ \dfrac{ia\sin\theta}{\bar{\rho}_K} & \dfrac{r^2 + a^2}{\rho_K^2} \end{pmatrix}. \tag{25}$$

$$\gamma_{up}^1 = \begin{pmatrix} -\dfrac{\Delta}{\rho_K^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{26}$$

$$\gamma_d^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\dfrac{\Delta}{\rho_K^2} \end{pmatrix}, \tag{27}$$

$$\gamma_{up}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{1}{\bar{\rho}_K^*} \\ -\dfrac{1}{\bar{\rho}_K} & 0 \end{pmatrix}, \tag{28}$$

$$\gamma_d^2 = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{\bar{\rho}_K^*} \\ \dfrac{1}{\bar{\rho}_K} & 0 \end{pmatrix}, \tag{29}$$

$$\gamma_{up}^3 = \begin{pmatrix} \dfrac{a}{\rho_K^2} & \dfrac{i}{\bar{\rho}_K^*\sin\theta} \\ -\dfrac{i}{\bar{\rho}_K\sin\theta} & \dfrac{a}{\Delta} \end{pmatrix}, \tag{30}$$

$$\gamma_d^3 = \begin{pmatrix} \dfrac{a}{\Delta} & -\dfrac{i}{\bar{\rho}_K^*\sin\theta} \\ \dfrac{i}{\bar{\rho}_K\sin\theta} & \dfrac{a}{\rho_K^2} \end{pmatrix}. \tag{31}$$

В выражениях (24)–(31) $\bar{\rho}_K = r + ia\cos\theta$; $\bar{\rho}_K^* = r - ia\cos\theta$;

Выражения γ^μ для слабого поля Керра и для поля Шварцшильда $(a = 0)$ получаются из выражений (24)–(31) при $\Delta \to r^2 f_S = r^2\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)$; $\rho_K^2 \to r^2$.

При переходе к плоскому пространству Минковского $\left(r_0 = 0, a = 0\right)$ матрицы (24)–(31) соответствуют γ-матрицам Дирака в спинорном представлении

$$\gamma^{\underline{0}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \ \gamma^{\underline{i}} = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}. \tag{32}$$

2. Весовой оператор Паркера

$$\rho_P = \frac{\rho_K^2}{r^2}\gamma^{\underline{0}}\gamma^0 = \frac{\rho_K^2}{r^2}\begin{pmatrix} \rho_P^{up} & 0 \\ 0 & \rho_P^d \end{pmatrix}, \tag{33}$$

где ρ_P^{up}, ρ_P^d – 2×2 матрицы.

$$\rho_P^{up} = \begin{pmatrix} \dfrac{r^2+a^2}{\Delta} & -\dfrac{ia\sin\theta}{\bar{\rho}_K^*} \\ \dfrac{ia\sin\theta}{\bar{\rho}_K} & \dfrac{r^2+a^2}{\rho_K^2} \end{pmatrix}, \tag{34}$$

$$\rho_P^d = \begin{pmatrix} \dfrac{r^2+a^2}{\rho_K^2} & \dfrac{ia\sin\theta}{\bar{\rho}_K^*} \\ -\dfrac{ia\sin\theta}{\bar{\rho}_K} & \dfrac{r^2+a^2}{\Delta} \end{pmatrix}. \tag{35}$$

Выражения ρ_P^{up}, ρ_P^d для слабого поля Керра и для поля Шварцшильда легко устанавливаются из формул (34), (35).

3. Оператор преобразования в η-представление должен удовлетворять равенству

$$\rho_P = \eta^+\eta, \tag{36}$$

где

$$\eta = \frac{\sqrt{\rho_K^2}}{r}\begin{pmatrix} \eta_{up} & 0 \\ 0 & \eta_d \end{pmatrix}, \tag{37}$$

η_{up}, η_d – 2×2 матрицы.

Оператор η можно определить, приводя матрицу ρ_P (33) к диагональному виду.

Тогда операторы $\eta_{up}^+, \eta_{up}, \eta_d^+, \eta_d$ равны

$$\eta_{up}^+ = \begin{pmatrix} N_2V_1 & N_1U_1 \\ N_2V_2 & N_1U_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_2} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_1} \end{pmatrix}, \tag{38}$$

$$\eta_{up} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_2} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N_2^*V_1^* & N_2^*V_2^* \\ N_1^*U_1^* & N_1^*U_2^* \end{pmatrix}, \tag{39}$$

$$\eta_d^+ = \begin{pmatrix} N_2V_1 & N_1U_1 \\ N_2V_2 & N_1U_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix}, \tag{40}$$

$$\eta_d = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N_2^*V_1^* & N_2^*V_2^* \\ N_1^*U_1^* & N_1^*U_2^* \end{pmatrix}. \tag{41}$$

В выражениях (38)–(41) λ_1, λ_2 – собственные числа матрицы ρ_P (33).

$$\lambda_1 = \frac{\left(r^2+a^2\right)\left(\Delta+\rho_K^2\right) - B}{2\Delta\rho_K^2}, \tag{42}$$

$$\lambda_2 = \frac{\left(r^2+a^2\right)\left(\Delta+\rho_K^2\right) + B}{2\Delta\rho_K^2}, \tag{43}$$

где

$$B = \sqrt{A^2 + 4\Delta^2\rho_K^2 a^2 \sin^2\theta}, \quad A = \left(r^2+a^2\right)\left(\rho_K^2 - \Delta\right).$$

Отметим, что

$$\lambda_1\lambda_2 = g^{00}. \tag{44}$$

В (38)–(41) через U_1, U_2, V_1, V_2 обозначены компоненты ненормированных собственных векторов $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ матрицы ρ_P (33). С помощью программы *Mathematica* можно определить следующий вид векторов $\mathbf{U}, \mathbf{V}$

$$\mathbf{U} = \{U_1, U_2\} = \left\{\frac{2ia\Delta\bar{\rho}_K\sin\theta}{A+B}, 1\right\}, \tag{45}$$

$$\mathbf{V} = \{V_1, V_2\} = \left\{-\frac{2ia\Delta\bar{\rho}_K\sin\theta}{B-A}, 1\right\}. \tag{46}$$

Нормировочные коэффициенты N_1, N_2 в (38)–(41) определяются из условия (36):

$$N_1 = \sqrt{\frac{B+A}{2B}}; \quad N_2 = -i\sqrt{\frac{B-A}{2B}}. \tag{47}$$

Фазовые множители перед N_1, N_2 выбраны из условия правильного предельного перехода к оператору η для поля Шварцшильда с параметром вращения $a = 0$.

С учетом (45), (46) операторы η (37) и η^{-1} можно записать в виде

$$\eta_{up} = \begin{pmatrix} N_1\dfrac{\bar{\rho}_K^*}{\sqrt{\rho_K^2}}\sqrt{\lambda_2} & N_2\sqrt{\lambda_2} \\ N_2\dfrac{\bar{\rho}_K^*}{\sqrt{\rho_K^2}}\sqrt{\lambda_1} & N_1\sqrt{\lambda_1} \end{pmatrix}, \tag{48}$$

$$\eta_{up}^{-1} = \begin{pmatrix} N_1\dfrac{\bar{\rho}_K}{\sqrt{\rho_K^2}}\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_2}} & N_2^*\dfrac{\bar{\rho}_K}{\sqrt{\rho_K^2}}\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \\ N_2^*\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_2}} & N_1\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \end{pmatrix}. \tag{49}$$

$$\eta_d = \begin{pmatrix} N_1\dfrac{\bar{\rho}_K^*}{\sqrt{\rho_K^2}}\sqrt{\lambda_1} & N_2\sqrt{\lambda_1} \\ N_2\dfrac{\bar{\rho}_K^*}{\sqrt{\rho_K^2}}\sqrt{\lambda_2} & N_1\sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix}, \tag{50}$$

$$\eta_d^{-1} = \begin{pmatrix} N_1 \dfrac{\overline{\rho}_K}{\sqrt{\rho_K^2}} \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & N_2^* \dfrac{\overline{\rho}_K}{\sqrt{\rho_K^2}} \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_2}} \\ N_2^* \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & N_1 \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_2}} \end{pmatrix}. \qquad (51)$$

В случае слабого поля Керра

$$\lambda_1 = 1; \lambda_2 = \frac{1}{f_S} = \frac{1}{1-\dfrac{r_0}{r}}; N_1 = 1; N_2 = -i\frac{\sqrt{f_S}\,a\sin\theta}{r(1-f_S)};$$

$$\eta_{up} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{f_S}} & -i\dfrac{\sqrt{f_S}\,a\sin\theta}{r(1-f_S)} \\ -i\dfrac{f_S a\sin\theta}{r(1-f_S)} & 1 \end{pmatrix};$$

$$\eta_{up}^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{f_S} & i\dfrac{f_S a\sin\theta}{r(1-f_S)} \\ i\dfrac{f_S^{3/2} a\sin\theta}{r(1-f_S)} & 1 \end{pmatrix}, \qquad (52)$$

$$\eta_d = \begin{pmatrix} 1 & -i\dfrac{f_S a\sin\theta}{r(1-f_S)} \\ -i\dfrac{\sqrt{f_S}\,a\sin\theta}{r(1-f_S)} & \dfrac{1}{\sqrt{f_S}} \end{pmatrix};$$

$$\eta_d^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & i\dfrac{f_S^{3/2} a\sin\theta}{r(1-f_S)} \\ i\dfrac{f_S a\sin\theta}{r(1-f_S)} & \sqrt{f_S} \end{pmatrix}. \qquad (53)$$

Матрица преобразования η для поля Шварцшильда $(a=0)$ является диагональной

$$\eta_S = \mathrm{diag}\left[\frac{1}{\sqrt{f_S}}, 1, 1, \frac{1}{\sqrt{f_S}}\right]. \qquad (54)$$

4. Далее осуществляем преобразования матриц (24), (31). После преобразований произведем эквивалентную циклическую замену локальных матриц Дирака

$$\gamma^{\underline{3}} \to \gamma^{\underline{1}}; \gamma^{\underline{1}} \to \gamma^{\underline{2}}; \gamma^{\underline{2}} \to \gamma^{\underline{3}}.$$

В результате получаем

$$\eta\gamma^0\eta^{-1} = \sqrt{g^{00}}\,\gamma^{\underline{0}}, \qquad (55)$$

$$\eta\gamma^1\eta^{-1} = \frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{\rho_K^2}}\left(\gamma^{\underline{1}}\cos\delta - \gamma^{\underline{3}}\sin\delta\right), \qquad (56)$$

$$\eta\gamma^2\eta^{-1} = \frac{1}{\sqrt{\rho_K^2}}\gamma^{\underline{2}}, \qquad (57)$$

$$\eta\gamma^3\eta^{-1} = \frac{1}{\sin\theta\sqrt{\Delta}\sqrt{g^{00}}}\left(\gamma^{\underline{3}}\cos\delta + \gamma^{\underline{1}}\sin\delta\right) + \frac{ar_0 r}{\rho_K^2\Delta\left(g^{00}\right)^{3/2}}\gamma^{\underline{0}}. \qquad (58)$$

В выражениях (57), (58)

$$\cos\delta = -\frac{\sqrt{g^{00}}\sqrt{\Delta}\sqrt{\rho_K^2}\left(\Delta - \rho_K^2\right)}{B}, \qquad (59)$$

$$\sin\delta = \frac{a\sin\theta\sqrt{\Delta}\left(\Delta + \rho_K^2\right)}{B}. \qquad (60)$$

В случае слабого поля Керра

$$\cos\delta = 1; \quad \sin\delta = \frac{\sqrt{f_S}}{r}\frac{(1+f_S)}{(1-f_S)}a\sin\theta. \qquad (61)$$

Для поля Шварцшильда

$$\cos\delta = 1; \quad \sin\delta = 0. \qquad (62)$$

Преобразованные матрицы (55), (57) совпадают с матрицами, полученными в работе [12] при использовании тетрад в калибровке Швингера. Матрицы (56), (58) отличаются от аналогичных матриц работы [12] пространственным поворотом вокруг оси θ. Совпадения матриц можно достичь, применяя дополнительное унитарное преобразование

$$R = e^{\frac{\delta}{2}\gamma^{\underline{3}}\gamma^{\underline{1}}} = \cos\frac{\delta}{2} - i\Sigma^2\sin\frac{\delta}{2}. \qquad (63)$$

Преобразование (63) коммутирует с матрицами $\gamma^{\underline{0}}, \gamma^{\underline{2}}$; диагональная матрица $-i\Sigma^{(2)} = \gamma^{\underline{3}}\gamma^{\underline{1}}$.

Окончательно получаем

$$R\eta\gamma^0\eta^{-1}R^{-1} = \sqrt{g^{00}}\,\gamma^{\underline{0}}, \qquad (64)$$

$$R\eta\gamma^1\eta^{-1}R^{-1} = \frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{\rho_K^2}}\gamma^{\underline{1}}, \qquad (65)$$

$$R\eta\gamma^2\eta^{-1}R^{-1} = \frac{1}{\sqrt{\rho_K^2}}\gamma^{\underline{2}}, \qquad (66)$$

$$R\eta\gamma^3\eta^{-1}R^{-1} = \frac{1}{\sin\theta\sqrt{\Delta}\sqrt{\rho_K^2}}\gamma^{\underline{3}} + \frac{ar_0 r}{\rho_K^2\Delta\left(g^{00}\right)^{3/2}}\gamma^{\underline{0}}. \qquad (67)$$

Равенства (64)–(67) вместе с выражениями (21), (22) доказывают физическую эквивалентность гамильтониана Чандрасекара (11) и самосопряженного гамильтониана (9).

4. Эрмитовость дираковских гамильтонианов в поле Керра

Стандартное условие эрмитовости дираковских гамильтонианов во внешних гравитационных полях, выраженное через скалярные произведения волновых функций, имеет вид

$$\left(\psi, H\varphi\right) = \left(H\psi, \varphi\right). \tag{68}$$

В [10] условие (68) преобразовано к виду

$$\oint dS_k \left(\sqrt{-g}\, j^k\right) + \int d^3x \sqrt{-g}\, \times$$
$$\times \left[\psi^+ \gamma^{\underline{0}} \left(\gamma^0_{,0} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0\ 0 \end{pmatrix} \gamma^0 \right) \psi + \begin{pmatrix} k \\ k\ 0 \end{pmatrix} j^0 \right] = 0. \tag{69}$$

В равенстве (69) подразумевается суммирование по k, где $k = 1,2,3$; $\oint dS_k$ – интеграл по проекциям поверхностей, ограничивающих область определения волновых функций ψ, ψ^+ уравнения Дирака; g – определитель соответствующей метрики, для метрики Керра $\left(-g\right) = \rho_K^4 \sin^2\theta$; $\gamma^0_{,0} \equiv \dfrac{\partial \gamma^0}{\partial x^0}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k \\ k\ 0 \end{pmatrix}$ – символы Кристоффеля, j^μ – четырехмерный вектор, равный

$$j^\mu = \psi^+ \gamma^{\underline{0}} \gamma^\mu \psi. \tag{70}$$

Для стационарного поля Керра $\gamma^0_{,0} = 0$; символы Кристоффеля $\begin{pmatrix} 0 \\ 0\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k \\ k\ 0 \end{pmatrix} = 0$ и условие (69) становится равным

$$\oint dS_k \left(\sqrt{-g}\, j^k\right) = 0. \tag{71}$$

В стационарном случае волновую функцию в уравнении Дирака (11) с гамильтонианом Чандрасекара можно записать в виде

$$\psi_{Ch}\left(\mathbf{r}, t\right) = \psi_{Ch}\left(\mathbf{r}\right) e^{-iEt}, \tag{72}$$

где E – энергия дираковской частицы.

Далее Чандрасекар в работе [1] представил соотношение (72) в виде

$$\psi_{Ch}\left(\mathbf{r}, t\right) =$$
$$= \begin{pmatrix} \dfrac{1}{r - ia\cos\theta} \overset{(-)}{R}(r) \overset{(-)}{S}(\theta) \\ \dfrac{1}{\sqrt{\Delta}} \overset{(+)}{R}(r) \overset{(+)}{S}(\theta) \\ -\dfrac{1}{\sqrt{\Delta}} \overset{(+)}{R}(r) \overset{(-)}{S}(\theta) \\ -\dfrac{1}{r + ia\cos\theta} \overset{(-)}{R}(r) \overset{(+)}{S}(\theta) \end{pmatrix} e^{-iEt} e^{im_\varphi \varphi} \tag{73}$$

и получил отдельно два уравнения для угловых функций $\overset{(-)}{S}(\theta), \overset{(+)}{S}(\theta)$ и два уравнения для радиальных функций $\overset{(-)}{R}(r), \overset{(+)}{R}(r)$.

В (73) m_φ – магнитное квантовое число.

С помощью функции (73) для каждого значения E, m_φ, a и для квантовых чисел орбитального и полного момента частицы l, j можно определить компоненты тока j^μ, используя матрицы γ^μ (23)–(31). В результате получаем

$$j^0\left(r,\theta\right) = \frac{2\left(r^2 + a^2\right)}{\rho_K^2 \Delta} \overset{(+)}{R}_{lm_\varphi}(r) \overset{(-)}{R}_{lm_\varphi}(r) \left(\overset{(+)}{S}_{lm_\varphi}(\theta) \overset{(+)}{S}_{lm_\varphi}(\theta) + \overset{(-)}{S}_{lm_\varphi}(\theta) \overset{(-)}{S}_{lm_\varphi}(\theta) \right) +$$
$$+ 2\frac{ia\sin\theta}{\rho_K^2 \sqrt{\Delta}} \left(\overset{(-)}{R}_{lm_\varphi}(r) \overset{(-)}{R}_{lm_\varphi}(r) - \overset{(+)}{R}_{lm_\varphi}(r) \overset{(+)}{R}_{lm_\varphi}(r) \right) \overset{(+)}{S}_{lm_\varphi}(\theta) \overset{(-)}{S}_{lm_\varphi}(\theta) =$$
$$= \frac{r^2 + a^2}{2\rho_K^2 \Delta} \left(g^2_{lm_\varphi}(r) + f^2_{lm_\varphi}(r) \right) \left(\overset{(+)}{S}_{lm_\varphi}(\theta) \overset{(+)}{S}_{lm_\varphi}(\theta) + \overset{(-)}{S}_{lm_\varphi}(\theta) \overset{(-)}{S}_{lm_\varphi}(\theta) \right) -$$
$$- \frac{2a\sin\theta}{\rho_K^2 \sqrt{\Delta}} g_{lm_\varphi}(r) f_{lm_\varphi}(r) \overset{(+)}{S}_{lm_\varphi}(\theta) \overset{(-)}{S}_{lm_\varphi}(\theta), \tag{74}$$

$$j^r\left(r,\theta\right) = 0 \tag{75}$$

$$j^\theta\left(r,\theta\right) = 0 \tag{76}$$

$$\begin{aligned}
j^{\varphi}(r,\theta) &= i\frac{2}{\rho_K^2\sqrt{\Delta}\sin\theta}\left(\overset{(-)}{R}_{lm_\varphi}(r)\overset{(-)}{R}_{lm_\varphi}(r)-\overset{(+)}{R}_{lm_\varphi}(r)\overset{(+)}{R}_{lm_\varphi}(r)\right)\overset{(+)}{S}_{lm_\varphi}(\theta)\overset{(-)}{S}_{lm_\varphi}(\theta)+\\
&+\frac{2a}{\rho_K^2\Delta}\overset{(+)}{R}_{lm_\varphi}(r)\overset{(-)}{R}_{lm_\varphi}(r)\left(\overset{(+)}{S}_{lm_\varphi}(\theta)\overset{(+)}{S}_{lm_\varphi}(\theta)+\overset{(-)}{S}_{lm_\varphi}(\theta)\overset{(-)}{S}_{lm_\varphi}(\theta)\right)=\\
&=-\frac{2}{\rho_K^2\sqrt{\Delta}\sin\theta}g_{lm_\varphi}(r)f_{lm_\varphi}(r)\overset{(+)}{S}_{lm_\varphi}(\theta)\overset{(-)}{S}_{lm_\varphi}(\theta)+\\
&+\frac{a}{2\rho_K^2\Delta}\left(g_{lm_\varphi}^2(r)+f_{lm_\varphi}^2(r)\right)\left(\overset{(+)}{S}_{lm_\varphi}(\theta)\overset{(+)}{S}_{lm_\varphi}(\theta)+\overset{(-)}{S}_{lm_\varphi}(\theta)\overset{(-)}{S}_{lm_\varphi}(\theta)\right).
\end{aligned}\tag{77}$$

При получении (74)–(77) использовалось равенство

$$\overset{(+)}{R}{}^{*}_{lm_\varphi}(r)=\overset{(+)}{R}_{lm_\varphi}(r)\tag{78}$$

и условия вещественности для угловых функций $\overset{(+)}{S}_{lm_\varphi},\overset{(-)}{S}_{lm_\varphi}$

$$\begin{aligned}\overset{(+)}{S}{}^{*}_{lm_\varphi}&=\overset{(+)}{S}_{lm_\varphi},\\ \overset{(-)}{S}{}^{*}_{lm_\varphi}&=\overset{(-)}{S}_{lm_\varphi}.\end{aligned}\tag{79}$$

В выражениях (74)–(77) $g(r), f(r)$ – вещественные функции

$$\begin{aligned}g(r)&=\overset{(-)}{R}(r)+\overset{(+)}{R}(r),\\ f(r)&=-i\left(\overset{(-)}{R}(r)-\overset{(+)}{R}(r)\right).\end{aligned}\tag{80}$$

Учитывая, что радиальная (75) и полярная (76) компоненты тока $j^{\mu}(r,\theta)$ равны нулю, условие эрмитовости (71) становится равным

$$\oint dS_\varphi\left(\sqrt{-g}\,j^{\varphi}\right)=0.\tag{81}$$

Отсюда следует, что для любой поверхности вращения вокруг оси $z\left(F(r,\theta)=0\right)$, ограничивающей область определения волновых функций уравнения Дирака, условия эрмитовости дираковских гамильтонианов в поле Керра (81), а следовательно и (68), выполняются.

Это справедливо и для поверхностей внешней и внутренней эргосфер поля Керра.

Заключение

В работе доказана физическая эквивалентность дираковского гамильтониана Чандрасекара (11) и самосопряженного гамильтониана (9) с плоским скалярным произведением волновых функций.

Получен явный вид операторов η,η^{-1}, преобразующих гамильтониан и волновые функции Чандрасекара в η-представление:

$$\begin{aligned}\psi_\eta(\mathbf{r},t)&=\eta\psi_{Ch}(\mathbf{r},t),\\ H_\eta&=\eta H_{Ch}\eta^{-1}.\end{aligned}\tag{82}$$

Показано, что если область определения волновых функций уравнения Дирака в поле Керра ограничивается двумерной поверхностью вращения $F(r,\theta)=0$, то гамильтониан Чандрасекара (11) и самосопряженный гамильтониан (9) являются эрмитовыми с выполнением равенства скалярных произведений

$$(\psi,H\varphi)=(H\psi,\varphi).\tag{83}$$

Аналогичным образом можно показать эквивалентность и эрмитовость гамильтониана Пейджа [3] и соответствующего самосопряженного гамильтониана в η-представлении в электрически заряженном поле Керра – Ньюмена [4].

Список литературы

1. Chandrasekhar S. // Proc. Roy. Soc (London). 1976. Vol. A349. P. 571.

2. Kerr R. P. // Phys. Rev. Lett. 1963. Vol. 11. P. 237.

3. Page D. // Phys. Rev. 1976. Vol. D14. P. 1509.

4. Newman E. T., Couch E., Chinnapared K., Exton A., Prakash A., Torrence R. // J. Math. Phys. 1965. Vol. 6. P. 918.

5. Boyer R. H., Lindquist R. W. // J. Math. Phys. 1967. Vol. 8. P. 265–281.

6. Bender C. M., Brody D., Jones H. F. // Phys. Rev. Lett. 2002. Vol. 89. P. 270401; Phys. Rev. 2004. Vol. D. 70. P. 025001.

7. Mostafazadeh A. // J. Math. Phys. (N.Y.) 2002. Vol. 43. P. 205; 2002. Vol. 43. P. 2814; 2002. Vol. 43. P. 3944; arxiv: 0810.5643v3.

8. Bagchi B., Fring A. // Phys. Lett. 2009. Vol. A373. P. 4307.

9. Parker L. // Phys. Rev. 1980. Vol. D22. P. 1922.

10. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. // Phys. Rev. 2010. Vol. D82. P. 104056; arxiv: 1007.4631v1 (gr-qc).

11. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. // Phys. Rev. 2011. Vol. D83. P. 105002; arxiv: 1102.4067v1 (gr-qc).

12. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. arxiv: 1107.0844 (gr-qc).

13. Newman E. T., Penrose R. // J. Math. Phys. 1962. Vol. 3. P. 566.

14. Kinnersley W. // J. Math. Phys. 1969. Vol. 10. P. 1195.

15. Ternov I. M., Gaina A. B., Chizhov G. A. // Sov. Phys. J. 1980. Vol. 23. P. 695–700.

16. Dolan S. R. Trinity Hall and Astrophysics Group, Cavendish Laboratory. Dissertation, 2006.

Статья поступила в редакцию 30.01.2014