УДК 530.145;514.764.2

АНАЛИЗ КВАНТОВО-МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ МЕТРИК ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОГО НЕЗАРЯЖЕННОГО ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

М. В. Горбатенко, В. П. Незнамов*

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Проведен анализ квантово-механической эквивалентности метрик центрально-симметричного незаряженного гравитационного поля. Анализу подверглись области определения волновых функций уравнения Дирака, эрмитовость гамильтонианов, возможность существования стационарных связанных состояний частиц со спином 1/2. Доказано, что самосопряженные гамильтонианы существуют для: 1) метрик Шварцшильда в сферических, изотропных и гармонических координатах; 2) метрик Эддингтона – Финкельштейна и Пенлеви – Гуллстранда; 3) метрик Леметра – Финкельштейна и Крускала.

В случае 1) гамильтонианы являются эрмитовыми, и для них возможно существование стационарных связанных состояний частиц со спином 1/2. В случае 2) самосопряженные гамильтонианы не являются эрмитовыми, для них возможны лишь состояния с комплексными уровнями энергии, распадающимися со временем. В случае 3) самосопряженные гамильтонианы являются эрмитовыми, но из-за явной зависимости от временной координаты для этих гамильтонианов отсутствует возможность существования стационарных связанных состояний частиц со спином 1/2.

Ключевые слова: центрально-симметричные гравитационные поля, самосопряженность и эрмитовость дираковских гамильтонианов, стационарные связанные состояния частиц со спином 1/2.

Введение

Широко известным решением общей теории относительности (ОТО) для точечного центрально-симметричного незаряженного гравитационного поля является метрика Шварцшильда [1].

Классическое решение Шварцшильда характеризуется точечным сферически-симметричным источником гравитационного поля массой M и «горизонтом событий» (гравитационным радиусом)

$$r_0 = \frac{2GM}{c^2}. \qquad (1)$$

В формуле (1) G – гравитационная постоянная; c – скорость света. В классическом случае с точки зрения удаленного наблюдателя пробная частица достигает «горизонта событий» за бесконечное время.

Существует ряд других метрик, полученных координатными преобразованиями метрики Шварцшильда и являющихся также точными решениями ОТО.

Можно отметить следующие решения: метрика Шварцшильда в изотропных координатах [2], метрика Шварцшильда в гармонических координатах [3], метрика Леметра – Финкельштейна [4, 5], метрика Крускала [6, 7], метрика Эддингтона – Финкельштейна [5, 8], метрика Пенлеви – Гуллстранда [9, 10].

В работах [11–13] с помощью методов псевдоэрмитовой квантовой механики для произвольных гравитационных полей, в том числе зависящих от времени, разработан метод получения самосопряженных дираковских гамильтонианов с плоским скалярным произведением волновых функций.

Из одночастичной квантовой механики следует, что при эрмитовости гамильтониана с соответствующим равенством скалярных произведений волновых функций $\left((\Phi, H\Psi) = (H\Phi, \Psi)\right)$ и при установлении граничных условий самосопряжен-

* E-mail: neznamov@vniief.ru

ные гамильтонианы $\left(H = H^{+}\right)$, не зависящие от времени, должны обеспечивать существование стационарных связанных состояний частиц со спином 1/2 с вещественным энергетическим спектром*.

В данной работе проводится анализ квантово-механической эквивалентности вышеприведенных центрально симметричных решений уравнений ОТО, полученных координатными преобразованиями метрики Шварцшильда [1]. Для каждой метрики анализу подвергаются дираковские самосопряженные гамильтонианы с плоским скалярным произведением волновых функций. Исследуются области определения волновых функций, эрмитовость гамильтонианов и возможность существования стационарных связанных состояний частиц со спином 1/2.

Для каждой метрики гамильтонианы получены как непосредственно с тетрадами в калибровке Швингера [14], так и с помощью преобразований самосопряженного гамильтониана в гравитационном поле Шварцшильда [1].

В разделе 1 приведена методология анализа квантово-механической эквивалентности метрик центрально-симметричного незаряженного гравитационного поля.

В разделах 2–4 анализируются самосопряженные гамильтонианы в полях Шварцшильда с изотропными и гармоническими координатами, в полях Эддингтона – Финкельштейна и Пенлеви – Гуллстранда, в полях Леметра – Финкельштейна и Крускала.

В Заключении обсуждаются результаты квантово-механического анализа.

1. Методология анализа квантово-механической эквивалентности центрально симметричных решений уравнений ОТО

1.1. Уравнение Дирака

Предполагается, что движение частицы со спином 1/2 во внешнем гравитационном поле описывается ковариантным уравнением Дирака. В системе единиц $\hbar = c = 1$ оно имеет вид

$$\gamma^{\alpha}\nabla_{\alpha}\psi - m\psi = 0. \qquad (2)$$

*При принятых определениях не всякий самосопряженный гамильтониан будет являться эрмитовым. Для эрмитовости гамильтониана необходимо соответствующее поведение волновых функций для обеспечения равенства $\left((\Phi, H\Psi) = (H\Phi, \Psi)\right)$.

Здесь m – масса частицы; ψ представляет собой четырехкомпонентный биспинор; ∇_{α} – ковариантная производная; γ^{α} – мировые 4×4 дираковские матрицы, удовлетворяющие соотношению

$$\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta} + \gamma^{\beta}\gamma^{\alpha} = 2g^{\alpha\beta}E. \qquad (3)$$

В (3) $g^{\alpha\beta}$ – обратный метрический тензор; E – 4×4 единичная матрица.

В формулах (2), (3) и ниже значки из греческого алфавита принимают значения 0, 1, 2, 3, аналогичные значки из латинского алфавита принимают значения 1, 2, 3. По одинаковым верхним и нижним значкам подразумевается суммирование соответствующих слагаемых.

В последующем наряду с матрицами Дирака γ^{α} с мировыми индексами мы будем использовать матрицы Дирака $\gamma^{\underline{\alpha}}$ с локальными индексами, удовлетворяющие соотношению

$$\gamma^{\underline{\alpha}}\gamma^{\underline{\beta}} + \gamma^{\underline{\beta}}\gamma^{\underline{\alpha}} = 2\eta^{\underline{\alpha}\underline{\beta}}E. \qquad (4)$$

В (4) $\eta^{\underline{\alpha}\underline{\beta}}$ соответствует метрическому тензору плоского пространства Минковского с сигнатурой

$$\eta_{\underline{\alpha}\underline{\beta}} = \mathrm{diag}\left[1, -1, -1, -1\right]. \qquad (5)$$

Удобно выбрать величины $\gamma^{\underline{\alpha}}$ такими, чтобы они имели одинаковый вид во всех локальных системах отсчета. Как системы $\gamma^{\underline{\alpha}}$, так и системы γ^{α} могут быть использованы для построения полной системы 4×4 матриц. Пример полной системы приведен ниже:

$$E, \gamma^{\alpha}, S^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta} - \gamma^{\beta}\gamma^{\alpha}\right),$$
$$\gamma_5 = \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \quad \gamma_5\gamma^{\alpha}. \qquad (6)$$

Любой набор матриц Дирака пригоден для нескольких дискретных автоморфизмов. Мы ограничимся автоморфизмом

$$\gamma^{\alpha} \to \left(\gamma^{\alpha}\right)^{+} = -D\gamma^{\alpha}D^{-1}, \qquad (7)$$

матрица D называется антиэрмитизирующей.

Ковариантная производная биспинора $\nabla_{\alpha}\psi$ в (2) равна

$$\nabla_{\alpha}\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x^{\alpha}} + \Phi_{\alpha}\psi. \qquad (8)$$

В (8) для определения биспинорных связностей Φ_{α} необходим выбор определенной системы тетрадных векторов $H^{\mu}_{\underline{\alpha}}$, удовлетворяющих соотношениям

$$H_{\underline{\alpha}}^{\mu} H_{\underline{\beta}}^{\nu} g_{\mu\nu} = \eta_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}. \tag{9}$$

В дополнение к тетрадным векторам $H_{\underline{\alpha}}^{\mu}$ можно ввести три другие системы тетрадных векторов $H_{\underline{\alpha}\mu}, H^{\underline{\alpha}\mu}, H_{\mu}^{\underline{\alpha}}$, которые отличаются от $H_{\underline{\alpha}}^{\mu}$ местом мировых и локальных (подчеркнутых) индексов. Мировые индексы поднимаются и опускаются посредством метрического тензора $g_{\mu\nu}$ и обратного тензора $g^{\mu\nu}$, локальные индексы поднимаются и опускаются посредством тензоров $\eta_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}, \eta^{\underline{\alpha}\underline{\beta}}$.

При выборе системы тетрадных векторов биспинорные связности определяются с помощью кристоффельных производных от тетрадных векторов

$$\Phi_{\alpha} = -\frac{1}{4} H_{\mu}^{\underline{\varepsilon}} H_{\nu\underline{\varepsilon};\alpha} S^{\mu\nu} = \frac{1}{4} H_{\underline{\mu}}^{\varepsilon} H_{\underline{\nu}\varepsilon;\alpha} S^{\underline{\mu}\underline{\nu}}. \tag{10}$$

Связь между γ^{α} и $\gamma^{\underline{\alpha}}$ определяется соотношением

$$\gamma^{\alpha} = H_{\underline{\beta}}^{\alpha} \gamma^{\underline{\beta}}. \tag{11}$$

При координатных преобразованиях

$$\left\{x^{\alpha}\right\} \to \left\{x'^{\alpha}\right\} \tag{12}$$

выполняются следующие соотношения:

$$\gamma'^{\alpha} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \gamma^{\beta}, \tag{13}$$

$$\Phi'_{\alpha} = \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\alpha}} \Phi_{\beta}. \tag{14}$$

Две произвольные системы тетрадных векторов в одном и том же пространстве-времени связаны друг с другом преобразованием Лоренца $L(x)$

$$\tilde{H}_{\underline{\alpha}}^{\mu}(x) = \Lambda_{\underline{\alpha}}^{\underline{\beta}}(x) H_{\underline{\beta}}^{\mu}(x). \tag{15}$$

Величины $\Lambda_{\underline{\alpha}}^{\underline{\beta}}(x)$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{gathered} \Lambda_{\underline{\alpha}}^{\underline{\mu}}(x) \Lambda_{\underline{\beta}}^{\underline{\nu}}(x) \eta^{\underline{\alpha}\underline{\beta}} = \eta_{\underline{\mu}\underline{\nu}}, \\ \Lambda_{\underline{\alpha}}^{\underline{\mu}}(x) \Lambda_{\underline{\beta}}^{\underline{\nu}}(x) \eta_{\underline{\mu}\underline{\nu}} = \eta_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}. \end{gathered} \tag{16}$$

Введенный математический аппарат обеспечивает ковариантность уравнения Дирака (2) как при координатных преобразованиях (12), так и при переходе от одной системы тетрадных векторов к другой (15).

1.2. Релятивистское уравнение Шредингера

Для полного применения аппарата квантовой механики целесообразен переход от уравнения Дирака (2) к уравнению типа Шредингера с выделением производной волновой функции от времени.

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi. \tag{17}$$

В левой части (17) $t = x^0$; в правой части (17) H является оператором Гамильтона.

Учитывая (8) и равенство $\gamma^0\gamma^0 = g^{00}$, из уравнения (2) можно получить выражение для гамильтониана

$$H = \frac{m}{g^{00}}\gamma^0 - \frac{1}{g^{00}} i\gamma^0\gamma^k \frac{\partial}{\partial x^k} - i\Phi_0 - \frac{1}{g^{00}} i\gamma^0\gamma^k\Phi_k. \tag{18}$$

В работе [12] показано, что в одном и том же пространстве-времени с помощью преобразования Лоренца $L(x)$ можно от любой системы тетрадных векторов $\left\{H_{\underline{\alpha}}^{\mu}(x)\right\}$ перейти к системе тетрадных векторов $\left\{\tilde{H}_{\underline{\alpha}}^{\mu}(x)\right\}$ в калибровке Швингера [14].

Для системы $\left\{\tilde{H}_{\underline{\alpha}}^{\mu}(x)\right\}$

$$\tilde{H}_{\underline{0}}^{0} = \sqrt{g^{00}}; \quad \tilde{H}_{\underline{0}}^{k} = -\frac{g^{0k}}{\sqrt{g^{00}}}; \quad \tilde{H}_{\underline{k}}^{0} = 0. \tag{19}$$

Пространственные тетрады, удовлетворяющие соотношениям, написанным ниже, могут быть использованы в качестве тетрадных векторов $\tilde{H}_{\underline{m}}^{n}$:

$$\begin{gathered} \tilde{H}_{\underline{k}}^{m} \tilde{H}_{\underline{k}}^{n} = f^{mn}; \quad f^{mn} = g^{mn} + \frac{g^{om} g^{0n}}{g^{00}}; \\ f^{mn} g_{nk} = \delta_{k}^{m}. \end{gathered} \tag{20}$$

Матрица преобразования Лоренца имеет вид

$$L(x) = \mathrm{R}\exp\left\{\frac{\theta}{2} \frac{\tilde{H}_{\underline{0}}^{\mu} H_{\underline{0}}^{\nu} S_{\mu\nu}}{\sqrt{\left(\tilde{H}_{\underline{0}}^{\varepsilon} H_{\underline{0}\varepsilon}\right)^2 - 1}}\right\}. \tag{21}$$

Здесь R представляет матрицу пространственного вращения, коммутирующую с γ^0. Второй множитель представляет преобразование гиперболического вращения (boost) на угол θ, определяемый из соотношения

$$\mathrm{th}\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{\left(\tilde{H}_{\underline{0}}^{\varepsilon} H_{\underline{0}\varepsilon}\right) + 1}{\left(\tilde{H}_{\underline{0}}^{\varepsilon} H_{\underline{0}\varepsilon}\right) - 1}}. \tag{22}$$

Матрица L преобразует $\gamma^0(x)$ в диагональный вид

$$L\gamma^0 L^{-1} = \sqrt{g^{00}}\gamma^{\underline{0}}. \tag{23}$$

Учитывая некоторую свободу выбора пространственных тетрад $\tilde{H}_{\underline{m}}^{n}$, определяемую соотношениями (20), при переходе от гамильтониана (18) с тетрадными векторами $\left\{H^{\mu}_{\underline{\alpha}}(x)\right\}$ к гамильтонианам $\tilde{H}$ с системой тетрадных векторов в калибровке Швингера $\left\{\tilde{H}^{\mu}_{\underline{\alpha}}(x)\right\}$ и с разными наборами $\tilde{H}^{n}_{\underline{m}}$, можно получить несовпадающие друг с другом выражения. В действительности эти гамильтонианы физически эквивалентны, так как они связаны унитарными матрицами пространственных вращений.

1.3. Условия эрмитовости для гамильтонианов и волновых функций

В работе [12] показано, что стационарные дираковские гамильтонианы во внешнем гравитационном поле являются псевдоэрмитовыми и удовлетворяют условию псевдоэрмитовой квантовой механики [15–17].

$$H^{+}=\rho H\rho^{-1}. \tag{24}$$

Оператор ρ в (24) является весовым оператором Паркера [18]

$$\rho=\sqrt{-g}\,\gamma^{\underline{0}}\gamma^{0}. \tag{25}$$

Для тетрадных векторов в калибровке Швингера

$$\rho=\sqrt{-g}\sqrt{g^{00}}. \tag{26}$$

Скалярное произведение волновых функций с оператором ρ имеет вид

$$(\Phi,\Psi)=\int\psi^{+}(x)\rho(x)\psi(x)d^{3}x. \tag{27}$$

Общее условие эрмитовости дираковских гамильтонианов во внешних гравитационных полях $(\Phi,H\Psi)=(H\Phi,\Psi)$ можно записать в виде [11]

$$\oint ds_k\left(\sqrt{-g}\,j^{k}\right)+\int d^{3}x\sqrt{-g}\times$$
$$\times\left[\psi^{+}\gamma^{\underline{0}}\left(\gamma^{0}_{,0}+\begin{pmatrix}0\\0\;0\end{pmatrix}\gamma^{0}\right)\psi+\begin{pmatrix}k\\k\;0\end{pmatrix}j^{0}\right]=0. \tag{28}$$

В (28) компоненты тока j^{μ} определены в виде

$$j^{\mu}=\psi^{+}\gamma^{\underline{0}}\gamma^{\mu}\psi. \tag{29}$$

Для не зависящих от времени гамильтонианов $\gamma^{0}_{,0}\equiv\dfrac{\partial\gamma^{0}}{\partial x^{0}}=0$ символы Кристоффеля $\begin{pmatrix}0\\0\;0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}k\\k\;0\end{pmatrix}$ для центрально-симметричных полей равны нулю и условие (28) становится равным

$$\oint ds_k\left(\sqrt{-g}\,j^{k}\right)=0. \tag{30}$$

Если существует оператор η, удовлетворяющий соотношению

$$\left(\frac{g_G}{g}\right)^{1/2}\rho=\eta^{+}\eta, \tag{31}$$

то гамильтониан

$$H_{\eta}=\eta H\eta^{-1} \tag{32}$$

будет самосопряженным

$$H^{+}_{\eta}=H_{\eta}, \tag{33}$$

а скалярное произведение (27) становится плоским (без весового множителя $\rho(x)$).

При этом

$$\psi_{\eta}(x)=\eta\psi(x). \tag{34}$$

В (31) введено обозначение $g_G=\dfrac{g}{g_c}$ [14], где g_c – детерминант, который возникает при написании элемента объема в криволинейных координатах ($g_c=1$ – для декартовых координат, $g_c=r^2$ – для цилиндрических координат, $g_c=r^4\sin^2\theta$ – для сферических координат и т. д.).

В работе [13] показано, что для рассматриваемых метрик центрально-симметричных гравитационных полей гамильтониан H_{η} (32) может быть получен без прямого вычисления биспинорных связностей (10) из выражения

$$H_{\eta}=\frac{1}{2}\left(\tilde{H}_{red}+\tilde{H}^{+}_{red}\right), \tag{35}$$

где $\tilde{H}_{red}$ является частью начального гамильтониана (18) с тетрадами в калибровке Швингера без слагаемых с биспинорными связностями $\tilde{\Phi}_0,\tilde{\Phi}_k$.

1.4. Области определения волновых функций

При определении областей определения волновых функций будем руководствоваться выполнением условий причинности Гильберта [19, 20]

$$g<0;\; g_{00}>0;\; g_{11}<0;$$
$$\begin{vmatrix}g_{11} & g_{12}\\ g_{21} & g_{22}\end{vmatrix}>0;\;\begin{vmatrix}g_{11} & g_{12} & g_{13}\\ g_{21} & g_{22} & g_{23}\\ g_{31} & g_{32} & g_{33}\end{vmatrix}<0. \tag{36}$$

Особенно будем следить за выполнением второго неравенства $g_{00}>0$; все другие неравенства в (36), как правило, выполняются для известных решений ОТО.

1.5. Инерциальная и вращающаяся системы координат в пространстве Минковского

Как пример необходимости выполнения условия $g_{00} > 0$ рассмотрим дираковские гамильтонианы в инерциальной и вращающейся системах отсчета пространства Минковского.

Для инерциальной системы отсчета $\left(x'^{\mu}\right) = \left(t', x', y', z'\right)$ гамильтониан дираковской частицы с неограниченной областью определения волновых функций имеет вид

$$H' = \gamma^{\underline{0}} m - i\gamma^{\underline{0}}\gamma^{k}\frac{\partial}{\partial x'^{k}}. \qquad (37)$$

Введем вращающуюся систему отсчета [20]

$$\begin{aligned} &t = t';\ x = x'\cos\omega t + y'\sin\omega t;\\ &y = -x'\sin\omega t + y'\cos\omega t;\ z = z'. \end{aligned} \qquad (38)$$

В (38) скорость вращения ω – вещественное число. Метрика Минковского в этой системе отсчета стационарна и имеет вид

$$\begin{aligned} ds^2 = &\left(1 - \omega^2\left(x^2 + y^2\right)\right)dt^2 + \\ &+2\omega\left(ydx - xdy\right)dt - dx^2 - dy^2 - dz^2. \end{aligned} \qquad (39)$$

Гамильтониан (37) в новой системе отсчета имеет вид (см., например, [21])

$$H = \gamma^{\underline{0}} m - i\gamma^{\underline{0}}\gamma^{\underline{k}}\frac{\partial}{\partial x'^{k}} - i\omega\left(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\right). \qquad (40)$$

Область определения волновых функций гамильтониана (40) ограничивается условием $g_{00} > 0$, что для метрики (39) сводится к условию $\sqrt{x^2 + y^2} < \dfrac{1}{\omega}$. Невыполнение этого условия приводит к тому, что для расстояний $\sqrt{x^2 + y^2} > \dfrac{1}{\omega}$ скорость вращения была бы больше скорости света. Таким образом, при $g_{00} < 0$ вращающаяся система отсчета не может быть осуществлена реальными телами [20].

1.6. Дорожная карта квантово-механического анализа эквивалентности центрально-симметричных решений уравнений ОТО

В качестве базовой метрики рассматриваем решение Шварцшильда в координатах (t, r, θ, φ). Все другие центрально-симметричные решения уравнений ОТО будут получаться соответствующими координатными преобразованиями базовой метрики.

Для каждой метрики прямым образом будут получены дираковские самосопряженные гамильтонианы с плоским скалярным произведением волновых функций и с тетрадами в калибровке Швингера (19), (20).

Далее для преобразованных метрик самосопряженные гамильтонианы в η-представлении и с тетрадами (19), (20) будут получены в два этапа. Первый этап – преобразование базового самосопряженного гамильтониана Шварцшильда к координатам другой метрики в соответствии с (11)–(13) с сохранением тетрад базового гамильтониана, т. е. при этом преобразовании тетрады равны

$$H'^{\alpha}_{\underline{\beta}} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} H^{\mu}_{\underline{\beta}}. \qquad (41)$$

При необходимости осуществляется второй этап – преобразование Лоренца (15), (16), (21), (22) для приведения полученного гамильтониана в координатах другой метрики к тетрадам в калибровке Швингера.

В конце преобразований будут контролироваться область определения волновых функций, эрмитовость гамильтониана, возможность существования стационарных связанных состояний частиц с полуцелым спином в соответствующих гравитационных полях.

2. Метрика Шварцшильда в координатах (t, r, θ, φ)

Квадрат интервала

$$ds^2 = f_S dt^2 - \frac{dr^2}{f_S} - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right). \qquad (42)$$

В (42) $f_S = 1 - \dfrac{r_0}{r}$. Ненулевые тетрады в калибровке Швингера $\tilde{H}^{\mu}_{\underline{\alpha}}$ равны

$$\begin{aligned} &\tilde{H}^{0}_{\underline{0}} = \frac{1}{\sqrt{f_S}};\ \tilde{H}^{1}_{\underline{1}} = \sqrt{f_S};\\ &\tilde{H}^{2}_{\underline{2}} = \frac{1}{r};\ \tilde{H}^{3}_{\underline{3}} = \frac{1}{r\sin\theta}. \end{aligned} \qquad (43)$$

В соответствии с (11) матрицы $\tilde{\gamma}^{\alpha}$ равны

$$\begin{aligned} &\tilde{\gamma}^{0} = \frac{1}{\sqrt{f_S}}\gamma^{\underline{0}};\ \tilde{\gamma}^{1} = \sqrt{f_S}\gamma^{\underline{1}};\\ &\tilde{\gamma}^{2} = \frac{1}{r}\gamma^{\underline{2}};\ \tilde{\gamma}^{3} = \frac{1}{r\sin\theta}\gamma^{\underline{3}}. \end{aligned} \qquad (44)$$

Самосопряженный дираковский гамильтониан с тетрадами (43) имеет вид [13]

$$\begin{aligned} H_{\eta} = &\sqrt{f_S}m\gamma^{\underline{0}} - i\sqrt{f_S}\gamma^{\underline{0}} \times \\ &\times\left\{\gamma^{\underline{1}}\sqrt{f_S}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right) + \gamma^{\underline{2}}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{2}\mathrm{ctg}\theta\right) + \right. \end{aligned}$$

$$+\gamma^{\underline{3}}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\Bigg\}-\frac{i}{2}\frac{\partial f_S}{\partial r}\gamma^{\underline{0}}\gamma^{\underline{1}}. \qquad (45)$$

Область определения волновых функций уравнения Дирака с гамильтонианом (45) ограничивается условием причинности Гильберта

$$g_{00}>0\to f_S=1-\frac{r_0}{r}>0\to r>r_0. \qquad (46)$$

Из (46) следует

$\sqrt{f_S}$ – положительное вещественное число. (47)

Оператор преобразования η (31) равен

$$\eta=\frac{1}{f_S^{1/4}}. \qquad (48)$$

Компоненты тока

$$j^{\mu}=\psi_{\eta}^{+}\left(\eta^{-1}\right)^{+}\left(\gamma^{\underline{0}}\tilde{\gamma}^{\mu}\right)\left(\eta^{-1}\right)\psi_{\eta} \qquad (49)$$

равны

$$j^0=\psi_{\eta}^{+}\psi_{\eta}, \qquad (50)$$

$$j^r=\psi_{\eta}^{+}f_S\gamma^{\underline{1}}\psi_{\eta}=0, \qquad (51)$$

$$j^{\theta}=\psi_{\eta}^{+}\frac{\sqrt{f_S}}{r}\gamma^{\underline{2}}\psi_{\eta}=0, \qquad (52)$$

$$j^{\varphi}=\psi_{\eta}^{+}\frac{\sqrt{f_S}}{r\sin\theta}\gamma^{\underline{3}}\psi_{\eta}. \qquad (53)$$

Равенство нулю радиальной (51) и полярной (52) компонент тока обусловлено видом сферических гармоник для спина 1/2 (см., например, [22, 23]).

В случае метрики Шварцшильда для области определения волновых функций (46) условия эрмитовости дираковских гамильтонианов (28), (30) можно записать в виде

$$4\pi r^2 j^r(r)\Big|_{r\to\infty}+4\pi r^2 j^r(r)\Big|_{r\to r_0}=0, \qquad (54)$$

что с учетом (51) автоматически выполняется. Отсюда следует, что с введением физически разумного граничного условия для волновых функций на любой сферической поверхности с $r>r_0$ и отбором экспоненциально спадающих решений при $r\to\infty$ самосопряженный гамильтониан (45) будет иметь стационарный вещественный энергетический спектр связанных состояний частиц со спином 1/2 [24, 25].

Иногда для осуществления возможности движения частиц в поле Шварцшильда под «горизонтом событий» предлагается в метрике Шварцшильда (42) взаимно поменять местами временную и радиальную координаты [26, 27]. Тогда квадрат интервала становится равным

$$ds^2=\frac{t}{r_0-t}dt^2-\frac{r_0-t}{t}dr^2-$$

$$-t^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2\right). \qquad (55)$$

В (55) $t\in(0,r_0)$, $r\in(0,\infty)$.

Ненулевые компоненты тетрадных векторов в калибровке Швингера равны

$$\tilde{H}_{\underline{0}}^{0}=\sqrt{\frac{r_0-t}{t}};\ \tilde{H}_{\underline{1}}^{1}=\sqrt{\frac{t}{r_0-t}};$$
$$\tilde{H}_{\underline{2}}^{2}=\frac{1}{t};\ \tilde{H}_{\underline{3}}^{3}=\frac{1}{t\sin\theta}. \qquad (56)$$

Самосопряженный гамильтониан в η-представлении равен

$$H_{\eta}=\sqrt{\frac{t}{r_0-t}}m\gamma^{\underline{0}}-i\gamma^{\underline{0}}\gamma^{\underline{1}}\frac{t}{r_0-t}\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\right)-$$
$$-i\gamma^{\underline{0}}\gamma^{\underline{2}}\sqrt{\frac{t}{r_0-t}}\frac{1}{t}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{2}\mathrm{ctg}\theta\right)-$$
$$-i\gamma^{\underline{0}}\gamma^{\underline{3}}\sqrt{\frac{t}{r_0-t}}\frac{1}{t\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}. \qquad (57)$$

Область определения волновых функций гамильтониана (57) ограничена условием причинности Гильберта $g_{00}>0$, т. е.

$$t<r_0. \qquad (58)$$

Гамильтониан (57) явно зависит от времени и физически неэквивалентен стационарному гамильтониану (45) с областью определения волновых функций $r>r_0$. Условие Гильберта $g_{00}>0$ не позволяет «сшивать» волновые функции на «горизонте событий» $r=r_0$.

Далее мы будем рассматривать преобразования гамильтониана (45) с областью определения волновых функций $r>r_0$ и с вещественными положительными значениями $\sqrt{f_S}$.

3. Метрики Шварцшильда в изотропных и гармонических координатах

3.1. Решение Шварцшильда в изотропных координатах

Координаты

$$(t,R,\theta,\varphi). \qquad (59)$$

Координатное преобразование

$$r=R\left(1+\frac{r_0}{4R}\right)^2;\ dR=\frac{dr}{\left(1-\frac{r_0^2}{16R^2}\right)}. \qquad (60)$$

Квадрат интервала

$$ds^2 = V^2(R)dt^2 - \\ -W^2(R)\left[dR^2 + R^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)\right]. \quad (61)$$

Здесь

$$V(R) = \frac{1-\frac{r_0}{4R}}{1+\frac{r_0}{4R}}, \quad W(R) = \left(1+\frac{r_0}{4R}\right)^2. \quad (62)$$

Определитель $(-g)$, величина g_G, оператор η равны

$$-g = V^2W^6R^4\sin^2\theta = \left(1+\frac{r_0}{4R}\right)^6 R^4\sin^2\theta, \quad (63)$$

$$g_G = \left(1+\frac{r_0}{4R}\right)^6, \quad (64)$$

$$\eta = \left(g_G\right)^{1/4}\left(g^{00}\right)^{1/4} = \frac{\left(1+\frac{r_0}{4R}\right)^2}{\left(1-\frac{r_0}{4R}\right)^{1/2}}. \quad (65)$$

Ненулевые компоненты тетрадных векторов $\tilde{H}^{\mu}_{\underline{\alpha}}$ в калибровке Швингера:

$$\tilde{H}^0_{\underline{0}} = \frac{1+\frac{r_0}{4R}}{1-\frac{r_0}{4R}}; \; \tilde{H}^1_{\underline{1}} = \frac{1}{\left(1+\frac{r_0}{4R}\right)^2};$$
$$\tilde{H}^2_{\underline{2}} = \frac{1}{\left(1+\frac{r_0}{4R}\right)^2}\frac{1}{R}; \; \tilde{H}^3_{\underline{3}} = \frac{1}{\left(1+\frac{r_0}{4R}\right)^2}\frac{1}{R\sin\theta}. \quad (66)$$

Матрицы $\tilde{\gamma}^{\alpha}$ равны

$$\tilde{\gamma}^0 = \frac{1+\frac{r_0}{4R}}{1-\frac{r_0}{4R}}\gamma^{\underline{0}}; \; \tilde{\gamma}^1 = \frac{1}{\left(1+\frac{r_0}{4R}\right)^2}\gamma^{\underline{1}};$$
$$\tilde{\gamma}^2 = \frac{1}{R\left(1+\frac{r_0}{4R}\right)^2}\gamma^{\underline{2}}; \; \tilde{\gamma}^3 = \frac{1}{R\sin\theta\left(1+\frac{r_0}{4R}\right)^2}\gamma^{\underline{3}}. \quad (67)$$

Самосопряженный гамильтониан в η-представлении с тетрадами (66) равен

$$H_\eta = \frac{1-\frac{r_0}{4R}}{1+\frac{r_0}{4R}}m\gamma^{\underline{0}} - i\frac{1-\frac{r_0}{4R}}{\left(1+\frac{r_0}{4R}\right)^3}\gamma^{\underline{0}}\left[\gamma^{\underline{1}}\left(\frac{\partial}{\partial R}+\frac{1}{R}\right)\right]+$$
$$+\gamma^{\underline{2}}\frac{1}{R}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{2}\mathrm{ctg}\theta\right)+\gamma^{\underline{3}}\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Bigg]-$$
$$-\frac{i}{2}\gamma^{\underline{0}}\gamma^{\underline{1}}\frac{\partial}{\partial R}\frac{1-\frac{r_0}{4R}}{\left(1+\frac{r_0}{4R}\right)^3}. \quad (68)$$

Компоненты тока

$$j^{\mu} = \psi^+_\eta\left(\eta^{-1}\right)^+\gamma^{\underline{0}}\tilde{\gamma}^{\mu}\left(\eta^{-1}\right)\psi_\eta \quad (69)$$

равны

$$j^0 = \psi^+_\eta\frac{1}{\left(1+\frac{r_0}{4R}\right)^3}\psi_\eta, \quad (70)$$

$$j^r = j^\theta = 0, \quad (71)$$

$$j^{\varphi} = \psi^+_\eta\frac{1-\frac{r_0}{4R}}{\left(1+\frac{r_0}{4R}\right)^6 R\sin\theta}\gamma^{\underline{0}}\gamma^{\underline{3}}\psi_\eta. \quad (72)$$

Получим теперь гамильтониан (68) непосредственным преобразованием базового гамильтониана (45) с тетрадами (43).

При координатном преобразовании (60) тетрады (43) преобразуются в соответствии с (41).

$$\left(H'^0_{\underline{0}}\right)_{is} = \frac{\partial t}{\partial t}\left(H^0_{\underline{0}}\right)_S = \frac{1}{\sqrt{f_S}} = \frac{1+\frac{r_0}{4R}}{1-\frac{r_0}{4R}}; \quad (73)$$

$$\left(H'^1_{\underline{1}}\right)_{is} = \frac{\partial R}{\partial r}\left(H^1_{\underline{1}}\right)_S = \frac{\sqrt{f_S}}{1-\frac{r_0^2}{16R^2}} = \frac{1}{\left(1+\frac{r_0}{4R}\right)^2}; \quad (74)$$

$$\left(H'^2_{\underline{2}}\right)_{is} = \left(H^2_{\underline{2}}\right)_S = \frac{1}{r} = \frac{1}{R\left(1+\frac{r_0}{4R}\right)^2}; \quad (75)$$

$$\left(H'^3_{\underline{3}}\right)_{is} = \left(H^3_{\underline{3}}\right)_S = \frac{1}{r\sin\theta} = \frac{1}{R\sin\theta\left(1+\frac{r_0}{4R}\right)^2}. \quad (76)$$

Преобразованные тетрады совпадают с тетрадами в калибровке Швингера (66) для метрики Шварцшильда в изотропных координатах. В соответствии с (35) гамильтониан с тетрадами (73)–(76) будет совпадать с гамильтонианом (68).

Обратим внимание, что при определении тетрады $\left(H'^0_{\underline{0}}\right)_{is}$ (73) для сохранения условия положительности $\sqrt{f_S}$ (47) необходимо выполнение условия $R > \frac{r_0}{4}$.

Таким образом, несмотря на то, что в преобразованной метрике условие причинности Гильберта $g_{00} > 0$ выполняется для интервала $R \in (0, \infty)$, введенные ограничения на область определения волновых функций в гамильтониане (45) с базовой метрикой Шварцшильда продолжают действовать в новых переменных для области определения преобразованного гамильтониана (68). Область определения волновых функций уравнения Дирака с метрикой Шварцшильда в изотропных координатах равна

$$R > \frac{r_0}{4}. \tag{77}$$

3.2. Решение Шварцшильда в сферических гармонических координатах

Координаты

$$(t, R, \theta, \varphi). \tag{78}$$

Координатное преобразование

$$r = R + \frac{r_0}{2}; \quad dr = dR. \tag{79}$$

Квадрат интервала

$$ds^2 = \frac{\left(1 - \frac{r_0}{2R}\right)}{\left(1 + \frac{r_0}{2R}\right)} dt^2 - \frac{\left(1 + \frac{r_0}{2R}\right)}{\left(1 - \frac{r_0}{2R}\right)} dR^2 - \left(1 + \frac{r_0}{2R}\right)^2 R^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right). \tag{80}$$

Определитель $(-g)$, величина g_G, оператор η равны

$$-g = \left(1 + \frac{r_0}{2R}\right)^4 R^4 \sin^2\theta, \tag{81}$$

$$g_G = \left(1 + \frac{r_0}{2R}\right)^4, \tag{82}$$

$$\eta = (g_G)^{1/4} \left(g^{00}\right)^{1/4} = \frac{\left(1 + \frac{r_0}{2R}\right)^{5/4}}{\left(1 - \frac{r_0}{2R}\right)^{1/4}}. \tag{83}$$

Ненулевые тетрады $\tilde{H}^{\mu}_{\underline{\alpha}}$ в калибровке Швингера:

$$\tilde{H}^0_{\underline{0}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{r_0}{2R}}{1 - \frac{r_0}{2R}}}; \quad \tilde{H}^1_{\underline{1}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{r_0}{2R}}{1 + \frac{r_0}{2R}}};$$
$$\tilde{H}^2_{\underline{2}} = \frac{1}{R\left(1 + \frac{r_0}{2R}\right)}; \quad \tilde{H}^3_{\underline{3}} = \frac{1}{R \sin\theta \left(1 + \frac{r_0}{2R}\right)}. \tag{84}$$

Матрицы $\tilde{\gamma}^{\alpha}$ равны

$$\tilde{\gamma}^0 = \sqrt{\frac{1 + \frac{r_0}{2R}}{1 - \frac{r_0}{2R}}} \gamma^{\underline{0}}; \quad \tilde{\gamma}^1 = \sqrt{\frac{1 - \frac{r_0}{2R}}{1 + \frac{r_0}{2R}}} \gamma^{\underline{1}};$$
$$\tilde{\gamma}^2 = \frac{1}{R\left(1 + \frac{r_0}{2R}\right)} \gamma^{\underline{2}}; \quad \tilde{\gamma}^3 = \frac{1}{\left(1 + \frac{r_0}{2R}\right) R \sin\theta} \gamma^{\underline{3}}. \tag{85}$$

Самосопряженный гамильтониан в η-представлении с тетрадами (84) равен

$$H_\eta = \sqrt{\frac{1 - \frac{r_0}{2R}}{1 + \frac{r_0}{2R}}} m\gamma^{\underline{0}} - i \frac{1 - \frac{r_0}{2R}}{1 + \frac{r_0}{2R}} \gamma^{\underline{0}}\gamma^{\underline{1}} \left(\frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R}\right) - i\sqrt{\frac{1 - \frac{r_0}{2R}}{1 + \frac{r_0}{2R}}} \frac{1}{1 + \frac{r_0}{2R}} \times$$
$$\times \left[\gamma^{\underline{0}}\gamma^{\underline{2}} \frac{1}{R}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{2}\mathrm{ctg}\theta\right) + \gamma^{\underline{0}}\gamma^{\underline{3}} \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right] - \frac{i}{2}\gamma^{\underline{0}}\gamma^{\underline{1}} \frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1 - \frac{r_0}{2R}}{1 + \frac{r_0}{2R}}\right). \tag{86}$$

Компоненты тока (69) для рассматриваемого случая равны

$$j^0 = \psi_\eta^+ \frac{1}{\left(1 + \frac{r_0}{2R}\right)^2} \psi_\eta, \tag{87}$$

$$j^r = j^\theta = 0, \tag{88}$$

$$j^\varphi = \psi_\eta^+ \frac{\left(1 - \frac{r_0}{2R}\right)^{1/2}}{\left(1 + \frac{r_0}{2R}\right)^{7/2} R\sin\theta} \gamma^{\underline{0}}\gamma^{\underline{3}} \psi_\eta. \tag{89}$$

При координатном преобразовании (79) тетрады (84) преобразуются в соответствии с (41)

$$\left(H'^0_{\underline{0}}\right)_{gr} = \frac{\partial t}{\partial t}\left(H^0_{\underline{0}}\right)_S = \frac{1}{\sqrt{f_S}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{r_0}{2R}}{1 - \frac{r_0}{2R}}}; \tag{90}$$

$$\left(H'^1_{\underline{1}}\right)_{gr} = \frac{\partial R}{\partial r}\left(H^1_{\underline{1}}\right)_S = \sqrt{f_S} = \sqrt{\frac{1 - \frac{r_0}{2R}}{1 + \frac{r_0}{2R}}}; \tag{91}$$

$$\left(H'^{2}_{\underline{2}}\right)_{gr} = \left(H^{2}_{\underline{2}}\right)_S = \frac{1}{r} = \frac{1}{R\left(1+\frac{r_0}{2R}\right)}; \qquad (92)$$

$$\left(H'^{3}_{\underline{3}}\right)_{gr} = \left(H^{3}_{\underline{3}}\right)_S = \frac{1}{r\sin\theta} = \frac{1}{R\sin\theta\left(1+\frac{r_0}{2R}\right)}. \qquad (93)$$

Преобразованные тетрады (90)–(93) совпадают с тетрадами в калибровке Швингера (84) для метрики Шварцшильда в сферических гармонических координатах. В соответствии с (35) гамильтониан с тетрадами (90)–(93) будет совпадать с гамильтонианом (86).

Так же как и для метрики в изотропных координатах (см. п. 3.1), при определении тетрад $\left(H'^{0}_{\underline{0}}\right)_{gr}$ (90) и $\left(H'^{1}_{\underline{1}}\right)_{gr}$ (91) для сохранения условия вещественности f_S (47) необходимо выполнение условия $R > \frac{r_0}{2}$. Это же следует из условия причинности Гильберта $g_{00} > 0$ для рассматриваемой метрики (80).

Приведенное в п. 3.1, 3.2 рассмотрение показывает, что самосопряженные гамильтонианы для метрик Шварцшильда в изотропных и гармонических координатах (68), (86) эквивалентны базовому гамильтониану (45) за исключением изменения области определения волновых функций $R > \frac{r_0}{4}$ для метрики (68) и $R > \frac{r_0}{2}$ для метрики (86). Эти изменения обязаны координатным преобразованиям (60), (79).

Для всех трех гамильтонианов (45), (68), (86) выполняется условие эрмитовости (28), (54) при соответствующем переопределении «горизонтов событий»: r_0 – метрика Шварцшильда (42); $\frac{r_0}{2}$ – метрика Шварцшильда в гармонических координатах (80); $\frac{r_0}{4}$ – метрика Шварцшильда в изотропных координатах.

4. Метрики Эддингтона – Финкельштейна и Пенлеви – Гуллстранда

4.1. Решение Эддингтона – Финкельштейна

Координаты

$$\left(T, r, \theta, \varphi\right). \qquad (94)$$

Координатное преобразование

$$dT = dt + \frac{r_0}{r}\frac{dr}{f_S}. \qquad (95)$$

Квадрат интервала

$$ds^2 = f_S dT^2 - 2\frac{r_0}{r}dTdr - \left(1+\frac{r_0}{r}\right)dr^2 - -r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right). \qquad (96)$$

Определитель $(-g)$, величина g_G, оператор η равны

$$-g = r^4\sin^2\theta, \qquad (97)$$

$$g_G = 1, \qquad (98)$$

$$\eta = \left(1+\frac{r_0}{r}\right)^{1/4}. \qquad (99)$$

Ненулевые тетрады $\tilde{H}^{\mu}_{\underline{\alpha}}$ в калибровке Швингера:

$$\tilde{H}^{0}_{\underline{0}} = \sqrt{1+\frac{r_0}{r}};\ \tilde{H}^{1}_{\underline{0}} = -\frac{\frac{r_0}{r}}{\sqrt{1+\frac{r_0}{r}}}; \qquad (100)$$

$$\tilde{H}^{1}_{\underline{1}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{r_0}{r}}};\ \tilde{H}^{2}_{\underline{2}} = \frac{1}{r};\ \tilde{H}^{3}_{\underline{3}} = \frac{1}{r\sin\theta}.$$

Матрицы $\tilde{\gamma}^{\alpha}$ равны

$$\tilde{\gamma}^0 = \sqrt{1+\frac{r_0}{r}}\gamma^{\underline{0}};\ \tilde{\gamma}^1 = -\frac{\frac{r_0}{r}}{\sqrt{1+\frac{r_0}{r}}}\gamma^{\underline{0}} + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{r_0}{r}}}\gamma^{\underline{1}}; \qquad (101)$$

$$\tilde{\gamma}^2 = \frac{1}{r}\gamma^{\underline{2}};\quad \tilde{\gamma}^3 = \frac{1}{r\sin\theta}\gamma^{\underline{3}}.$$

Самосопряженный гамильтониан в η-представлении с тетрадами (100) равен [13]

$$H_\eta = \frac{m}{\sqrt{1+\frac{r_0}{r}}}\gamma^{\underline{0}} - i\gamma^{\underline{0}}\gamma^{\underline{1}}\frac{1}{1+\frac{r_0}{r}}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} + \frac{r_0}{2r^2}\frac{1}{1+\frac{r_0}{r}}\right) - -i\gamma^{\underline{0}}\gamma^{\underline{2}}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{r_0}{r}}}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{2}\mathrm{ctg}\theta\right) - -i\gamma^{\underline{0}}\gamma^{\underline{3}}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{r_0}{r}}}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} + +i\frac{r_0}{r}\frac{1}{1+\frac{r_0}{r}}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} - \frac{1}{2r\left(1+\frac{r_0}{r}\right)}\right). \qquad (102)$$

Компоненты тока (69) равны

$$j^0 = \psi_\eta^+ \psi_\eta, \tag{103}$$

$$j^r = \psi_\eta^+ \left(-\frac{\frac{r_0}{r}}{1+\frac{r_0}{r}} + \frac{\gamma^{\underline{0}}\gamma^{\underline{1}}}{1+\frac{r_0}{r}} \right)\psi_\eta = \psi_\eta^+ \left(-\frac{\frac{r_0}{r}}{1+\frac{r_0}{r}} \right)\psi_\eta, \tag{104}$$

$$j^\theta = 0, \tag{105}$$

$$j^\varphi = \psi_\eta^+ \frac{1}{\left(1+\frac{r_0}{r}\right)^{1/2} r\sin\theta}\psi_\eta. \tag{106}$$

Получим гамильтониан (102) непосредственным преобразованием базового гамильтониана (45) с тетрадами (43). При координатном преобразовании (95) преобразованные в соответствии с (41) ненулевые тетрады равны

$$\left(H'^0_{\underline{0}}\right)_{E-F} = \frac{\partial T}{\partial t}\left(H^0_{\underline{0}}\right)_S = \frac{1}{\sqrt{f_S}}; \tag{107}$$

$$\left(H'^0_{\underline{1}}\right)_{E-F} = \frac{\partial T}{\partial r}\left(H^1_{\underline{1}}\right)_S = \frac{\frac{r_0}{r}}{\sqrt{f_S}}; \tag{108}$$

$$\left(H'^1_{\underline{1}}\right)_{E-F} = \frac{\partial r}{\partial r}\left(H^1_{\underline{1}}\right)_S = \sqrt{f_S}; \tag{109}$$

$$\left(H'^2_{\underline{2}}\right)_{E-F} = \left(H^2_{\underline{2}}\right)_S = \frac{1}{r}; \tag{110}$$

$$\left(H'^3_{\underline{3}}\right)_{E-F} = \left(H'^3_{\underline{3}}\right)_S = \frac{1}{r\sin\theta}. \tag{111}$$

В результате преобразования (95) по сравнению с тетрадами (43) появилась дополнительная ненулевая тетрада $\left(H'^0_{\underline{1}}\right)_{E-F}$ (108).

Далее с помощью преобразования Лоренца (15), (16), (21), (22) приведем тетрады (107)–(111) к тетрадам в калибровке Швингера (100). Ненулевые величины $\Lambda^{\underline{\beta}}_{\underline{\alpha}}(r)$ в (15), (16) будут равны

$$\Lambda^{\underline{0}}_{\underline{0}} = \Lambda^{\underline{1}}_{\underline{1}} = \frac{1}{\sqrt{f_S}\sqrt{1+\frac{r_0}{r}}};$$
$$\Lambda^{\underline{1}}_{\underline{0}} = \Lambda^{\underline{0}}_{\underline{1}} = -\frac{\frac{r_0}{r}}{\sqrt{f_S}\sqrt{1+\frac{r_0}{r}}}. \tag{112}$$

После такого двухэтапного преобразования базовый гамильтониан (45) преобразуется к виду (102). При проведении преобразований в (107)–(111), (112) присутствует выражение $\sqrt{f_S} = \sqrt{1-\frac{r_0}{r}}$, которое в базовой метрике (42) является вещественным (см. (47)). Отсюда следует, что областью определения волновых функций гамильтониана (102) по-прежнему является

$$r \in (r_0, \infty). \tag{113}$$

Условие причинности Гильберта $q_{00} > 0$ для метрики Эддингтона – Финкельштейна (96) также приводит к области определения $r > r_0$.

Радиальная компонента тока (104) не равна нулю, поэтому для метрики Эддингтона – Финкельштейна не выполняется условие эрмитовости гамильтонианов (28), (54). Координатное преобразование (95), приводящее к новой временной координате T как функции $T(t,r)$, изменяет первоначальную эрмитовость гамильтониана (45). Самосопряженный гамильтониан (102) с областью определения волновых функций $r > r_0$ является неэрмитовым $\left((\Phi, H\Psi) \neq (H\Phi, \Psi)\right)$.

4.2. Решение Пенлеви – Гуллстранда

Координаты

$$(T, r, \theta, \varphi). \tag{114}$$

Координатное преобразование

$$dT = dt + \sqrt{\frac{r_0}{r}}\frac{1}{f_S}. \tag{115}$$

Квадрат интервала

$$ds^2 = f_S dT^2 - 2\sqrt{\frac{r_0}{r}}dTdr - dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right). \tag{116}$$

Определитель $(-g)$, величина g_G, оператор η равны

$$-g = r^4 \sin^2\theta, \tag{117}$$

$$g_G = 1, \tag{118}$$

$$\eta = 1. \tag{119}$$

Ненулевые тетрады $\tilde{H}^\mu_{\underline{\alpha}}$ в калибровке Швингера:

$$\tilde{H}^0_{\underline{0}} = 1;\ \tilde{H}^1_{\underline{0}} = -\sqrt{\frac{r_0}{r}};\ \ \tilde{H}^1_{\underline{1}} = 1;$$
$$\tilde{H}^2_{\underline{2}} = \frac{1}{r};\ \tilde{H}^3_{\underline{3}} = \frac{1}{r\sin\theta}. \tag{120}$$

Матрицы $\tilde{\gamma}^\alpha$ равны

$$\tilde{\gamma}^0 = \gamma^{\underline{0}};\ \tilde{\gamma}^1 = -\sqrt{\frac{r_0}{r}}\gamma^{\underline{0}} + \gamma^{\underline{1}};$$
$$\tilde{\gamma}^2 = \frac{1}{r}\gamma^{\underline{2}};\ \tilde{\gamma}^3 = \frac{1}{r\sin\theta}\gamma^{\underline{3}}. \tag{121}$$

Самосопряженный гамильтониан в η-представлении с тетрадами (120) равен [13, 28]

$$H_\eta = \gamma^{\underline{0}} m - i\gamma^{\underline{0}} \left\{ \gamma^{\underline{1}} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) + \gamma^{\underline{2}} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{2}\text{ctg}\theta \right) + \right.$$
$$\left. + \gamma^{\underline{3}} \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\varphi} \right\} + i\sqrt{\frac{r_0}{r}} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{3}{4}\frac{1}{r} \right). \qquad (122)$$

Компоненты тока (69) равны

$$j^0 = \psi_\eta^+ \psi_\eta, \qquad (123)$$

$$j^r = \psi_\eta^+ \left(-\sqrt{\frac{r_0}{r}} + \gamma^{\underline{0}}\gamma^{\underline{1}} \right) \psi_\eta = \psi_\eta^+ \left(-\sqrt{\frac{r_0}{r}} \right) \psi_\eta, \qquad (124)$$

$$j^\theta = 0, \qquad (125)$$

$$j^\varphi = \psi_\eta^+ \frac{1}{r\sin\theta} \gamma^{\underline{0}}\gamma^{\underline{3}} \psi_\eta. \qquad (126)$$

Получим гамильтониан (122) непосредственным преобразованием базового гамильтониана (45) с тетрадами (43). При координатном преобразовании (115) ненулевые преобразованные в соответствии с (41) тетрады равны

$$\left(H'^{0}_{\underline{0}} \right)_{P-G} = \frac{\partial T}{\partial t} \left(H^{0}_{\underline{0}} \right)_S = \frac{1}{\sqrt{f_S}}, \qquad (127)$$

$$\left(H'^{0}_{\underline{1}} \right)_{P-G} = \frac{\partial T}{\partial r} \left(H^{1}_{\underline{1}} \right)_S = \frac{\sqrt{\frac{r_0}{r}}}{\sqrt{f_S}}, \qquad (128)$$

$$\left(H'^{1}_{\underline{1}} \right)_{P-G} = \frac{\partial r}{\partial r} \left(H^{1}_{\underline{1}} \right)_S = \sqrt{f_S}, \qquad (129)$$

$$\left(H'^{2}_{\underline{2}} \right)_{P-G} = \left(H^{2}_{\underline{2}} \right)_S = \frac{1}{r}, \qquad (130)$$

$$\left(H'^{3}_{\underline{3}} \right)_{P-G} = \left(H^{3}_{\underline{3}} \right)_S = \frac{1}{r\sin\theta}. \qquad (131)$$

В результате преобразования (115) по сравнению с тетрадами (43) появилась дополнительная ненулевая тетрада $\left(H'^{0}_{\underline{1}} \right)_{P-G}$ (128).

Далее с помощью преобразования Лоренца (15), (16), (21), (22) приведем тетрады (127)–(131) к тетрадам в калибровке Швингера (120). Ненулевые величины $\Lambda^{\underline{\beta}}_{\underline{\alpha}}(r)$ в (15), (16) будут равны

$$\Lambda^{\underline{0}}_{\underline{0}} = \Lambda^{\underline{1}}_{\underline{1}} = \frac{1}{\sqrt{f_S}}; \quad \Lambda^{\underline{1}}_{\underline{0}} = \Lambda^{\underline{0}}_{\underline{1}} = -\frac{\sqrt{\frac{r_0}{r}}}{\sqrt{f_S}}. \qquad (132)$$

После такого двухэтапного преобразовании базовый гамильтониан (45) преобразуется к виду (122).

При проведении преобразований в (127)–(129), (132) присутствует выражение $\sqrt{f_S} = \sqrt{1 - \frac{r_0}{r}}$, которое в базовой метрике (42) является вещественным (см. (47)). Отсюда следует, что областью определения волновых функций гамильтониана (122) по-прежнему является

$$r \in (r_0, \infty). \qquad (133)$$

Условие причинности Гильберта $g_{00} > 0$ для метрики Пенлеви – Гуллстранда (116) также приводит к области определения $r > r_0$.

Радиальная компонента тока (124) не равна нулю, и для метрики Пенлеви – Гуллстранда условие эрмитовости гамильтонианов (28), (54) не выполняется. Координатное преобразование (115), приводящее к новой временной координате T как функции $T(t, r)$, изменяет первоначальную эрмитовость гамильтониана (45). Самосопряженный гамильтониан (122) с областью определения волновых функций $r > r_0$ является неэрмитовым $\left((\Psi, H\Phi) \neq (H\Psi, \Phi) \right)$.

Проведенное рассмотрение дираковских гамильтонианов в гравитационных полях Эддингтона – Финкельштейна (96) и Пенлеви – Гуллстранда (116) показывает, что их области определения волновых функций одинаковы с областью определения волновых функций базового гамильтониана (45) в поле Шварцшильда

$$r \in (r_0, \infty).$$

Это является следствием выполнения как условия причинности Гильберта $g_{00} > 0$, так и условия вещественности $\sqrt{f_S} = \sqrt{1 - \frac{r_0}{r}}$ при проведении прямых двухэтапных преобразований исходного гамильтониана (45) к виду самосопряженных гамильтонианов в η-представлении для решений Эддингтона – Финкельштейна и Пенлеви – Гуллстранда.

Расширение области определения до

$$r \in (0, \infty),$$

как это было сделано в работе [28], является неправомерным.

Несмотря на одинаковость областей определения волновых функций дираковских гамильтонианов (45), (102), (122), для метрик Эддингтона – Финкельштейна (96) и Пенлеви – Гуллстранда (116) из-за неэрмитовости гамильтонианов (102), (122) отсутствует возможность существования стационарных связанных состояний частиц со спином 1/2.

5. Метрики Леметра – Финкельштейна и Крускала

5.1. Решение Леметра – Финкельштейна

Координаты

$$\left(T, R, \theta, \varphi\right). \tag{134}$$

Координатные преобразования

$$dT = dt + \frac{\sqrt{\frac{r_0}{r}}}{f_S}dr,\ \ dR = dt + \frac{dr}{f_S\sqrt{\frac{r_0}{r}}}, \tag{135}$$

$$R = T + \frac{2}{3}\frac{r^{3/2}}{r_0^{1/2}},\ \ r = \left[\frac{3}{2}\left(R-T\right)\right]^{2/3} r_0^{1/3}. \tag{136}$$

Квадрат интервала

$$ds^2 = dT^2 - \frac{dR^2}{\left[\frac{3}{2r_0}\left(R-T\right)\right]^{2/3}} - \left[\frac{3}{2}\left(R-T\right)\right]^{4/3} r_0^{2/3}\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right). \tag{137}$$

Область определения T, R в (137):

$$R > T. \tag{138}$$

Определитель $\left(-g\right)$, величина g_G, оператор η равны

$$-g = \left[\frac{3}{2}\left(R-T\right)\right]^2 r_0^2 \sin^2\theta, \tag{139}$$

$$g_G = \left[\frac{3}{2}\left(R-T\right)\right]^2 \frac{r_0^2}{R^4}, \tag{140}$$

$$\eta = \left(g_G\right)^{1/4}\left(g^{00}\right)^{1/4} = \left(\left[\frac{3}{2}\left(R-T\right)\right]^2 \frac{r_0^2}{R^4}\right)^{1/4}. \tag{141}$$

Ненулевые компоненты тетрадных векторов $\tilde{H}^{\mu}_{\underline{\alpha}}$ в калибровке Швингера:

$$\tilde{H}^0_{\underline{0}} = 1;\ \tilde{H}^1_{\underline{1}} = \left[\frac{3}{2r_0}\left(R-T\right)\right]^{1/3};$$

$$\tilde{H}^2_{\underline{2}} = \frac{1}{\left[\frac{3}{2}\left(R-T\right)\right]^{2/3} r_0^{1/3}}; \tag{142}$$

$$\tilde{H}^3_{\underline{3}} = \frac{1}{\left[\frac{3}{2}\left(R-T\right)\right]^{2/3} r_0^{1/3}\sin\theta}.$$

Матрицы $\tilde{\gamma}^{\alpha}$ равны

$$\tilde{\gamma}^0 = \gamma^{\underline{0}};\ \tilde{\gamma}^1 = \left[\frac{3}{2r_0}\left(R-T\right)\right]^{1/3}\gamma^{\underline{1}};$$

$$\tilde{\gamma}^2 = \frac{1}{\left[\frac{3}{2}\left(R-T\right)\right]^{2/3} r_0^{1/3}}\gamma^{\underline{2}}; \tag{143}$$

$$\tilde{\gamma}^3 = \frac{1}{\left[\frac{3}{2}\left(R-T\right)\right]^{2/3} r_0^{1/3}\sin\theta}\gamma^{\underline{3}}.$$

Самосопряженный гамильтониан в η-представлении с тетрадами (142) равен [13]

$$H_\eta = \gamma^{\underline{0}}m - i\gamma^{\underline{0}}\gamma^{\underline{1}}\left[\frac{3}{2r_0}\left(R-T\right)\right]^{1/3}\left(\frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R}\right) - i\gamma^{\underline{0}}\gamma^{\underline{2}}\frac{1}{\left[\frac{3}{2}\left(R-T\right)\right]^{2/3} r_0^{1/3}}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{2}\mathrm{ctg}\theta\right) - i\gamma^{\underline{0}}\gamma^{\underline{3}}\frac{1}{\left[\frac{3}{2}\left(R-T\right)\right]^{2/3} r_0^{1/3}\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} - \frac{i}{2}\gamma^{\underline{0}}\gamma^{\underline{1}}\frac{\partial}{\partial R}\left[\frac{3}{2}\left(R-T\right)\right]^{1/3}. \tag{144}$$

Компоненты тока (69) равны

$$j^0 = \psi^+_\eta \frac{R^2}{\frac{3}{2}\left(R-T\right)r_0}\psi_\eta, \tag{145}$$

$$j^R = j^\theta = 0, \tag{146}$$

$$j^\varphi = \psi^+_\eta \frac{R^2}{\left[\frac{3}{2}\left(R-T\right)\right]^{5/3} r_0^{4/3}\sin\theta}\psi_\eta. \tag{147}$$

Получим гамильтониан (144) двухэтапным преобразованием базового гамильтониана (45) с тетрадами (43). При координатных преобразованиях (135), (136) ненулевые преобразованные в соответствии с (41) тетрады равны

$$\left(H'^0_{\underline{0}}\right)_{L-F} = \frac{\partial T}{\partial t}\left(H^0_{\underline{0}}\right)_S = \frac{1}{\sqrt{f_S\left(R,T\right)}}, \tag{148}$$

$$\left(H'^1_{\underline{0}}\right)_{L-F} = \frac{\partial R}{\partial t}\left(H^0_{\underline{0}}\right)_S = \frac{1}{\sqrt{f_S\left(R,T\right)}}, \tag{149}$$

$$\left(H'^0_{\underline{1}}\right)_{L-F} = \frac{\partial T}{\partial r}\left(H^1_{\underline{1}}\right)_S = \frac{\sqrt{\frac{r_0}{r\left(R,T\right)}}}{\sqrt{f_S\left(R,T\right)}}, \tag{150}$$

$$\left(H'^{1}_{\underline{1}}\right)_{L-F} = \frac{\partial R}{\partial r}\left(H^{1}_{\underline{1}}\right)_{S} = \frac{1}{\sqrt{f_S\left(R,T\right)}\sqrt{\dfrac{r_0}{r\left(R,T\right)}}}, \quad (151)$$

$$\left(H'^{2}_{\underline{2}}\right)_{L-F} = \left(H^{2}_{\underline{2}}\right)_{S} = \frac{1}{r\left(R,T\right)}, \quad (152)$$

$$\left(H'^{3}_{\underline{3}}\right)_{L-F} = \left(H^{3}_{\underline{3}}\right)_{S} = \frac{1}{r\left(R,T\right)\sin\theta}. \quad (153)$$

В переменных R,T согласно (136)

$$f_S\left(R,T\right) = 1 - \frac{r_0}{r\left(R,T\right)} = 1 - \left(\frac{r_0}{\dfrac{3}{2}\left(R-T\right)}\right)^{2/3}. \quad (154)$$

По сравнению с тетрадами (43) в результате преобразований (135) появились две дополнительные ненулевые тетрады (149), (150).

Далее с помощью преобразования Лоренца (15), (16), (21), (22) приведем тетрады (148)–(153) к тетрадам в калибровке Швингера (142). Ненулевые величины $\Lambda^{\underline{\beta}}_{\underline{\alpha}}\left(R,T\right)$ в (15), (16) будут равны

$$\Lambda^{\underline{0}}_{\underline{0}} = \Lambda^{\underline{1}}_{\underline{1}} = \frac{1}{\sqrt{f_S\left(R,T\right)}};$$
$$\Lambda^{\underline{0}}_{\underline{1}} = \Lambda^{\underline{1}}_{\underline{0}} = -\sqrt{\frac{r_0}{r\left(R,T\right)}}\frac{1}{\sqrt{f_S\left(R,T\right)}}. \quad (155)$$

После проведенного двухэтапного преобразования базовый гамильтониан (45) преобразуется к виду (144).

Условие причинности Гильберта $g_{00} > 0$ для метрики Леметра – Финкельштейна (137) не накладывает ограничений на область определения волновых функций гамильтониана (144). Однако при проведении преобразований в выражениях (148)–(151), (155) присутствует выражение $\sqrt{f_S\left(R,T\right)} = \sqrt{1 - \dfrac{r_0}{r\left(R,T\right)}}$, которое в базовой метрике (42) является вещественным и положительным. Отсюда следует (см. (154)), что кроме условия (138) существует дополнительное ограничение области определения волновых функций гамильтониана (144)

$$R - T > \frac{2}{3}r_0. \quad (156)$$

С учетом равенства нулю радиальной компоненты тока j^{μ} (146) гамильтониан H_{η} (144) является эрмитовым (см. условие эрмитовости (28), (54)).

Однако в отличие от базового гамильтониана (45) гамильтониан (144) в переменных $\left(R,T\right)$ явно зависит от времени, и в этих переменных отсутствует возможность существования стационарных связанных состояний дираковских частиц.

5.2. Решение Крускала

Координаты

$$\left(v,u,\theta,\varphi\right). \quad (157)$$

Координатные преобразования

$$u = \sqrt{\frac{r_0}{r}}\sqrt{f_S}\,\exp\frac{r}{2r_0}\,\mathrm{ch}\left(\frac{t}{2r_0}\right),$$
$$v = \sqrt{\frac{r_0}{r}}\sqrt{f_S}\,\exp\frac{r}{2r_0}\,\mathrm{sh}\left(\frac{t}{2r_0}\right), \quad (158)$$

$$\frac{r_0}{r}\sqrt{f_S}\,\exp\frac{r}{2r_0} = u^2 - v^2,$$
$$\frac{t}{2r_0}\mathrm{arcth}\frac{v}{u} = \frac{1}{2}\mathrm{arcth}\frac{2uv}{u^2+v^2}, \quad (159)$$

$$du = \frac{1}{2r_0}\sqrt{\frac{r_0}{r}}\sqrt{f_S}\,\exp\frac{r}{2r_0}\,\mathrm{sh}\left(\frac{t}{2r_0}\right)dt + \frac{1}{2r_0}\frac{\sqrt{\dfrac{r_0}{r}}}{\sqrt{f_S}}\exp\frac{r}{2r_0}\,\mathrm{ch}\left(\frac{t}{2r_0}\right)dr,$$
$$dv = \frac{1}{2r_0}\sqrt{\frac{r_0}{r}}\sqrt{f_S}\,\exp\frac{r}{2r_0}\,\mathrm{ch}\left(\frac{t}{2r_0}\right)dt + \frac{1}{2r_0}\frac{\sqrt{\dfrac{r_0}{r}}}{\sqrt{f_S}}\exp\frac{r}{2r_0}\,\mathrm{sh}\left(\frac{t}{2r_0}\right)dr. \quad (160)$$

Квадрат интервала

$$ds^2 = f^2dv^2 - f^2du^2 - \left(r\left(u,v\right)\right)^2\left(d\theta^2 + \sin^2 d\varphi^2\right),$$
$$\left(f\left(u,v\right)\right)^2 = \frac{4r_0^3}{r\left(u,v\right)}\exp\left(-\frac{r\left(u,v\right)}{r_0}\right) = \text{функция от } \left(u^2 - v^2\right). \quad (161)$$

Определитель $\left(-g\right)$, величина g_G, оператор η равны

$$-g = \left(f\left(u,v\right)\right)^4\left(r\left(u,v\right)\right)^4\sin^2\theta, \quad (162)$$

$$g_G = \frac{\left(f\left(u,v\right)\right)^4\left(r\left(u,v\right)\right)^4}{u^4}, \quad (163)$$

$$\eta = \left(g_G\,g^{00}\right)^{1/4} = \left(f\left(u,v\right)\right)^{1/2}\frac{r\left(u,v\right)}{u}. \quad (164)$$

Ненулевые компоненты тетрадных векторов $\tilde{H}^{\mu}_{\underline{\alpha}}$ в калибровке Швингера:

$$\tilde{H}^{0}_{\underline{0}} = \frac{1}{f(u,v)};\ \tilde{H}^{1}_{\underline{1}} = \frac{1}{f(u,v)};$$
$$\tilde{H}^{2}_{\underline{2}} = \frac{1}{r(u,v)};\ \tilde{H}^{3}_{\underline{3}} = \frac{1}{r(u,v)\sin\theta}. \tag{165}$$

Матрицы $\tilde{\gamma}^{\alpha}$ равны

$$\tilde{\gamma}^{0} = \frac{1}{f}\gamma^{\underline{0}};\ \tilde{\gamma}^{1} = \frac{1}{f}\gamma^{\underline{1}};\ \tilde{\gamma}^{2} = \frac{1}{r(u,v)}\gamma^{\underline{2}};$$
$$\tilde{\gamma}^{3} = \frac{1}{r(u,v)\sin\theta}\gamma^{\underline{3}}. \tag{166}$$

Самосопряженный гамильтониан в η-представлении с тетрадами (165) равен

$$H_{\eta} = \gamma^{\underline{0}} f(u,v) m - i\gamma^{\underline{0}}\gamma^{\underline{1}}\left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{u}\right) -$$
$$-i\gamma^{\underline{0}}\gamma^{\underline{2}}\frac{f(u,v)}{r(u,v)}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{2}\mathrm{ctg}\theta\right) -$$
$$-i\gamma^{\underline{0}}\gamma^{\underline{3}}\frac{f(u,v)}{r(u,v)\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}. \tag{167}$$

Компоненты тока (69) равны

$$j^{0} = \psi^{+}_{\eta}\frac{u^{2}}{\left(f(r,v)\right)^{2}\left(r(u,v)\right)^{2}}\psi_{\eta}, \tag{168}$$

$$j^{u} = j^{\theta} = 0, \tag{169}$$

$$j^{\varphi} = \psi^{+}_{\eta}\frac{u^{2}}{\left(f(r,v)\right)^{2}\left(r(u,v)\right)^{3}\sin\theta}\gamma^{\underline{3}}\psi_{\eta}. \tag{170}$$

Получим гамильтониан (167) двухэтапным преобразованием базового гамильтониана (45) с тетрадами (43). При координатных преобразованиях (158)–(160) ненулевые преобразованные в соответствии с (41) тетрады равны

$$\left(H'^{0}_{\underline{0}}\right)_{K} = \frac{\partial v}{\partial t}\left(H^{0}_{\underline{0}}\right)_{S} =$$
$$= \mathrm{ch}\left(\frac{t(u,v)}{2r_0}\right)\frac{1}{2r_0}\sqrt{\frac{r(u,v)}{r_0}}\exp\frac{r(u,v)}{2r_0}, \tag{171}$$

$$\left(H'^{1}_{\underline{0}}\right)_{K} = \frac{\partial u}{\partial t}\left(H^{0}_{\underline{0}}\right)_{S} =$$
$$= \mathrm{sh}\left(\frac{t(u,v)}{2r_0}\right)\frac{1}{2r_0}\sqrt{\frac{r(u,v)}{r_0}}\exp\frac{r(u,v)}{2r_0}, \tag{172}$$

$$\left(H'^{0}_{\underline{1}}\right)_{K} = \frac{\partial v}{\partial r}\left(H^{1}_{\underline{1}}\right)_{S} =$$
$$= \mathrm{sh}\left(\frac{t(u,v)}{2r_0}\right)\frac{1}{2r_0}\sqrt{\frac{r(u,v)}{r_0}}\exp\frac{r(u,v)}{2r_0}, \tag{173}$$

$$\left(H'^{1}_{\underline{1}}\right)_{K} = \frac{\partial u}{\partial r}\left(H^{1}_{\underline{1}}\right)_{S} =$$
$$= \mathrm{ch}\left(\frac{t(u,v)}{2r_0}\right)\frac{1}{2r_0}\sqrt{\frac{r(u,v)}{r_0}}\exp\frac{r(u,v)}{2r_0}, \tag{174}$$

$$\left(H'^{2}_{\underline{2}}\right)_{K} = \left(H^{2}_{\underline{2}}\right)_{S} = \frac{1}{r(u,v)}, \tag{175}$$

$$\left(H'^{3}_{\underline{3}}\right)_{K} = \left(H^{3}_{\underline{3}}\right)_{S} = \frac{1}{r(u,v)\sin\theta}. \tag{176}$$

По сравнению с тетрадами (43) в результате преобразований (158)–(160) появились две дополнительные ненулевые тетрады (172), (173).

Далее с помощью преобразования Лоренца (15), (16), (21), (22) приведем тетрады (171)–(176) к тетрадам в калибровке Швингера (165). Ненулевые величины $\Lambda^{\underline{\beta}}_{\underline{\alpha}}(u,v)$ в (15), (16) будут равны

$$\Lambda^{\underline{0}}_{\underline{0}} = \Lambda^{\underline{1}}_{\underline{1}} = \frac{1}{f}\mathrm{ch}\left(\frac{t(u,v)}{2r_0}\right)\frac{1}{2r_0}\sqrt{\frac{r(u,v)}{r_0}}\exp\frac{r(u,v)}{2r_0};$$
$$\Lambda^{\underline{1}}_{\underline{0}} = \Lambda^{\underline{0}}_{\underline{1}} = -\frac{1}{f}\mathrm{sh}\left(\frac{t(u,v)}{2r_0}\right)\frac{1}{2r_0}\sqrt{\frac{r(u,v)}{r_0}}\exp\frac{r(u,v)}{2r_0}. \tag{177}$$

После проведенного двухэтапного преобразования базовый гамильтониан (45) преобразуется к виду (167).

Условие причинности Гильберта $g_{00} > 0$ для метрики Крускала (161) не ограничивает область определения волновых функций гамильтониана (167). Ограничений также не содержится при получении тетрад (171)–(176) в первом этапе преобразования и при проведении преобразования Лоренца во втором этапе преобразования базового гамильтониана (45). Однако ограничение области определения волновых функций преобразованного гамильтониана содержится при введении новых переменных (u,v). В равенствах (158), (159) присутствует выражение $f_S = 1 - \frac{r_0}{r(u,v)}$, которое в базовой метрике (42) является вещественным и положительным (см. (46), (47)). Отсюда следует (см. (158), (159)), что для области определения в координатах (u,v) должны выполняться условия

$$u^2 > v^2,\ u^2 \neq v^2 \neq 0. \tag{178}$$

На плоскости (u,v) областью определения волновых функций гамильтониана (167) является правый квадрант $u > |v|$. Линии $u = \pm v$ и точка $u = v = 0$ не принадлежат искомой области определения.

С учетом равенства нулю радиальной компоненты тока j^{μ} (169) гамильтониан H_{η} (167) является эрмитовым (см. условие эрмитовости (28), (54)).

В отличие от базового гамильтониана (45) гамильтониан (167) в переменных (u,v) явно зависит от временной координаты v, и в этих переменных отсутствует возможность существования стационарных связанных состояний дираковских частиц.

Если мы для движения частиц под «горизонтом событий» $r<r_0$ по аналогии с метрикой (55) в определении переменных Крускала (158), (159) поменяем местами временную и радиальную координаты, то получим чисто мнимые координаты (u,v), что при действительных координатах θ,φ неприемлемо при квантово-механическом рассмотрении эволюции системы «дираковская частица во внешнем гравитационном поле».

Проведенное рассмотрение дираковских гамильтонианов (144), (167) в гравитационных полях Леметра – Финкельштейна (137) и Крускала (161) показывает, что области определения волновых функций ограничены, как и исходная область определения гамильтониана (45) в поле Шварцшильда $\left(r\in\left(r_0,\infty\right)\right)$.

В координатах Леметра – Финкельштейна (R,T) ограничение сводится к условию (156)

$$R-T>\frac{2}{3}r_0.$$

В координатах Крускала (u,v) ограничение равно

$$u>|v|>0.$$

Гамильтонианы (144), (167), как и базовый гамильтониан (45), являются эрмитовыми для своих областей определения волновых функций $\left((\Phi,H\Psi)=(H\Phi,\Psi)\right)$.

В переменных Леметра – Финкельштейна и в переменных Крускала гамильтонианы (144), (167) явно зависят от временных координат, поэтому для них отсутствует возможность существования стационарных связанных состояний дираковских частиц.

Заключение

В работе проведен анализ квантово-механической эквивалентности метрик центрально-симметричного незаряженного гравитационного поля.

Рассматривались метрики Шварцшильда в сферических [1], изотропных [2] и гармонических [3] координатах; метрики Эддингтона – Финкельштейна [5, 8] и Пенлеви – Гуллстранда [9, 10]; метрики Леметра – Финкельштейна [4, 5] и Крускала [6, 7]. Все метрики получены из решения [1] путем соответствующих координатных преобразований.

Для всех метрик получены самосопряженные гамильтонианы с плоским скалярным произведением волновых функций и с использованием тетрадных векторов в калибровке Швингера. Кроме того, эти же гамильтонианы получены прямыми двухэтапными преобразованиями базового гамильтониана (45) для поля Шварцшильда в координатах (t,r,θ,φ). Сначала в соответствии с координатными преобразованиями для рассматриваемых метрик преобразовывался базовый гамильтониан (45) с тетрадами (43). Затем при необходимости осуществлялись преобразования Лоренца (15), (16), (21), (22) для перехода к тетрадам в калибровке Швингера.

Для рассматриваемых метрик и гамильтонианов анализу подвергались области определения волновых функций уравнения Дирака, эрмитовость гамильтонианов $\left((\Phi,H\Psi)=(H\Phi,\Psi)\right)$ и возможность существования стационарных связанных состояний частиц со спином 1/2. В результате анализа можно сделать следующие выводы:

1. Для базовой метрики Шварцшильда в сферических координатах (t,r,θ,φ) для выполнения условия причинности Гильберта $g_{00}>0$ область определения волновых функций ограничена условием

$$r>r_0. \qquad (179)$$

Для всех других рассматриваемых метрик условие (179) также проявляется в новых переменных:

– метрика Шварцшильда в изотропных координатах

$$R>\frac{r_0}{4}, \qquad (180)$$

– метрика Шварцшильда в гармонических координатах

$$R>\frac{r_0}{2}, \qquad (181)$$

– метрики Эддингтона – Финкельштейна и Пенлеви – Гуллстранда

$$r>r_0, \qquad (182)$$

– метрика Леметра – Финкельштейна

$$R-T>\frac{2}{3}r_0, \qquad (183)$$

– метрика Крускала

$$u > |v| > 0. \qquad (184)$$

2. При рассмотрении возможности для метрики Шварцшильда движения дираковских частиц под «горизонтом событий» $(r < r_0)$ за счет замены местами временной и радиальной координаты [26, 27] (метрика (55)) дираковский гамильтониан явно зависит от времени и физически неэквивалентен базовому гамильтониану (45) с метрикой (42) и областью определения (179). Условие Гильберта $g_{00} > 0$ не позволяет «сшивать» волновые функции на «горизонте событий» $r = r_0$. Аналогичная замена в переменных Крускала приводит к чисто мнимым координатам u, v при действительных координатах θ, φ, что физически неприемлемо при квантово-механическом рассмотрении эволюции системы «дираковская частица во внешнем гравитационном поле».

3. Самосопряженные гамильтонианы (68), (86) для метрик Шварцшильда в изотропных и гармонических координатах являются эрмитовыми, и для них, как и для базового гамильтониана (45), возможно существование вещественных стационарных связанных состояний частиц со спином 1/2.

4. Самосопряженные гамильтонианы (102), (122) для метрик Эддингтона – Финкельштейна и Пенлеви – Гуллстранда являются неэрмитовыми, и для них возможны лишь состояния с комплексными уровнями энергии, распадающимися со временем.

5. Самосопряженные гамильтонианы (144), (167) для метрик Леметра – Финкельштейна и Крускала являются эрмитовыми, но из-за явной зависимости от временной координаты для этих гамильтонианов отсутствует возможность существования стационарных связанных состояний частиц со спином 1/2.

Полученные результаты могут быть полезны при рассмотрении вопросов, связанных с эволюцией Вселенной и с взаимодействием коллапсаров с окружающей средой.

Авторы благодарят А. Л. Новоселову за большую техническую помощь в подготовке работы.

Список литературы

1. Schwarzschild K. Sitzber. Deut. Akad. Wiss. Berlin. 1916. P. 189–196.
2. Eddington A. S. The mathematical theory of relativity (Cambridge University Press, 1924).
3. Логунов А. А., Мествиришвили М. А. Релятивистская теория гравитации. М.: Наука, 1989.
4. Lemaitre G. // Ann. Soc. Sci. Bruxelles. 1933. Vol. A53. P. 51.
5. Finkelstein D. // Phys. Rev. 1958. Vol. 110. P. 965.
6. Kruskal M. // Phys. Rev. 1960. Vol. 119. P. 1743.
7. Novikov I. D. 1963. Vol. AJ 40. P. 772.
8. Eddington A. S. // Nature. 1924. Vol. 113. P. 192.
9. Painleve P. // C. R. Acad. Sci. (Paris). 1921. Vol. 173. P. 677.
10. Gullstrand A. // Arkiv. Mat. Astron. Fys. 1922. Vol. 16. P. 1.
11. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. // Phys. Rev. 2010. Vol. D 82. P. 104056; arxiv:1007.4631 (gr-qc).
12. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. // Phys. Rev. 2011. Vol. D 83. P. 105002; arxiv: 1102.4067v1 (gr-qc).
13. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. arxiv: 1107.0844 (gr-qc).
14. Schwinger J. // Phys. Rev. 1963. Vol. 130. P. 800.
15. Bender C. M., Brody D., Jones H. F. // Phys. Rev. Lett. 2002. Vol. 89. P. 2704041; Phys. Rev. 2004. Vol. D 70. P. 025001.
16. Mostafazadeh A. // J. Math. Phys. (N.Y.) 2002. Vol. 43. P. 205; 2002. Vol. 43. P. 2814; 2002. Vol. 43. P. 3944.
17. Bagchi B., Fring A. // Phys. Lett. 2009. Vol. A 373. P. 4307.
18. Parker L. // Phys. Rev. 1980. Vol. D 22. P. 1922.
19. Гильберт Д. // Избранные труды. Факториал. М.: 1998.
20. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М.: Физматлит, 2006.
21. Arminjon M., arxiv: 1211.1855v1 (gr-qc).
22. Brill D. R., Wheeler J. A. // Rev. of Modern Physics. 1957. Vol. 29. P. 465–479.
23. Dolan S. R. Trinity hall and astrophysics group, Cavendish Laboratory. Dissertation, 2006.
24. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. arxiv: 1205.4348 (gr-qc).
25. Gorbatenko M. V., Kolesnikov N. S., Neznamov V. P., Popov E. V., Safronov I. I., Vronsky M. V. arxiv: 1301.7595 (gr-qc).
26. Новиков И. Д. Сообщения ГАИШ. 1962, № 120. P. 342.
27. Мизнер Ч., Торн Л., Уиллер Дж. Гравитация. Т. 3. М.: Мир, 1977.
28. Lasenby A., Doran C., Pritchard J., Caceres A., Dolan S. // Phys. Rev. 2005. Vol. D 72. P. 105014.

Статья поступила в редакцию 29.04.2014