

ВОПРОСЫ АТОМНОЙ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ:

Теоретическая и прикладная
физика

ВЫПУСК 1

2014

ФГУП

«РОССИЙСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ЯДЕРНЫЙ ЦЕНТР – ВНИИЭФ»

ВОПРОСЫ АТОМНОЙ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ:

**Теоретическая и прикладная
физика**

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СБОРНИК

ВЫПУСК 1

Издается с 1984 г.

Саров – 2014

Уважаемые читатели!

Редакция н/т сборника «Вопросы атомной науки и техники» серии «Теоретическая и прикладная физика» информирует о том, что начиная со 2-го полугодия 2008 г. журнал распространяется согласно новым правилам подписки.

Теперь подписаться на сборник можно во всех отделениях связи России по каталогу Агентства «Роспечать», раздел «Периодические издания НТИ», подписной индекс 72246.

Цена одного журнала – 200 руб.

В год издается 3 выпуска.

По всем вопросам обращаться по адресу:

607188 г. Саров Нижегородской обл., пр. Мира, 37, РФЯЦ-ВНИИЭФ, ИТМФ.

Редакция журнала ВАНТ, сер. «Теоретическая и прикладная физика».

Тел. (83130)7-54-96; e-mail: kul@otd68.vniief.ru

Главный редактор Ю. А. Трутнев

Редакционная коллегия:

Е. Н. Аврорин – зам. главного редактора, М. В. Горбатенко, В. П. Копышев, Н. В. Лычагина –
ответственный секретарь, Б. А. Надыкто – зам. главного редактора, А. В. Певницкий,
В. А. Симоненко, В. П. Соловьев, С. А. Холин

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ И ЭРМИТОВОСТЬ ДИРАКОВСКИХ ГАМИЛЬТониАНОВ В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ КЕРРА

М. В. Горбатенко, В. П. Незнамов *

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

В работе для поля Керра доказана физическая эквивалентность дираковского гамильтониана Чандрасекара и самосопряженного гамильтониана H_η с плоским скалярным произведением волновых функций.

Определен явный вид операторов преобразования гамильтониана и волновых функций Чандрасекара в η -представление с плоским скалярным произведением.

При ограничении области определения волновых функций уравнения Дирака в поле Керра двумерными поверхностями вращения вокруг оси z гамильтониан Чандрасекара и самосопряженный гамильтониан в η -представлении являются эрмитовыми с выполнением равенства скалярных произведений $(\psi, H\phi) = (H\psi, \phi)$.

Ключевые слова: гравитационное поле Керра, дираковский гамильтониан Чандрасекара, дираковский гамильтониан в η -представлении.

Введение

Чандрасекар в работе [1] провел разделение угловых и радиальных переменных для уравнения Дирака в гравитационном поле Керра [2]. Пейдж в работе [3] обобщил подход Чандрасекара для уравнения Дирака в гравитационном поле Керра–Ньюмена [4]. В том и другом случаях использовались метрики в координатах Бойера–Линдквиста [5].

Стационарные четырехкомпонентные гамильтонианы Чандрасекара и Пейджа являются псевдоэрмитовыми [6–8, 11], или, другими словами, эрмитовыми с весовым оператором Паркера [9] в скалярных произведениях волновых функций.

Авторами в работах [10–12] с помощью методов псевдоэрмитовой квантовой механики [6–8] для произвольных гравитационных полей, в том числе зависящих от времени, разработан метод получения самосопряженных дираковских гамильтонианов с плоским скалярным произведением волновых функций**. В работе [12], в частно-

сти, получен самосопряженный гамильтониан в гравитационном поле Керра. Этот гамильтониан легко обобщается на случай геометрии Керра–Ньюмена.

В данной работе доказывается эквивалентность гамильтониана Чандрасекара с соответствующим самосопряженным гамильтонианом в η -представлении. Для геометрии Керра определяется явный вид операторов преобразования в η -представление.

Для областей определения волновых функций уравнения Дирака в поле Керра, ограниченных двумерными поверхностями вращения вокруг оси z , доказывается выполнение условия эрмитовости гамильтониана Чандрасекара и гамильтониана в η -представлении. К этим поверхностям, в частности, относятся поверхности внешней и внутренней эргосфер поля Керра.

1. Метрика Керра в координатах Бойера–Линдквиста

Решение Керра уравнений ОТО характеризуется точечным источником гравитационного поля

* E-mail: neznamov@vniief.ru.

** Ниже такое представление дираковских гамильтонианов будем называть η -представлением.

с массой M , вращающимся с угловым моментом $\mathbf{J} = M\mathbf{c}\mathbf{a}$, где c – скорость света.

Ниже будем использовать систему единиц $\hbar = c = 1$.

Тетрадные векторы определяются соотношением

$$H_{\underline{\alpha}}^{\mu} H_{\underline{\beta}}^{\nu} g_{\mu\nu} = \eta_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}, \quad (1)^*$$

где

$$\eta_{\underline{\alpha}\underline{\beta}} = \text{diag}[1, -1, -1, -1]. \quad (2)$$

Глобальные (неподчеркнутые) индексы опускаются и поднимаются с использованием метрического тензора $g_{\mu\nu}$ и обратного тензора $g^{\mu\nu}$; локальные (подчеркнутые) индексы опускаются и поднимаются с использованием тензоров $\eta_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}$, $\eta^{\underline{\alpha}\underline{\beta}}$.

$g^{\alpha\beta} =$	$\frac{1}{\Delta} \left(r^2 + a^2 + \frac{a^2 r_0 r}{\rho_K^2} \sin^2 \theta \right)$	0	0	$\frac{ar_0 r}{\Delta \rho_K^2}$
	0	$-\frac{\Delta}{\rho_K^2}$	0	0
	0	0	$-\frac{1}{\rho_K^2}$	0
	$\frac{ar_0 r}{\Delta \rho_K^2}$	0	0	$-\frac{1}{\Delta \sin^2 \theta} \left(1 - \frac{r_0 r}{\rho_K^2} \right)$

(8)

Матрицы Дирака удовлетворяют соотношениям

$$\gamma^{\mu} \gamma^{\alpha} + \gamma^{\alpha} \gamma^{\mu} = 2g^{\mu\alpha} E, \quad (3)$$

$$\gamma^{\underline{\mu}} \gamma^{\underline{\alpha}} + \gamma^{\underline{\alpha}} \gamma^{\underline{\mu}} = 2\eta^{\underline{\mu}\underline{\alpha}} E, \quad (4)$$

где E – единичная 4×4 матрица. Связь между γ^{α} и $\gamma^{\underline{\alpha}}$ определяется выражением

$$\gamma^{\alpha} = H_{\underline{\beta}}^{\alpha} \gamma^{\underline{\beta}}. \quad (5)$$

Метрика Керра в координатах Бойера–Линдквиста (t, r, θ, φ) имеет вид

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_0 r}{\rho_K^2} \right) dt^2 + \frac{2ar_0 r}{\rho_K^2} \sin^2 \theta dt d\varphi - \frac{\rho_K^2}{\Delta} dr^2 - \rho_K^2 d\theta^2 - \left(r^2 + a^2 + \frac{a^2 r_0 r}{\rho_K^2} \sin^2 \theta \right) \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (6)$$

* Значки с греческими буквами принимают значения 0, 1, 2, 3, значки с римскими буквами принимают значения 1, 2, 3.

В выражении (6) $r_0 = \frac{2GM}{c^2}$ – гравитационный радиус («горизонт событий») поля Шварцшильда, G – гравитационная постоянная, $\rho_K^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$, $\Delta = r^2 - r_0 r + a^2$.

В соответствии с условием причинности Гильберта ($g_{00} > 0$) в метрике (6) подразумевается выполнение неравенства

$$\left(1 - \frac{r_0 r}{\rho_K^2} \right) > 0. \quad (7)$$

В координатах (r, θ) равенство нулю выражения (7) определяет внешнюю и внутреннюю поверхности эргосфер поля Керра.

Контравариантный тензор $g^{\alpha\beta}$ имеет вид:

2. Гамильтонианы частиц со спином 1/2 в поле Керра

В работе [12] для метрики (6) авторами в η -представлении получен самосопряженный дираковский гамильтониан с плоским скалярным произведением волновых функций. Он имеет достаточно сложный вид:

$$H_{\eta} = \frac{m}{\sqrt{g^{00}}} \gamma^0 - \frac{i\sqrt{\Delta}}{\rho_K \sqrt{g^{00}}} \gamma^0 \gamma^1 \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) - \frac{i}{\rho_K \sqrt{g^{00}}} \gamma^0 \gamma^2 \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \text{ctg} \theta \right) - \frac{i}{g^{00} \sqrt{\Delta} \sin \theta} \gamma^0 \gamma^3 \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{i}{g^{00} \rho_K^2 \Delta} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{i}{2} \gamma^0 \gamma^1 \left[\frac{\partial}{\partial r} \frac{\sqrt{\Delta}}{\rho_K \sqrt{g^{00}}} \right] - \frac{i}{2} \gamma^0 \gamma^2 \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{\rho_K \sqrt{g^{00}}} \right] + \frac{i}{4} \gamma^3 \gamma^1 \sqrt{g^{00}} \frac{\Delta}{\rho_K} ar_0 \times$$

$$\begin{aligned} & \times \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r}{g^{00} \rho_K^2 \Delta} \right) - \\ & - \frac{i}{4} \gamma^2 \gamma^3 \sqrt{g^{00}} \frac{\sqrt{\Delta}}{\rho_K} a r_0 \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{r}{g^{00} \rho_K^2 \Delta} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Если в выражении (9) ограничиться членами линейными по a , мы получим самосопряженный гамильтониан для слабого поля Керра

$$\begin{aligned} H_\eta^{app} = & m \sqrt{f_S} \gamma^0 - i f_S \gamma^0 \gamma^1 \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) - \frac{i r_0}{2 r^2} \gamma^0 \gamma^1 - \\ & - i \sqrt{f_S} \gamma^0 \left[\gamma^2 \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \text{ctg} \theta \right) + \gamma^3 \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] - \\ & - \frac{i a r_0}{r^3} \frac{\partial}{\partial \varphi} - i \frac{3 a r_0}{4 r^3} \sin \theta \gamma^3 \gamma^1. \end{aligned} \quad (10)$$

В формуле (10) $f_S = 1 - \frac{r_0}{r}$. При $a = 0$ гамильтонианы (9), (10) совпадают с самосопряженным гамильтонианом в поле Шварцшильда [12].

В отличие от центрально-симметричных гравитационных полей Шварцшильда, Райсснера–Нордстрёма и др. аксиально-симметричное поле Керра не позволяет использовать для отделения угловых переменных в уравнении Дирака сферические гармоники со спином $1/2$.

Чандрасекар в работе [1] провел разделение переменных в дираковском гамильтониане с метрикой (6), используя двухкомпонентный спинорный формализм Пенроуза–Ньюмена [13] и тетраду Kinnersley [14].

Следуя работам [15, 16], уравнение Дирака и гамильтониан Чандрасекара можно записать в биспинорной форме

$$\begin{aligned} & i \frac{\partial \Psi_{Ch}}{\partial t} = H_{Ch} \Psi_{Ch} = \\ & = \left(\frac{m}{g^{00}} \gamma^0 - \frac{i}{g^{00}} \gamma^0 \gamma^k \frac{\partial}{\partial x^k} - i \Phi^0 - \frac{i}{g^{00}} \gamma^0 \gamma^k \Phi^k \right) \Psi_{Ch}. \end{aligned} \quad (11)$$

В выражении (11) $k = 1, 2, 3$, Φ^0 , Φ^k – биспинорные связности, вычисляемые стандартным образом. Остальные величины имеют следующий вид

$$\Psi_{Ch} = \begin{pmatrix} P^A \\ Q_B^* \end{pmatrix}. \quad (12)$$

В уравнении (11)

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \sigma^{\mu AB'} \\ \sqrt{2} [\sigma_{AB'}^\mu]^T & 0 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{2} [\sigma^{\mu AB'}] &= \sqrt{2} \begin{pmatrix} n^\mu & -m^{*\mu} \\ -m^\mu & l^\mu \end{pmatrix}; \\ \sqrt{2} [\sigma_{AB'}^\mu]^T &= \sqrt{2} \begin{pmatrix} l^\mu & m^{*\mu} \\ m^\mu & n^\mu \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (14)$$

В соотношениях (13), (14) индексы A, B' принимают значения 0 и 1, значки * и T означают комплексное сопряжение и транспонирование.

Компоненты тетрады Kinnersley равны

$$\begin{aligned} l^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{r^2 + a^2}{\Delta}, 1, 0, \frac{a}{\Delta} \right), \\ n^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2} \rho_K^2} [r^2 + a^2, -\Delta, 0, a] \end{aligned} \quad (15)$$

$$m^\mu = \frac{1}{\sqrt{2} (r + ia \cos \theta)} \left(ia \sin \theta, 0, 1, \frac{i}{\sin \theta} \right).$$

Обратный метрический тензор (8) выражается через компоненты тетрады (15) следующим образом

$$g^{\mu\nu} = l^\mu n^\nu + n^\mu l^\nu - m^\mu m^{*\nu} - m^{*\mu} m^\nu. \quad (16)$$

Гамильтониан Чандрасекара (11) физически эквивалентен самосопряженному гамильтониану (9), поскольку они связаны друг с другом преобразованием подобия.

Для волновых функций уравнения Дирака с гамильтонианом Чандрасекара (11) в скалярном произведении присутствует весовой оператор Паркера [9, 10–12]

$$\rho_P = \sqrt{g_G} \gamma^0 \gamma^0, \quad (17)$$

где для метрики Керра в координатах Бойера–Линдквиста $g_G = \frac{\rho_K^4}{r^4}$ [12].

При использовании самосопряженного гамильтониана (9) $\rho_P = 1$.

Если определить оператор η из равенства

$$\rho_P = \eta^+ \eta, \quad (18)$$

то гамильтониан Чандрасекара будет связан с гамильтонианом (9) преобразованием подобия

$$H_\eta = \eta H_{Ch} \eta^{-1}. \quad (19)$$

Из (19) следует, что оба гамильтониана имеют одинаковый энергетический спектр.

3. Физическая эквивалентность гамильтониана Чандрасекара (11) и самосопряженного гамильтониана (9)

Доказательство эквивалентности будем осуществлять следующим образом.

Первоначально из вида матриц (13), (14) с компонентами тетрады Kinnersley (15) определяем весовой оператор Паркера и с помощью (18) оператор преобразования η .

Далее, с помощью оператора η осуществляем преобразование матриц Дирака (13) в η -представление

$$\gamma_{\eta}^{\mu} = \eta \gamma^{\mu} \eta^{-1}. \quad (20)$$

Будет показано, что матрицы $\gamma_{\eta}^0, \gamma_{\eta}^2$ совпадают с матрицами $\tilde{\gamma}^0, \tilde{\gamma}^2$, вычисленными в работе [12] с помощью тетрад в калибровке Швингера. Для совпадения матриц $\gamma_{\eta}^1, \gamma_{\eta}^3$ с $\tilde{\gamma}^1, \tilde{\gamma}^3$ необходимо осуществить дополнительное унитарное преобразование, коммутирующее с матрицами γ^0, γ^2 и связанное с пространственным поворотом вокруг оси θ .

С матрицами γ_{η}^{μ} можно записать часть гамильтониана (11) без биспинорных связностей

$$H_{red} = \frac{m}{g_{00}} \gamma_{\eta}^0 - \frac{i}{g_{00}} \gamma_{\eta}^0 \gamma_{\eta}^k \frac{\partial}{\partial x^k}. \quad (21)$$

Выражения (21) достаточно, чтобы без вычисления биспинорных связностей в η -представлении прийти к виду искомого самосопряженного гамильтониана (9), используя формулу, доказанную в работе [12] для метрик вида (6)

$$H_{\eta} = \frac{1}{2} (H_{red} + H_{red}^+) + \frac{i}{4} \left(\frac{\partial \tilde{H}_{no}}{\partial x^p} + \frac{g^{ok}}{g^{00}} \frac{\partial \tilde{H}_{nk}}{\partial x^p} \right) \tilde{H}_m^p S^{mn}. \quad (22)$$

В (22) $\tilde{H}_{no}, \tilde{H}_{nk}, \tilde{H}_m^p$ – тетрады в калибровке Швингера, $S^{mn} = \frac{1}{2} (\gamma^m \gamma^n - \gamma^n \gamma^m)$.

В результате мы докажем физическую эквивалентность двух рассматриваемых гамильтонианов.

Ниже мы будем рассматривать три случая: общий случай поля Керра, случай слабого поля Керра с учетом слагаемых не выше линейных по параметру вращения a , шварцшильдовский случай с $a=0$.

1. Матрицы (13) с компонентами тетрады Kinnersley (15) имеют вид

$$\gamma^{\mu} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_{up}^{\mu} \\ \gamma_d^{\mu} & 0 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

В (23) $\gamma_{up}^{\mu}, \gamma_d^{\mu}$ – 2×2 матрицы.

$$\gamma_{up}^0 = \begin{pmatrix} \frac{r^2 + a^2}{\rho_K^2} & \frac{ia \sin \theta}{\bar{\rho}_K^*} \\ -\frac{ia \sin \theta}{\bar{\rho}_K} & \frac{r^2 + a^2}{\Delta} \end{pmatrix}, \quad (24)$$

$$\gamma_d^0 = \begin{pmatrix} \frac{r^2 + a^2}{\Delta} & -\frac{ia \sin \theta}{\bar{\rho}_K^*} \\ \frac{ia \sin \theta}{\bar{\rho}_K} & \frac{r^2 + a^2}{\rho_K^2} \end{pmatrix}. \quad (25)$$

$$\gamma_{up}^1 = \begin{pmatrix} -\frac{\Delta}{\rho_K^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (26)$$

$$\gamma_d^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{\Delta}{\rho_K^2} \end{pmatrix}, \quad (27)$$

$$\gamma_{up}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\bar{\rho}_K^*} \\ -\frac{1}{\bar{\rho}_K} & 0 \end{pmatrix}, \quad (28)$$

$$\gamma_d^2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\bar{\rho}_K^*} \\ \frac{1}{\bar{\rho}_K} & 0 \end{pmatrix}, \quad (29)$$

$$\gamma_{up}^3 = \begin{pmatrix} \frac{a}{\rho_K^2} & \frac{i}{\bar{\rho}_K^* \sin \theta} \\ -\frac{i}{\bar{\rho}_K \sin \theta} & \frac{a}{\Delta} \end{pmatrix}, \quad (30)$$

$$\gamma_d^3 = \begin{pmatrix} \frac{a}{\Delta} & -\frac{i}{\bar{\rho}_K^* \sin \theta} \\ \frac{i}{\bar{\rho}_K \sin \theta} & \frac{a}{\rho_K^2} \end{pmatrix}. \quad (31)$$

В выражениях (24)–(31) $\bar{\rho}_K = r + ia \cos \theta$; $\bar{\rho}_K^* = r - ia \cos \theta$;

Выражения γ^{μ} для слабого поля Керра и для поля Шварцшильда ($a=0$) получаются из выражений (24)–(31) при $\Delta \rightarrow r^2 f_S = r^2 \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)$; $\rho_K^2 \rightarrow r^2$.

При переходе к плоскому пространству Минковского ($r_0=0, a=0$) матрицы (24)–(31) соответствуют γ -матрицам Дирака в спинорном представлении

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}. \quad (32)$$

2. Весовой оператор Паркера

$$\rho_P = \frac{\rho_K^2}{r^2} \gamma^0 \gamma^0 = \frac{\rho_K^2}{r^2} \begin{pmatrix} \rho_P^{up} & 0 \\ 0 & \rho_P^d \end{pmatrix}, \quad (33)$$

где ρ_P^{up}, ρ_P^d – 2×2 матрицы.

$$\rho_P^{up} = \begin{pmatrix} \frac{r^2 + a^2}{\Delta} & -\frac{ia \sin \theta}{\bar{\rho}_K^*} \\ \frac{ia \sin \theta}{\bar{\rho}_K} & \frac{r^2 + a^2}{\rho_K^2} \end{pmatrix}, \quad (34)$$

$$\rho_P^d = \begin{pmatrix} \frac{r^2 + a^2}{\rho_K^2} & \frac{ia \sin \theta}{\bar{\rho}_K^*} \\ -\frac{ia \sin \theta}{\bar{\rho}_K} & \frac{r^2 + a^2}{\Delta} \end{pmatrix}. \quad (35)$$

Выражения ρ_P^{up}, ρ_P^d для слабого поля Керра и для поля Шварцшильда легко устанавливаются из формул (34), (35).

3. Оператор преобразования в η -представление должен удовлетворять равенству

$$\rho_P = \eta^+ \eta, \quad (36)$$

где

$$\eta = \frac{\sqrt{\rho_K^2}}{r} \begin{pmatrix} \eta_{up} & 0 \\ 0 & \eta_d \end{pmatrix}, \quad (37)$$

η_{up}, η_d – 2×2 матрицы.

Оператор η можно определить, приводя матрицу ρ_P (33) к диагональному виду.

Тогда операторы $\eta_{up}^+, \eta_{up}, \eta_d^+, \eta_d$ равны

$$\eta_{up}^+ = \begin{pmatrix} N_2 V_1 & N_1 U_1 \\ N_2 V_2 & N_1 U_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_2} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_1} \end{pmatrix}, \quad (38)$$

$$\eta_{up} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_2} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_2^* V_1^* & N_2^* V_2^* \\ N_1^* U_1^* & N_1^* U_2^* \end{pmatrix}, \quad (39)$$

$$\eta_d^+ = \begin{pmatrix} N_2 V_1 & N_1 U_1 \\ N_2 V_2 & N_1 U_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix}, \quad (40)$$

$$\eta_d = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_2^* V_1^* & N_2^* V_2^* \\ N_1^* U_1^* & N_1^* U_2^* \end{pmatrix}. \quad (41)$$

В выражениях (38)–(41) λ_1, λ_2 – собственные числа матрицы ρ_P (33).

$$\lambda_1 = \frac{(r^2 + a^2)(\Delta + \rho_K^2) - B}{2\Delta\rho_K^2}, \quad (42)$$

$$\lambda_2 = \frac{(r^2 + a^2)(\Delta + \rho_K^2) + B}{2\Delta\rho_K^2}, \quad (43)$$

где

$$B = \sqrt{A^2 + 4\Delta^2 \rho_K^2 a^2 \sin^2 \theta}, \quad A = (r^2 + a^2)(\rho_K^2 - \Delta).$$

Отметим, что

$$\lambda_1 \lambda_2 = g^{00}. \quad (44)$$

В (38)–(41) через U_1, U_2, V_1, V_2 обозначены компоненты ненормированных собственных векторов \mathbf{U}, \mathbf{V} матрицы ρ_P (33). С помощью программы *Mathematica* можно определить следующий вид векторов \mathbf{U}, \mathbf{V}

$$\mathbf{U} = \{U_1, U_2\} = \left\{ \frac{2ia\Delta\bar{\rho}_K \sin \theta}{A+B}, 1 \right\}, \quad (45)$$

$$\mathbf{V} = \{V_1, V_2\} = \left\{ -\frac{2ia\Delta\bar{\rho}_K \sin \theta}{B-A}, 1 \right\}. \quad (46)$$

Нормировочные коэффициенты N_1, N_2 в (38)–(41) определяются из условия (36):

$$N_1 = \sqrt{\frac{B+A}{2B}}; \quad N_2 = -i\sqrt{\frac{B-A}{2B}}. \quad (47)$$

Фазовые множители перед N_1, N_2 выбраны из условия правильного предельного перехода к оператору η для поля Шварцшильда с параметром вращения $a = 0$.

С учетом (45), (46) операторы η (37) и η^{-1} можно записать в виде

$$\eta_{up} = \begin{pmatrix} N_1 \frac{\bar{\rho}_K^*}{\sqrt{\rho_K^2}} \sqrt{\lambda_2} & N_2 \sqrt{\lambda_2} \\ N_2 \frac{\bar{\rho}_K^*}{\sqrt{\rho_K^2}} \sqrt{\lambda_1} & N_1 \sqrt{\lambda_1} \end{pmatrix}, \quad (48)$$

$$\eta_{up}^{-1} = \begin{pmatrix} N_1 \frac{\bar{\rho}_K}{\sqrt{\rho_K^2}} \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} & N_2^* \frac{\bar{\rho}_K}{\sqrt{\rho_K^2}} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \\ N_2^* \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} & N_1 \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \end{pmatrix}. \quad (49)$$

$$\eta_d = \begin{pmatrix} N_1 \frac{\bar{\rho}_K^*}{\sqrt{\rho_K^2}} \sqrt{\lambda_1} & N_2 \sqrt{\lambda_1} \\ N_2 \frac{\bar{\rho}_K^*}{\sqrt{\rho_K^2}} \sqrt{\lambda_2} & N_1 \sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix}, \quad (50)$$

$$\eta_d^{-1} = \begin{pmatrix} N_1 \frac{\bar{\rho}_K}{\sqrt{\rho_K^2}} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & N_2^* \frac{\bar{\rho}_K}{\sqrt{\rho_K^2}} \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} \\ N_2^* \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & N_1 \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} \end{pmatrix}. \quad (51)$$

В случае слабого поля Керра

$$\lambda_1 = 1; \lambda_2 = \frac{1}{f_S} = \frac{1}{1 - \frac{r_0}{r}}; N_1 = 1; N_2 = -i \frac{\sqrt{f_S} a \sin \theta}{r(1 - f_S)};$$

$$\eta_{up} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{f_S}} & -i \frac{\sqrt{f_S} a \sin \theta}{r(1 - f_S)} \\ -i \frac{f_S a \sin \theta}{r(1 - f_S)} & 1 \end{pmatrix}; \quad (52)$$

$$\eta_{up}^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{f_S} & i \frac{f_S a \sin \theta}{r(1 - f_S)} \\ i \frac{f_S^{3/2} a \sin \theta}{r(1 - f_S)} & 1 \end{pmatrix},$$

$$\eta_d = \begin{pmatrix} 1 & -i \frac{f_S a \sin \theta}{r(1 - f_S)} \\ -i \frac{\sqrt{f_S} a \sin \theta}{r(1 - f_S)} & \frac{1}{\sqrt{f_S}} \end{pmatrix}; \quad (53)$$

$$\eta_d^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & i \frac{f_S^{3/2} a \sin \theta}{r(1 - f_S)} \\ i \frac{f_S a \sin \theta}{r(1 - f_S)} & \sqrt{f_S} \end{pmatrix}.$$

Матрица преобразования η для поля Шварцшильда ($a = 0$) является диагональной

$$\eta_S = \text{diag} \left[\frac{1}{\sqrt{f_S}}, 1, 1, \frac{1}{\sqrt{f_S}} \right]. \quad (54)$$

4. Далее осуществляем преобразования матриц (24), (31). После преобразований произведем эквивалентную циклическую замену локальных матриц Дирака

$$\gamma^3 \rightarrow \gamma^1; \gamma^1 \rightarrow \gamma^2; \gamma^2 \rightarrow \gamma^3.$$

В результате получаем

$$\eta \gamma^0 \eta^{-1} = \sqrt{g^{00}} \gamma^0, \quad (55)$$

$$\eta \gamma^1 \eta^{-1} = \frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{\rho_K^2}} (\gamma^1 \cos \delta - \gamma^3 \sin \delta), \quad (56)$$

$$\eta \gamma^2 \eta^{-1} = \frac{1}{\sqrt{\rho_K^2}} \gamma^2, \quad (57)$$

$$\eta \gamma^3 \eta^{-1} = \frac{1}{\sin \theta \sqrt{\Delta} \sqrt{g^{00}}} (\gamma^3 \cos \delta + \gamma^1 \sin \delta) + \frac{a r_0 r}{\rho_K^2 \Delta (g^{00})^{3/2}} \gamma^0. \quad (58)$$

В выражениях (57), (58)

$$\cos \delta = -\frac{\sqrt{g^{00}} \sqrt{\Delta} \sqrt{\rho_K^2} (\Delta - \rho_K^2)}{B}, \quad (59)$$

$$\sin \delta = \frac{a \sin \theta \sqrt{\Delta} (\Delta + \rho_K^2)}{B}. \quad (60)$$

В случае слабого поля Керра

$$\cos \delta = 1; \quad \sin \delta = \frac{\sqrt{f_S} (1 + f_S)}{r (1 - f_S)} a \sin \theta. \quad (61)$$

Для поля Шварцшильда

$$\cos \delta = 1; \quad \sin \delta = 0. \quad (62)$$

Преобразованные матрицы (55), (57) совпадают с матрицами, полученными в работе [12] при использовании тетрад в калибровке Швингера. Матрицы (56), (58) отличаются от аналогичных матриц работы [12] пространственным поворотом вокруг оси θ . Совпадения матриц можно достичь, применяя дополнительное унитарное преобразование

$$R = e^{\frac{\delta}{2} \gamma^3 \gamma^1} = \cos \frac{\delta}{2} - i \Sigma^2 \sin \frac{\delta}{2}. \quad (63)$$

Преобразование (63) коммутирует с матрицами γ^0, γ^2 ; диагональная матрица $-i \Sigma^{(2)} = \gamma^3 \gamma^1$.

Окончательно получаем

$$R \eta \gamma^0 \eta^{-1} R^{-1} = \sqrt{g^{00}} \gamma^0, \quad (64)$$

$$R \eta \gamma^1 \eta^{-1} R^{-1} = \frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{\rho_K^2}} \gamma^1, \quad (65)$$

$$R \eta \gamma^2 \eta^{-1} R^{-1} = \frac{1}{\sqrt{\rho_K^2}} \gamma^2, \quad (66)$$

$$\begin{aligned} R \eta \gamma^3 \eta^{-1} R^{-1} &= \\ &= \frac{1}{\sin \theta \sqrt{\Delta} \sqrt{\rho_K^2}} \gamma^3 + \frac{a r_0 r}{\rho_K^2 \Delta (g^{00})^{3/2}} \gamma^0. \end{aligned} \quad (67)$$

Равенства (64)–(67) вместе с выражениями (21), (22) доказывают физическую эквивалентность гамильтониана Чандрасекара (11) и самосопряженного гамильтониана (9).

4. Эрмитовость дираковских гамильтонианов в поле Керра

Стандартное условие эрмитовости дираковских гамильтонианов во внешних гравитационных полях, выраженное через скалярные произведения волновых функций, имеет вид

$$(\psi, H\varphi) = (H\psi, \varphi). \quad (68)$$

В [10] условие (68) преобразовано к виду

$$\oint dS_k (\sqrt{-g} j^k) + \int d^3x \sqrt{-g} \times \\ \times \left[\psi^+ \gamma^0 \left(\gamma_{,0}^0 + \begin{pmatrix} 0 & \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \gamma^0 \right) \psi + \begin{pmatrix} k & \\ & 0 \end{pmatrix} j^0 \right] = 0. \quad (69)$$

В равенстве (69) подразумевается суммирование по k , где $k = 1, 2, 3$; $\oint dS_k$ – интеграл по проекциям поверхностей, ограничивающих область определения волновых функций ψ, ψ^+ уравнения Дирака; g – определитель соответствующей метрики, для метрики Керра $(-g) = \rho_K^4 \sin^2 \theta$;

$\gamma_{,0}^0 \equiv \frac{\partial \gamma^0}{\partial x^0}$, $\begin{pmatrix} 0 & \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} k & \\ & 0 \end{pmatrix}$ – символы Кристоффеля,

j^μ – четырехмерный вектор, равный

$$j^\mu = \psi^+ \gamma^0 \gamma^\mu \psi. \quad (70)$$

Для стационарного поля Керра $\gamma_{,0}^0 = 0$; символы Кристоффеля $\begin{pmatrix} 0 & \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} k & \\ & 0 \end{pmatrix} = 0$ и условие (69)

становится равным

$$\oint dS_k (\sqrt{-g} j^k) = 0. \quad (71)$$

$$j^0(r, \theta) = \frac{2(r^2 + a^2)}{\rho_K^2 \Delta} R_{lm_\varphi}^{(+)}(r) R_{lm_\varphi}^{(-)}(r) \left(S_{lm_\varphi}^{(+)}(\theta) S_{lm_\varphi}^{(+)}(\theta) + S_{lm_\varphi}^{(-)}(\theta) S_{lm_\varphi}^{(-)}(\theta) \right) + \\ + 2 \frac{ia \sin \theta}{\rho_K^2 \sqrt{\Delta}} \left(R_{lm_\varphi}^{(-)}(r) R_{lm_\varphi}^{(-)}(r) - R_{lm_\varphi}^{(+)}(r) R_{lm_\varphi}^{(+)}(r) \right) S_{lm_\varphi}^{(+)}(\theta) S_{lm_\varphi}^{(-)}(\theta) = \\ = \frac{r^2 + a^2}{2\rho_K^2 \Delta} \left(g_{lm_\varphi}^2(r) + f_{lm_\varphi}^2(r) \right) \left(S_{lm_\varphi}^{(+)}(\theta) S_{lm_\varphi}^{(+)}(\theta) + S_{lm_\varphi}^{(-)}(\theta) S_{lm_\varphi}^{(-)}(\theta) \right) - \\ - \frac{2a \sin \theta}{\rho_K^2 \sqrt{\Delta}} g_{lm_\varphi}(r) f_{lm_\varphi}(r) S_{lm_\varphi}^{(+)}(\theta) S_{lm_\varphi}^{(-)}(\theta), \quad (74)$$

$$j^r(r, \theta) = 0 \quad (75)$$

$$j^\theta(r, \theta) = 0 \quad (76)$$

В стационарном случае волновую функцию в уравнении Дирака (11) с гамильтонианом Чандрасекара можно записать в виде

$$\Psi_{Ch}(\mathbf{r}, t) = \Psi_{Ch}(\mathbf{r}) e^{-iEt}, \quad (72)$$

где E – энергия дираковской частицы.

Далее Чандрасекар в работе [1] представил соотношение (72) в виде

$$\Psi_{Ch}(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{r - ia \cos \theta} R^{(-)}(r) S^{(-)}(\theta) \\ \frac{1}{\sqrt{\Delta}} R^{(+)}(r) S^{(+)}(\theta) \\ -\frac{1}{\sqrt{\Delta}} R^{(+)}(r) S^{(-)}(\theta) \\ -\frac{1}{r + ia \cos \theta} R^{(-)}(r) S^{(+)}(\theta) \end{pmatrix} e^{-iEt} e^{im_\varphi \varphi} \quad (73)$$

и получил отдельно два уравнения для угловых функций $S^{(-)}(\theta), S^{(+)}(\theta)$ и два уравнения для радиальных функций $R^{(-)}(r), R^{(+)}(r)$.

В (73) m_φ – магнитное квантовое число.

С помощью функции (73) для каждого значения E, m_φ, a и для квантовых чисел орбитального и полного момента частицы l, j можно определить компоненты тока j^μ , используя матрицы γ^μ (23)–(31). В результате получаем

$$\begin{aligned}
 j^\varphi(r, \theta) &= i \frac{2}{\rho_K^2 \sqrt{\Delta} \sin \theta} \left(R_{lm_\varphi}^{(-)}(r) R_{lm_\varphi}^{(-)}(r) - R_{lm_\varphi}^{(+)}(r) R_{lm_\varphi}^{(+)}(r) \right) S_{lm_\varphi}^{(+)}(\theta) S_{lm_\varphi}^{(-)}(\theta) + \\
 &+ \frac{2a}{\rho_K^2 \Delta} R_{lm_\varphi}^{(+)}(r) R_{lm_\varphi}^{(-)}(r) \left(S_{lm_\varphi}^{(+)}(\theta) S_{lm_\varphi}^{(+)}(\theta) + S_{lm_\varphi}^{(-)}(\theta) S_{lm_\varphi}^{(-)}(\theta) \right) = \\
 &= - \frac{2}{\rho_K^2 \sqrt{\Delta} \sin \theta} g_{lm_\varphi}(r) f_{lm_\varphi}(r) S_{lm_\varphi}^{(+)}(\theta) S_{lm_\varphi}^{(-)}(\theta) + \\
 &+ \frac{a}{2\rho_K^2 \Delta} \left(g_{lm_\varphi}^2(r) + f_{lm_\varphi}^2(r) \right) \left(S_{lm_\varphi}^{(+)}(\theta) S_{lm_\varphi}^{(+)}(\theta) + S_{lm_\varphi}^{(-)}(\theta) S_{lm_\varphi}^{(-)}(\theta) \right). \quad (77)
 \end{aligned}$$

При получении (74)–(77) использовалось равенство

$$R_{lm_\varphi}^{*+}(r) = R_{lm_\varphi}^{+}(r) \quad (78)$$

и условия вещественности для угловых функций

$$\begin{aligned}
 S_{lm_\varphi}^{(+)} S_{lm_\varphi}^{(-)} & \\
 S_{lm_\varphi}^{*+} &= S_{lm_\varphi}^{+}, \quad (79) \\
 S_{lm_\varphi}^{*-} &= S_{lm_\varphi}^{-}.
 \end{aligned}$$

В выражениях (74)–(77) $g(r), f(r)$ – вещественные функции

$$\begin{aligned}
 g(r) &= R^{(-)}(r) + R^{(+)}(r), \quad (80) \\
 f(r) &= -i \left(R^{(-)}(r) - R^{(+)}(r) \right).
 \end{aligned}$$

Учитывая, что радиальная (75) и полярная (76) компоненты тока $j^\mu(r, \theta)$ равны нулю, условие эрмитовости (71) становится равным

$$\oint dS_\varphi (\sqrt{-g} j^\varphi) = 0. \quad (81)$$

Отсюда следует, что для любой поверхности вращения вокруг оси $z(F(r, \theta) = 0)$, ограничивающей область определения волновых функций уравнения Дирака, условия эрмитовости дираковских гамильтонианов в поле Керра (81), а следовательно и (68), выполняются.

Это справедливо и для поверхностей внешней и внутренней эргосфер поля Керра.

Заключение

В работе доказана физическая эквивалентность дираковского гамильтониана Чандрасекара

(11) и самосопряженного гамильтониана (9) с плоским скалярным произведением волновых функций.

Получен явный вид операторов η, η^{-1} , преобразующих гамильтониан и волновые функции Чандрасекара в η -представление:

$$\begin{aligned}
 \psi_\eta(\mathbf{r}, t) &= \eta \psi_{Ch}(\mathbf{r}, t), \quad (82) \\
 H_\eta &= \eta H_{Ch} \eta^{-1}.
 \end{aligned}$$

Показано, что если область определения волновых функций уравнения Дирака в поле Керра ограничивается двумерной поверхностью вращения $F(r, \theta) = 0$, то гамильтониан Чандрасекара (11) и самосопряженный гамильтониан (9) являются эрмитовыми с выполнением равенства скалярных произведений

$$(\psi, H\varphi) = (H\psi, \varphi). \quad (83)$$

Аналогичным образом можно показать эквивалентность и эрмитовость гамильтониана Пейджа [3] и соответствующего самосопряженного гамильтониана в η -представлении в электрически заряженном поле Керра – Ньюмена [4].

Список литературы

1. Chandrasekhar S. // Proc. Roy. Soc (London). 1976. Vol. A349. P. 571.
2. Kerr R. P. // Phys. Rev. Lett. 1963. Vol. 11. P. 237.
3. Page D. // Phys. Rev. 1976. Vol. D14. P. 1509.
4. Newman E. T., Couch E., Chinnapared K., Exton A., Prakash A., Torrence R. // J. Math. Phys. 1965. Vol. 6. P. 918.
5. Boyer R. H., Lindquist R. W. // J. Math. Phys. 1967. Vol. 8. P. 265–281.
6. Bender C. M., Brody D., Jones H. F. // Phys. Rev. Lett. 2002. Vol. 89. P. 270401; Phys. Rev. 2004. Vol. D. 70. P. 025001.

7. Mostafazadeh A. // J. Math. Phys. (N.Y.) 2002. Vol. 43. P. 205; 2002. Vol. 43. P. 2814; 2002. Vol. 43. P. 3944; arxiv: 0810.5643v3.
8. Bagchi B., Fring A. // Phys. Lett. 2009. Vol. A373. P. 4307.
9. Parker L. // Phys. Rev. 1980. Vol. D22. P. 1922.
10. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. // Phys. Rev. 2010. Vol. D82. P. 104056; arxiv: 1007.4631v1 (gr-qc).
11. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. // Phys. Rev. 2011. Vol. D83. P. 105002; arxiv: 1102.4067v1 (gr-qc).
12. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. arxiv: 1107.0844 (gr-qc).
13. Newman E. T., Penrose R. // J. Math. Phys. 1962. Vol. 3. P. 566.
14. Kinnersley W. // J. Math. Phys. 1969. Vol. 10. P. 1195.
15. Ternov I. M., Gaina A. B., Chizhov G. A. // Sov. Phys. J. 1980. Vol. 23. P. 695–700.
16. Dolan S. R. Trinity Hall and Astrophysics Group, Cavendish Laboratory. Dissertation, 2006.

Статья поступила в редакцию 30.01.2014

О СКАЧКАХ ПЛОТНОСТИ В ЭКСПЕРИМЕНТАХ ПО ДИНАМИЧЕСКОМУ СЖАТИЮ ИЗОТОПОВ ВОДОРОДА

Р. Ф. Трунин¹, А. Б. Медведев^{1,2}

¹ СарФТИ НИЯУ МИФИ, 607186, г. Саров Нижегородской обл.

² ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Проведено сравнение известных экспериментальных данных по ударно-волновому и квазиизэнтропическому сжатию протия и дейтерия в широких диапазонах изменения давлений и плотностей. Показано, что найденные скачки плотности на ударной адиабате исходно жидкого дейтерия при давлении ≈ 30 ГПа и на изэнтропе сжатия дейтерия при ≈ 150 ГПа не подтверждаются другими исследованиями. Существующие данные не отрицают наличия особенности поведения водорода при изэнтропическом сжатии в районе ≈ 300 ГПа.

Ключевые слова: водород, дейтерий, протий, давление, плотность, ударное сжатие, квазиизэнтропическое сжатие.

Введение

Знание свойств изотопов водорода при высоких значениях давления P и плотности ρ требуется при решении различного рода научно-технических задач. Для получения данных широко применяются динамические методы ударного и квазиизэнтропического сжатия исходно конденсированных (жидких и твердых) и исходно газообразных (с относительно высокой начальной плотностью, достигаемой предварительным статическим поджатием) образцов. Подобные исследования проводятся приблизительно на протяжении полувека.

Впервые ударное сжатие исходно жидкого протия до ≈ 10 ГПа исследовалось в работе Ван Тила и Алдера [1] (1966 г.). К 1973–1983 гг. относятся исследования американских ученых ударного сжатия жидкого дейтерия до ≈ 23 ГПа [2, 3]. Данные [1–3] были получены на так называемых плоских измерительных устройствах, использующих в качестве энергетического источника взрывчатые вещества, продукты взрыва которых в конечном итоге создавали в образцах плоские стационарные ударные волны.

В дальнейшем, практически до конца прошлого столетия, сообщений по ударному сжатию изотопов водорода не было. Лишь в конце 1990-х гг. американские ученые опубликовали результаты опытов с жидким дейтерием до давлений ≈ 300 ГПа [4, 5]. Для создания сильных ударных волн ими использовался новый энергетический источник – лазерная установка Nova. При $P \geq 30$ ГПа авторы работ [4, 5] обнаружили на ударной адиабате резкое, практически скачкообразное, увеличение плотности дейтерия, составляющее $\approx 0,2$ г/см³. Данные были описаны полуэмпирическим уравнением состояния с учетом диссоциации молекулярного водорода на атомарный.

Другим направлением исследований водорода было изучение его квазиизэнтропического сжатия. В этом случае исходные образцы последовательно нагружаются рядом относительно слабых ударных волн убывающей амплитуды. В конечных состояниях создаются необходимые для исследований высокие (в том числе мегабарного диапазона) давления и существенно меньшие по сравнению с реализуемыми при однократном ударном сжатии температуры нагрева вещества (они по порядку величины такие же, как вдоль изэнтропы, исходя-

щей из начального состояния вещества; отсюда и термин – квазиизэнтропичность сжатия).

Начало этих работ относится к 1970-м гг., когда советскими учеными Ф. В. Григорьевым и С. Б. Кормером с сотрудниками было проведено изучение квазиизэнтропического сжатия протия в диапазоне давлений $\approx 40\div 1300$ ГПа [6–8] (точка при $P \approx 1300$ ГПа опубликована в работе [9]). Используемое ими устройство представляло собой иницируемый по всей поверхности сферический заряд взрывчатого вещества, продукты взрыва которого «разгоняли» к центру системы стальную сферическую оболочку, внутренняя полость которой была заполнена исследуемым плотным газом. В процессе «схождения» оболочки осуществлялось сжатие протия. Для выявления траектории движения оболочки использовалась рентгеновская установка, излучение которой фиксировалось на фотопленку. Результатом опытов является набор зависимостей внутреннего радиуса оболочки R от времени t . Каждая из $R(t)$ -зависимостей включает фазу торможения оболочки на газе, ее остановку и стадию «разлета». По радиусу остановки из условия сохранения массы газа находится его максимальная средняя плотность (при известной начальной плотности, отвечающей исходному повышенному давлению и близкой к комнатной температуре). Опыты проводились при нескольких начальных радиусах оболочки и начальных плотностях газа в полости. Ввиду невозможности экспериментального определения давления в системах [6–8], оно находилось расчетным путем по одномерным газодинамическим программам с использованием уравнений состояния всех веществ, входящих в состав используемой конструкции (в том числе уравнение газа, которое подбиралось так, чтобы воспроизвести измеренные $R(t)$ -зависимости и ряд других данных при сравнительно небольших давлениях). В конечном итоге была подробно исследована $P(\rho)$ кривая сжатия (P и ρ отвечают минимуму на $R(t)$ -зависимостях) протия, на которой при давлении ≈ 320 ГПа был зафиксирован скачок плотности. Он был интерпретирован как фазовый переход молекулярного водорода в атомарный и воспроизведен с помощью полуэмпирического уравнения состояния. Данные работ [6–8] при этом давлении имеют значительную погрешность, что не позволяет говорить уверенно о выявленной особенности.

Упомянутые выше скачки плотности при ударно-волновом и квазиизэнтропическом сжатии требовали дополнительного подтверждения. При

этом представлялось целесообразным не простое повторение опытов в прежней постановке, а, по возможности, использование в проблемных областях состояний других измерительных устройств.

Далее будут приведены результаты подобных исследований с их кратким анализом и нашими выводами. Возможно, по представленным данным читатели сделают свое заключение о наличии или отсутствии скачков плотности при сжатии водорода.

Ударное сжатие водорода

По предложению В. Е. Фортова, поддержанному Р. И. Ильяевым, было решено провести проверку результатов [4, 5], используя традиционные, развитые в РФЯЦ-ВНИИЭФ, способы создания сильных ударных волн с помощью измерительных устройств [10, 11]. Они основаны на использовании ускорения тонкостенных стальных полусферических оболочек продуктами взрыва мощных взрывчатых веществ. Схема такого устройства приведена на рис. 1. Система иницирования осуществляет одновременный подрыв заряда взрывчатого вещества по всей полусферической поверхности устройства. Продукты взрыва, расширяясь через небольшой воздушный промежуток, «мягко» (без существенных скачков в скоростях) разгоняют стальной ударник (оболочку), скорость которого на малых радиусах движения достигает необходимых для исследований величин. Удар такой оболочки по алюминиевому экрану, прикрывающему исследуемые образцы водорода, создает в водороде давления более 100 ГПа. Для регистрации скоростей ударных волн применялись электроконтактные датчики, ранее использованные практически во всех измерениях ударного сжатия веществ, проведенных с помощью устройств [10, 11]. Измерительные устройства прокалиброваны в серии предварительных экспериментов, в которых выявлена скорость полета ударника на всем пути его движения и скорость волны в алюминиевых экранах на разных радиусах их расположения. Кроме того, в каждом из вновь проведенных с водородом опытов скорость волны в экранах контролировалась дополнительно.

Для получения изотопов водорода в конденсированном состоянии разработана [12, 13] криогенная система, в которой с помощью жидкого гелия (охладитель) производится плавное снижение температуры для перевода исследуемого газа

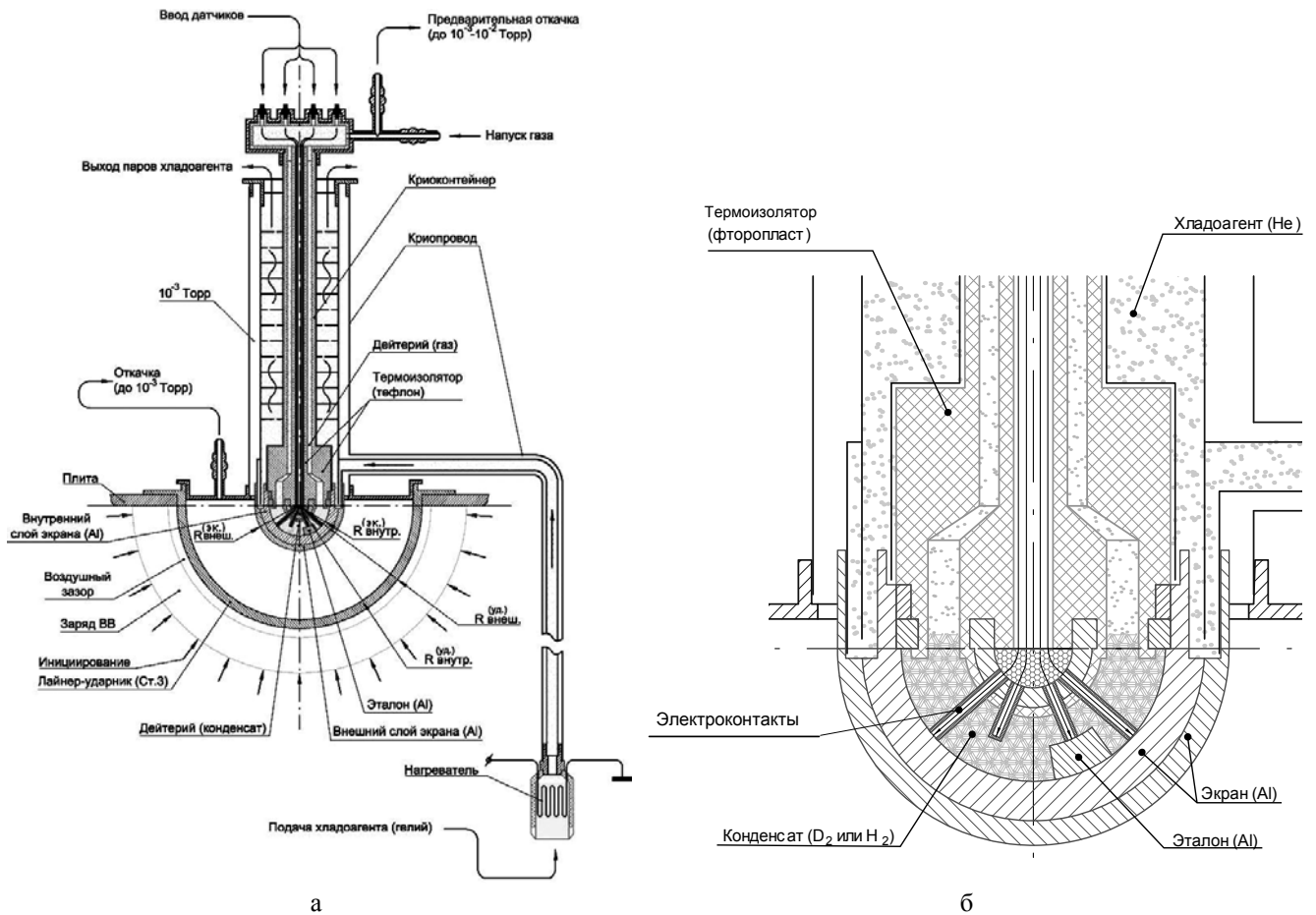


Рис. 1. Эскиз экспериментального устройства: а – общий вид; б – центральная часть

в жидкую (или твердую) фазу. После достижения необходимой температуры система поддерживает ее постоянной в течение времени, необходимого для проведения опыта. Исходные плотности ρ_0 исследуемых образцов составляли: $0,088 \text{ г/см}^3$ для твердого протия, $0,199 \text{ г/см}^3$ для твердого дейтерия и $0,171 \text{ г/см}^3$ для жидкого дейтерия.

Нахождение параметров сжатия протия и дейтерия проводилось методом отражения [14], основанным на определении скоростей прохождения ударной волны в исследуемом веществе и прикрывающем его экране. Уравнение состояния материала экрана (его ударная адиабата и изэнтропы расширения) при этом считается известным.

Для большей убедительности и надежности результатов исследовались два изотопа водорода – дейтерий и протий, причем для дейтерия проведены измерения ударного сжатия двух исходных фаз – жидкой и твердой. Протий исследовался только в исходно твердом состоянии.

В итоге были получены ударные адиабаты исходно жидкого и твердого дейтерия до давлений 120 ГПа и исходно твердого протия до 66 ГПа [15, 16]. Параметры каждой экспериментальной

точки являются средней величиной трех-четырёх независимых опытов.

Одновременно и независимо проверка результатов определения ударного сжатия жидкого дейтерия проводилась в лаборатории Сандия [17, 18]. При этом использовалась новая система разгона до необходимых скоростей плоского ударника сильным магнитным полем. Максимальные давления в дейтерии составили ≈ 100 ГПа.

В 2009 г. стали также известны результаты исследований ударного сжатия исходно жидкого дейтерия американских ученых, проведенные с использованием более мощной, по сравнению с Nova, лазерной установки Omega [19].

Результаты всех измерений ударного сжатия дейтерия приведены на рис. 2. Из рисунка видно:

1) удовлетворительное совпадение данных [15, 17–19] по ударной сжимаемости исходно жидкого дейтерия;

2) взаимное расположение ударных адиабат жидкого и твердого дейтерия [15] соответствует их исходным плотностям – адиабата твердого дейтерия во всем диапазоне давлений отвечает большим плотностям по сравнению с адиабатой жидкого;

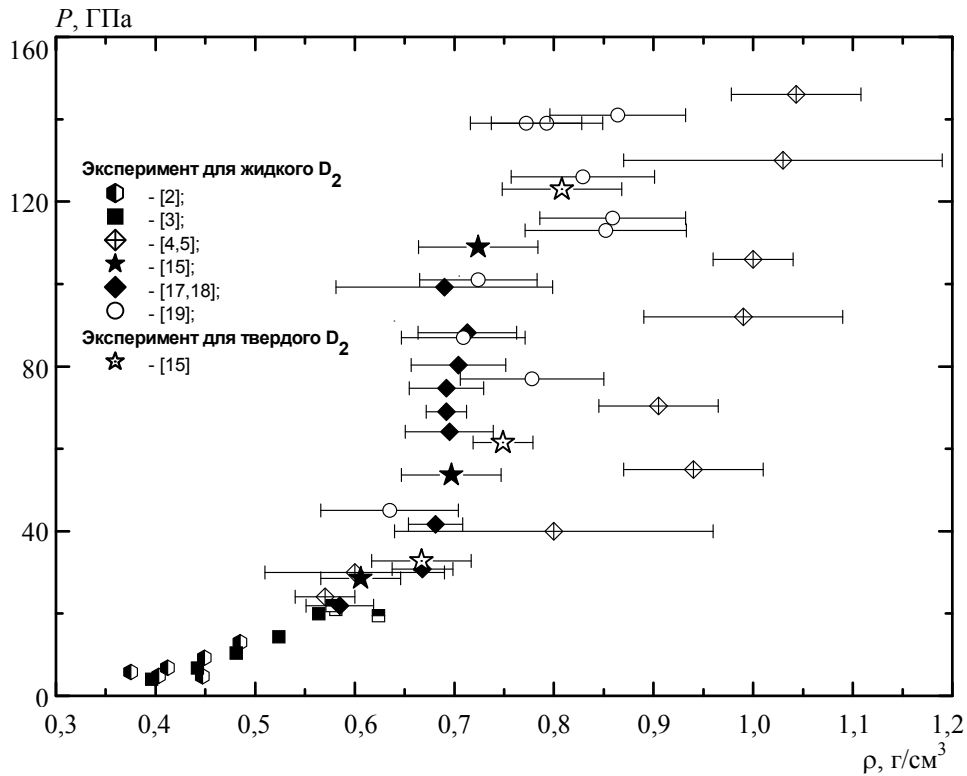


Рис. 2. Ударное сжатие дейтерия

3) погрешности экспериментальных точек [15, 17, 18] не имеют общего перекрытия с данными Nova;

4) скачок плотности, полученный на Nova, не подтверждается совокупными данными [15, 17–19];

5) экспериментальные данные [15, 17–19] указывают на то, что при давлении, большем $\approx 35\text{--}40$ ГПа, происходит достаточно отчетливое уменьшение сжимаемости дейтерия (примерно такой же характер имеет и адиабата протия [15]).

Резкое уменьшение сжимаемости можно объяснить завершением диссоциации и переходом дейтерия в атомарное состояние.

Квазиизэнтропическое сжатие водорода

М. А. Мочаловым с использованием улучшенной рентгеновской техники были проведены новые опыты по исследованию квазиизэнтропического сжатия исходно плотного газообразного дейтерия [20, 21], одной из целей которых было уточнение данных Григорьева–Кормера, полученных на установке сферического типа (рис. 3). Опыты проводились на новой установке цилиндрической конструкции (рис. 4). Так же как и в сферических, в этих опытах рентгенографически фиксируется временная $R(t)$ -зависимость движения стальной оболочки вплоть до ее остановки и по-

следующего разлета. Начальная температура газа близка к комнатной. Значение давления, соответствующее максимальному сжатию, берется из одномерного расчета газодинамического процесса. В работах [20, 21] сделан вывод о совпадении полученных данных в пределах точности измерений с данными Григорьева–Кормера [6–8] при $P \approx 100\text{--}300$ ГПа.

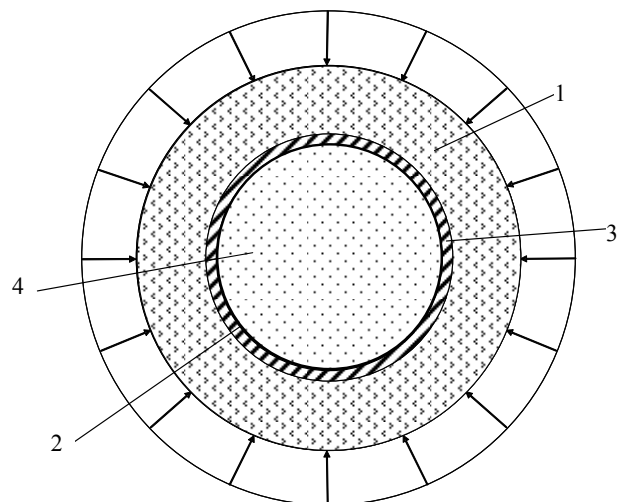


Рис. 3. Схема опытов по исследованию квазиизэнтропического сжатия водорода с использованием сферического устройства: 1 – взрывчатое вещество; 2 – контрастирующая фольга; 3 – стальная оболочка; 4 – исследуемый газ

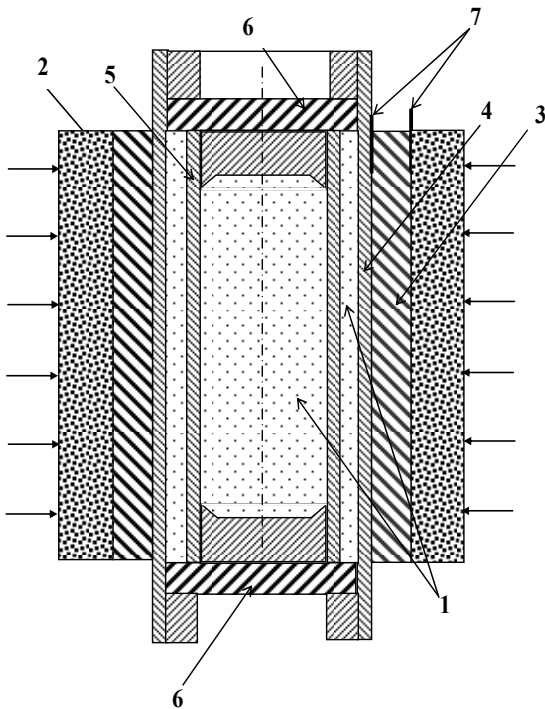


Рис. 4. Схема опытов по исследованию квазиизэнтропического сжатия водорода с использованием цилиндрического устройства: 1 – газ; 2 – взрывчатое вещество; 3 – прокладка из оргстекла; 4, 5 – стальные оболочки; 6 – заглушки

Несколько позже результаты работ [20, 21] были скорректированы, дополнены и в обновленном виде опубликованы в работе [22]. Данные [22] существенно отличаются от данных [6–8] и [20, 21] (отличие от последних в [22] не комментируется), показывая при $P \approx 150$ ГПа наличие скачка плотности на $\approx 20\%$.

Г. В. Борисковым, А. И. Быковым и др. были выполнены эксперименты с образцами как протия, так и дейтерия, находящимся в исходно твердом начальном состоянии [13, 23, 24]. Использовалась двухкаскадная цилиндрическая система нагружения образцов, в которой продукты взрыва кольцевого заряда ВВ разгоняют первый каскад, представляющий собой соленоид, на который разряжается мощная конденсаторная батарея, создавая сильный магнитный поток (система МК-1 [25]). Под действием продуктов взрыва первый каскад ускоряется к центру системы, сжимая магнитное поле, которое в конечном итоге воздействует на медную капсулу, содержащую, помимо исследуемого изотопа водорода, образец эталонного материала (алюминий). Под действием давления магнитного поля стенки медной капсулы плавно, без ударно-волновых нагрузок в исследуемых образ-

цах, характерных для цилиндрической системы [20–22], сжимаются вместе с находящимся в капсуле алюминиевым эталоном и исследуемым изотопом водорода. В заданное время производится рентгенографирование процесса. Отметим, что в этих опытах давление в исследуемых образцах находилось не расчетным способом (как во всех других вышеупомянутых квазиизэнтропических исследованиях), а по экспериментально измеренному значению p в эталонном алюминии (для него зависимость $P(p)$ известна). В опытах [13, 23, 24] реализуются сравнительно небольшие температуры сжатого водорода, по оценкам при максимальных давлениях (≈ 550 ГПа) – несколько сот градусов (в опытах по сжатию исходно газообразных образцов – несколько тысяч градусов).

Для проверки результатов [22] М. В. Жерноклетовым и др. были проведены опыты с плотным газообразным дейтерием (начальная температура близка к комнатной), два из которых целенаправленно были ориентированы на давление ≈ 150 ГПа [26]. В экспериментах использовалась установка [20–22] (с некоторой модификацией). При этом для регистрации рентгеновского изображения оболочек применялась система диагностики, включающая ADC-комплекс для цифровой рентгенографии (CR) [27, 28], имеющая преимущества по сравнению с фиксацией изображения на фотопленку (часть результатов [22] получена с применением фотопленки, часть – с применением CR). Также во избежание субъективизма, присущего визуальному способу обработки рентгенограмм, в [26] при их анализе использовался денситметрический функциональный метод [29] (в [22] применялась комбинация этих методов). В [26], как и в работах [20–22], при одномерном расчете газодинамического процесса применялось уравнение состояния водорода Копышева–Хрусталева [30], калиброванное на результаты [6–8].

Все обсуждавшиеся выше данные по квазиизэнтропическому сжатию водорода приведены на рис. 5. Для лучшей наглядности диапазон давлений ограничен 600 ГПа. Данные по плотности отвечают дейтерию. Плотность водорода увеличена вдвое.

Из рисунка можно сделать следующие выводы:

1) данные [6–8, 13, 20, 21, 23, 24, 26] в пределах погрешности определения плотности согласуются друг с другом;

2) зарегистрированная плотность в [13, 23, 24] на несколько процентов больше чем в других измерениях п. 1, что можно объяснить влиянием температуры (начальной и, как следствие, конечной);

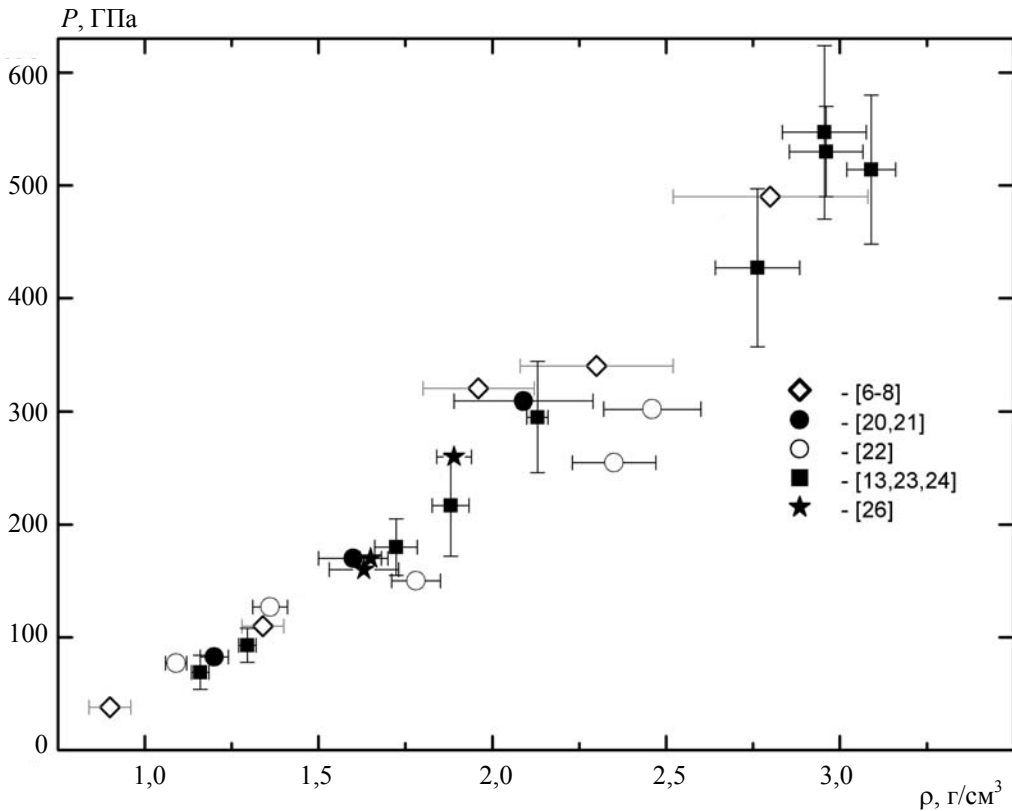


Рис. 5. Квазиизэнтропическое сжатие водорода

3) результаты всех исследований п. 1 не показывают скачка плотности на кривой сжатия дейтерия при давлении ≈ 150 ГПа, имеющего место согласно [22];

4) результаты [26] подтверждают относительно крутой ход кривой сжатия, выявленный в [6–8] в диапазоне давлений до ≈ 320 ГПа. Тем самым они не противоречат наличию скачка плотности при этом давлении. Кривая сжатия, согласно работам [13, 23, 24], в районе ≈ 300 ГПа имеет особенность – до этого давления она относительно крутая, после чего имеет тенденцию к некоторому смягчению. То есть эти данные четко не подтверждают скачка плотности, но и не отрицают его.

Таким образом, на основе данных [6–8, 13, 23, 24, 26] можно говорить об изменении характера сжимаемости водорода в районе ≈ 300 ГПа.

В чем причина различий результатов [22] и [13, 23, 24], [26] при $P \approx 150$ ГПа (и более высоких давлениях)? На наш взгляд, она состоит в переоценке в [22] реальной точности определения размеров полостей (и, как следствие, плотности) по полученным в этих опытах изображениям. Они позволяют выявить положение границы газ–металл менее отчетливо, чем рентгенограмки, приводимые в работах [13, 23, 24, 26]. По оценкам [16],

погрешность регистрации плотности в опытах [22] при 150 ГПа составляет $\approx 15 \div 20$ %. Вряд ли при этом имеет смысл говорить о скачке плотности. Отсутствие уверенности в его наличии выражено в более поздней статье М. А. Мочалова и др. [31] следующим комментарием по теме скачка (с. 703): «Это сложная техническая и научная проблема, критерием истинности которой должен быть новый эксперимент на базе новой техники с иным разрешением, чем с ранее использованной аппаратурой».

Заключение

Результаты опытов по ударному сжатию изотопов водорода свидетельствуют об относительно плавном характере его сжимаемости с ужесточением ударной адиабаты после $\approx 35 \div 40$ ГПа. Данные по квазиизэнтропическому сжатию протия и дейтерия не отрицают возможности наличия особенности в поведении их сжимаемости в районе ≈ 320 ГПа. Для более четких выводов (скачок плотности на изэнтропической зависимости или ее относительно плавное террасовидное поведение) желательны более подробные исследования в диапазоне ≈ 300 – 400 ГПа.

Список литературы

1. Van Thiel M., Alder B. J. // *Mol. Phys.* 1966. Vol. 10. P. 427.
2. Dick R. D., Kerley G.I. // *J. Chem. Phys.* 1980. Vol. 73. P. 5264.
3. Nellis W. J. et al. // *J. Chem. Phys.* 1983. Vol. 79. P. 1480.
4. Da Silva I. B. et al. // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 78. P. 483.
5. Collins G. W. et al. // *Science.* 1998. Vol. 281. P. 1178.
6. Григорьев Ф. В. и др. // *Письма ЖЭТФ.* 1972. Т. 16, № 5. С. 286.
7. Григорьев Ф. В. и др. // *ЖЭТФ.* 1975. Т. 69, № 2. С. 743.
8. Григорьев Ф. В. и др. // *ЖЭТФ.* 1978. Т. 75, № 5. С. 1683.
9. Копышев В. П., Урлин В. Д. *Ударные волны и экстремальные состояния веществ / Под ред. Фортова В. Е. и др. М.: Наука, 2000. С. 207.*
10. Альтшулер Л. В. и др. // *УФН.* 1996. Т. 166. С. 575.
11. Трунин Р. Ф. // *УФН.* 2001. Т. 171, № 4. С. 387.
12. Boriskov G. V. et. al. Megagauss magnetic fields and high tnergia liner technology. Proc. of the 2006 Int. Conf. on Megagauss magnetic fields generation and relat-cataway NJ USA // *IEEE.* 2007. P. 465.
13. Борисков Г. В. и др. // *65 лет ВНИИЭФ. Физика и техника высоких плотностей энергии. Вып. 1, Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2011.*
14. Альтшулер Л. В. и др. // *ЖЭТФ.* 1958. Т. 34. Вып. 4. С. 886.
15. Трунин Р. Ф. и др. // *ЖТФ.* 2006. Т. 76. Вып. 7. С. 90.
16. Трунин Р. Ф. и др. // *УФН.* 2010. Т. 180, № 6. С. 605.
17. Knudson V. D. et al. // *Phys. Rev. Lett.* 2001. Vol. 87. P. 225501.
18. Knudson V. D. et al. // *Phys. Rev.* 2004. Vol. B69. P. 144209.
19. Hicks D. G. et al. // *Phys. Rev.* 2009. Vol. B79. P. 0141112.
20. Ильяев Р. И. и др. // *5-е Харитоновские чтения / Под ред. Михайлова А. Л. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2005.*
21. Ilkaev R. I. et al. // *AIP Conf. Proc.* 2004. Vol. 706. P. 73.
22. Fortov V. E. et al. // *Phys. Rev. Lett.* 2007. Vol. 99. P. 185001.
23. Boriskov G. V. et al. // *J. Phys. Conf. Ser.* 2008. Vol. 121. P. 072001(9).
24. Boriskov G. V. et al. // *Contrib. Plasma Phys.* 2011. Vol. 51, N1. P. 339; Boriskov G. V. et al. *Ibid.* P. 333.
25. Павловский А. И. и др. // *Сверхсильные магнитные поля. Физика. Техника. Применение. Тр. Третьей Международной конференции по генерации мегагауссных магнитных полей и родственными экспериментам / Под ред. Титова В. М., Швецова Г. А. М: Наука. 1984. С. 19.*
26. Жерноклетов М. В. и др. // *65 лет ВНИИЭФ. Физика и техника высоких плотностей энергии. Вып. 2. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2011. С. 178.*
27. Аринин В. А. и др. // *11-е Харитоновские чтения. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2009. С. 791.*
28. Arinin V. A., Tkachenco V. I. *Pattern recognition and image analysis.* 2009. Vol. 19, N1. P. 63–68.
29. Аринин В. А. // *10-е Забабахинские чтения, Снежинск, 2010.*
30. Копышев В. П., Хрусталеv В. В. // *ПМТФ.* 1980, № 1. С. 122.
31. Мочалов М. А. и др. // *ЖЭТФ,* 2012. Т. 142. Вып. 4(10). С. 696.

Статья поступила в редакцию 30.01.14

НЕИСПАРЯЮЩИЕСЯ ЧЕРНЫЕ ДЫРЫ, ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЧАСТИЦЫ, «ТЕМНАЯ» МАТЕРИЯ...

В. П. Незнамов*

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Предложена «игрушечная» модель элементарных частиц «светлой» и «темной» материи. В основу модели положено предположение о существовании реликтовых неиспаряющихся черных дыр с метриками Шварцшильда, Райсснера–Нордстрема, Керра и Керра–Ньюмена. Определена максимально возможная масса элементарных частиц Стандартной модели. Максимальные массы для фермионов и бозонов близки к планковской массе $M_{Pl} = 2,2 \cdot 10^{-5} \text{ г} = 10^{19} \text{ ГэВ}$. Бозон ЛНС с массой $\sim 125 \text{ ГэВ}$ в рассматриваемой модели может быть бозоном Хиггса, если он является составной частицей, состоящей из фермионной материи. В рамках предложенной модели обсуждаются возможные причины барионной асимметрии Вселенной и возможные причины мощных гамма-всплесков во Вселенной.

Ключевые слова: черные дыры, «светлая» и «темная» материя, Стандартная модель, элементарные частицы, бозон Хиггса, планковская масса.

Введение

В работах [1–4] установлена возможность существования стационарных связанных состояний дираковских частиц в гравитационных полях Шварцшильда [5–7], Райсснера–Нордстрема [8, 9], Керра [10], Керра–Ньюмена [11].

Выполнение условия причинности Гильберта $g_{00} > 0$ приводит для этих метрик к отсутствию испарения по Хокингу [12]. «Горизонты событий» полей Шварцшильда и Райсснера–Нордстрема, поверхности внешних и внутренних эргосфер полей Керра и Керра–Ньюмена при квантово-механическом рассмотрении являются бесконечно большими потенциальными барьерами.

В данной работе неиспаряющиеся черные дыры предлагаются для отождествления с элементарными частицами Стандартной модели и носителями «темной» материи. Исключением является бозон Хиггса, для существования которого в рамках предлагаемого подхода необходимо, чтобы он был составной частицей, состоящей из фермионов.

В работе определена максимально возможная масса элементарных частиц Стандартной модели.

В рамках предложенной модели качественно обсуждаются возможные причины барионной асимметрии Вселенной и возможные причины мощных гамма-всплесков, фиксируемых в современной Вселенной.

1. Области определения волновых функций дираковских частиц в полях Шварцшильда, Райсснера – Нордстрема, Керра и Керра – Ньюмена

Первоначально введем обозначения: «горизонт событий», гравитационный радиус поля Шварцшильда

$$r_0 = \frac{2GM}{c^2}; \quad (1)$$

«зарядовый радиус» полей Райсснера–Нордстрема и Керра–Ньюмена

$$r_Q = \frac{\sqrt{GQ}}{c^2}; \quad (2)$$

параметр вращения полей Керра и Керра–Ньюмена

* E-mail: neznamov@vniief.ru

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{J}}{Mc}. \quad (3)$$

В выражениях (1)–(3) M , Q , \mathbf{J} – соответственно масса, заряд и угловой момент вращения точечного источника гравитационного и электрического полей; G – гравитационная постоянная; c – скорость света.

На рис. 1, *a* приведена область определения волновых функций дираковской частицы для поля Шварцшильда [2]. Цветом обозначена область $r \leq r_0$, где из-за условия Гильберта $g_{00} > 0$ волновые функции равны нулю.

На рис. 1, *a* и последующих рисунках области определения волновых функций приведены в координатах (r', θ) , где $r' = \frac{2r}{r_0}$, $a' = \frac{2a}{r_0}$, $r'_Q = \frac{2r_Q}{r_0}$.

На рис. 1, *b, c, d* аналогично приведены области определения волновых функций для поля Райсснера–Нордстрема [3] при некоторых значениях r_0 и r_Q . На рис. 1, *b* цветом обозначена область между внешним (r_+) и внутренним (r_-) радиуса-

ми «горизонтов событий», где волновые функции равны нулю ($g_{00} < 0$).

В данном случае радиусы (r_{\pm}) равны

$$r_{\pm} = \frac{r_0}{2} \pm \sqrt{\frac{r_0^2}{4} - r_Q^2}; \quad r_0^2 > 4r_Q^2. \quad (4)$$

Рис. 1, *c* соответствует случаю экстремального поля Райсснера–Нордстрема, когда

$$r_0 = 2r_Q, \quad r_{\pm} = \frac{r_0}{2}. \quad (5)$$

В этом случае разрешенной областью определения является все пространство $r \in [0, \infty)$ за исключением окрестности около радиуса единственного «горизонта событий» $r_{\pm} = \frac{r_0}{2}$.

Рис. 1, *d* соответствует случаю «голой» сингулярности, когда $r_0 < 2r_Q$. В этом случае областью определения волновых функций является вся область $r \in [0, \infty)$.

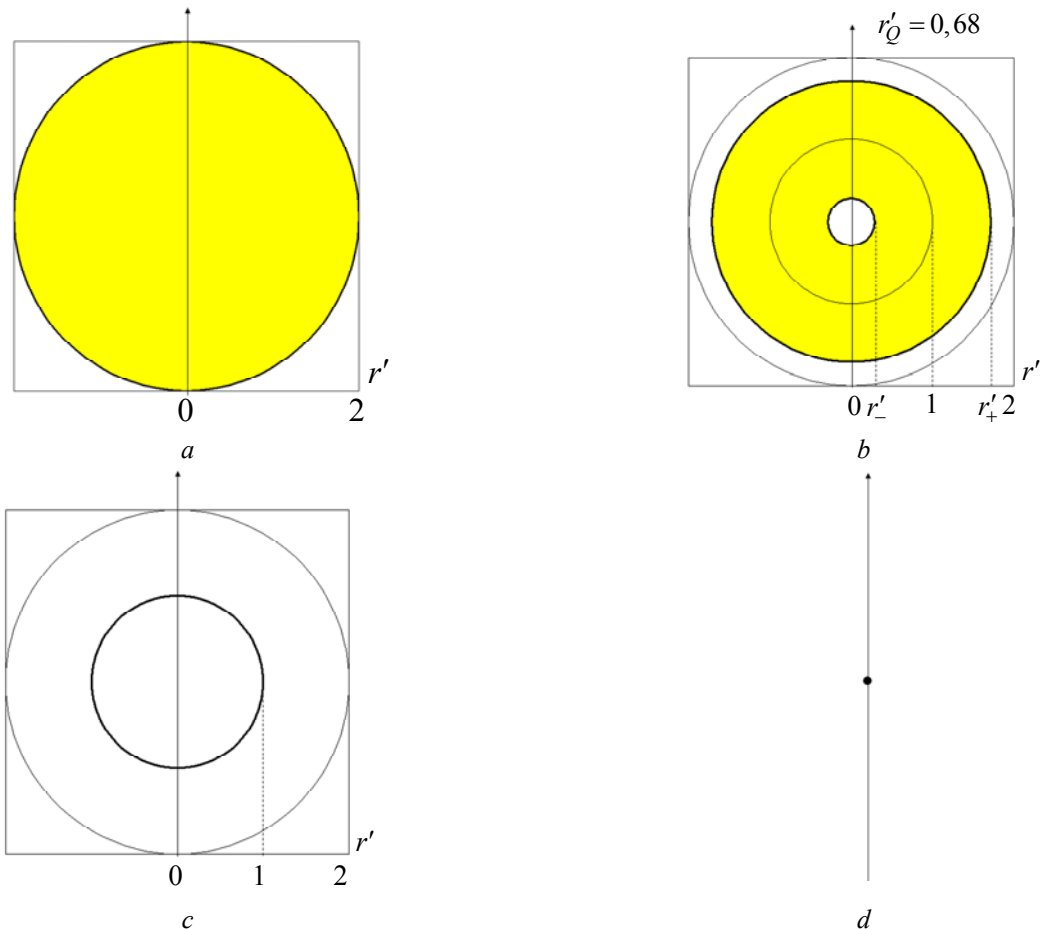


Рис. 1. Области определения волновых функций дираковской частицы: *a* – для поля Шварцшильда; *b, c, d* – для поля Райсснера–Нордстрема

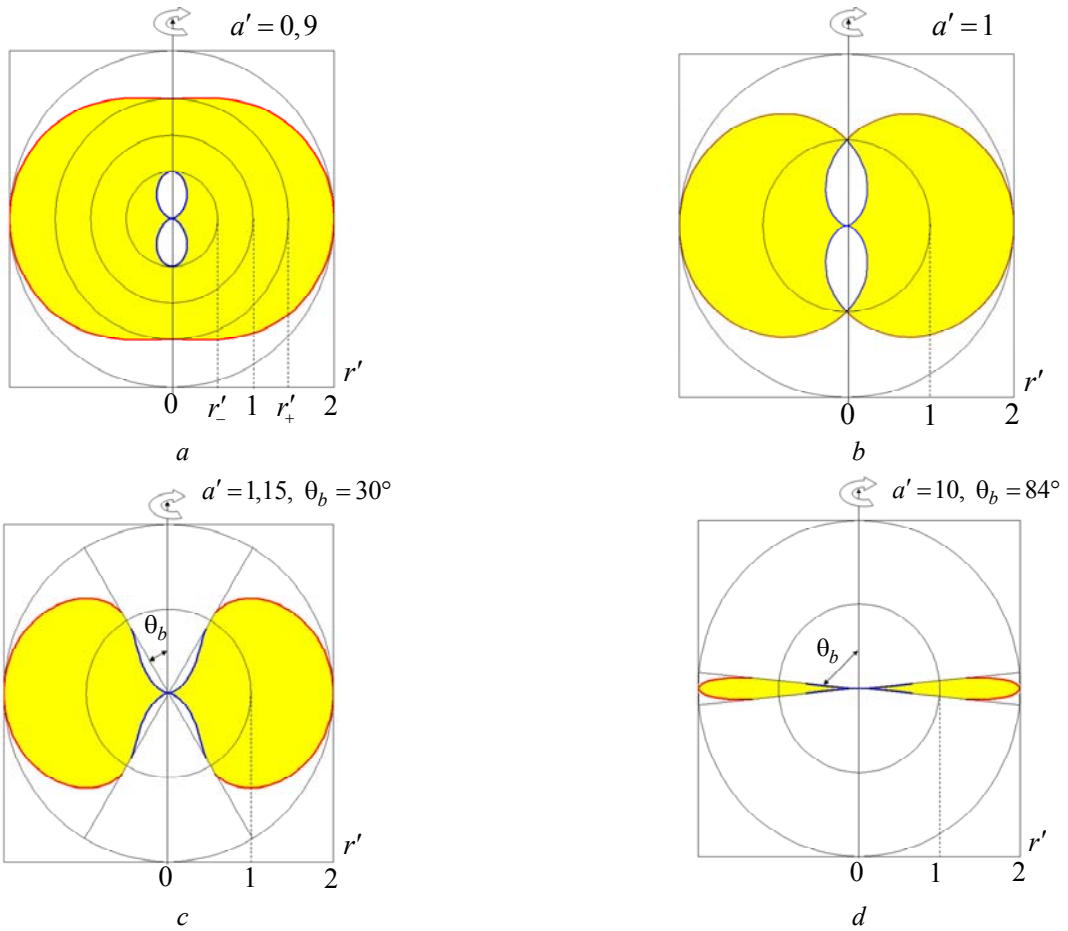


Рис. 2. Области определения волновых функций дираковской частицы для поля Керра

На рис. 2,*a,b,c,d* приведены области определения волновых функций дираковской частицы для поля Керра [4] при некоторых значениях r_0 и a . Цветом обозначены области между поверхностями внешних и внутренних эргосфер, где волновые функции пробной дираковской частицы равны нулю ($g_{00} < 0$).

Рис. 2,*a* соответствует случаю, когда существуют внешний и внутренний «горизонты событий» с параметрами

$$r_{\pm} = \frac{r_0}{2} \pm \sqrt{\frac{r_0^2}{4} - a^2}; \quad r_0^2 > 4a^2. \quad (6)$$

Рис. 2,*b* соответствует случаю экстремального поля Керра

$$r_0 = 2a, \quad r_{\pm} = \frac{r_0}{2}. \quad (7)$$

Рис. 2,*c,d* соответствуют случаю «голой» сингулярности ($r_0 < 2a$) с разными величинами параметра вращения a . Для этого случая при $\theta \leq \theta_b$ ограничения на области определения волновых функций отсутствуют. При $\theta \geq \theta_b$ в пределе бес-

конечно большого значения a ограничение области определения волновых функций пробной дираковской частицы сводится к телу вращения вдоль оси z бесконечно узкой по углу θ плоской фигуры рис. 2,*d* вблизи экваториальной плоскости с $0 \leq r \leq r_0$.

На рис. 3,*a–e* аналогично приведены области определения волновых функций частиц со спином $1/2$ для поля Керра–Ньюмена [4] при некоторых значениях r_0 , a , r_Q .

Рис. 3,*a* соответствует случаю, когда существуют внешний и внутренний «горизонты событий»

$$r_{K-N}^{\pm} = \frac{r_0}{2} \pm \sqrt{\frac{r_0^2}{4} - r_Q^2 - a^2}; \quad r_0^2 > 4(r_Q^2 + a^2). \quad (8)$$

Рис. 3,*b* соответствует экстремальному полю Керра–Ньюмена

$$r_0 = 2\sqrt{r_Q^2 + a^2}, \quad r_{K-N}^{\pm} = \frac{r_0}{2}. \quad (9)$$

Рис. 3,*c,d* соответствуют случаю «голой» сингулярности, когда

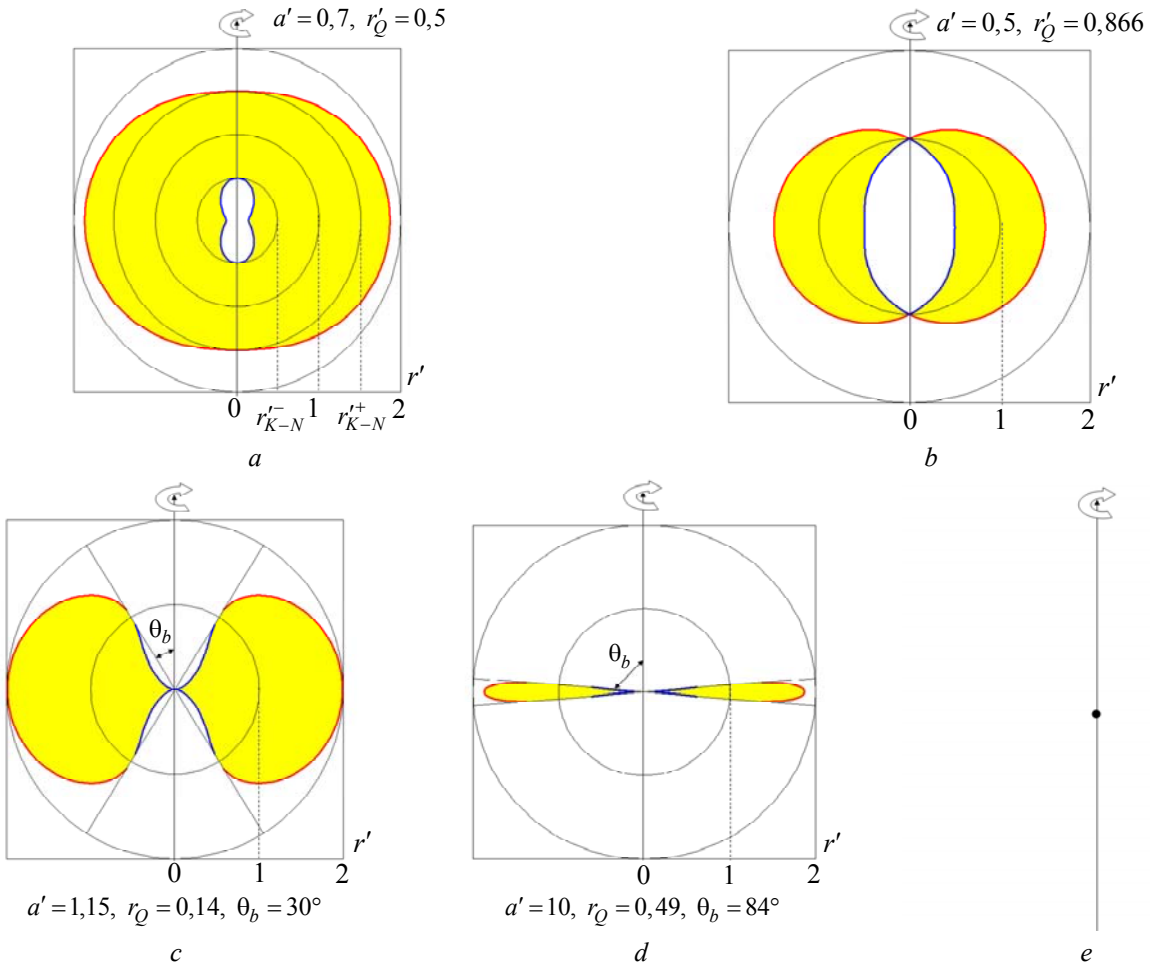


Рис. 3. Области определения волновых функций дираковской частицы со спином 1/2 для поля Керра–Ньюмена

$$\sqrt{r_Q^2 + a^2} > \frac{r_0}{2} > r_Q. \quad (10)$$

Для этого случая при $\theta \leq \theta_b$ ограничения на области определения волновых функций отсутствуют. При $\theta \geq \theta_b$ в пределе бесконечно большого значения параметра вращения a ограничение области определения волновых функций дираковской частицы, как и для поля Керра, сводится к телу вращения вдоль оси z бесконечно узкой по углу θ плоской фигуры рис. 3,*d* вблизи экваториальной плоскости с $0 \leq r \leq \frac{r_0}{2} + \sqrt{\frac{r_0^2}{4} - r_Q^2}$.

Случай $r_Q \geq \frac{r_0}{2}$ соответствует случаю «голой» сингулярности без ограничений области определения волновых функций (см. рис. 3,*e*).

2. Элементарные частицы Стандартной модели

Все фермионы Стандартной модели (лептоны и кварки) имеют полуцелый спин

$$S_F = \frac{\hbar}{2}.$$

Все бозоны Стандартной модели (переносчики взаимодействий : 8 глюонов, фотон; W^\pm , Z^0 – бозоны) имеют целый спин, равный $S_B = \hbar$.

Исключение составляет бозон Хиггса с нулевым спином.

Отождествим массивные частицы Стандартной модели с неиспаряющимися черными дырами.

Заряженным частицам сопоставим черные дыры с «голой» сингулярностью метрики Керра–Ньюмена (см. рис. 3,*e*); незаряженным частицам сопоставим черные дыры с метрикой Керра (см. рис. 2,*d*).

В качестве примера рассмотрим электрон с массой m_e , зарядом $-e$, спином $S_e = \frac{\hbar}{2}$. Определим для электрона параметры (1)–(3) с $M = m_e$,

$$Q = -e, \quad J = S_e = \frac{\hbar}{2}.$$

Получаем

$$r_0 = 1,4 \cdot 10^{-55} \text{ см}; \quad r_Q = 1,4 \cdot 10^{-34} \text{ см};$$

$$a = 1,9 \cdot 10^{-11} \text{ см}.$$

Видно, что параметр вращения электрона a много больше величин r_0 и r_Q . Неравенства

$$r_0 \ll 2\sqrt{r_Q^2 + a^2} \approx 2a; \quad r_0 \ll 2r_Q \quad (11)$$

выполняются с большим запасом, что соответствует случаю «голой» сингулярности для поля Керра–Ньюмена (см. рис. 3,е).

Неравенства (11) выполняются для всех частиц Стандартной модели за исключением незаряженного бозона Хиггса с нулевым спином.

Ранее в многочисленных работах Картера, Буринского и др. метрика Керра–Ньюмена уже рассматривалась в качестве модели элементарной частицы с ненулевым спином.

Ссылки на эти работы можно найти, например, в [13].

В данной работе эта модель рассматривается в контексте существования неиспаряющихся черных дыр.

Безмассовые калибровочные бозоны: фотон, глюоны – остаются точноподобными объектами Стандартной модели без изменений.

3. Максимально возможная масса элементарных частиц Стандартной модели

Спектр масс частиц Стандартной модели чрезвычайно широк. Он простирается от нулевых масс фотона и глюонов до массы t кварка $m_t \approx 170$ ГэВ. В литературе периодически обсуждался вопрос, существует ли максимально возможная масса элементарных частиц?

В рамках концепции данной работы легко получить положительный количественный ответ. Действительно, при увеличении массы частицы мы можем достичь предельного значения M_{\max} , при котором в черных дырах полей Керра и Керра–Ньюмена появляются «горизонты событий». От черных дыр с голой сингулярностью (см. рис. 3,е) мы переходим к черным дырам с ограниченными областями определения волновых функций пробных частиц (см. рис. 2,а,б, рис. 3,а,б).

Максимально возможная масса таких частиц, которую можно считать максимальной массой частиц Стандартной модели, определяется из уравнения

$$r_0 = 2\sqrt{r_Q^2 + a^2}. \quad (12)$$

С учетом выражений (1)–(3) для фермионов со спином 1/2 получаем

$$(M_F)_{\max}^4 - \frac{e^2}{G}(M_F)_{\max}^4 - \frac{\hbar^2 c^2}{4G^2} = 0; \quad (13)$$

$$(M_F)_{\max} \approx \frac{1}{\sqrt{2}} M_{Pl} = \sqrt{\frac{\hbar c}{2G}} = 1,6 \cdot 10^{-5} \text{ г}. \quad (14)$$

Для бозонов со спином 1

$$(M_B)_{\max} \approx M_{Pl} = 2,2 \cdot 10^{-5} \text{ г}. \quad (15)$$

Равенства (14), (15) показывают, что максимальные массы для фермионов и бозонов близки к планковской массе $M_{Pl} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}$. Гравитационные

радиусы таких объектов равны $r_0 \approx 10^{-33}$ см.

Для частиц с «горизонтами событий» и с ограниченными областями определения волновых функций внешних пробных частиц отсутствуют возможности распадов и взаимопревращений. Они могут взаимодействовать друг с другом лишь гравитационным образом*. При этом взаимодействующие фермионы взаимно не пересекают внешних поверхностей эргосфер полей Керра или Керра–Ньюмена.

Идеи о существовании максимальной массы элементарных частиц неоднократно высказывались ранее. Например, М. А. Марков в 1965 г. [14] высказал гипотезу о существовании верхнего предела для спектра масс элементарных частиц. Этот предел по Маркову равен планковской массе, гипотетическая частица с максимальной массой была названа «максимоном».

В ряде работ (см., например, [15]) В. Г. Кадышевский с сотрудниками развил идеи М. А. Маркова о существовании максимальной массы M_{\max} . В этих работах существование M_{\max} понимается как новый фундаментальный принцип Природы, который подобен релятивистским и квантовым постулатам, лежащим в основах квантовой теории поля.

В данной работе максимальная масса естественным образом появляется как результат возникновения «горизонтов событий» у неиспаряющихся черных дыр с метриками Керра и Керра–Ньюмена.

Черные дыры с метриками Шварцшильда, Райсснер–Нордстрема, Керра и Керра–Ньюмена могут существовать и с массами большими $(M)_{\max}$.

* Автор надеется, что это утверждение будет подтверждено в будущей квантовой теории гравитации.

4. Бозон Хиггса

Бозон Хиггса в электрослабой модели является электрически не заряженной скалярной частицей с нулевым спином.

В нашей концепции таким частицам соответствуют черные дыры поля Шварцшильда с «горизонтом событий» r_0 (см. рис. 1,а).

Отсюда сразу следует, что такие объекты не могут распадаться на другие частицы Стандартной модели.

Бозон с массой ~ 125 ГэВ, обнаруженный на ЛНС в 2011–2012 гг., в предлагаемой концепции должен быть частицей, состоящей из фермионов с массами $M_F \ll (M_F)_{\max}$.

Такие составные частицы в рассматриваемой модели могут распадаться и соответствовать бозону Хиггса в электрослабой теории. Возможность существования композитного бозона Хиггса, состоящего из фермионной материи, неоднократно предлагалась многими авторами (см., например, [16]).

5. «Темная» материя

Согласно космологической модели Λ CDM частицы «темной» материи являются нерелятивистскими, не испускают и не поглощают свет и взаимодействуют друг с другом и с частицами «светлой» материи в основном гравитационным образом.

В соответствии с моделью данной работы естественными кандидатами в частицы «темной» материи являются черные дыры с «горизонтами» событий (см. рис. 1,а,б,с; рис. 2,а,б; рис. 3,а,б).

Для полей Керра, Керра–Ньюмена массы таких черных дыр должны быть

$$M \geq (M_F)_{\max} \approx \frac{1}{\sqrt{2}} M_{Pl} = 1,6 \cdot 10^{-5} \text{ г.} \quad (16)$$

Для поля Райсснера–Нордстрема массы черных дыр должны быть

$$M \geq (M_B)_{\max} = M_{Pl}. \quad (17)$$

Для поля Шварцшильда массы черных дыр могут быть любой величины, в том числе и быть равными массам гипотетических WIMP частиц, широко используемых в различных сценариях расширения Вселенной в качестве носителей «темной» материи.

6. Качественный набросок происхождения элементарных частиц и «темной» материи

После инфляционной стадии расширения Вселенной в результате квантовых возмущений вакуума начался рост возмущений плотности первичного поля Вселенной.

Возмущения плотности в условиях высоких температур привели в результате гравитационных миниколлапсов к образованию неиспаряющихся черных дыр с ненулевым спином. Эти взаимодействующие черные дыры составили основу материи ранней Вселенной.

Предположим, что с чрезвычайно малой вероятностью ($\sim 4 \cdot 10^{-10}$) образовались также неиспаряющиеся черные дыры шварцшильдовского типа с нулевым спином. С еще меньшей вероятностью возможно образовались черные дыры Райсснера–Нордстрема, Керра и Керра–Ньюмена с «горизонтами событий» и соответственно с массами $M \geq (M_B)_{\max}$ и $M \geq (M_F)_{\max}$.

Тогда после понижения температуры расширяющейся Вселенной, когда образование пар «частица-античастица» прекратилось из-за барионной асимметрии

$$\frac{n_q - n_{\bar{q}}}{n_\gamma} \approx 10^{-10}, \quad (18)$$

реализовался сегодняшний состав материальной части Вселенной (в пренебрежении доли излучения):

- 20 % – «светлая» материя
- 80 % – «темная» материя.

В формуле (18) n_q , $n_{\bar{q}}$, n_γ – число частиц, античастиц, фотонов в ранней Вселенной.

Пренебрежимо малая часть «темной» материи в ранней Вселенной из-за своей стабильности стала определяющей в настоящее время.

7. Барионная асимметрия Вселенной

Малое значение барионной асимметрии ($\sim 10^{-10}$) могло возникнуть из-за такого же малого превышения антивещества, реализовавшегося в образовавшихся неиспаряющихся черных дырах Шварцшильда, Райсснера–Нордстрема, Керра и Керра–Ньюмена с внешними и внутренними «горизонтами» событий. Столь малое превышение захваченных дираковских античастиц над части-

цами ($\sim 10^{-10}(n_q + n_{\bar{q}})$) могло быть следствием чисто вероятностных причин.

8. Гамма-всплески

Гамма-всплески – это масштабные космические выбросы энергии взрывного характера.

Для некоторых гамма-всплесков выбросы энергии составляют $\sim 10^{54}$ эрг, что сравнимо с энергией покоя Солнца. Выход энергии происходит в виде коллимированного потока (джета). Гамма-всплески имеют космологическую природу и происходят, согласно наблюдениям, во всей Вселенной.

Несмотря на отклонение от темы данной работы, возможный механизм образования гамма-всплесков идеологически примыкает к ней.

Предположим, что существует вращающаяся черная дыра большой массы M и с большой гравитационной константой связи

$$\alpha = \frac{GMm}{\hbar c} = 10^{25} \div 10^{29}. \quad (19)$$

В формуле (19) m – масса пробной частицы.

Пусть угловой момент вращения $\mathbf{J} = M\mathbf{c}a$ таков, что реализуется область определения волновой функции пробной частицы рис. 2,с; 3,с с достаточно малым углом θ_b .

Если вблизи оси вращения такой черной дыры находится тело с массой m , оно будет захватываться черной дырой с мощными выбросами рентгеновского и γ -излучения вдоль оси вращения.

Если M и m состоят из материи (антиматерии), масса черной дыры увеличивается и при малом угле θ_b через некоторое время возникают «горизонты событий». Черная дыра с увеличенной массой прекращает взаимодействие с внешним миром: гамма-всплеск исчезает.

Если черная дыра состоит из антиматерии (материи), а масса m – это материя (антиматерия), то масса черной дыры уменьшается, а угол θ_b увеличивается. В этом случае гамма-всплеск будет продолжаться до полного поглощения пробной массы m .

Заключение

В работе неиспаряющиеся реликтовые черные дыры [1–4] предложены в качестве элементарных частиц Стандартной модели и носителей «темной» материи.

Электрически заряженным частицам с ненулевым спином соответствуют черные дыры с «голой» сингулярностью метрики Керра–Ньюмена (см. рис. 3,е).

Электрически не заряженным спиновым частицам соответствуют черные дыры метрики Керра при $r_0 \ll 2a$.

В нашей модели электрически не заряженному скалярному бозону Хиггса с нулевым спином мы должны были бы сопоставить черные дыры метрики Шварцшильда. В этом случае бозон Хиггса из-за наличия «горизонта событий» не мог бы распасться на другие частицы.

Однако если бозон Хиггса является составной частицей, состоящей из спиновых черных дыр с метриками Керра–Ньюмена или Керра, то такая частица может распасться и, возможно, бозон, обнаруженный на ЛНС, является бозоном Хиггса, состоящим из фермионной материи.

В работе определена максимальная масса элементарных частиц Стандартной модели.

Максимальная масса появляется из условия возникновения «горизонтов событий» у спиновых черных дыр с метрикой Керра или Керра–Ньюмена.

Черные дыры с «горизонтами событий» (рис. 2,а,б; 3,а,б) имеют области, где из-за выполнения условия причинности Гильберта $g_{00} > 0$ волновые функции пробных частиц равны нулю. Такие частицы не могут распадаться и взаимопревращаться; взаимодействие осуществляется в основном гравитационным образом. При этом взаимодействующие фермионы взаимно не пересекают внешних поверхностей эргосфер полей Керра или Керра–Ньюмена.

Максимальная масса частиц Стандартной модели определяется из решения уравнения (13) и приблизительно равна планковской массе:

$$\begin{aligned} & \text{– для фермионов со спином } S_F = \frac{\hbar}{2} (M_F)_{\max} \approx \\ & \approx \frac{1}{\sqrt{2}} M_{Pl} = 1,6 \cdot 10^{-5} \text{ г;} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{– для бозонов со спином } S_B = \hbar (M_B)_{\max} \approx \\ & \approx M_{Pl} = 2,2 \cdot 10^{-5} \text{ г.} \end{aligned}$$

В качестве носителей «темной» материи в работе предложены реликтовые черные дыры с «горизонтами событий».

Для полей Керра, Керра–Ньюмена массы таких черных дыр должны быть больше $(M_F)_{\max} \approx \frac{1}{\sqrt{2}} M_{Pl} = 1,6 \cdot 10^{-5}$ г. Для поля Райс-

снера–Нордстрема массы черных дыр должны быть больше $(M_B)_{\max} = M_{Pl}$. Для поля Шварцшильда массы черных дыр могут быть любой величины, в том числе они могут быть равными массам гипотетических WIMP частиц, широко используемых в различных сценариях расширения Вселенной.

Барионная асимметрия Вселенной кажется объяснимой чисто вероятностными причинами, а именно, малым превышением ($\sim 10^{-10}$) антивещества в образовавшихся реликтовых неиспаряющихся черных дырах Шварцшильда, Райсснера–Нордстрема, Керра и Керра–Ньюмена с внешними и внутренними «горизонтами событий».

Гамма-всплески во Вселенной можно интерпретировать существованием черных дыр с метриками Керра или Керра–Ньюмена большой массы M и с небольшими углами θ_b . Для обеспечения гигантских выбросов энергии вблизи оси вращения черной дыры должна существовать достаточно большая масса m , поглощаемая черной дырой и обеспечивающая значение гравитационной константы связи $\alpha \gg 1$.

Если массы M и m являются материей (антиматерией), то после поглощения определенной части массы m в соответствии с уравнением (13) возникают внешний и внутренний «горизонты событий», что приводит к окончанию основного гамма-всплеска.

Предложенная модель элементарных частиц и «темной» материи может оказаться полезной при исследовании различных аспектов эволюции Вселенной.

Автор благодарит за большую техническую помощь в подготовке работы А. Л. Новоселову и Ю. В. Петрова.

Список литературы

1. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. arxiv: 1205.4348 (gr-qc).
2. Vronsky M. A., Gorbatenko M. V., Kolesnikov N. S., Popov E. V., Safronov I. I. arxiv: 1301.7595 (gr-qc).
3. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. arxiv: 1302.2557 (gr-qc).
4. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. arxiv: 1303.1127 (gr-qc).
5. Schwarzschild K.. Sitzber. Deut. Akad. Wiss. Berlin, 1916. P. 189–196.
6. Eddington A. S. The mathematical theory of relativity (Cambridge university press, 1924).
7. Логунов А. А., Мествиришвили М. А. Релятивистская теория гравитации. М.: Наука, 1989.
8. Reissner H. // Ann. Phys. 1916. Vol. 50. P. 106.
9. Nordstrom C. // Proc. K. Akad. Wet. Amsterdam. 1918. Vol. 20. P. 1238.
10. Kerr R. P. // Phys. Rev. Lett. 1963. Vol. 11. P. 237.
11. Newman E. T., Couch E., Chinnapared K., Exton A., Prakash A., Torrence R. // J. Math. Phys. 1965. Vol. 6. P. 918.
12. Hawking S. W. // Commun. math. Phys. 1975. Vol. 43. P. 199–220.
13. Burinckii A. arxiv: 1112.0225 (hep-th).
14. Markov M. A., Progr. theor. phys. suppl, commemoration issue for the thirtieth anniversary of meson theory and Dr. H. Yukawa. 1965. P. 85; Sav. Phys. JETP. 1967. Vol. 24. P. 584.
15. Kadyshevsky V. G., Mateev M. D., Rodionov V. N., Sorin A. S. GERN-TH (2007 – 150, arxiv: 0708.4205 (hep-th)).
16. Terazawa H. arxiv:1401.3562 [hep-ph].

Статья поступила в редакцию 07.02.2014

РАСЧЕТНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ВОЗМОЖНОСТИ ПОВЫШЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ РЕНТГЕНОВСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В МИШЕНЯХ ИТС

М. А. Баринов, В. В. Ватулин, К. А. Волкова, Д. Н. Голишников, А. С. Гнутов, Г. М. Елисеев, П. Г. Кузнецов, Л. З. Моренко, Е. А. Новикова, Н. П. Плетенева, А. В. Харитонов

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Представлены результаты численных исследований формирования в полости мишени поля РИ с эффективной температурой, превышающей 300 эВ – характерную температуру поля РИ в мишенях, испытываемых на установке NIF. На установке NIF используется ЛИ с длиной волны 0,32 мкм (третья гармоника ЛИ неодимового лазера). Рассмотрены параметры поля РИ при использовании потока ЛИ меньшей длины волны. Использование лазерного излучения меньшей длины волны позволяет существенно повысить предельную интенсивность потока ЛИ в мишенях и увеличить эффективную температуру РИ до 350 эВ и более.

Приводятся результаты расчетов конверсии энергии ЛИ в РИ для различных длин волн ЛИ, предварительные расчетные оценки эффективной температуры, энергии и спектрального состава РИ внутри боксов-конвертеров (hohlraum) различной формы.

Ключевые слова: лазерное излучение, спектральный перенос рентгеновского излучения, степень ионизации.

Введение

На установке NIF с 2009 г. проводятся полномасштабные экспериментальные работы с целью реализации зажигания термоядерной капсулы. В полости мишени реализована температура излучения 300–320 эВ в золотом боксе-конвертере цилиндрической формы при мощности потока лазерного излучения (ЛИ) ~500 ТВт и полной энергии ЛИ до 1,9 МДж.

Для обеспечения необходимых степени сжатия и температуры ДТ-топлива формируется импульс ЛИ специальной формы, состоящий из четырех импульсов (так называемый профилированный импульс). В результате взаимодействия потока ЛИ со стенками мишени в полости мишени реализуется поле рентгеновского излучения с эффективной температурой, достигающей ~300 эВ [1].

По состоянию на начало 2013 г. в проведенных экспериментах параметры по достигнутой плотности, температуре ДТ-области, скорости сжатия при использовании профилированного импульса ЛИ ниже расчетных величин, при которых

должна осуществиться термоядерная вспышка [1]. Необходимое пороговое значение числа реакций на фоне газодинамических температуры и плотности и соответственно регистрируемого нейтронного выхода, после которого должно начаться самоподдерживающееся термоядерное горение, составляет по расчету $\sim 10^{16}$. В проведенных экспериментах максимально зарегистрированный нейтронный выход составил до $7 \cdot 10^{14}$ нейтронов.

В середине 2013 г. американские специалисты начали серию экспериментов с модифицированным импульсом ЛИ (High Foot). Полная длительность импульса была сокращена с ~20 до ~15 нс, интенсивность первой части импульса была существенно увеличена. При такой форме импульса повышается максимальная температура ионов, но снижается степень сжатия ДТ-области; в проведенных во второй половине 2013 г. экспериментах реализован нейтронный выход $5 \cdot 10^{15}$ нейтронов [1]*. По сообщениям специалистов ЛЛНЛ экспе-

* По неофициальным данным максимальный выход составил $7 \cdot 10^{15}$ нейтронов.

риментальный выход нейтронов оказался близким к расчетным значениям. При таком количестве ДТ-реакций выделенная энергия близка к энергии, поступившей в ДТ-область в процессе сжатия.

Работы американских специалистов по осуществлению термоядерного зажигания будут, безусловно, продолжаться. Однако параметров ЛИ установки NIF может оказаться недостаточно для осуществления надежного термоядерного зажигания в уникальной схеме криогенной мишени, тем более в обычной газовой мишени типа испытанных на многих лазерных установках мира (в том числе на установке ИСКРА-5), состоящих из стеклянной оболочки, заполненной ДТ-газом при давлении порядка 10 атм. По результатам исследований тяжелоионного направления ИТС была выполнена оценка минимальных значений энергии РИ. При ограничении степени сжатия ДТ-газа $V_0/V = 1000$ масса ДТ-газа составляет более 1 мг и энергия рентгеновского излучения в объеме мишени $E_{\text{мин}} \sim 9$ МДж для газовой мишени и $E_{\text{мин}} \sim 5-6$ МДж для криогенной капсулы [2]. Для тяжелоионного направления эти цифры оказались недостижимыми, в частности, из-за проблем с фокусировкой пучка ионов [3]. Один из авторов настоящей статьи участвовал в работах Европейской Study Group по разработке проекта установки тяжелоионного синтеза [4]. И в рамках данной работы была предложена конструкция мишени и капсулы, проведены расчетно-теоретические работы по обоснованию работы мишени и высказано заключение о необходимой энергии тяжелоионного драйвера более 10 МДж [5].

Условия для осуществления термоядерного зажигания будут улучшаться при повышении температуры рентгеновского излучения в полости мишени. При повышении температуры существенно возрастает поток энергии в капсулу и возрастает полная энергия, приобретаемая ее оболочками и внутренними ДТ-областями. В табл. 1 приведены результаты расчетов потока РИ в капсулу NIF с оболочкой BeCu в основном четвертом

импульсе при вариации максимальной температуры РИ. Поток РИ в капсулу возрастает в $\sim 2,5$ раза при увеличении температуры с 0,25 до 0,35 кэВ.

Повысить эффективную температуру источника РИ можно переходом к работе с лазерным излучением с меньшей длиной волны, как минимум, на четвертую гармонику лазерного излучения неодимового лазера. По результатам проведенных экспериментальных исследований, эффективность конверсии ЛИ второй гармоники в четвертую гармонику может составить более 50 % [6]. В данной работе с использованием численного моделирования процесса взаимодействия лазерного излучения с плазмой рассматриваются параметры взаимодействия ЛИ с $\lambda = 0,26$ мкм с плазмой и конверсии в рентгеновское излучение, параметры поля РИ в полости мишени. Расчеты, результаты которых рассматриваются в настоящей работе, выполнены по одно-двумерным математическим комплексам. Основным источником потока рентгеновского излучения является так называемая рентгеновская корона – область высокотемпературной плотной плазмы, примыкающая к области толщиной в доли микрометра, в которой происходит поглощение лазерного излучения (так называемая лазерная корона). В рентгеновской короне устанавливается локальное термодинамическое равновесие, поэтому в программах, в которых используется приближение ЛТР, достаточно корректно описываются основные процессы конверсии потока ЛИ в поток рентгеновского излучения.

Характеристики взаимодействия ЛИ различной частоты с веществом и оценки эффективной температуры генерируемого рентгеновского излучения

Параметры взаимодействия лазерного излучения с плазмой характеризуются соотношениями, определяющими критическую плотность при поглощении ЛИ в плазме [7]

$$\rho_{\text{кр}} = 0,00187 \frac{A}{\lambda^2 \langle z \rangle}, \quad (1)$$

и верхнюю границу интенсивности воздействия, выше которой начинаются нелинейные процессы с генерацией быстрых частиц, ограничивающих эффективность конверсии в рентгеновское излучение

$$I_{\text{max}} \lambda^2 \leq 2 \cdot 10^{14} \text{ Вт/см}^2, \quad (2)$$

где A и Z – атомный вес и эффективный заряд ионов; λ – длина волны ЛИ; I_{max} – верхний предел допустимой по соображениям эффективности ин-

Таблица 1

Результаты расчетов потока РИ в капсулу NIF с бериллиевой оболочкой

T , кэВ	q_4 , $1/\text{см}^2$, относительные единицы
0,25	1
0,3	1,6
0,325	2,1
0,35	2,5

тенсивности воздействия ЛИ. С ростом предельной величины I_{\max} растет и значение критической плотности плазмы

$$\rho_{\text{кр}} = 0,00187 \frac{A}{\langle z \rangle} \frac{I_{\max}}{2 \cdot 10^{14}} \text{ г/см}^3, \quad (3)$$

Возможность повышения предельно допустимой интенсивности потока при увеличении частоты ЛИ позволяет повысить температуру потока РИ. На рис. 1 приведена зависимость температуры РИ от частоты лазерного излучения для лазерных

минимизировать потери энергии на генерацию быстрых электронов в плазме и определялась из соотношения формулы (2).

Таблица 2

Параметры лазерного источника в расчетах

Гармоника	Длина волны λ , мкм	Энергия источника, кДж
2 ω	0,527	33,93
4 ω	0,263	136,26

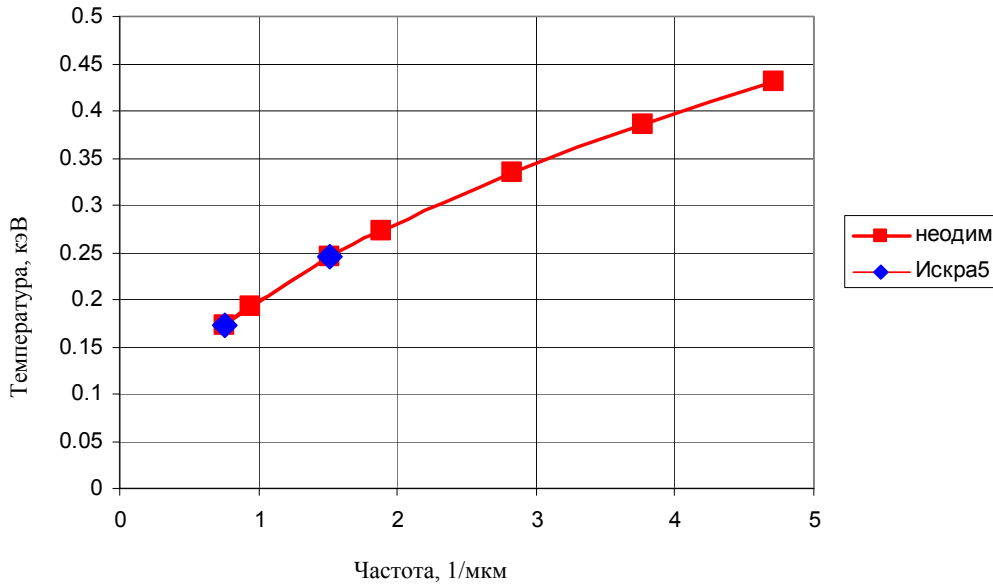


Рис. 1. Оценка эффективной температуры потока РИ конвертера в зависимости от частоты ЛИ

установок различного типа, полученная в соответствии с соотношением $I_{\max} = \sigma T_{\max}^4$.

Сопоставление с экспериментальными данными, полученными на лазерных установках при различной длине волны ЛИ, показывает, что такая оценка дает незначительно (на 20–30 эВ) завышенный результат.

Расчеты конверсии энергии лазерного излучения в энергию РИ в плоских мишенях из золота

Для оценки температуры излучения, генерируемого в лазерной плазме, были проведены 1D расчеты конверсии лазерного излучения в рентгеновское излучение в плоском слое золота.

Основные параметры лазерного источника для второй и четвертой гармоник приведены в табл. 2. Интенсивность облучения мишени для соответствующей гармоники ЛИ выбиралась так, чтобы ми-

Временная форма лазерного импульса задавалась в виде трапеции, представленной на рис. 2. Ширина импульса на полувысоте составляет $\tau_{0,5} = 6$ нс.

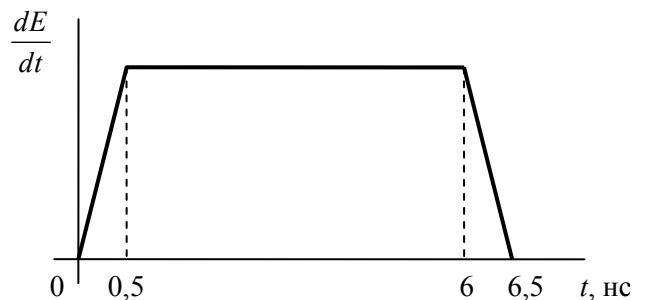


Рис. 2. Зависимость мощности источника ЛИ от времени

Расчеты проведены в двух постановках:

1) без учета ограничения потока тепла в электронной теплопроводности (ЭТП) в плазме с классическим коэффициентом ЭТП;

2) с ограничением потока тепла в ЭТП с параметром ограничения $f=0,1$.

Интегральные результаты расчетов на момент окончания импульса (6,5 нс) приведены в табл. 3. Доля рентгеновского излучения $E_{РИ}$ указана от падающей энергии ЛИ.

Из представленных в табл. 3 результатов расчетов следует, что:

- эффективная температура потока РИ при облучении потоком лазерного излучения четвертой гармоники существенно выше температуры РИ при облучении ЛИ второй гармоники;
- эффективность конверсии зависит от коэффициента ограничения электронной теплопроводности, принятого в расчетах. Для исключения этой неопределенности в расчетах необходимо использовать кинетическую модель переноса электронов в плазме.

зывать кинетическую модель переноса электронов в плазме.

На рис. 3 представлены зависимости от времени температуры излучения в рентгеновской короне для различных гармоник ЛИ. В расчетах с классической электронной теплопроводностью для четвертой гармоники ЛИ максимальная температура источника РИ заметно повышается по сравнению со второй гармоникой – с 240 до 350 эВ. При ограничении теплового потока $f=0,1$ максимальная температура составляет ~337 эВ при облучении потоком ЛИ четвертой гармоники.

На рис. 4 приведены спектральные распределения интегральных по времени потоков излучения, выходящего с фронтальной стороны мишени к моменту окончания лазерного импульса.

Таблица 3

Результаты расчетов конверсии ЛИ в рентгеновское излучение

Гармоника	f (ЭТП)	Интенсивность, Вт/см ²	$E_{\text{лаз. погл}}$, %	$E_{\text{РИ}}$, %	Макс. $T_{\text{рад}}$, эВ
4 ω	Без ограничения	$2,89 \cdot 10^{15}$	99,6	77,4	350
4 ω	$f=0,1$	$2,89 \cdot 10^{15}$	83,8	61,6	337
2 ω	Без ограничения	$7,2 \cdot 10^{14}$	98,1	80,6	240
2 ω	$f=0,1$	$7,2 \cdot 10^{14}$	64,7	49,9	220

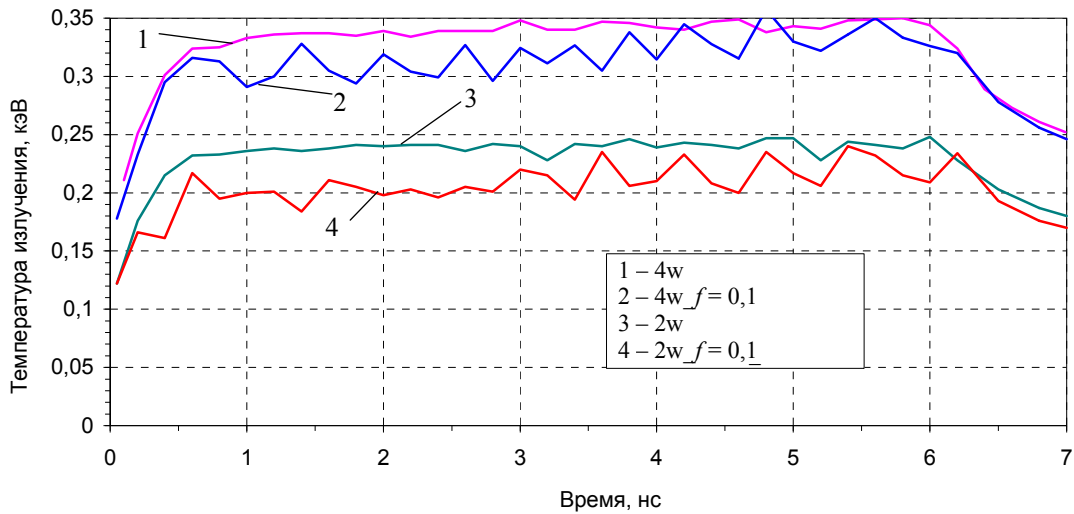


Рис. 3. Зависимость от времени температуры излучения в рентгеновской короне

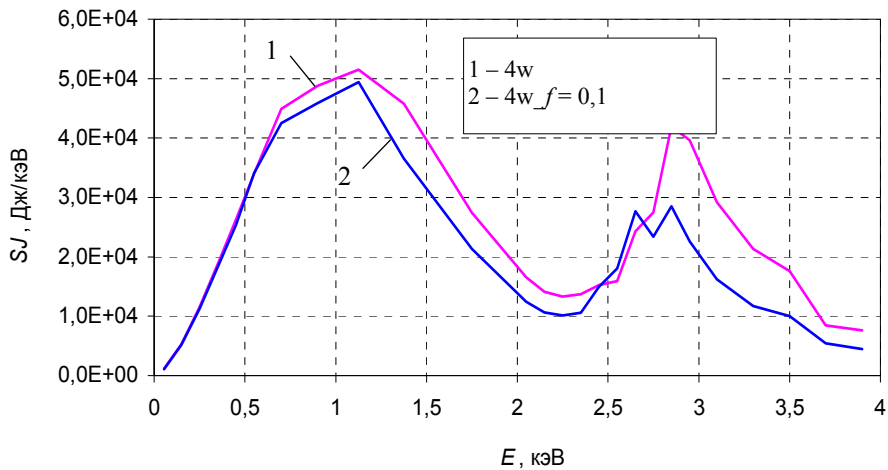


Рис. 4. Спектральное распределение интегральных по времени потоков излучения

Расчеты параметров РИ в сферическом боксе для четвертой гармоники ЛИ ($\lambda = 0,26$ мкм)

Целью этих расчетов являлось исследование параметров РИ в сферических боксах при использовании четвертой гармоники ($\lambda = 0,26$ мкм) лазерного излучения на мощных лазерных установках, а также влияния полной энергии на температуру внутри мишени.

Проведены сферические расчеты для мишени с радиусом 4,2 мм, в которой размещена термоядерная капсула типа испытываемых на установке

NIF. На рис. 5 приведен разрез мишени. В центре капсулы находится DT-смесь в виде газа, затем слой DT-льда и слой BeCu-смеси с содержанием Cu 5%. Начальная плотность DT-газа в полости капсулы $\rho = 0,0003$ г/см³ соответствует равновесной плотности газа при криогенной температуре.

Расчеты выполнены при постоянном потоке ЛИ. Энергия ЛИ варьировалась в пределах 0,8–2,5 МДж. На рис. 6 в качестве иллюстрации приведены некоторые результаты расчетов при постоянной интенсивности энерговыделения в мишени с вакуумным зазором ($E_{\text{ЛИ}} = 1$ МДж,

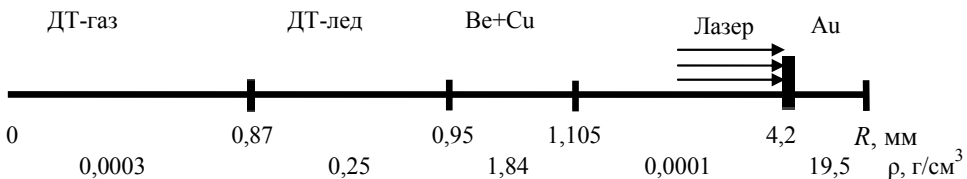


Рис. 5. Разрез криогенной мишени

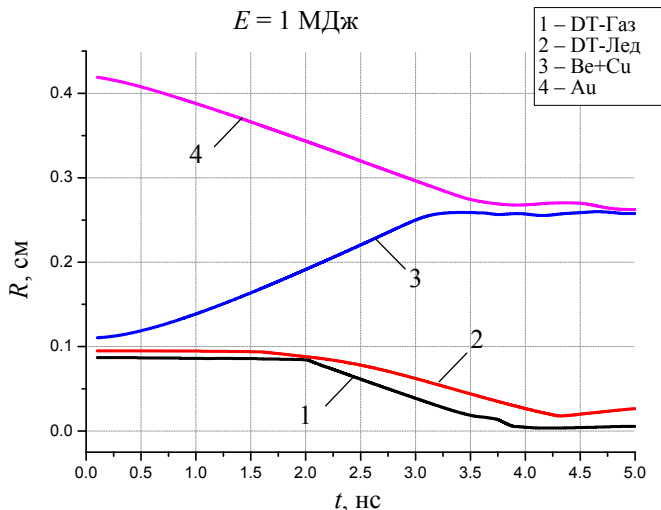


Рис. 6. Движение границ мишени типа NIF $R_0 = 4,2$ мм при постоянной интенсивности энерговыделения в мишени с вакуумным зазором ($E_{\text{ЛИ}} = 1,0$ МДж)

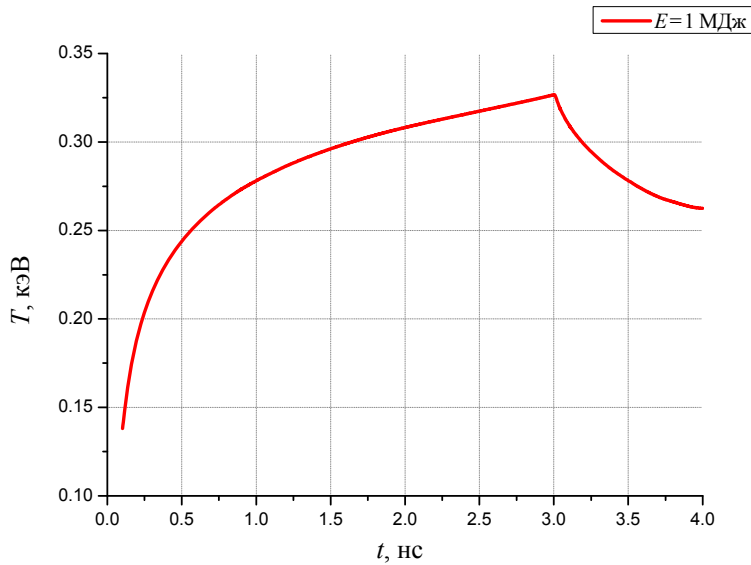


Рис. 7. Зависимость от времени температуры в зазоре мишени при энергии $E_{\text{ЛИ}} = 1$ МДж

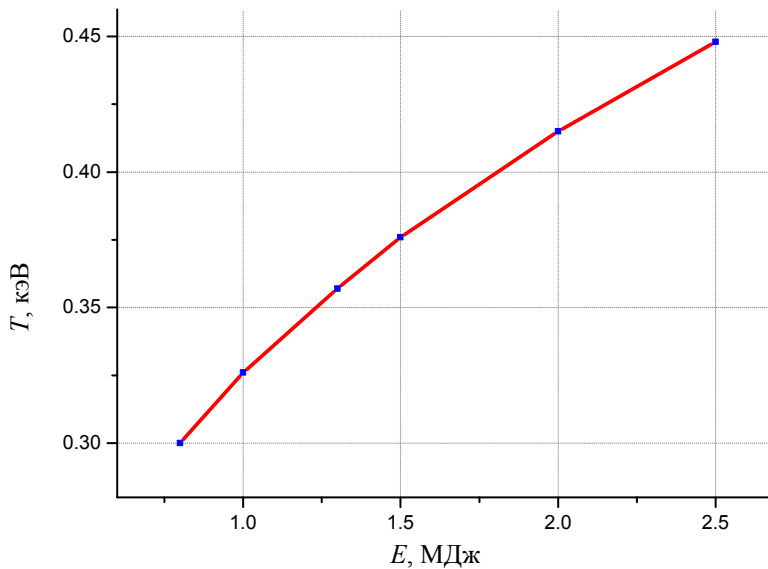


Рис. 8. Зависимость эффективной температуры РИ от энергии лазерного излучения с $\lambda = 0,26$ мкм

длительность импульса $\tau = 3$ нс). На рис. 7 представлены радиусы границ областей от времени и значения средней температуры в вакуумном зазоре.

Вакуумный зазор между стенками мишени и капсулы перекрывается к моменту ~ 3 нс, к моменту ~ 4 нс реализуется максимальное сжатие ДТ-газа, через $\sim 1,3$ нс – максимальное сжатие ДТ-топлива в целом. Таким образом, при воздействии короткого импульса ЛИ стенки мишени не оказывают влияния на динамику сжатия ДТ-области.

Зависимость от времени температуры в зазоре мишени при энергии $E_{\text{ЛИ}} = 1$ МДж приведена на рис. 7. Интенсивность потока ЛИ при данной энергии и длительности импульса 3 нс составляет

$\sim 1,3 \cdot 10^{14}$ Вт/см². Максимальное значение T_{max} достигается в конце лазерного импульса и составляет ~ 320 эВ.

На рис. 8 приведены результаты расчетов средней температуры в вакуумном зазоре сферического бокса-конвертера радиусом 4,2 мм для различных энергий лазерного излучения с $\lambda = 0,26$ мкм при длительности импульса 3 нс. При энергии ЛИ 2,5 МДж температура рентгеновского излучения достигает ~ 450 эВ. Более аккуратные расчеты с учетом потерь энергии РИ в отверстия для ввода лазерного излучения и в стенки бокса, не облучаемые потоком ЛИ, дадут несколько меньшие значения T_{max} . Однако они будут существенно выше реализованных на установке NIF.

Использование четвертой гармоники ЛИ позволяет существенно увеличить величину потока ЛИ, вводимого в рассматриваемую мишень, и повысить температуру потока РИ из конвертера. При повышении температуры существенно возрастает поток энергии в капсулу и тем самым возрастает полная энергия, приобретаемая ее оболочками и внутренними ДТ-областями. Для рассмотренной мишени требуется подбор формы профилированного импульса, а также дополнительные исследования параметров самой мишени.

Расчеты параметров РИ в цилиндрическом боксе для ЛИ с $\lambda = 0,26$ мкм

Для оценки параметров рентгеновского излучения в цилиндрическом боксе на 4-й гармонике лазерного излучения была выбрана геометрия ми-

шени с вводом лазерного излучения через отверстия в боковой поверхности. Внутри полости при воздействии на стенки мишени (в проведенных расчетах внутренний слой стенки выполняется из золота) энергия ЛИ конвертируется в энергию РИ.

В качестве источника в расчетах был задан лазерный импульс четвертой гармоники излучения длительностью 3 нс с полной энергией 1000 кДж. Предполагаемые углы ввода лазерного излучения в мишень составляют $\sim 30^\circ$ к нормали.

На рис. 9, 10 приведены принципиальная схема и реализованная в расчете геометрия для задачи о цилиндрическом боксе ТЯ-мишени.

Для иллюстрации протекающих процессов на рис. 11 приведены поля температуры излучения в системе на момент времени, соответствующий середине импульса ($t = \sim 1,5$ нс). Розовым цветом обозначены лагранжевы линии (внутренняя граница золотой стенки конвертера).

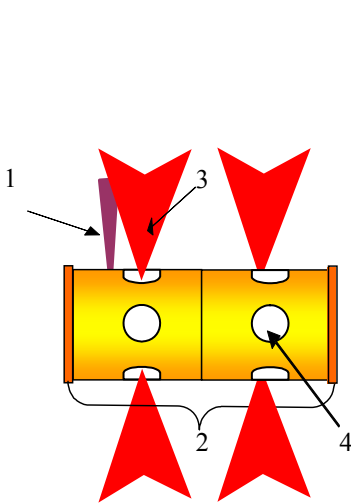


Рис. 9. Конструкция цилиндрического бокса с вводом потока ЛИ с боковой поверхности: 1 – держатель; 2 – корпус; 3 – лазерные пучки; 4 – отверстия для ввода ЛИ

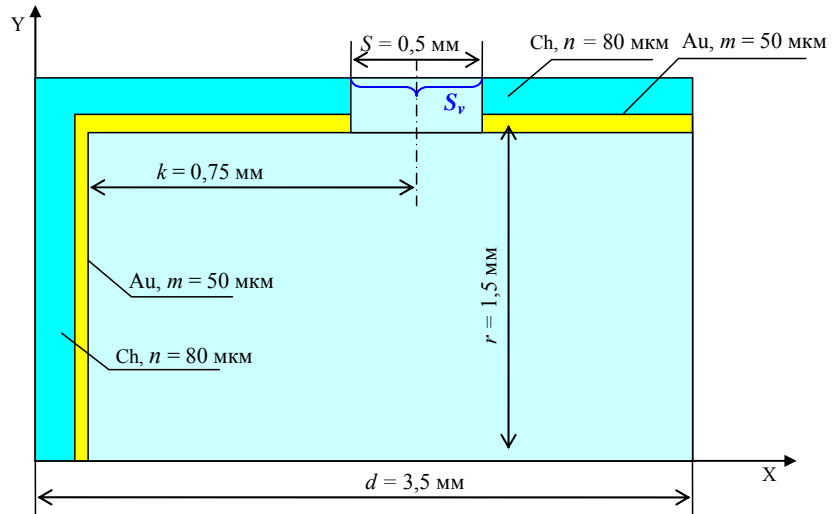


Рис. 10. Геометрия двумерной задачи цилиндрического бокса ТЯ-мишени

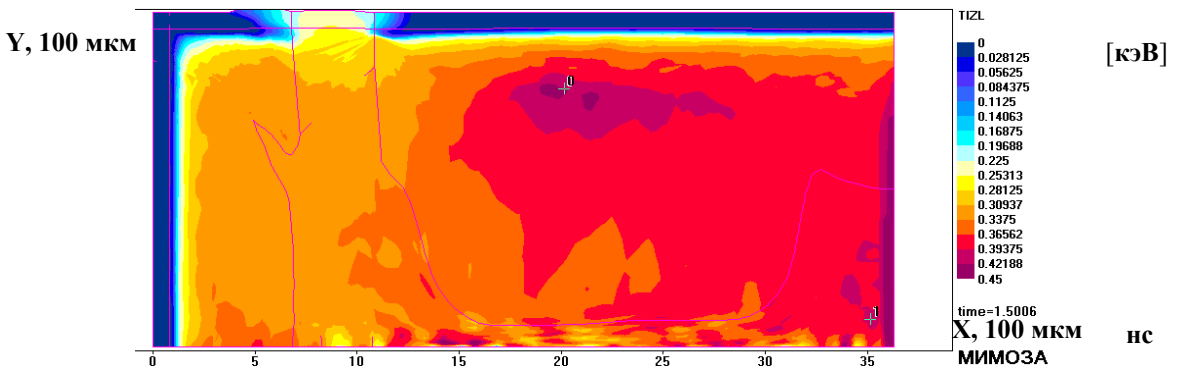


Рис. 11. Пространственное распределение температуры излучения для 4ω ($E_{\text{пол}} = 1$ МДж) на момент времени $t = 1,5$ нс

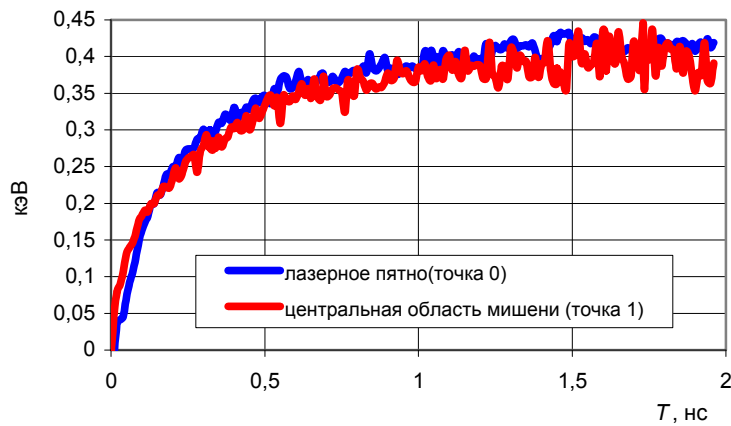


Рис. 12. Температуры излучения на момент 1,5 нс в расчете с 4ой гармоникой излучения неодимового лазера в лазерном пятне и в центральной области мишени ($E_{\text{пол}} = 1$ МДж)

Эффективная температура рентгеновского излучения в лазерном пятне и в центральной области мишени (точки 0 и 1 на рис. 11 соответственно) приведена на рис. 12, колебания температур связаны с расчетной статистикой задачи по фотонам.

Из-за перекрытия полости мишени потоком лазерной плазмы со стенок мишени время расчета ограничилось 2 нс и в расчетах были введены 2/3 от полного потока ЛИ, т. е. ~ 330 и 660 кДж в пересчете на всю мишень.

Температура излучения в центре бокса достигает 400 эВ для 1 МДж лазерного излучения на 4-й гармонике. При этом температура излучения в центральной части мишени близка к температуре излучения в лазерном пятне.

Для размещения в боксе термоядерной капсулы с радиусом порядка 1 мм необходимо увеличить размеры мишени с соответствующим увеличением потока ЛИ. При взаимосогласованном выборе размеров мишени и энергии ЛИ с $\lambda = 0,26$ мкм можно получить температуру РИ в интервале 350–400 эВ при потоке ЛИ 3–4 МДж.

Заклучение

В результате проведенных расчетов конверсии энергии ЛИ в рентгеновское излучение получены оценки температуры рентгеновского излучения, которые следует ожидать в «рабочих полостях» мишеней в опытах на мощных лазерных установках для четвертой гармоники лазерного излучения.

Результаты расчетов показывают, что температура рентгеновского излучения существенно зависит от длины волны (гармоники) облучающего конвертер лазерного импульса. Так, температура поля рентгеновского излучения составляет:

- для варианта со второй гармоникой ЛИ ($\lambda = 0,527$ мкм, $E_{\text{ЛИ}} = 1$ МДж) 220–240 эВ;
- для варианта с четвертой гармоникой ЛИ ($\lambda = 0,263$ мкм, $E_{\text{ЛИ}} = 1$ МДж) 337–400 эВ.

Список литературы

1. Storm E. The national ignition campaign Status and progress. Presentation to XXXII ECLIM, Warsaw, Poland, September 10, 2012.
2. Vatulina V., Ermolovich V., Skrypnik S. Studies of thermonuclear reaction initiation conditions in heavy-ion inertial - fusion targets. International symposium on heavy ion inertial fusion, Frascati, Italy, 1993.
3. Romanov Yu., Vatulina V. Results of investigations conducted by VNIIEF on a problem of heavy ion thermonuclear fusion. International symposium on heavy ion inertial fusion, Princeton, USA, 1995.
4. Vatulina V., Voronin B., Zagrafov V., Remizov G., Skidan G., Skrypnik S. Numerical investigation of performance of some designs of heavy ion thermonuclear fusion target. International symposium on heavy ion inertial fusion, Princeton, USA, 1995.
5. The HIDIF-Study. Report of the European study group on heavy ion driven inertial fusion for the period 1995–1998. GSI, Darmstadt, 1998.
6. Steven T. Yang, Mark A. Hennesian, Timothy L. Weiland, James L. Vickers, Ronald L. Luthi, John P. Bielecki, and Paul J. Wegner. Noncritically phase-matched fourth harmonic generation of Nd:glass lasers in partially deuterated KDP/ OPTICS LETTERS / Vol. 36, N 10 / May 15, 2011.
7. Дюдерштад Дж., Мозес Г. Инерциальный термоядерный синтез. М.: Энергоатомиздат, 1984. С. 153–178.

ЭВОЛЮЦИЯ ЛОКАЛЬНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ НА ПОВЕРХНОСТЯХ ЖИДКИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ И ПОЛУСФЕРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ НЕУСТОЙЧИВОСТИ РЭЛЕЯ – ТЕЙЛОРА

Н. В. Невмержицкий, Е. А. Сотсков, О. Л. Кривонос

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Представлены результаты экспериментальных исследований эволюции локальных возмущений при развитии неустойчивости Рэля–Тейлора на внутренних и наружных поверхностях цилиндрических и полусферических оболочек в условиях имплозии и эксплозии.

Оболочки из низкопрочного студня водного раствора желатина ускорялись под действием продуктов взрыва смеси ацетилена с кислородом. В реализованных условиях нагружения студень вел себя как жидкость. Локальные возмущения задавались на неустойчивых поверхностях в виде цилиндрических каверн ($\varnothing 2,5 \times 3$ мм) или образовывались при интерференции УВ. Регистрация течения проводилась киносъемкой. Для сравнения приводятся результаты развития аналогичных возмущений на плоской КГ.

Получено, что на наружных поверхностях при имплозии цилиндрических и полусферических оболочек радиальная скорость проникновения возмущений в жидкость выше, а на внутренних поверхностях при эксплозии – ниже по сравнению со скоростью возмущений на плоской КГ.

Ключевые слова: неустойчивость Рэля–Тейлора, локальные возмущения, газовая взрывчатая смесь, скорость роста возмущений.

Введение

Локальные неоднородности в материале оболочки мишеней инерциального термоядерного синтеза (ИТС), конструктивные элементы, неравномерность поля давления могут приводить к образованию локальных возмущений (ЛВ), занимающих малую площадь контактной поверхности. При схождении оболочки эти возмущения из-за неустойчивости Рэля–Тейлора (Р–Т) [1] интенсивно развиваются и могут ее прорвать. Это приводит к снижению энерговыделения в ИТС.

В работах [2–5], в частности, показано, что локальное возмущение на неустойчивой поверхности плоского жидкого слоя развивается в виде квазиокруглого пузыря. Пузырь растет по глубине как $h_{ЛВ} = \beta_{ЛВ} A g t^2$ и со временем выходит на автомодельный режим ($\beta_{ЛВ}$ – коэффициент, характеризующий скорость (темп) проникновения полюса возмущения в жидкость; $A = (\rho_T - \rho_L) / (\rho_T + \rho_L)$ –

число Атвуда; ρ_T, ρ_L – плотности «тяжелого» и «легкого» веществ соответственно; g – ускорение контактной границы (КГ); t – время).

Для понимания физики развития таких возмущений и тестирования численных методов важно иметь экспериментальные данные по закономерностям развития возмущений при имплозии и эксплозии цилиндрических и сферических оболочек. Такие данные представлены в этой работе.

1. Техника экспериментов

Оболочки изготавливались из студня водного раствора желатина весовой концентрации (3÷4,4)% методом отливки в разборные матрицы. Прочность такого студня составляла $\sigma \approx 0,001$ МПа. Имплозия и эксплозия оболочек происходила в специальных устройствах под действием продуктов взрыва смеси $C_2H_2 + 2,5O_2$ (ПВ ГВС). Равно-

весное давление в ПВ составляло $\approx 13,5$ атм, максимальная величина ускорения контактной границы – $\approx 5 \cdot 10^4$ м/с².

1.1. Эксперименты с цилиндрическими оболочками

Имплозия оболочек. Схема экспериментального устройства по исследованию локального возмущения, заданного на наружной поверхности цилиндрической оболочки приведена на рис. 1. Высота оболочки составляла $h=40$ мм, внутренний радиус $R_{вн}=55$ мм, наружный радиус $R_{н}=70$ мм. На наружной поверхности оболочки задавалось четыре радиальных симметрично расположенных цилиндрических ЛВ диаметром 2,5 мм и глубиной 3 мм (опыт 646). Внутри оболочки находился воздух при атмосферных условиях. Взрывчатая смесь инициировалась в 40 точках, и посредством сетчатого распределителя детонация передавалась к 1200 точкам, равномерно расположенным по высоте и периметру устройства. Под действием давления ПВ оболочка сходилась к оси симметрии.

Исследования развития ЛВ от интерференции УВ проводились на подобном устройстве. Однако в отличие от предыдущих опытов здесь взрывчатая смесь инициировалась четырьмя симметрично расположенными электроискровыми разрядами. Геометрия цилиндрической оболочки: $R_{н} \approx 57$ мм, $R_{вн} = 42$ мм, $h = 20$ мм. После инициирования ГВС в каждой из четырех точек образовывалась детонационная волна, которая, отражаясь от оболочки и стенок сборки, вызывала серию нестационарных ударных волн (УВ). Столкновение УВ приводило

к местному повышению давления на границе раздела ПВ-студень, что вызывало возникновение локального возмущения, растущего с течением времени при схождении оболочки к оси (опыт 9).

Эксплозия оболочек. Исследование развития ЛВ на неустойчивой внутренней поверхности сходящейся цилиндрической оболочки ($R_{н}=38,5$ мм, $R_{вн}=18$ мм, $h=30$ мм) проводилось по схеме рис. 1. На внутренней поверхности оболочки задавались два локальных возмущения в виде каверн цилиндрической формы: первое – диаметром 2,5 мм и глубиной 3 мм, второе – диаметром 1,5 мм и глубиной 1,5 мм (опыт 958).

Инициирование ГВС осуществлялось электроискровым разрядом в одной точке, расположенной по центру оболочки. Под действием ПВ оболочка разлеталась в атмосферную среду. На ее внутренней поверхности развивались заданные локальные возмущения.

1.2. Эксперименты с полусферическими оболочками

Имплозия оболочек. Схема экспериментального устройства, на котором проводились исследования развития ЛВ на наружной поверхности полусферической оболочки ($R_{н}=50$ мм, $R_{вн}=40$ мм), сходящейся к центру, представлена на рис. 2.

Во время отливки оболочки при помощи съемных пуансонов на ее наружной поверхности (на высоте 20 мм от ее торца) задавалось четыре радиальных локальных цилиндрических возмущения диаметром 2,5 и глубиной 3 мм (опыт 377).

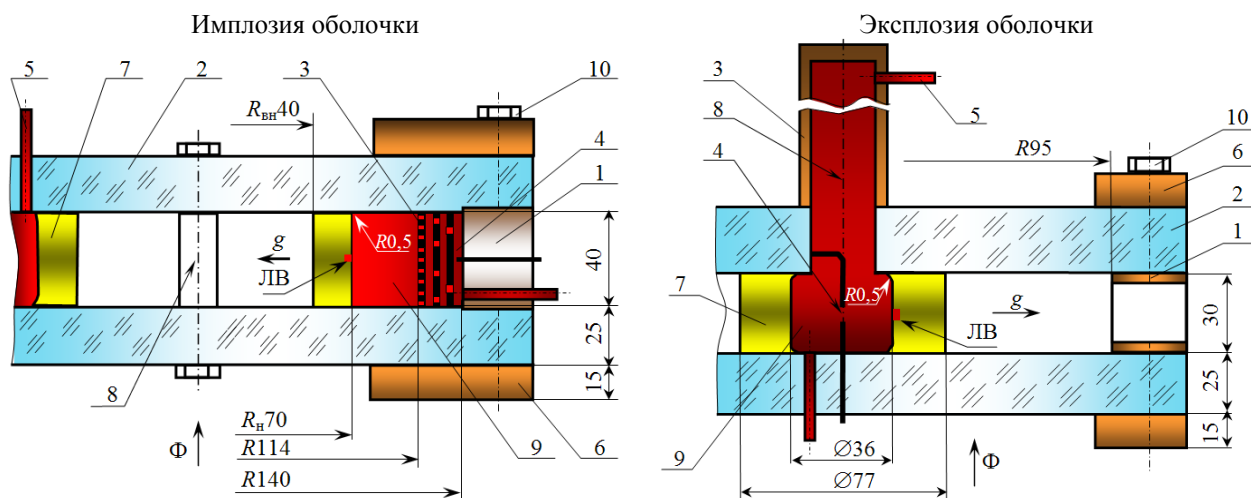


Рис. 1. Схемы экспериментальных устройств для ускорения цилиндрических студневых оболочек ПВ ГВС (размеры в мм): 1 – корпус; 2 – пластина; 3 – распределитель детонации ГВС при имплозии, камера ГВС при эксплозии; 4 – электроискровой зазор; 5 – газопровод; 6 – пластина силовая; 7 – оболочка; 8 – ось симметрии; 9 – объем ГВС; 10 – элементы крепления; ЛВ – локальное возмущение; g – направление ускорения оболочки; Φ – направление фотосъемки

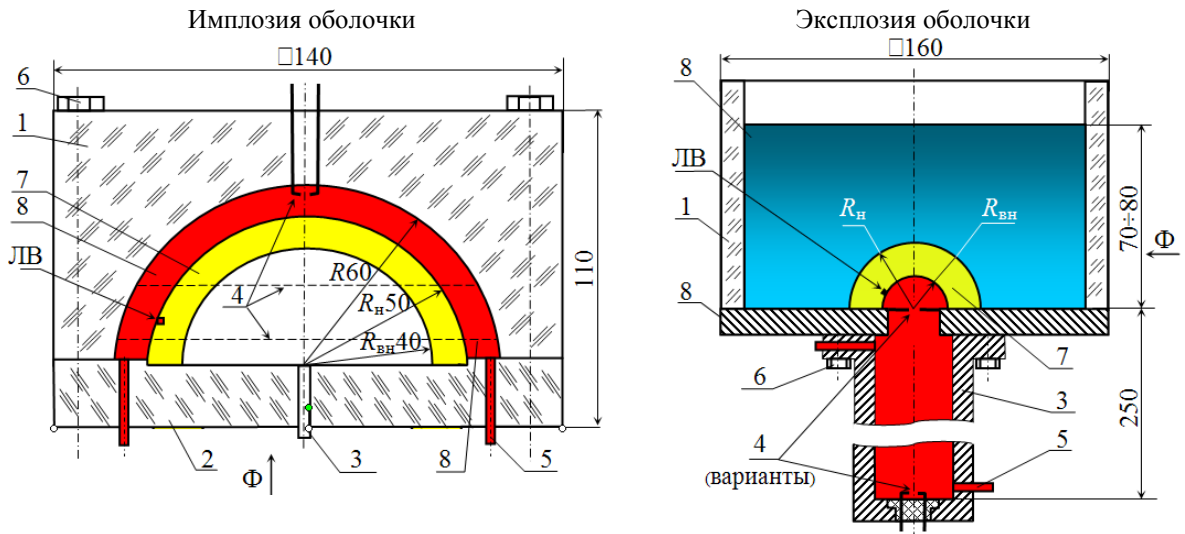


Рис. 2. Схемы экспериментальных устройств для ускорения полусферических студневых оболочек ПВ ГВС (размеры в мм): 1 – корпус; 2 – днище; 3 – воздуховод при имплозии, камера ГВС при эксплозии; 4 – электроискровой зазор; 5 – газопровод; 6 – элементы крепления; 7 – оболочка; 8 – камера ГВС при имплозии, слой воды при эксплозии; ЛВ – локальное возмущение; Ф – направление фотосъемки

Под действием собственного веса оболочка сильно проседала, поэтому в ее внутреннюю полость через воздуховод перед опытом подавался сжатый воздух под избыточным давлением $\approx 0,005$ атм. Под действием этого воздуха оболочка выравнивалась и приобретала форму, близкую к полусферической (прогиб полюса составлял ≈ 1 мм). В этих опытах взрывчатая смесь инициировалась в десяти электроискровых зазорах, расположенных равномерно на внутренней полусферической поверхности устройства.

Эксплозия оболочек. Схема постановки опытов по исследованию развития ЛВ на внутренней поверхности расходящейся полусферической оболочки представлена на рис. 2. Устройство представляло собой бак прямоугольной формы с прозрачными (из оргстекла) стенками. На дно бака устанавливалась предварительно отлитая по матрицам полусферическая оболочка ($R_n = 23,5$ мм, $R_{вн} = 16,5$ мм). Поверх оболочки наливался слой воды, верхняя граница которого контактировала с атмосферной средой. Вода поверх оболочки предотвращала раскрытие стыка оболочки с дном контейнера и благодаря силе Архимеда значительно уменьшала гравитационную силу, под действием которой студневая оболочка проседала. Диаметр ЛВ составлял 2,5 мм, глубина – 3 мм (опыт 295). Взрывчатая смесь инициировалась в

одной точке, расположенной либо по центру оболочки, либо внизу камеры ГВС. После подрыва ГВС оболочка расширялась, на ее внутренней поверхности развивалась Р-Т неустойчивость, а вода вытеснялась вверх. В опытах установлено, что расположение точки инициирования не оказало влияния на развитие ЛВ.

Исследовалось развитие ЛВ только на стадии ускорения контактных границ оболочек. Стадия торможения в данной работе не рассматривалась.

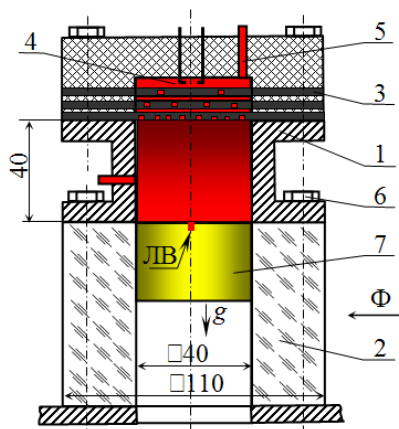
1.3. Эксперименты с плоским слоем

Ускорение плоского слоя студня ПВ ГВС проводилось в устройствах, схемы которых представлены на рис. 3. Исследовалось развитие цилиндрического ЛВ диаметром 2,5 и глубиной 3 мм (опыт 644) и развитие возмущения, образовавшегося от интерференции УВ при одной точке инициирования ГВС (опыт 904). Слой студня ускорялся в атмосферную среду.

Во всех опытах на поверхности контактной границы, не занятой ЛВ, возмущения специально не задавались. Они образовывались от разноминимичности детонационной волны. Их характерный размер оценивается $< 0,3$ мм.

Регистрация течения в экспериментах производилась скоростной фотосъемкой в проходящем свете.

Исследование развития ЛВ ($\varnothing 2,5 \times 3$) мм



Исследования развития ЛВ от интерференции ударных волн

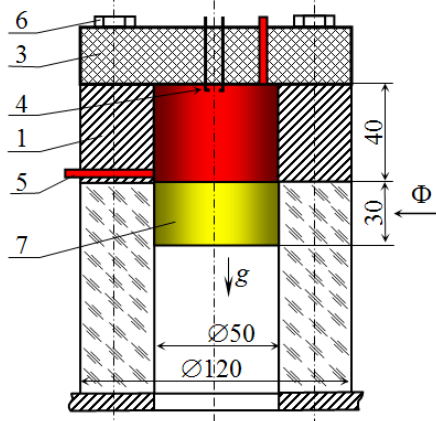


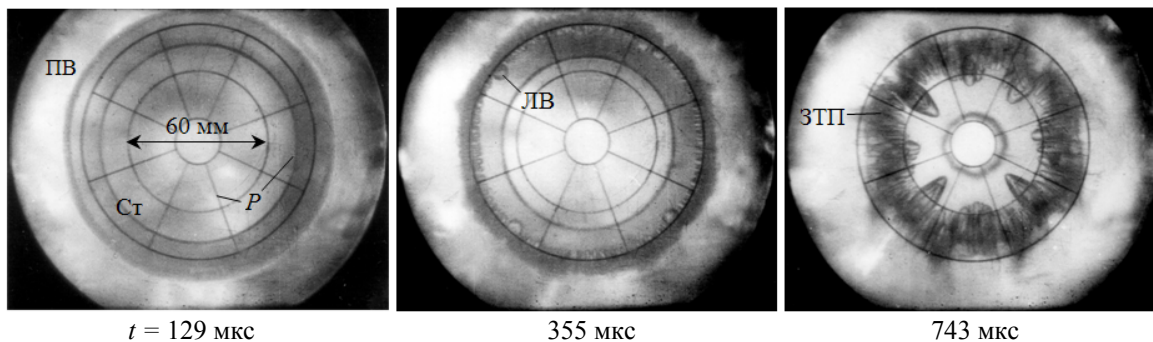
Рис. 3. Схемы экспериментальных устройств для ускорения плоских слоев ПВ ГВС (размеры в мм): 1 – камера ГВС; 2 – измерительная секция; 3 – распределитель детонации ГВС, крышка для устройства при исследовании ЛВ от интерференции волн; 4 – электроискровой зазор; 5 – газовод; 6 – элементы крепления; 7 – слой студня; ЛВ – локальное возмущение; Φ – направление фотосъемки

2. Результаты экспериментов

На рис. 4 представлены кинограммы развития локальных возмущений на наружной поверхности сходящейся цилиндрической оболочки, образо-

вавшихся при интерференции УВ, развития ЛВ диаметром 2,5 мм, глубиной 3 мм на наружной поверхности сходящейся полусферической оболочки и развития ЛВ диаметром 2,5 мм, глубиной 3 мм на внутренних поверхностях расходящихся

Имплозия цилиндрической оболочки (опыт 9)



Имплозия полусферической оболочки (опыт 377)

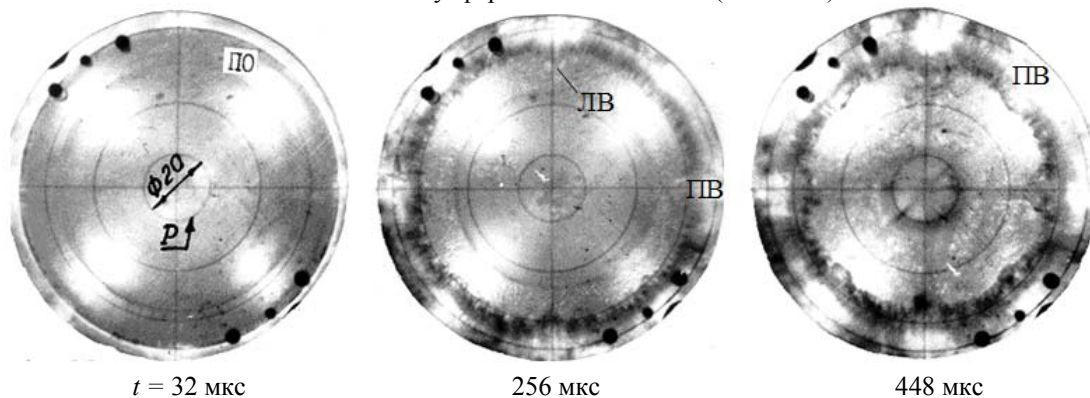
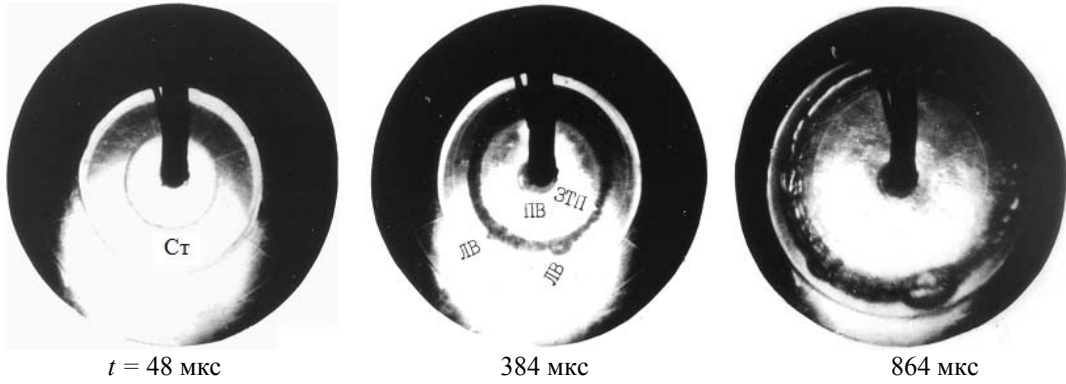


Рис. 4. Развитие локального возмущения на поверхностях оболочек: Ст – оболочка из студня; ЛВ – локальное возмущение; ЗТП – зона турбулентного перемешивания в области, не занятой ЛВ; ПВ – продукты взрыва; ВО – вода; ПО – полусферическая оболочка; Р – реперная сетка; время t отсчитывается от момента подрыва ГВС (см. также с. 39)

Эксплозия цилиндрической оболочки (опыт 958)



Эксплозия полусферической оболочки (опыт 295)

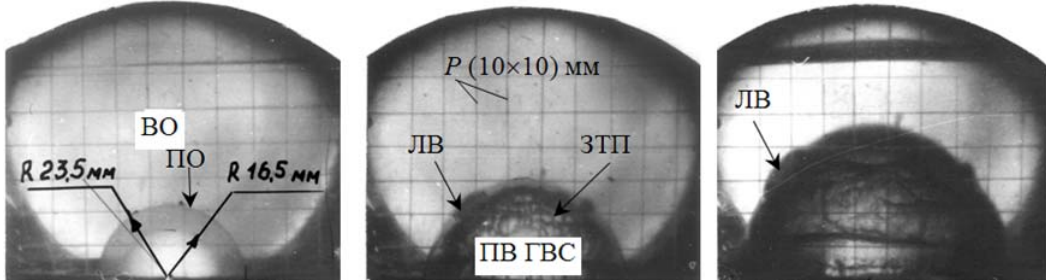
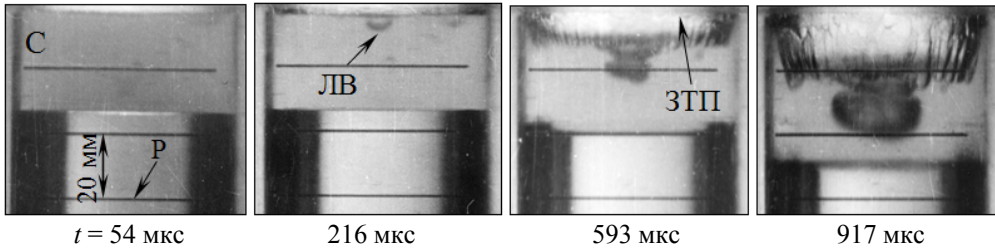


Рис. 4. Окончание

Локальное возмущение, образовавшееся при интерференции УВ (опыт 904)



Локальное возмущение диаметром 2,5 и глубиной 3 мм (опыт 644)

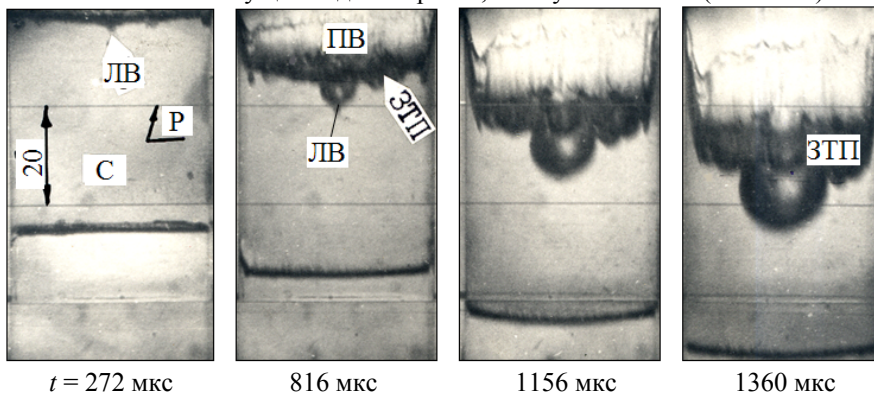


Рис. 5. Кинограммы развития локальных возмущений на плоской контактной границе: С – слой студня; ПВ – продукты взрыва газовой взрывчатой смеси; ЗТП – зона турбулентного перемешивания; ЛВ – локальное возмущение; Р – репер; время t отсчитывается от момента подрыва ГВС

цилиндрической и полусферической оболочек. На рис. 5 представлены кинограммы развития ЛВ на плоской контактной границе. По кинограммам видно, что на неустойчивых поверхностях обо-

лочек и плоского слоя совместно с зоной турбулентного перемешивания (ЗТП) развивается и ЛВ в виде пузыря, который опережает фронт зоны.

На рис. 6 приведена $X(t)$ -диаграмма течения для плоского случая, на рис. 7 – $R(t)$ -диаграммы для цилиндрических и полусферических оболочек. Положение радиуса контактной поверхности студень-ПВ оболочки ($R_{КГ}$) определялось по радиусу устойчивой поверхности из условия постоянства объема оболочки. Погрешность измерений R_i и X_i составляла $\pm 0,5$ мм. На рис. 8 и 9 представлены

зависимости глубины проникновения полюса пузыря ЛВ $h_{ЛВ}$ в студень от смещения $2S$ контактной границы в интегральных переменных $\sqrt{h_{ЛВ}}(\sqrt{2S})$, где $\sqrt{2S} \approx \int \sqrt{g} dt$, а $\beta_{ЛВ} = \left(\frac{\Delta \sqrt{h_{ЛВ}}}{\Delta \sqrt{2S}} \right)^2$ (здесь $A \approx 1$), погрешность $\beta_{ЛВ} \leq 15\%$.

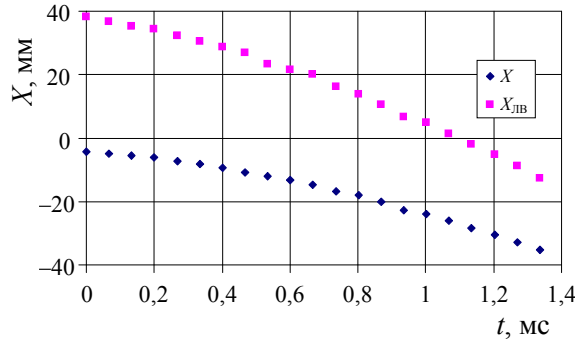
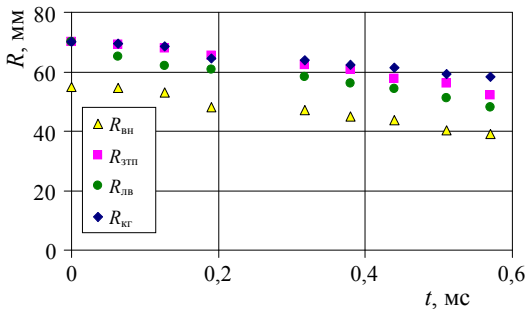
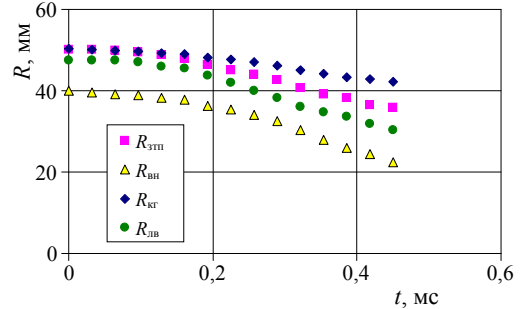


Рис. 6. $X(t)$ -диаграмма течения при ускорении плоского слоя (опыт 644): X – устойчивая граница, $X_{ЛВ}$ – проникновение полюса локального возмущения в студень

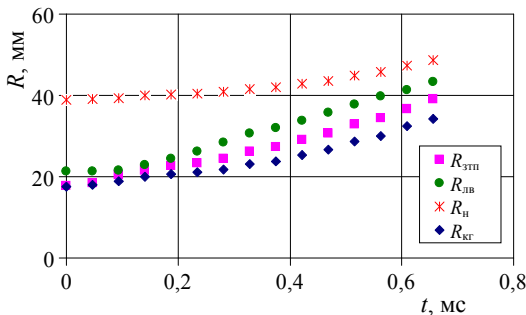
Имплозия цилиндрической оболочки (опыт 646)



Имплозия полусферической оболочки (опыт 377)



Эксплозия цилиндрической оболочки (опыт 958)



Эксплозия полусферической оболочки (опыт 295)

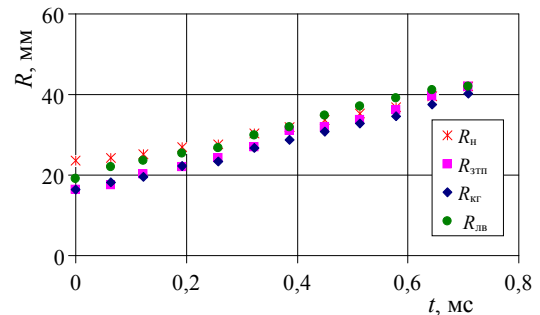


Рис. 7. $R(t)$ -диаграммы течения при имплозии и эксплозии оболочек: R_n – наружный радиус; $R_{вн}$ – внутренний радиус; $R_{КГ}$ – радиус контактной границы; $R_{ЛВ}$ – радиус проникновения полюса локального возмущения; $R_{зтп}$ – радиус зоны ТП

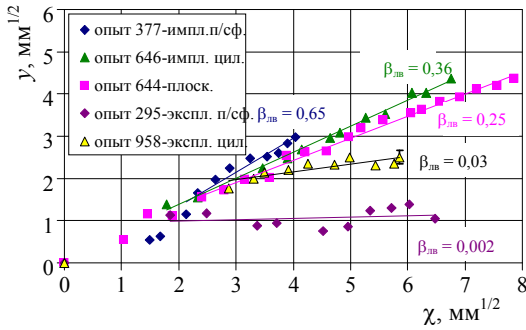


Рис. 8. Проникновение ЛВ диаметром 2,5 и глубиной 3 мм в жидкость на цилиндрической, полусферической и плоской контактных границах: $\chi = \sqrt{2S}$, $y = \sqrt{h_{ЛВ}}$

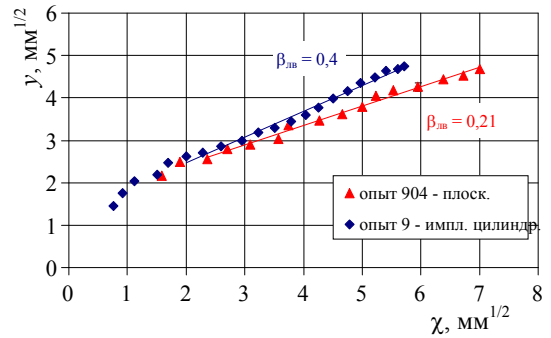


Рис. 9. Проникновение в жидкость локального возмущения, образованного при интерференции УВ, на сходящейся цилиндрической и плоской контактных границах: $\chi = \sqrt{2S}$, $y = \sqrt{h_{ЛВ}}$

По кинограммам и графикам видно, что:

а) на плоской контактной границе пузырь локального возмущения растет в жидкость примерно симметрично по глубине и по диаметру;

б) при имплозии цилиндрических и полусферических оболочек ЛВ в процессе развития приобретает также форму пузыря, но пузырь более интенсивно растет по глубине (в радиальном направлении), чем по своему диаметру, при эксплозии оболочек картина противоположная;

в) скорость проникновения полюса ЛВ в ступень ($\beta_{ЛВ}$) при имплозии цилиндрической оболочки составляет $\beta_{ЛВ} = 0,36 \div 0,4$, при имплозии полусферической – $\beta_{ЛВ} = 0,65$; при эксплозии цилиндрической – $\beta_{ЛВ} = 0,03$, при эксплозии полусферической – $\beta_{ЛВ} = 0,002$, на плоской контактной границе $\beta_{ЛВ} = 0,21 \div 0,25$ (см. рис. 8 и 9); т. е. при имплозии $\beta_{ЛВ}$ выше, а при эксплозии ниже по сравнению с плоским случаем.

Такой характер развития ЛВ связан с геометрией течения: деформация оболочки и изменение площади поверхности КГ приводят к изменению длины волны возмущения и амплитуды, что изменяет его скорость роста. Поэтому при сжатии сферических мишеней ИТС локальные возмущения могут очень быстро прорывать оболочки и нарушать симметрию течения.

Заключение

Радиальная скорость проникновения локального возмущения в жидкость зависит от геометрии основного течения: на наружных поверхностях

сходящихся цилиндрических и сферических оболочек она выше, а на внутренних поверхностях расходящихся оболочек – ниже по сравнению со скоростью на плоской контактной границе.

Список литературы

1. Taylor G. I. The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes // I. Proc. Roy. Soc., 1950. Vol. A201. P. 192.
2. Meshkov E. E., Nevmerzhitsky N. V. et al. Jelly technique applications in evolution study of hydrodynamic instabilities on unstable plane and cylindrical surfaces. The Proc. of the 5th IWPCMT. Stony Brook, USA, 1995. P. 243–250.
3. Сотсков Е. А., Невмержицкий Н. В., Мешков Е. Е. и др. Исследование развития локального возмущения и его взаимодействия с зоной турбулентного перемешивания на границе газ-студень // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2003. Вып. 1–2. С. 57–59.
4. Невмержицкий Н. В., Сотсков Е. А., Сеньковский Е. Д. и др. Развитие локального возмущения на границе газ-жидкость при неустойчивости Рэлея–Тейлора // Труды Международной конференции «XIII Харитоновские тематические научные чтения» Россия, Саров, 2011 г. С. 587–591.
5. Гаранин С. Ф. Автомодельное развитие неустойчивости Рэлея–Тейлора в районе угловых точек // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 1994/1995. Вып. 3/1. С. 12–17.

Статья поступила в редакцию 21.04.2014

АНАЛИЗ КВАНТОВО-МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ МЕТРИК ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОГО НЕЗАРЯЖЕННОГО ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

М. В. Горбатенко, В. П. Незнамов*

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Проведен анализ квантово-механической эквивалентности метрик центрально-симметричного незаряженного гравитационного поля. Анализу подверглись области определения волновых функций уравнения Дирака, эрмитовость гамильтонианов, возможность существования стационарных связанных состояний частиц со спином $1/2$. Доказано, что самосопряженные гамильтонианы существуют для: 1) метрик Шварцшильда в сферических, изотропных и гармонических координатах; 2) метрик Эддингтона – Финкельштейна и Пенлеви – Гуллстранда; 3) метрик Леметра – Финкельштейна и Крускала.

В случае 1) гамильтонианы являются эрмитовыми, и для них возможно существование стационарных связанных состояний частиц со спином $1/2$. В случае 2) самосопряженные гамильтонианы не являются эрмитовыми, для них возможны лишь состояния с комплексными уровнями энергии, распадающимися со временем. В случае 3) самосопряженные гамильтонианы являются эрмитовыми, но из-за явной зависимости от временной координаты для этих гамильтонианов отсутствует возможность существования стационарных связанных состояний частиц со спином $1/2$.

Ключевые слова: центрально-симметричные гравитационные поля, самосопряженность и эрмитовость дираковских гамильтонианов, стационарные связанные состояния частиц со спином $1/2$.

Введение

Широко известным решением общей теории относительности (ОТО) для точечного центрально-симметричного незаряженного гравитационного поля является метрика Шварцшильда [1].

Классическое решение Шварцшильда характеризуется точечным сферически-симметричным источником гравитационного поля массой M и «горизонтом событий» (гравитационным радиусом)

$$r_0 = \frac{2GM}{c^2}. \quad (1)$$

В формуле (1) G – гравитационная постоянная; c – скорость света. В классическом случае с точки зрения удаленного наблюдателя пробная частица достигает «горизонта событий» за бесконечное время.

Существует ряд других метрик, полученных координатными преобразованиями метрики

Шварцшильда и являющихся также точными решениями ОТО.

Можно отметить следующие решения: метрика Шварцшильда в изотропных координатах [2], метрика Шварцшильда в гармонических координатах [3], метрика Леметра – Финкельштейна [4, 5], метрика Крускала [6, 7], метрика Эддингтона – Финкельштейна [5, 8], метрика Пенлеви – Гуллстранда [9, 10].

В работах [11–13] с помощью методов псевдо-эрмитовой квантовой механики для произвольных гравитационных полей, в том числе зависящих от времени, разработан метод получения самосопряженных дираковских гамильтонианов с плоским скалярным произведением волновых функций.

Из одночастичной квантовой механики следует, что при эрмитовости гамильтониана с соответствующим равенством скалярных произведений волновых функций $((\Phi, H\Psi) = (H\Phi, \Psi))$ и при установлении граничных условий самосопряжен-

* E-mail: neznamov@vniief.ru

ные гамильтонианы $(H = H^+)$, не зависящие от времени, должны обеспечивать существование стационарных связанных состояний частиц со спином $1/2$ с вещественным энергетическим спектром*.

В данной работе проводится анализ квантово-механической эквивалентности вышеприведенных центрально симметричных решений уравнений ОТО, полученных координатными преобразованиями метрики Шварцшильда [1]. Для каждой метрики анализу подвергаются дираковские самосопряженные гамильтонианы с плоским скалярным произведением волновых функций. Исследуются области определения волновых функций, эрмитовость гамильтонианов и возможность существования стационарных связанных состояний частиц со спином $1/2$.

Для каждой метрики гамильтонианы получены как непосредственно с тетрадами в калибровке Швингера [14], так и с помощью преобразований самосопряженного гамильтониана в гравитационном поле Шварцшильда [1].

В разделе 1 приведена методология анализа квантово-механической эквивалентности метрик центрально-симметричного незаряженного гравитационного поля.

В разделах 2–4 анализируются самосопряженные гамильтонианы в полях Шварцшильда с изотропными и гармоническими координатами, в полях Эддингтона–Финкельштейна и Пенлеви–Гуллстранда, в полях Леметра–Финкельштейна и Крускала.

В Заключении обсуждаются результаты квантово-механического анализа.

1. Методология анализа квантово-механической эквивалентности центрально симметричных решений уравнений ОТО

1.1. Уравнение Дирака

Предполагается, что движение частицы со спином $1/2$ во внешнем гравитационном поле описывается ковариантным уравнением Дирака. В системе единиц $\hbar = c = 1$ оно имеет вид

$$\gamma^\alpha \nabla_\alpha \psi - m\psi = 0. \quad (2)$$

* При принятых определениях не всякий самосопряженный гамильтониан будет являться эрмитовым. Для эрмитовости гамильтониана необходимо соответствующее поведение волновых функций для обеспечения равенства $((\Phi, H\Psi) = (H\Phi, \Psi))$.

Здесь m – масса частицы; ψ представляет собой четырехкомпонентный биспинор; ∇_α – ковариантная производная; γ^α – мировые 4×4 дираковские матрицы, удовлетворяющие соотношению

$$\gamma^\alpha \gamma^\beta + \gamma^\beta \gamma^\alpha = 2g^{\alpha\beta} E. \quad (3)$$

В (3) $g^{\alpha\beta}$ – обратный метрический тензор; E – 4×4 единичная матрица.

В формулах (2), (3) и ниже значки из греческого алфавита принимают значения 0, 1, 2, 3, аналогичные значки из латинского алфавита принимают значения 1, 2, 3. По одинаковым верхним и нижним значкам подразумевается суммирование соответствующих слагаемых.

В последующем наряду с матрицами Дирака γ^α с мировыми индексами мы будем использовать матрицы Дирака γ^α с локальными индексами, удовлетворяющие соотношению

$$\gamma^\alpha \gamma^\beta + \gamma^\beta \gamma^\alpha = 2\eta^{\alpha\beta} E. \quad (4)$$

В (4) $\eta^{\alpha\beta}$ соответствует метрическому тензору плоского пространства Минковского с сигнатурой

$$\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}[1, -1, -1, -1]. \quad (5)$$

Удобно выбрать величины γ^α такими, чтобы они имели одинаковый вид во всех локальных системах отсчета. Как системы γ^α , так и системы γ^α могут быть использованы для построения полной системы 4×4 матриц. Пример полной системы приведен ниже:

$$E, \gamma^\alpha, S^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\gamma^\alpha \gamma^\beta - \gamma^\beta \gamma^\alpha), \quad (6)$$

$$\gamma_5 = \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3, \quad \gamma_5 \gamma^\alpha.$$

Любой набор матриц Дирака пригоден для нескольких дискретных автоморфизмов. Мы ограничимся автоморфизмом

$$\gamma^\alpha \rightarrow (\gamma^\alpha)^+ = -D\gamma^\alpha D^{-1}, \quad (7)$$

матрица D называется антиэрмитизирующей.

Ковариантная производная биспинора $\nabla_\alpha \psi$ в (2) равна

$$\nabla_\alpha \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x^\alpha} + \Phi_\alpha \psi. \quad (8)$$

В (8) для определения биспинорных связностей Φ_α необходим выбор определенной системы тетрадных векторов H_α^μ , удовлетворяющих соотношениям

$$H_{\underline{\alpha}}^{\underline{\mu}} H_{\underline{\beta}}^{\underline{\nu}} g_{\underline{\mu}\underline{\nu}} = \eta_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}. \quad (9)$$

В дополнение к тетрадным векторам $H_{\underline{\alpha}}^{\underline{\mu}}$ можно ввести три другие системы тетрадных векторов $H_{\underline{\alpha}\underline{\mu}}, H^{\underline{\alpha}\underline{\mu}}, H_{\underline{\mu}}^{\underline{\alpha}}$, которые отличаются от $H_{\underline{\alpha}}^{\underline{\mu}}$ местом мировых и локальных (подчеркнутых) индексов. Мировые индексы поднимаются и опускаются посредством метрического тензора $g_{\underline{\mu}\underline{\nu}}$ и обратного тензора $g^{\underline{\mu}\underline{\nu}}$, локальные индексы поднимаются и опускаются посредством тензоров $\eta_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}, \eta^{\underline{\alpha}\underline{\beta}}$.

При выборе системы тетрадных векторов биспинорные связности определяются с помощью кристоффельных производных от тетрадных векторов

$$\Phi_{\alpha} = -\frac{1}{4} H_{\underline{\mu}}^{\underline{\varepsilon}} H_{\underline{\nu}\underline{\varepsilon};\underline{\alpha}} S^{\underline{\mu}\underline{\nu}} = \frac{1}{4} H_{\underline{\mu}}^{\underline{\varepsilon}} H_{\underline{\nu}\underline{\varepsilon};\underline{\alpha}} S^{\underline{\mu}\underline{\nu}}. \quad (10)$$

Связь между γ^{α} и $\gamma^{\underline{\alpha}}$ определяется соотношением

$$\gamma^{\alpha} = H_{\underline{\beta}}^{\underline{\alpha}} \gamma^{\underline{\beta}}. \quad (11)$$

При координатных преобразованиях

$$\{x^{\alpha}\} \rightarrow \{x'^{\alpha}\} \quad (12)$$

выполняются следующие соотношения:

$$\gamma'^{\alpha} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \gamma^{\beta}, \quad (13)$$

$$\Phi'_{\alpha} = \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\alpha}} \Phi_{\beta}. \quad (14)$$

Две произвольные системы тетрадных векторов в одном и том же пространстве-времени связаны друг с другом преобразованием Лоренца $L(x)$

$$\tilde{H}_{\underline{\alpha}}^{\underline{\mu}}(x) = \Lambda_{\underline{\alpha}}^{\underline{\beta}}(x) H_{\underline{\beta}}^{\underline{\mu}}(x). \quad (15)$$

Величины $\Lambda_{\underline{\alpha}}^{\underline{\beta}}(x)$ удовлетворяют соотношениям

$$\Lambda_{\underline{\alpha}}^{\underline{\mu}}(x) \Lambda_{\underline{\beta}}^{\underline{\nu}}(x) \eta^{\underline{\alpha}\underline{\beta}} = \eta^{\underline{\mu}\underline{\nu}}, \quad (16)$$

$$\Lambda_{\underline{\alpha}}^{\underline{\mu}}(x) \Lambda_{\underline{\beta}}^{\underline{\nu}}(x) \eta_{\underline{\mu}\underline{\nu}} = \eta_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}.$$

Введенный математический аппарат обеспечивает ковариантность уравнения Дирака (2) как при координатных преобразованиях (12), так и при переходе от одной системы тетрадных векторов к другой (15).

1.2. Релятивистское уравнение Шредингера

Для полного применения аппарата квантовой механики целесообразен переход от уравнения Ди-

рака (2) к уравнению типа Шредингера с выделением производной волновой функции от времени.

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H \Psi. \quad (17)$$

В левой части (17) $t = x^0$; в правой части (17) H является оператором Гамильтона.

Учитывая (8) и равенство $\gamma^0 \gamma^0 = g^{00}$, из уравнения (2) можно получить выражение для гамильтониана

$$H = \frac{m}{g^{00}} \gamma^0 - \frac{1}{g^{00}} i \gamma^0 \gamma^k \frac{\partial}{\partial x^k} - i \Phi_0 - \frac{1}{g^{00}} i \gamma^0 \gamma^k \Phi_k. \quad (18)$$

В работе [12] показано, что в одном и том же пространстве-времени с помощью преобразования Лоренца $L(x)$ можно от любой системы тетрадных векторов $\{H_{\underline{\alpha}}^{\underline{\mu}}(x)\}$ перейти к системе тетрадных векторов $\{\tilde{H}_{\underline{\alpha}}^{\underline{\mu}}(x)\}$ в калибровке Швингера [14].

Для системы $\{\tilde{H}_{\underline{\alpha}}^{\underline{\mu}}(x)\}$

$$\tilde{H}_{\underline{0}}^{\underline{0}} = \sqrt{g^{00}}; \quad \tilde{H}_{\underline{0}}^{\underline{k}} = -\frac{g^{0k}}{\sqrt{g^{00}}}; \quad \tilde{H}_{\underline{k}}^{\underline{0}} = 0. \quad (19)$$

Пространственные тетрады, удовлетворяющие соотношениям, написанным ниже, могут быть использованы в качестве тетрадных векторов $\tilde{H}_{\underline{m}}^{\underline{n}}$:

$$\tilde{H}_{\underline{k}}^{\underline{m}} \tilde{H}_{\underline{k}}^{\underline{n}} = f^{mn}; \quad f^{mn} = g^{mn} + \frac{g^{om} g^{0n}}{g^{00}}; \quad (20)$$

$$f^{mn} g_{nk} = \delta_k^m.$$

Матрица преобразования Лоренца имеет вид

$$L(x) = R \exp \left\{ \frac{\theta}{2} \frac{\tilde{H}_{\underline{0}}^{\underline{\varepsilon}} H_{\underline{0}\underline{\varepsilon}}^{\underline{\nu}} S_{\underline{\mu}\underline{\nu}}}{\sqrt{(\tilde{H}_{\underline{0}}^{\underline{\varepsilon}} H_{\underline{0}\underline{\varepsilon}})^2 - 1}} \right\}. \quad (21)$$

Здесь R представляет матрицу пространственного вращения, коммутирующую с γ^0 . Второй множитель представляет преобразование гиперболического вращения (boost) на угол θ , определяемый из соотношения

$$\operatorname{th} \frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{(\tilde{H}_{\underline{0}}^{\underline{\varepsilon}} H_{\underline{0}\underline{\varepsilon}}) + 1}}{\sqrt{(\tilde{H}_{\underline{0}}^{\underline{\varepsilon}} H_{\underline{0}\underline{\varepsilon}}) - 1}}. \quad (22)$$

Матрица L преобразует $\gamma^0(x)$ в диагональный вид

$$L \gamma^0 L^{-1} = \sqrt{g^{00}} \gamma^0. \quad (23)$$

Учитывая некоторую свободу выбора пространственных тетрад $\tilde{H}_{\underline{m}}^{\underline{n}}$, определяемую соот-

ношениями (20), при переходе от гамильтониана (18) с тетрадными векторами $\{H_{\underline{\alpha}}^{\mu}(x)\}$ к гамильтонианам \tilde{H} с системой тетрадных векторов в калибровке Швингера $\{\tilde{H}_{\underline{\alpha}}^{\mu}(x)\}$ и с разными наборами \tilde{H}_m^n , можно получить несовпадающие друг с другом выражения. В действительности эти гамильтонианы физически эквивалентны, так как они связаны унитарными матрицами пространственных вращений.

1.3. Условия эрмитовости для гамильтонианов и волновых функций

В работе [12] показано, что стационарные дираковские гамильтонианы во внешнем гравитационном поле являются псевдоэрмитовыми и удовлетворяют условию псевдоэрмитовой квантовой механики [15–17].

$$H^+ = \rho H \rho^{-1}. \quad (24)$$

Оператор ρ в (24) является весовым оператором Паркера [18]

$$\rho = \sqrt{-g} \gamma^0 \gamma^0. \quad (25)$$

Для тетрадных векторов в калибровке Швингера

$$\rho = \sqrt{-g} \sqrt{g^{00}}. \quad (26)$$

Скалярное произведение волновых функций с оператором ρ имеет вид

$$(\Phi, \Psi) = \int \Psi^+(x) \rho(x) \Psi(x) d^3x. \quad (27)$$

Общее условие эрмитовости дираковских гамильтонианов во внешних гравитационных полях $(\Phi, H\Psi) = (H\Phi, \Psi)$ можно записать в виде [11]

$$\oint ds_k (\sqrt{-g} j^k) + \int d^3x \sqrt{-g} \times \\ \times \left[\Psi^+ \gamma^0 \left(\gamma^0_{,0} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \ 0 \end{pmatrix} \gamma^0 \right) \Psi + \begin{pmatrix} k \\ k \ 0 \end{pmatrix} j^0 \right] = 0. \quad (28)$$

В (28) компоненты тока j^{μ} определены в виде

$$j^{\mu} = \Psi^+ \gamma^0 \gamma^{\mu} \Psi. \quad (29)$$

Для не зависящих от времени гамильтонианов $\gamma^0_{,0} \equiv \frac{\partial \gamma^0}{\partial x^0} = 0$ символы Кристоффеля $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k \\ k \ 0 \end{pmatrix}$ для центрально-симметричных полей равны нулю и условие (28) становится равным

$$\oint ds_k (\sqrt{-g} j^k) = 0. \quad (30)$$

Если существует оператор η , удовлетворяющий соотношению

$$\left(\frac{g_G}{g} \right)^{1/2} \rho = \eta^+ \eta, \quad (31)$$

то гамильтониан

$$H_{\eta} = \eta H \eta^{-1} \quad (32)$$

будет самосопряженным

$$H_{\eta}^+ = H_{\eta}, \quad (33)$$

а скалярное произведение (27) становится плоским (без весового множителя $\rho(x)$).

При этом

$$\Psi_{\eta}(x) = \eta \Psi(x). \quad (34)$$

В (31) введено обозначение $g_G = \frac{g}{g_c}$ [14], где

g_c – детерминант, который возникает при написании элемента объема в криволинейных координатах ($g_c = 1$ – для декартовых координат, $g_c = r^2$ – для цилиндрических координат, $g_c = r^4 \sin^2 \theta$ – для сферических координат и т. д.).

В работе [13] показано, что для рассматриваемых метрик центрально-симметричных гравитационных полей гамильтониан H_{η} (32) может быть получен без прямого вычисления биспинорных связностей (10) из выражения

$$H_{\eta} = \frac{1}{2} (\tilde{H}_{red} + \tilde{H}_{red}^+), \quad (35)$$

где \tilde{H}_{red} является частью начального гамильтониана (18) с тетрадами в калибровке Швингера без слагаемых с биспинорными связностями $\tilde{\Phi}_0, \tilde{\Phi}_k$.

1.4. Области определения волновых функций

При определении областей определения волновых функций будем руководствоваться выполнением условий причинности Гильберта [19, 20]

$$g < 0; \quad g_{00} > 0; \quad g_{11} < 0;$$

$$\left| \begin{matrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{matrix} \right| > 0; \quad \left| \begin{matrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{matrix} \right| < 0. \quad (36)$$

Особенно будем следить за выполнением второго неравенства $g_{00} > 0$; все другие неравенства в (36), как правило, выполняются для известных решений ОТО.

1.5. Инерциальная и вращающаяся системы координат в пространстве Минковского

Как пример необходимости выполнения условия $g_{00} > 0$ рассмотрим дираковские гамильтонианы в инерциальной и вращающейся системах отсчета пространства Минковского.

Для инерциальной системы отсчета $(x'^{\mu}) = (t', x', y', z')$ гамильтониан дираковской частицы с неограниченной областью определения волновых функций имеет вид

$$H' = \gamma^0 m - i\gamma^0 \gamma^k \frac{\partial}{\partial x'^k}. \quad (37)$$

Введем вращающуюся систему отсчета [20]

$$\begin{aligned} t &= t'; \quad x = x' \cos \omega t + y' \sin \omega t; \\ y &= -x' \sin \omega t + y' \cos \omega t; \quad z = z'. \end{aligned} \quad (38)$$

В (38) скорость вращения ω – вещественное число. Метрика Минковского в этой системе отсчета стационарна и имеет вид

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(1 - \omega^2 (x^2 + y^2)\right) dt^2 + \\ &+ 2\omega(ydx - xdy) dt - dx^2 - dy^2 - dz^2. \end{aligned} \quad (39)$$

Гамильтониан (37) в новой системе отсчета имеет вид (см., например, [21])

$$H = \gamma^0 m - i\gamma^0 \gamma^k \frac{\partial}{\partial x'^k} - i\omega \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right). \quad (40)$$

Область определения волновых функций гамильтониана (40) ограничивается условием $g_{00} > 0$, что для метрики (39) сводится к условию $\sqrt{x^2 + y^2} < \frac{1}{\omega}$. Невыполнение этого условия при-

водит к тому, что для расстояний $\sqrt{x^2 + y^2} > \frac{1}{\omega}$ скорость вращения была бы больше скорости света. Таким образом, при $g_{00} < 0$ вращающаяся система отсчета не может быть осуществлена реальными телами [20].

1.6. Дорожная карта квантово-механического анализа эквивалентности центрально-симметричных решений уравнений ОТО

В качестве базовой метрики рассматриваем решение Шварцшильда в координатах (t, r, θ, φ) . Все другие центрально-симметричные решения уравнений ОТО будут получаться соответствующими координатными преобразованиями базовой метрики.

Для каждой метрики прямым образом будут получены дираковские самосопряженные гамильтонианы с плоским скалярным произведением

волновых функций и с тетрадами в калибровке Швингера (19), (20).

Далее для преобразованных метрик самосопряженные гамильтонианы в η -представлении и с тетрадами (19), (20) будут получены в два этапа. Первый этап – преобразование базового самосопряженного гамильтониана Шварцшильда к координатам другой метрики в соответствии с (11)–(13) с сохранением тетрад базового гамильтониана, т. е. при этом преобразовании тетрады равны

$$H_{\underline{\beta}}'^{\alpha} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} H_{\underline{\beta}}^{\mu}. \quad (41)$$

При необходимости осуществляется второй этап – преобразование Лоренца (15), (16), (21), (22) для приведения полученного гамильтониана в координатах другой метрики к тетрадам в калибровке Швингера.

В конце преобразований будут контролироваться область определения волновых функций, эрмитовость гамильтониана, возможность существования стационарных связанных состояний частиц с полуцелым спином в соответствующих гравитационных полях.

2. Метрика Шварцшильда в координатах (t, r, θ, φ)

Квадрат интервала

$$ds^2 = f_S dt^2 - \frac{dr^2}{f_S} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (42)$$

В (42) $f_S = 1 - \frac{r_0}{r}$. Ненулевые тетрады в калибровке Швингера $\tilde{H}_{\underline{\alpha}}^{\mu}$ равны

$$\begin{aligned} \tilde{H}_0^0 &= \frac{1}{\sqrt{f_S}}; \quad \tilde{H}_1^1 = \sqrt{f_S}; \\ \tilde{H}_2^2 &= \frac{1}{r}; \quad \tilde{H}_3^3 = \frac{1}{r \sin \theta}. \end{aligned} \quad (43)$$

В соответствии с (11) матрицы $\tilde{\gamma}^{\alpha}$ равны

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}^0 &= \frac{1}{\sqrt{f_S}} \gamma^0; \quad \tilde{\gamma}^1 = \sqrt{f_S} \gamma^1; \\ \tilde{\gamma}^2 &= \frac{1}{r} \gamma^2; \quad \tilde{\gamma}^3 = \frac{1}{r \sin \theta} \gamma^3. \end{aligned} \quad (44)$$

Самосопряженный дираковский гамильтониан с тетрадами (43) имеет вид [13]

$$\begin{aligned} H_{\eta} &= \sqrt{f_S} m \gamma^0 - i \sqrt{f_S} \gamma^0 \times \\ &\times \left\{ \gamma^1 \sqrt{f_S} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) + \gamma^2 \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \text{ctg} \theta \right) + \right. \end{aligned}$$

$$+\gamma^3 \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\} - \frac{i}{2} \frac{\partial f_S}{\partial r} \gamma^0 \gamma^1. \quad (45)$$

Область определения волновых функций уравнения Дирака с гамильтонианом (45) ограничивается условием причинности Гильберта

$$g_{00} > 0 \rightarrow f_S = 1 - \frac{r_0}{r} > 0 \rightarrow r > r_0. \quad (46)$$

Из (46) следует

$$\sqrt{f_S} - \text{положительное вещественное число.} \quad (47)$$

Оператор преобразования η (31) равен

$$\eta = \frac{1}{f_S^{1/4}}. \quad (48)$$

Компоненты тока

$$j^\mu = \psi_\eta^+ (\eta^{-1})^+ (\gamma^0 \tilde{\gamma}^\mu) (\eta^{-1}) \psi_\eta \quad (49)$$

равны

$$j^0 = \psi_\eta^+ \psi_\eta, \quad (50)$$

$$j^r = \psi_\eta^+ f_S \gamma^1 \psi_\eta = 0, \quad (51)$$

$$j^\theta = \psi_\eta^+ \frac{\sqrt{f_S}}{r} \gamma^2 \psi_\eta = 0, \quad (52)$$

$$j^\varphi = \psi_\eta^+ \frac{\sqrt{f_S}}{r \sin \theta} \gamma^3 \psi_\eta. \quad (53)$$

Равенство нулю радиальной (51) и полярной (52) компонент тока обусловлено видом сферических гармоник для спина 1/2 (см., например, [22, 23]).

В случае метрики Шварцшильда для области определения волновых функций (46) условия эрмитовости дираковских гамильтонианов (28), (30) можно записать в виде

$$4\pi r^2 j^r(r) \Big|_{r \rightarrow \infty} + 4\pi r^2 j^r(r) \Big|_{r \rightarrow r_0} = 0, \quad (54)$$

что с учетом (51) автоматически выполняется. Отсюда следует, что с введением физически разумного граничного условия для волновых функций на любой сферической поверхности с $r > r_0$ и отбором экспоненциально спадающих решений при $r \rightarrow \infty$ самосопряженный гамильтониан (45) будет иметь стационарный вещественный энергетический спектр связанных состояний частиц со спином 1/2 [24, 25].

Иногда для осуществления возможности движения частиц в поле Шварцшильда под «горизонтом событий» предлагается в метрике Шварцшильда (42) взаимно поменять местами временную и радиальную координаты [26, 27]. Тогда квадрат интервала становится равным

$$ds^2 = \frac{t}{r_0 - t} dt^2 - \frac{r_0 - t}{t} dr^2 -$$

$$-t^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (55)$$

В (55) $t \in (0, r_0)$, $r \in (0, \infty)$.

Ненулевые компоненты тетрадных векторов в калибровке Швингера равны

$$\tilde{H}_0^0 = \sqrt{\frac{r_0 - t}{t}}; \quad \tilde{H}_1^1 = \sqrt{\frac{t}{r_0 - t}}; \quad (56)$$

$$\tilde{H}_2^2 = \frac{1}{t}; \quad \tilde{H}_3^3 = \frac{1}{t \sin \theta}.$$

Самосопряженный гамильтониан в η -представлении равен

$$H_\eta = \sqrt{\frac{t}{r_0 - t}} m \gamma^0 - i \gamma^0 \gamma^1 \frac{t}{r_0 - t} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) -$$

$$-i \gamma^0 \gamma^2 \sqrt{\frac{t}{r_0 - t}} \frac{1}{t} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \text{ctg} \theta \right) -$$

$$-i \gamma^0 \gamma^3 \sqrt{\frac{t}{r_0 - t}} \frac{1}{t \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (57)$$

Область определения волновых функций гамильтониана (57) ограничена условием причинности Гильберта $g_{00} > 0$, т. е.

$$t < r_0. \quad (58)$$

Гамильтониан (57) явно зависит от времени и физически неэквивалентен стационарному гамильтониану (45) с областью определения волновых функций $r > r_0$. Условие Гильберта $g_{00} > 0$ не позволяет «сшивать» волновые функции на «горизонте событий» $r = r_0$.

Далее мы будем рассматривать преобразования гамильтониана (45) с областью определения волновых функций $r > r_0$ и с вещественными положительными значениями $\sqrt{f_S}$.

3. Метрики Шварцшильда в изотропных и гармонических координатах

3.1. Решение Шварцшильда в изотропных координатах

Координаты

$$(t, R, \theta, \varphi). \quad (59)$$

Координатное преобразование

$$r = R \left(1 + \frac{r_0}{4R} \right)^2; \quad dR = \frac{dr}{\left(1 - \frac{r_0^2}{16R^2} \right)}. \quad (60)$$

Квадрат интервала

$$ds^2 = V^2(R)dt^2 - W^2(R)\left[dR^2 + R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)\right]. \quad (61)$$

Здесь

$$V(R) = \frac{1 - \frac{r_0}{4R}}{1 + \frac{r_0}{4R}}, \quad W(R) = \left(1 + \frac{r_0}{4R}\right)^2. \quad (62)$$

Определитель $(-g)$, величина g_G , оператор η равны

$$-g = V^2 W^6 R^4 \sin^2\theta = \left(1 + \frac{r_0}{4R}\right)^6 R^4 \sin^2\theta, \quad (63)$$

$$g_G = \left(1 + \frac{r_0}{4R}\right)^6, \quad (64)$$

$$\eta = (g_G)^{1/4} (g^{00})^{1/4} = \frac{\left(1 + \frac{r_0}{4R}\right)^2}{\left(1 - \frac{r_0}{4R}\right)^{1/2}}. \quad (65)$$

Ненулевые компоненты тетрадных векторов \tilde{H}_α^μ в калибровке Швингера:

$$\tilde{H}_0^0 = \frac{1 + \frac{r_0}{4R}}{1 - \frac{r_0}{4R}}; \quad \tilde{H}_1^1 = \frac{1}{\left(1 + \frac{r_0}{4R}\right)^2}; \quad (66)$$

$$\tilde{H}_2^2 = \frac{1}{\left(1 + \frac{r_0}{4R}\right)^2} \frac{1}{R}; \quad \tilde{H}_3^3 = \frac{1}{\left(1 + \frac{r_0}{4R}\right)^2} \frac{1}{R \sin\theta}.$$

Матрицы $\tilde{\gamma}^\alpha$ равны

$$\tilde{\gamma}^0 = \frac{1 + \frac{r_0}{4R}}{1 - \frac{r_0}{4R}} \gamma^0; \quad \tilde{\gamma}^1 = \frac{1}{\left(1 + \frac{r_0}{4R}\right)^2} \gamma^1; \quad (67)$$

$$\tilde{\gamma}^2 = \frac{1}{R \left(1 + \frac{r_0}{4R}\right)^2} \gamma^2; \quad \tilde{\gamma}^3 = \frac{1}{R \sin\theta \left(1 + \frac{r_0}{4R}\right)^2} \gamma^3.$$

Самосопряженный гамильтониан в η -представлении с тетрадами (66) равен

$$H_\eta = \frac{1 - \frac{r_0}{4R}}{1 + \frac{r_0}{4R}} m \gamma^0 - i \frac{1 - \frac{r_0}{4R}}{\left(1 + \frac{r_0}{4R}\right)^3} \gamma^0 \left[\gamma^1 \left(\frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R} \right) \right] + \gamma^2 \frac{1}{R} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \operatorname{ctg}\theta \right) + \gamma^3 \frac{1}{R \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \Big] -$$

$$- \frac{i}{2} \gamma^0 \gamma^1 \frac{\partial}{\partial R} \frac{1 - \frac{r_0}{4R}}{\left(1 + \frac{r_0}{4R}\right)^3}. \quad (68)$$

Компоненты тока

$$j^\mu = \Psi_\eta^+ (\eta^{-1})^+ \gamma^0 \tilde{\gamma}^\mu (\eta^{-1}) \Psi_\eta \quad (69)$$

равны

$$j^0 = \Psi_\eta^+ \frac{1}{\left(1 + \frac{r_0}{4R}\right)^3} \Psi_\eta, \quad (70)$$

$$j^r = j^\theta = 0, \quad (71)$$

$$j^\varphi = \Psi_\eta^+ \frac{1 - \frac{r_0}{4R}}{\left(1 + \frac{r_0}{4R}\right)^6} \gamma^0 \gamma^3 \Psi_\eta. \quad (72)$$

Получим теперь гамильтониан (68) непосредственным преобразованием базового гамильтониана (45) с тетрадами (43).

При координатном преобразовании (60) тетрады (43) преобразуются в соответствии с (41).

$$\left(H_0^0\right)_{is} = \frac{\partial t}{\partial t} \left(H_0^0\right)_S = \frac{1}{\sqrt{f_S}} = \frac{1 + \frac{r_0}{4R}}{1 - \frac{r_0}{4R}}; \quad (73)$$

$$\left(H_1^1\right)_{is} = \frac{\partial R}{\partial r} \left(H_1^1\right)_S = \frac{\sqrt{f_S}}{1 - \frac{r_0^2}{16R^2}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{r_0}{4R}\right)^2}; \quad (74)$$

$$\left(H_2^2\right)_{is} = \left(H_2^2\right)_S = \frac{1}{r} = \frac{1}{R \left(1 + \frac{r_0}{4R}\right)^2}; \quad (75)$$

$$\left(H_3^3\right)_{is} = \left(H_3^3\right)_S = \frac{1}{r \sin\theta} = \frac{1}{R \sin\theta \left(1 + \frac{r_0}{4R}\right)^2}. \quad (76)$$

Преобразованные тетрады совпадают с тетрадами в калибровке Швингера (66) для метрики Шварцшильда в изотропных координатах. В соответствии с (35) гамильтониан с тетрадами (73)–(76) будет совпадать с гамильтонианом (68).

Обратим внимание, что при определении тетрады $\left(H_0^0\right)_{is}$ (73) для сохранения условия положительности $\sqrt{f_S}$ (47) необходимо выполнение условия $R > \frac{r_0}{4}$.

Таким образом, несмотря на то, что в преобразованной метрике условие причинности Гильберта $g_{00} > 0$ выполняется для интервала $R \in (0, \infty)$, введенные ограничения на область определения волновых функций в гамильтониане (45) с базовой метрикой Шварцшильда продолжают действовать в новых переменных для области определения преобразованного гамильтониана (68). Область определения волновых функций уравнения Дирака с метрикой Шварцшильда в изотропных координатах равна

$$R > \frac{r_0}{4}. \quad (77)$$

3.2. Решение Шварцшильда в сферических гармонических координатах

Координаты

$$(t, R, \theta, \varphi). \quad (78)$$

Координатное преобразование

$$r = R + \frac{r_0}{2}; \quad dr = dR. \quad (79)$$

Квадрат интервала

$$ds^2 = \frac{\left(1 - \frac{r_0}{2R}\right)}{\left(1 + \frac{r_0}{2R}\right)} dt^2 - \frac{\left(1 + \frac{r_0}{2R}\right)}{\left(1 - \frac{r_0}{2R}\right)} dR^2 - \left(1 + \frac{r_0}{2R}\right)^2 R^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (80)$$

Определитель $(-g)$, величина g_G , оператор η равны

$$-g = \left(1 + \frac{r_0}{2R}\right)^4 R^4 \sin^2 \theta, \quad (81)$$

$$g_G = \left(1 + \frac{r_0}{2R}\right)^4, \quad (82)$$

$$\eta = (g_G)^{1/4} (g^{00})^{1/4} = \frac{\left(1 + \frac{r_0}{2R}\right)^{5/4}}{\left(1 - \frac{r_0}{2R}\right)^{1/4}}. \quad (83)$$

Ненулевые тетрады \tilde{H}_α^μ в калибровке Швингера:

$$\tilde{H}_0^0 = \sqrt{\frac{1 + \frac{r_0}{2R}}{1 - \frac{r_0}{2R}}}; \quad \tilde{H}_1^1 = \sqrt{\frac{1 - \frac{r_0}{2R}}{1 + \frac{r_0}{2R}}}; \quad (84)$$

$$\tilde{H}_2^2 = \frac{1}{R \left(1 + \frac{r_0}{2R}\right)}; \quad \tilde{H}_3^3 = \frac{1}{R \sin \theta \left(1 + \frac{r_0}{2R}\right)}.$$

Матрицы $\tilde{\gamma}^\alpha$ равны

$$\tilde{\gamma}^0 = \sqrt{\frac{1 + \frac{r_0}{2R}}{1 - \frac{r_0}{2R}}} \gamma^0; \quad \tilde{\gamma}^1 = \sqrt{\frac{1 - \frac{r_0}{2R}}{1 + \frac{r_0}{2R}}} \gamma^1; \quad (85)$$

$$\tilde{\gamma}^2 = \frac{1}{R \left(1 + \frac{r_0}{2R}\right)} \gamma^2; \quad \tilde{\gamma}^3 = \frac{1}{\left(1 + \frac{r_0}{2R}\right) R \sin \theta} \gamma^3.$$

Самосопряженный гамильтониан в η -представлении с тетрадами (84) равен

$$H_\eta = \sqrt{\frac{1 - \frac{r_0}{2R}}{1 + \frac{r_0}{2R}}} m \gamma^0 - i \frac{1 - \frac{r_0}{2R}}{1 + \frac{r_0}{2R}} \gamma^0 \gamma^1 \left(\frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R} \right) - i \sqrt{\frac{1 - \frac{r_0}{2R}}{1 + \frac{r_0}{2R}}} \frac{1}{1 + \frac{r_0}{2R}} \times \left[\gamma^0 \gamma^2 \frac{1}{R} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \theta \right) + \gamma^0 \gamma^3 \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] - \frac{i}{2} \gamma^0 \gamma^1 \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1 - \frac{r_0}{2R}}{1 + \frac{r_0}{2R}} \right). \quad (86)$$

Компоненты тока (69) для рассматриваемого случая равны

$$j^0 = \Psi_\eta^+ \frac{1}{\left(1 + \frac{r_0}{2R}\right)^2} \Psi_\eta, \quad (87)$$

$$j^r = j^\theta = 0, \quad (88)$$

$$j^\varphi = \Psi_\eta^+ \frac{\left(1 - \frac{r_0}{2R}\right)^{1/2}}{\left(1 + \frac{r_0}{2R}\right)^{7/2} R \sin \theta} \gamma^0 \gamma^3 \Psi_\eta. \quad (89)$$

При координатном преобразовании (79) тетрады (84) преобразуются в соответствии с (41)

$$\left(H_0^0\right)_{gr} = \frac{\partial t}{\partial t} \left(H_0^0\right)_s = \frac{1}{\sqrt{f_s}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{r_0}{2R}}{1 - \frac{r_0}{2R}}}; \quad (90)$$

$$\left(H_1^1\right)_{gr} = \frac{\partial R}{\partial r} \left(H_1^1\right)_s = \sqrt{f_s} = \sqrt{\frac{1 - \frac{r_0}{2R}}{1 + \frac{r_0}{2R}}}; \quad (91)$$

$$\left(H_{\underline{2}}^{r2}\right)_{gr} = \left(H_{\underline{2}}^2\right)_S = \frac{1}{r} = \frac{1}{R\left(1 + \frac{r_0}{2R}\right)}; \quad (92)$$

$$\left(H_{\underline{3}}^{r3}\right)_{gr} = \left(H_{\underline{3}}^3\right)_S = \frac{1}{r \sin \theta} = \frac{1}{R \sin \theta \left(1 + \frac{r_0}{2R}\right)}. \quad (93)$$

Преобразованные тетрады (90)–(93) совпадают с тетрадами в калибровке Швингера (84) для метрики Шварцшильда в сферических гармонических координатах. В соответствии с (35) гамильтониан с тетрадами (90)–(93) будет совпадать с гамильтонианом (86).

Так же как и для метрики в изотропных координатах (см. п. 3.1), при определении тетрад $\left(H_{\underline{0}}^{r0}\right)_{gr}$ (90) и $\left(H_{\underline{1}}^{r1}\right)_{gr}$ (91) для сохранения условия вещественности f_S (47) необходимо выполнение условия $R > \frac{r_0}{2}$. Это же следует из условия причинности Гильберта $g_{00} > 0$ для рассматриваемой метрики (80).

Приведенное в п. 3.1, 3.2 рассмотрение показывает, что самосопряженные гамильтонианы для метрик Шварцшильда в изотропных и гармонических координатах (68), (86) эквивалентны базовому гамильтониану (45) за исключением изменения

области определения волновых функций $R > \frac{r_0}{4}$

для метрики (68) и $R > \frac{r_0}{2}$ для метрики (86). Эти

изменения обязаны координатным преобразованиям (60), (79).

Для всех трех гамильтонианов (45), (68), (86) выполняется условие эрмитовости (28), (54) при соответствующем переопределении «горизонтов событий»: r_0 – метрика Шварцшильда (42); $\frac{r_0}{2}$ – метрика Шварцшильда в гармонических координатах (80); $\frac{r_0}{4}$ – метрика Шварцшильда в изотропных координатах.

4. Метрики Эддингтона – Финкельштейна и Пенлеви – Гуллстранда

4.1. Решение Эддингтона – Финкельштейна

Координаты

$$(T, r, \theta, \varphi). \quad (94)$$

Координатное преобразование

$$dT = dt + \frac{r_0}{r} \frac{dr}{f_S}. \quad (95)$$

Квадрат интервала

$$ds^2 = f_S dT^2 - 2 \frac{r_0}{r} dT dr - \left(1 + \frac{r_0}{r}\right) dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (96)$$

Определитель $(-g)$, величина g_G , оператор η равны

$$-g = r^4 \sin^2 \theta, \quad (97)$$

$$g_G = 1, \quad (98)$$

$$\eta = \left(1 + \frac{r_0}{r}\right)^{1/4}. \quad (99)$$

Ненулевые тетрады $\tilde{H}_{\underline{\alpha}}^{\mu}$ в калибровке Швингера:

$$\tilde{H}_{\underline{0}}^0 = \sqrt{1 + \frac{r_0}{r}}; \quad \tilde{H}_{\underline{0}}^1 = -\frac{r}{\sqrt{1 + \frac{r_0}{r}}}; \quad (100)$$

$$\tilde{H}_{\underline{1}}^1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{r_0}{r}}}; \quad \tilde{H}_{\underline{2}}^2 = \frac{1}{r}; \quad \tilde{H}_{\underline{3}}^3 = \frac{1}{r \sin \theta}.$$

Матрицы $\tilde{\gamma}^{\alpha}$ равны

$$\tilde{\gamma}^0 = \sqrt{1 + \frac{r_0}{r}} \gamma^0; \quad \tilde{\gamma}^1 = -\frac{r}{\sqrt{1 + \frac{r_0}{r}}} \gamma^0 + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{r_0}{r}}} \gamma^1; \quad (101)$$

$$\tilde{\gamma}^2 = \frac{1}{r} \gamma^2; \quad \tilde{\gamma}^3 = \frac{1}{r \sin \theta} \gamma^3.$$

Самосопряженный гамильтониан в η -представлении с тетрадами (100) равен [13]

$$H_{\eta} = \frac{m}{\sqrt{1 + \frac{r_0}{r}}} \gamma^0 - i \gamma^0 \gamma^1 \frac{1}{1 + \frac{r_0}{r}} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} + \frac{r_0}{2r^2} \frac{1}{1 + \frac{r_0}{r}} \right) - i \gamma^0 \gamma^2 \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{r_0}{r}}} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \theta \right) - i \gamma^0 \gamma^3 \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{r_0}{r}}} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} + i \frac{r_0}{r} \frac{1}{1 + \frac{r_0}{r}} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} - \frac{1}{2r \left(1 + \frac{r_0}{r}\right)} \right). \quad (102)$$

Компоненты тока (69) равны

$$j^0 = \Psi_\eta^+ \Psi_\eta, \quad (103)$$

$$j^r = \Psi_\eta^+ \left(-\frac{r_0}{r} + \frac{\gamma^0 \gamma^1}{1 + \frac{r_0}{r}} \right) \Psi_\eta = \Psi_\eta^+ \left(-\frac{r_0}{r} \right) \Psi_\eta, \quad (104)$$

$$j^\theta = 0, \quad (105)$$

$$j^\varphi = \Psi_\eta^+ \frac{1}{\left(1 + \frac{r_0}{r}\right)^{1/2} r \sin \theta} \Psi_\eta. \quad (106)$$

Получим гамильтониан (102) непосредственным преобразованием базового гамильтониана (45) с тетрадами (43). При координатном преобразовании (95) преобразованные в соответствии с (41) ненулевые тетрады равны

$$\left(H_{\underline{0}}^0\right)_{E-F} = \frac{\partial T}{\partial t} \left(H_{\underline{0}}^0\right)_S = \frac{1}{\sqrt{f_S}}; \quad (107)$$

$$\left(H_{\underline{1}}^0\right)_{E-F} = \frac{\partial T}{\partial r} \left(H_{\underline{1}}^0\right)_S = \frac{r_0}{r \sqrt{f_S}}; \quad (108)$$

$$\left(H_{\underline{1}}^1\right)_{E-F} = \frac{\partial r}{\partial r} \left(H_{\underline{1}}^1\right)_S = \sqrt{f_S}; \quad (109)$$

$$\left(H_{\underline{2}}^2\right)_{E-F} = \left(H_{\underline{2}}^2\right)_S = \frac{1}{r}; \quad (110)$$

$$\left(H_{\underline{3}}^3\right)_{E-F} = \left(H_{\underline{3}}^3\right)_S = \frac{1}{r \sin \theta}. \quad (111)$$

В результате преобразования (95) по сравнению с тетрадами (43) появилась дополнительная ненулевая тетрада $\left(H_{\underline{1}}^0\right)_{E-F}$ (108).

Далее с помощью преобразования Лоренца (15), (16), (21), (22) приведем тетрады (107)–(111) к тетрадам в калибровке Швингера (100). Ненулевые величины $\Lambda_{\underline{\alpha}}^{\underline{\beta}}(r)$ в (15), (16) будут равны

$$\Lambda_{\underline{0}}^{\underline{0}} = \Lambda_{\underline{1}}^{\underline{1}} = \frac{1}{\sqrt{f_S} \sqrt{1 + \frac{r_0}{r}}}; \quad (112)$$

$$\Lambda_{\underline{0}}^{\underline{1}} = \Lambda_{\underline{1}}^{\underline{0}} = -\frac{r_0}{\sqrt{f_S} \sqrt{1 + \frac{r_0}{r}}}.$$

После такого двухэтапного преобразования базовый гамильтониан (45) преобразуется к виду (102). При проведении преобразований в (107)–(111), (112) присутствует выражение $\sqrt{f_S} = \sqrt{1 - \frac{r_0}{r}}$, которое в базовой метрике (42) яв-

ляется вещественным (см. (47)). Отсюда следует, что областью определения волновых функций гамильтониана (102) по-прежнему является

$$r \in (r_0, \infty). \quad (113)$$

Условие причинности Гильберта $q_{00} > 0$ для метрики Эддингтона–Финкельштейна (96) также приводит к области определения $r > r_0$.

Радиальная компонента тока (104) не равна нулю, поэтому для метрики Эддингтона–Финкельштейна не выполняется условие эрмитовости гамильтонианов (28), (54). Координатное преобразование (95), приводящее к новой временной координате T как функции $T(t, r)$, изменяет первоначальную эрмитовость гамильтониана (45). Самосопряженный гамильтониан (102) с областью определения волновых функций $r > r_0$ является неэрмитовым $((\Phi, H\Psi) \neq (H\Phi, \Psi))$.

4.2. Решение Пенлеви–Гуллстранда

Координаты

$$(T, r, \theta, \varphi). \quad (114)$$

Координатное преобразование

$$dT = dt + \sqrt{\frac{r_0}{r}} \frac{1}{f_S}. \quad (115)$$

Квадрат интервала

$$ds^2 = f_S dT^2 - 2\sqrt{\frac{r_0}{r}} dT dr - dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (116)$$

Определитель $(-g)$, величина g_G , оператор η равны

$$-g = r^4 \sin^2 \theta, \quad (117)$$

$$g_G = 1, \quad (118)$$

$$\eta = 1. \quad (119)$$

Ненулевые тетрады $\tilde{H}_{\underline{\alpha}}^{\underline{\mu}}$ в калибровке Швингера:

$$\tilde{H}_{\underline{0}}^{\underline{0}} = 1; \quad \tilde{H}_{\underline{0}}^{\underline{1}} = -\sqrt{\frac{r_0}{r}}; \quad \tilde{H}_{\underline{1}}^{\underline{1}} = 1; \quad (120)$$

$$\tilde{H}_{\underline{2}}^{\underline{2}} = \frac{1}{r}; \quad \tilde{H}_{\underline{3}}^{\underline{3}} = \frac{1}{r \sin \theta}.$$

Матрицы $\tilde{\gamma}^\alpha$ равны

$$\tilde{\gamma}^0 = \gamma^0; \quad \tilde{\gamma}^1 = -\sqrt{\frac{r_0}{r}} \gamma^0 + \gamma^1; \quad (121)$$

$$\tilde{\gamma}^2 = \frac{1}{r} \gamma^2; \quad \tilde{\gamma}^3 = \frac{1}{r \sin \theta} \gamma^3.$$

Самосопряженный гамильтониан в η -представлении с тетрадами (120) равен [13, 28]

$$H_\eta = \gamma^0 m - i\gamma^0 \left\{ \gamma^1 \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) + \gamma^2 \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \text{ctg} \theta \right) + \gamma^3 \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\} + i\sqrt{\frac{r_0}{r}} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{3}{4} \frac{1}{r} \right). \quad (122)$$

Компоненты тока (69) равны

$$j^0 = \psi_\eta^+ \psi_\eta, \quad (123)$$

$$j^r = \psi_\eta^+ \left(-\sqrt{\frac{r_0}{r}} + \gamma^0 \gamma^1 \right) \psi_\eta = \psi_\eta^+ \left(-\sqrt{\frac{r_0}{r}} \right) \psi_\eta, \quad (124)$$

$$j^\theta = 0, \quad (125)$$

$$j^\varphi = \psi_\eta^+ \frac{1}{r \sin \theta} \gamma^0 \gamma^3 \psi_\eta. \quad (126)$$

Получим гамильтониан (122) непосредственным преобразованием базового гамильтониана (45) с тетрадами (43). При координатном преобразовании (115) ненулевые преобразованные в соответствии с (41) тетрады равны

$$\left(H_0^0 \right)_{P-G} = \frac{\partial T}{\partial t} \left(H_0^0 \right)_S = \frac{1}{\sqrt{f_S}}, \quad (127)$$

$$\left(H_1^0 \right)_{P-G} = \frac{\partial T}{\partial r} \left(H_1^1 \right)_S = \frac{\sqrt{\frac{r_0}{r}}}{\sqrt{f_S}}, \quad (128)$$

$$\left(H_1^1 \right)_{P-G} = \frac{\partial r}{\partial r} \left(H_1^1 \right)_S = \sqrt{f_S}, \quad (129)$$

$$\left(H_2^2 \right)_{P-G} = \left(H_2^2 \right)_S = \frac{1}{r}, \quad (130)$$

$$\left(H_3^3 \right)_{P-G} = \left(H_3^3 \right)_S = \frac{1}{r \sin \theta}. \quad (131)$$

В результате преобразования (115) по сравнению с тетрадами (43) появилась дополнительная ненулевая тетрада $\left(H_1^0 \right)_{P-G}$ (128).

Далее с помощью преобразования Лоренца (15), (16), (21), (22) приведем тетрады (127)–(131) к тетрадам в калибровке Швингера (120). Ненулевые величины $\Lambda_{\underline{\alpha}}^{\underline{\beta}}(r)$ в (15), (16) будут равны

$$\Lambda_{\underline{0}}^{\underline{0}} = \Lambda_{\underline{1}}^{\underline{1}} = \frac{1}{\sqrt{f_S}}; \quad \Lambda_{\underline{0}}^{\underline{1}} = \Lambda_{\underline{1}}^{\underline{0}} = -\frac{\sqrt{\frac{r_0}{r}}}{\sqrt{f_S}}. \quad (132)$$

После такого двухэтапного преобразования базовый гамильтониан (45) преобразуется к виду (122).

При проведении преобразований в (127)–(129), (132) присутствует выражение $\sqrt{f_S} = \sqrt{1 - \frac{r_0}{r}}$, ко-

торое в базовой метрике (42) является вещественным (см. (47)). Отсюда следует, что область определения волновых функций гамильтониана (122) по-прежнему является

$$r \in (r_0, \infty). \quad (133)$$

Условие причинности Гильберта $g_{00} > 0$ для метрики Пенлеви–Гуллстранда (116) также приводит к области определения $r > r_0$.

Радиальная компонента тока (124) не равна нулю, и для метрики Пенлеви–Гуллстранда условие эрмитовости гамильтонианов (28), (54) не выполняется. Координатное преобразование (115), приводящее к новой временной координате T как функции $T(t, r)$, изменяет первоначальную эрмитовость гамильтониана (45). Самосопряженный гамильтониан (122) с областью определения волновых функций $r > r_0$ является неэрмитовым $((\Psi, H\Phi) \neq (H\Psi, \Phi))$.

Проведенное рассмотрение дираковских гамильтонианов в гравитационных полях Эддингтона–Финкельштейна (96) и Пенлеви–Гуллстранда (116) показывает, что их области определения волновых функций одинаковы с областью определения волновых функций базового гамильтониана (45) в поле Шварцшильда

$$r \in (r_0, \infty).$$

Это является следствием выполнения как условия причинности Гильберта $g_{00} > 0$, так и условия вещественности $\sqrt{f_S} = \sqrt{1 - \frac{r_0}{r}}$ при проведении прямых двухэтапных преобразований исходного гамильтониана (45) к виду самосопряженных гамильтонианов в η -представлении для решений Эддингтона–Финкельштейна и Пенлеви–Гуллстранда.

Расширение области определения до

$$r \in (0, \infty),$$

как это было сделано в работе [28], является неправомерным.

Несмотря на одинаковость областей определения волновых функций дираковских гамильтонианов (45), (102), (122), для метрик Эддингтона–Финкельштейна (96) и Пенлеви–Гуллстранда (116) из-за неэрмитовости гамильтонианов (102), (122) отсутствует возможность существования стационарных связанных состояний частиц со спином 1/2.

5. Метрики Леметра – Финкельштейна и Крускала

5.1. Решение Леметра – Финкельштейна

Координаты

$$(T, R, \theta, \varphi). \quad (134)$$

Координатные преобразования

$$dT = dt + \frac{\sqrt{\frac{r_0}{r}}}{f_S} dr, \quad dR = dt + \frac{dr}{f_S \sqrt{\frac{r_0}{r}}}, \quad (135)$$

$$R = T + \frac{2}{3} \frac{r^{3/2}}{r_0^{1/2}}, \quad r = \left[\frac{3}{2} (R - T) \right]^{2/3} r_0^{1/3}. \quad (136)$$

Квадрат интервала

$$ds^2 = dT^2 - \frac{dR^2}{\left[\frac{3}{2} (R - T) \right]^{2/3}} - \left[\frac{3}{2} (R - T) \right]^{4/3} r_0^{2/3} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (137)$$

Область определения T, R в (137):

$$R > T. \quad (138)$$

Определитель $(-g)$, величина g_G , оператор η равны

$$-g = \left[\frac{3}{2} (R - T) \right]^2 r_0^2 \sin^2 \theta, \quad (139)$$

$$g_G = \left[\frac{3}{2} (R - T) \right]^2 \frac{r_0^2}{R^4}, \quad (140)$$

$$\eta = (g_G)^{1/4} (g^{00})^{1/4} = \left(\left[\frac{3}{2} (R - T) \right]^2 \frac{r_0^2}{R^4} \right)^{1/4}. \quad (141)$$

Ненулевые компоненты тетрадных векторов

$\tilde{H}_{\underline{\alpha}}^{\mu}$ в калибровке Швингера:

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{\underline{0}}^0 &= 1; \quad \tilde{H}_{\underline{1}}^1 = \left[\frac{3}{2} (R - T) \right]^{1/3}; \\ \tilde{H}_{\underline{2}}^2 &= \frac{1}{\left[\frac{3}{2} (R - T) \right]^{2/3} r_0^{1/3}}; \\ \tilde{H}_{\underline{3}}^3 &= \frac{1}{\left[\frac{3}{2} (R - T) \right]^{2/3} r_0^{1/3} \sin \theta}. \end{aligned} \quad (142)$$

Матрицы $\tilde{\gamma}^{\alpha}$ равны

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}^0 &= \gamma^0; \quad \tilde{\gamma}^1 = \left[\frac{3}{2} (R - T) \right]^{1/3} \gamma^1; \\ \tilde{\gamma}^2 &= \frac{1}{\left[\frac{3}{2} (R - T) \right]^{2/3} r_0^{1/3}} \gamma^2; \\ \tilde{\gamma}^3 &= \frac{1}{\left[\frac{3}{2} (R - T) \right]^{2/3} r_0^{1/3} \sin \theta} \gamma^3. \end{aligned} \quad (143)$$

Самосопряженный гамильтониан в η -представлении с тетрадами (142) равен [13]

$$\begin{aligned} H_{\eta} &= \gamma^0 m - i\gamma^0 \gamma^1 \left[\frac{3}{2} (R - T) \right]^{1/3} \left(\frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R} \right) - \\ &- i\gamma^0 \gamma^2 \frac{1}{\left[\frac{3}{2} (R - T) \right]^{2/3} r_0^{1/3}} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \theta \right) - \\ &- i\gamma^0 \gamma^3 \frac{1}{\left[\frac{3}{2} (R - T) \right]^{2/3} r_0^{1/3} \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \\ &- \frac{i}{2} \gamma^0 \gamma^1 \frac{\partial}{\partial R} \left[\frac{3}{2} (R - T) \right]^{1/3}. \end{aligned} \quad (144)$$

Компоненты тока (69) равны

$$j^0 = \Psi_{\eta}^+ \frac{R^2}{\frac{3}{2} (R - T) r_0} \Psi_{\eta}, \quad (145)$$

$$j^R = j^{\theta} = 0, \quad (146)$$

$$j^{\varphi} = \Psi_{\eta}^+ \frac{R^2}{\left[\frac{3}{2} (R - T) \right]^{5/3} r_0^{4/3} \sin \theta} \Psi_{\eta}. \quad (147)$$

Получим гамильтониан (144) двухэтапным преобразованием базового гамильтониана (45) с тетрадами (43). При координатных преобразованиях (135), (136) ненулевые преобразованные в соответствии с (41) тетрады равны

$$\left(H_{\underline{0}}^0 \right)_{L-F} = \frac{\partial T}{\partial t} \left(H_{\underline{0}}^0 \right)_S = \frac{1}{\sqrt{f_S(R, T)}}, \quad (148)$$

$$\left(H_{\underline{0}}^1 \right)_{L-F} = \frac{\partial R}{\partial t} \left(H_{\underline{0}}^0 \right)_S = \frac{1}{\sqrt{f_S(R, T)}}, \quad (149)$$

$$\left(H_{\underline{1}}^0 \right)_{L-F} = \frac{\partial T}{\partial r} \left(H_{\underline{1}}^1 \right)_S = \frac{\sqrt{\frac{r_0}{r(R, T)}}}{\sqrt{f_S(R, T)}}, \quad (150)$$

$$\left(H_1^1\right)_{L-F} = \frac{\partial R}{\partial r} \left(H_1^1\right)_S = \frac{1}{\sqrt{f_S(R,T)} \sqrt{\frac{r_0}{r(R,T)}}}, \quad (151)$$

$$\left(H_2^2\right)_{L-F} = \left(H_2^2\right)_S = \frac{1}{r(R,T)}, \quad (152)$$

$$\left(H_3^3\right)_{L-F} = \left(H_3^3\right)_S = \frac{1}{r(R,T) \sin \theta}. \quad (153)$$

В переменных R, T согласно (136)

$$f_S(R, T) = 1 - \frac{r_0}{r(R, T)} = 1 - \left(\frac{r_0}{\frac{3}{2}(R-T)} \right)^{2/3}. \quad (154)$$

По сравнению с тетрадами (43) в результате преобразований (135) появились две дополнительные ненулевые тетрады (149), (150).

Далее с помощью преобразования Лоренца (15), (16), (21), (22) приведем тетрады (148)–(153) к тетрадам в калибровке Швингера (142). Ненулевые величины $\Lambda_{\alpha}^{\beta}(R, T)$ в (15), (16) будут равны

$$\Lambda_{\underline{0}}^{\underline{0}} = \Lambda_{\underline{1}}^{\underline{1}} = \frac{1}{\sqrt{f_S(R, T)}}; \quad (155)$$

$$\Lambda_{\underline{1}}^{\underline{0}} = \Lambda_{\underline{0}}^{\underline{1}} = -\sqrt{\frac{r_0}{r(R, T)}} \frac{1}{\sqrt{f_S(R, T)}}.$$

После проведенного двухэтапного преобразования базовый гамильтониан (45) преобразуется к виду (144).

Условие причинности Гильберта $g_{00} > 0$ для метрики Леметра–Финкельштейна (137) не накладывает ограничений на область определения волновых функций гамильтониана (144). Однако при проведении преобразований в выражениях (148)–(151), (155) присутствует выражение

$$\sqrt{f_S(R, T)} = \sqrt{1 - \frac{r_0}{r(R, T)}}, \text{ которое в базовой метрике (42) является вещественным и положительным. Отсюда следует (см. (154)), что кроме условия (138) существует дополнительное ограничение области определения волновых функций гамильтониана (144)}$$

рике (42) является вещественным и положительным. Отсюда следует (см. (154)), что кроме условия (138) существует дополнительное ограничение области определения волновых функций гамильтониана (144)

$$R - T > \frac{2}{3} r_0. \quad (156)$$

С учетом равенства нулю радиальной компоненты тока j^{μ} (146) гамильтониан H_{η} (144) является эрмитовым (см. условие эрмитовости (28), (54)).

Однако в отличие от базового гамильтониана (45) гамильтониан (144) в переменных (R, T) явно зависит от времени, и в этих переменных отсутствует возможность существования стационарных связанных состояний дираковских частиц.

5.2. Решение Крускала

Координаты

$$(v, u, \theta, \varphi). \quad (157)$$

Координатные преобразования

$$u = \sqrt{\frac{r_0}{r}} \sqrt{f_S} \exp \frac{r}{2r_0} \operatorname{ch} \left(\frac{t}{2r_0} \right), \quad (158)$$

$$v = \sqrt{\frac{r_0}{r}} \sqrt{f_S} \exp \frac{r}{2r_0} \operatorname{sh} \left(\frac{t}{2r_0} \right),$$

$$\frac{r_0}{r} \sqrt{f_S} \exp \frac{r}{2r_0} = u^2 - v^2, \quad (159)$$

$$\frac{t}{2r_0} \operatorname{arctgh} \frac{v}{u} = \frac{1}{2} \operatorname{arctgh} \frac{2uv}{u^2 + v^2},$$

$$du = \frac{1}{2r_0} \sqrt{\frac{r_0}{r}} \sqrt{f_S} \exp \frac{r}{2r_0} \operatorname{sh} \left(\frac{t}{2r_0} \right) dt +$$

$$+ \frac{1}{2r_0} \sqrt{\frac{r_0}{r}} \exp \frac{r}{2r_0} \operatorname{ch} \left(\frac{t}{2r_0} \right) dr,$$

$$dv = \frac{1}{2r_0} \sqrt{\frac{r_0}{r}} \sqrt{f_S} \exp \frac{r}{2r_0} \operatorname{ch} \left(\frac{t}{2r_0} \right) dt +$$

$$+ \frac{1}{2r_0} \sqrt{\frac{r_0}{r}} \exp \frac{r}{2r_0} \operatorname{sh} \left(\frac{t}{2r_0} \right) dr. \quad (160)$$

Квадрат интервала

$$ds^2 = f^2 dv^2 - f^2 du^2 - (r(u, v))^2 (d\theta^2 + \sin^2 d\varphi^2),$$

$$(f(u, v))^2 = \frac{4r_0^3}{r(u, v)} \exp \left(-\frac{r(u, v)}{r_0} \right) =$$

$$= \text{функция от } (u^2 - v^2). \quad (161)$$

Определитель $(-g)$, величина g_G , оператор η равны

$$-g = (f(u, v))^4 (r(u, v))^4 \sin^2 \theta, \quad (162)$$

$$g_G = \frac{(f(u, v))^4 (r(u, v))^4}{u^4}, \quad (163)$$

$$\eta = (g_G g^{00})^{1/4} = (f(u, v))^{1/2} \frac{r(u, v)}{u}. \quad (164)$$

Ненулевые компоненты тетрадных векторов $\tilde{H}_{\underline{\alpha}}^{\mu}$ в калибровке Швингера:

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{\underline{0}}^0 &= \frac{1}{f(u,v)}; \quad \tilde{H}_{\underline{1}}^1 = \frac{1}{f(u,v)}; \\ \tilde{H}_{\underline{2}}^2 &= \frac{1}{r(u,v)}; \quad \tilde{H}_{\underline{3}}^3 = \frac{1}{r(u,v)\sin\theta}. \end{aligned} \quad (165)$$

Матрицы $\tilde{\gamma}^{\alpha}$ равны

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}^0 &= \frac{1}{f}\gamma^0; \quad \tilde{\gamma}^1 = \frac{1}{f}\gamma^1; \quad \tilde{\gamma}^2 = \frac{1}{r(u,v)}\gamma^2; \\ \tilde{\gamma}^3 &= \frac{1}{r(u,v)\sin\theta}\gamma^3. \end{aligned} \quad (166)$$

Самосопряженный гамильтониан в η -представлении с тетрадами (165) равен

$$\begin{aligned} H_{\eta} &= \gamma^0 f(u,v)m - i\gamma^0\gamma^1 \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{u} \right) - \\ &- i\gamma^0\gamma^2 \frac{f(u,v)}{r(u,v)} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2}\text{ctg}\theta \right) - \\ &- i\gamma^0\gamma^3 \frac{f(u,v)}{r(u,v)\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}. \end{aligned} \quad (167)$$

Компоненты тока (69) равны

$$j^0 = \Psi_{\eta}^+ \frac{u^2}{(f(r,v))^2 (r(u,v))^2} \Psi_{\eta}, \quad (168)$$

$$j^u = j^{\theta} = 0, \quad (169)$$

$$j^{\varphi} = \Psi_{\eta}^+ \frac{u^2}{(f(r,v))^2 (r(u,v))^3 \sin\theta} \gamma^3 \Psi_{\eta}. \quad (170)$$

Получим гамильтониан (167) двухэтапным преобразованием базового гамильтониана (45) с тетрадами (43). При координатных преобразованиях (158)–(160) ненулевые преобразованные в соответствии с (41) тетрады равны

$$\begin{aligned} (H'_{\underline{0}}{}^0)_K &= \frac{\partial v}{\partial t} (H_{\underline{0}}^0)_S = \\ &= \text{ch} \left(\frac{t(u,v)}{2r_0} \right) \frac{1}{2r_0} \sqrt{\frac{r(u,v)}{r_0}} \exp \frac{r(u,v)}{2r_0}, \end{aligned} \quad (171)$$

$$\begin{aligned} (H'_{\underline{0}}{}^1)_K &= \frac{\partial u}{\partial t} (H_{\underline{0}}^0)_S = \\ &= \text{sh} \left(\frac{t(u,v)}{2r_0} \right) \frac{1}{2r_0} \sqrt{\frac{r(u,v)}{r_0}} \exp \frac{r(u,v)}{2r_0}, \end{aligned} \quad (172)$$

$$\begin{aligned} (H'_{\underline{1}}{}^0)_K &= \frac{\partial v}{\partial r} (H_{\underline{1}}^1)_S = \\ &= \text{sh} \left(\frac{t(u,v)}{2r_0} \right) \frac{1}{2r_0} \sqrt{\frac{r(u,v)}{r_0}} \exp \frac{r(u,v)}{2r_0}, \end{aligned} \quad (173)$$

$$\begin{aligned} (H'_{\underline{1}}{}^1)_K &= \frac{\partial u}{\partial r} (H_{\underline{1}}^1)_S = \\ &= \text{ch} \left(\frac{t(u,v)}{2r_0} \right) \frac{1}{2r_0} \sqrt{\frac{r(u,v)}{r_0}} \exp \frac{r(u,v)}{2r_0}, \end{aligned} \quad (174)$$

$$(H'_{\underline{2}}{}^2)_K = (H_{\underline{2}}^2)_S = \frac{1}{r(u,v)}, \quad (175)$$

$$(H'_{\underline{3}}{}^3)_K = (H_{\underline{3}}^3)_S = \frac{1}{r(u,v)\sin\theta}. \quad (176)$$

По сравнению с тетрадами (43) в результате преобразований (158)–(160) появились две дополнительные ненулевые тетрады (172), (173).

Далее с помощью преобразования Лоренца (15), (16), (21), (22) приведем тетрады (171)–(176) к тетрадам в калибровке Швингера (165). Ненулевые величины $\Lambda_{\underline{\alpha}}^{\beta}(u,v)$ в (15), (16) будут равны

$$\begin{aligned} \Lambda_{\underline{0}}^0 &= \Lambda_{\underline{1}}^1 = \frac{1}{f} \text{ch} \left(\frac{t(u,v)}{2r_0} \right) \frac{1}{2r_0} \sqrt{\frac{r(u,v)}{r_0}} \exp \frac{r(u,v)}{2r_0}; \\ \Lambda_{\underline{0}}^1 &= \Lambda_{\underline{1}}^0 = -\frac{1}{f} \text{sh} \left(\frac{t(u,v)}{2r_0} \right) \frac{1}{2r_0} \sqrt{\frac{r(u,v)}{r_0}} \exp \frac{r(u,v)}{2r_0}. \end{aligned} \quad (177)$$

После проведенного двухэтапного преобразования базовый гамильтониан (45) преобразуется к виду (167).

Условие причинности Гильберта $g_{00} > 0$ для метрики Крускала (161) не ограничивает область определения волновых функций гамильтониана (167). Ограничений также не содержится при получении тетрад (171)–(176) в первом этапе преобразования и при проведении преобразования Лоренца во втором этапе преобразования базового гамильтониана (45). Однако ограничение области определения волновых функций преобразованного гамильтониана содержится при введении новых переменных (u,v) . В равенствах (158), (159) присутствует выражение $f_S = 1 - \frac{r_0}{r(u,v)}$, которое в

базовой метрике (42) является вещественным и положительным (см. (46), (47)). Отсюда следует (см. (158), (159)), что для области определения в координатах (u,v) должны выполняться условия

$$u^2 > v^2, \quad u^2 \neq v^2 \neq 0. \quad (178)$$

На плоскости (u,v) областью определения волновых функций гамильтониана (167) является правый квадрант $u > |v|$. Линии $u = \pm v$ и точка $u = v = 0$ не принадлежат искомой области определения.

С учетом равенства нулю радиальной компоненты тока j^{μ} (169) гамильтониан H_{η} (167) является эрмитовым (см. условие эрмитовости (28), (54)).

В отличие от базового гамильтониана (45) гамильтониан (167) в переменных (u, v) явно зависит от временной координаты v , и в этих переменных отсутствует возможность существования стационарных связанных состояний дираковских частиц.

Если мы для движения частиц под «горизонтом событий» $r < r_0$ по аналогии с метрикой (55) в определении переменных Крускала (158), (159) поменяем местами временную и радиальную координаты, то получим чисто мнимые координаты (u, v) , что при действительных координатах θ, φ неприемлемо при квантово-механическом рассмотрении эволюции системы «дираковская частица во внешнем гравитационном поле».

Проведенное рассмотрение дираковских гамильтонианов (144), (167) в гравитационных полях Леметра–Финкельштейна (137) и Крускала (161) показывает, что области определения волновых функций ограничены, как и исходная область определения гамильтониана (45) в поле Шварцшильда ($r \in (r_0, \infty)$).

В координатах Леметра–Финкельштейна (R, T) ограничение сводится к условию (156)

$$R - T > \frac{2}{3}r_0.$$

В координатах Крускала (u, v) ограничение равно

$$u > |v| > 0.$$

Гамильтонианы (144), (167), как и базовый гамильтониан (45), являются эрмитовыми для своих областей определения волновых функций $((\Phi, H\Psi) = (H\Phi, \Psi))$.

В переменных Леметра–Финкельштейна и в переменных Крускала гамильтонианы (144), (167) явно зависят от временных координат, поэтому для них отсутствует возможность существования стационарных связанных состояний дираковских частиц.

Заключение

В работе проведен анализ квантово-механической эквивалентности метрик центрально-симметричного незаряженного гравитационного поля.

Рассматривались метрики Шварцшильда в сферических [1], изотропных [2] и гармонических [3] координатах; метрики Эддингтона–Финкельштейна [5, 8] и Пенлеви–Гуллстранда [9, 10]; метрики Леметра–Финкельштейна [4, 5] и Крускала [6, 7]. Все метрики получены из решения [1] путем соответствующих координатных преобразований.

Для всех метрик получены самосопряженные гамильтонианы с плоским скалярным произведением волновых функций и с использованием тетрадных векторов в калибровке Швингера. Кроме того, эти же гамильтонианы получены прямыми двухэтапными преобразованиями базового гамильтониана (45) для поля Шварцшильда в координатах (t, r, θ, φ) . Сначала в соответствии с координатными преобразованиями для рассматриваемых метрик преобразовывался базовый гамильтониан (45) с тетрадами (43). Затем при необходимости осуществлялись преобразования Лоренца (15), (16), (21), (22) для перехода к тетрадам в калибровке Швингера.

Для рассматриваемых метрик и гамильтонианов анализу подвергались области определения волновых функций уравнения Дирака, эрмитовость гамильтонианов $((\Phi, H\Psi) = (H\Phi, \Psi))$ и возможность существования стационарных связанных состояний частиц со спином 1/2. В результате анализа можно сделать следующие выводы:

1. Для базовой метрики Шварцшильда в сферических координатах (t, r, θ, φ) для выполнения условия причинности Гильберта $g_{00} > 0$ область определения волновых функций ограничена условием

$$r > r_0. \quad (179)$$

Для всех других рассматриваемых метрик условие (179) также проявляется в новых переменных:

– метрика Шварцшильда в изотропных координатах

$$R > \frac{r_0}{4}, \quad (180)$$

– метрика Шварцшильда в гармонических координатах

$$R > \frac{r_0}{2}, \quad (181)$$

– метрики Эддингтона–Финкельштейна и Пенлеви–Гуллстранда

$$r > r_0, \quad (182)$$

– метрика Леметра–Финкельштейна

$$R - T > \frac{2}{3}r_0, \quad (183)$$

– метрика Крускала

$$u > |v| > 0. \quad (184)$$

2. При рассмотрении возможности для метрики Шварцшильда движения дираковских частиц под «горизонтом событий» ($r < r_0$) за счет замены местами временной и радиальной координаты [26, 27] (метрика (55)) дираковский гамильтониан явно зависит от времени и физически неэквивалентен базовому гамильтониану (45) с метрикой (42) и областью определения (179). Условие Гильберта $g_{00} > 0$ не позволяет «сшивать» волновые функции на «горизонте событий» $r = r_0$. Аналогичная замена в переменных Крускала приводит к чисто мнимым координатам u, v при действительных координатах θ, φ , что физически неприемлемо при квантово-механическом рассмотрении эволюции системы «дираковская частица во внешнем гравитационном поле».

3. Самосопряженные гамильтонианы (68), (86) для метрик Шварцшильда в изотропных и гармонических координатах являются эрмитовыми, и для них, как и для базового гамильтониана (45), возможно существование вещественных стационарных связанных состояний частиц со спином 1/2.

4. Самосопряженные гамильтонианы (102), (122) для метрик Эддингтона–Финкельштейна и Пенлеви–Гуллстранда являются неэрмитовыми, и для них возможны лишь состояния с комплексными уровнями энергии, распадающимися со временем.

5. Самосопряженные гамильтонианы (144), (167) для метрик Леметра–Финкельштейна и Крускала являются эрмитовыми, но из-за явной зависимости от временной координаты для этих гамильтонианов отсутствует возможность существования стационарных связанных состояний частиц со спином 1/2.

Полученные результаты могут быть полезны при рассмотрении вопросов, связанных с эволюцией Вселенной и с взаимодействием коллапсаров с окружающей средой.

Авторы благодарят А. Л. Новоселову за большую техническую помощь в подготовке работы.

Список литературы

1. Schwarzschild K. Sitzber. Deut. Akad. Wiss. Berlin. 1916. P. 189–196.
2. Eddington A. S. The mathematical theory of relativity (Cambridge University Press, 1924).
3. Логунов А. А., Мествиришвили М. А. Релятивистская теория гравитации. М.: Наука, 1989.

4. Lemaitre G. // Ann. Soc. Sci. Bruxelles. 1933. Vol. A53. P. 51.
5. Finkelstein D. // Phys. Rev. 1958. Vol. 110. P. 965.
6. Kruskal M. // Phys. Rev. 1960. Vol. 119. P. 1743.
7. Novikov I. D. 1963. Vol. AJ 40. P. 772.
8. Eddington A. S. // Nature. 1924. Vol. 113. P. 192.
9. Painleve P. // C. R. Acad. Sci. (Paris). 1921. Vol. 173. P. 677.
10. Gullstrand A. // Arkiv. Mat. Astron. Fys. 1922. Vol. 16. P. 1.
11. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. // Phys. Rev. 2010. Vol. D 82. P. 104056; arxiv:1007.4631 (gr-qc).
12. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. // Phys. Rev. 2011. Vol. D 83. P. 105002; arxiv: 1102.4067v1 (gr-qc).
13. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. arxiv: 1107.0844 (gr-qc).
14. Schwinger J. // Phys. Rev. 1963. Vol. 130. P. 800.
15. Bender C. M., Brody D., Jones H. F. // Phys. Rev. Lett. 2002. Vol. 89. P. 2704041; Phys. Rev. 2004. Vol. D 70. P. 025001.
16. Mostafazadeh A. // J. Math. Phys. (N.Y.) 2002. Vol. 43. P. 205; 2002. Vol. 43. P. 2814; 2002. Vol. 43. P. 3944.
17. Bagchi B., Fring A. // Phys. Lett. 2009. Vol. A 373. P. 4307.
18. Parker L. // Phys. Rev. 1980. Vol. D 22. P. 1922.
19. Гильберт Д. // Избранные труды. Факториал. М.: 1998.
20. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М.: Физматлит, 2006.
21. Arminjon M., arxiv: 1211.1855v1 (gr-qc).
22. Brill D. R., Wheeler J. A. // Rev. of Modern Physics. 1957. Vol. 29. P. 465–479.
23. Dolan S. R. Trinity hall and astrophysics group, Cavendish Laboratory. Dissertation, 2006.
24. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. arxiv: 1205.4348 (gr-qc).
25. Gorbatenko M. V., Kolesnikov N. S., Neznamov V. P., Popov E. V., Safronov I. I., Vronsky M. V. arxiv: 1301.7595 (gr-qc).
26. Новиков И. Д. Сообщения ГАИШ. 1962, № 120. P. 342.
27. Мизнер Ч., Торн Л., Уиллер Дж. Гравитация. Т. 3. М.: Мир, 1977.
28. Lasenby A., Doran C., Pritchard J., Caceres A., Dolan S. // Phys. Rev. 2005. Vol. D 72. P. 105014.

Статья поступила в редакцию 29.04.2014

Горбатенко М. В., Незнамов В. П. Эквивалентность и эрмитовость дираковских гамильтонианов в гравитационном поле Керра . . .	3	Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. Equivalence and Hermiticity of Dirac Hamiltonians in the Kerr gravitational field	3
Трунин Р. Ф., Медведев А. Б. О скачках плотности в экспериментах по динамическому сжатию изотопов водорода	12	Trunin R. F., Medvedev A. B. About density jumps in experiments on dynamic compression of hydrogen isotopes	12
Незнамов В. П. Неиспаряющиеся черные дыры, элементарные частицы, «темная» материя.	19	Neznamov V. P. Nonevaporating black holes, elementary particles, dark matter	19
Баринов М. А., Ватулин В. В., Волкова К. А., Голишников Д. Н., Гнутов А. С., Елисейев Г. М., Кузнецов П. Г., Моренко Л. З., Новикова Е. А., Плетенева Н. П., Харитонов А. В. Расчетные исследования возможности повышения температуры рентгеновского излучения в мишенях ИТС	27	Barinov M. A., Vatulin V. V., Volkova K. A., Golishnikov D. N., Gnutov A. S., Eliseyev G. M., Kuznetsov P. G., Morenko L. Z., Novikova E. A., Pleteneva N. P., Kharitonov A. V. Computational research of X-ray temperature increase possibility in ICF targets.	27
Невмержицкий Н. В., Сотсков Е. А., Кривонос О. Л. Эволюция локальных возмущений на поверхностях жидких цилиндрических и полусферических оболочек при неустойчивости Рэля – Тейлора	35	Nevmerzhitsky N. V., Sotskov E. A., Krivonos O. L. Evolution of local perturbations on the liquid cylindrical and semi-spherical surfaces in the presence of Rayleigh – Taylor instability	35
Горбатенко М. В., Незнамов В. П. Анализ квантово-механической эквивалентности метрик центрально симметричного незаряженного гравитационного поля	42	Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. On the quantum-mechanical equivalence of metrics of a centrally symmetric uncharged gravitational field	42

Редактор *Н. П. Мишкина*

Компьютерная подготовка оригинала-макета *М. С. Мецержкова*

Подписано в печать 23.06.2014 Формат 60 × 84 1/8
 Офсетн. печ. Усл. печ. л. 9,3 Уч.-изд. л. ~6
 Тираж 200 экз. Зак. тип. 1172-2014 6 статей Индекс 3657

Отпечатано в ИПК ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ»
 607188, г. Саров Нижегородской области, ул. Силкина, д. 23

ISSN 0234-0763 **ВОПРОСЫ АТОМНОЙ НАУКИ И ТЕХНИКИ**

Серия:

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ ФИЗИКА

2014. Вып. 1. 1–58

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ

К авторским оригиналам, передаваемым для издания, предъявляются следующие требования:

1. Экземпляр статьи должен быть отпечатан на одной стороне листа формата А4 шрифтом Times New Roman 12 пунктов через 2 интервала, левое поле 3 см. Статья сопровождается дискетой 3,5' (zip100, zip250, cd-r/rw, USB Flash Drive) с электронным вариантом текста (шрифт 11 пунктов через 1 интервал) в редакторе Word for Windows версии 97. Статья должна быть составлена в следующем порядке: УДК; название статьи; инициалы и фамилии авторов; аннотация (не более 10 строк); ключевые слова – все вышеперечисленное на русском и английском языках; текст; список литературы; пронумерованные рисунки и подписи (на отдельном листе); таблицы с нумерационным и тематическим заголовками, каждая таблица на отдельном листе, а в электронном виде представляется отдельным файлом. Кавычки в тексте ставятся при английской раскладке клавиатуры («...»). Название файла должно состоять из фамилии первого автора и краткого названия статьи.

2. Файлы иллюстраций должны быть представлены отдельно – в виде файлов, в формате TIF (TIF) или JPEG (JPG) (максимальное качество) с разрешением не менее 250 точек на дюйм (dpi или inch). Название файла иллюстрации должно включать фамилию первого автора и порядковый номер рисунка в статье, например: Dzyuba_03.tif. Не допускается представлять иллюстрации, созданные с использованием внутренних инструментов Word.

3. При написании статьи следует использовать общепринятые термины, единицы измерения и условные обозначения. Все употребляемые авторами обозначения должны быть определены при их первом появлении в тексте. Необходимо обращать внимание на написание прописных и строчных букв: латинские буквы (*A, I, d, h* и т. п.) набираются курсивом, греческие буквы (α, β, γ), названия функций (\sin, \cos, \exp), химических элементов (H_2O, H_2C_5OH) и единиц измерения (см, МВт/см², с) – прямым (обычным) шрифтом. Символы ($\Re, \varnothing, \otimes \in$ и т. п.) следует оговаривать на полях рукописи. Обозначения матриц и векторов набираются полужирным шрифтом прямо.

4. Формулы создаются в виде целых математических выражений в формульном редакторе Word или редакторе Math Type 5.2 и нумеруются в круглых скобках. Нумерация формул должна быть сплошной по статье (не по разделам), нумерация типа (2а), (2б) нежелательна. Нумеровать следует только те формулы и уравнения, на которые есть ссылка в последующем изложении.

5. Ссылки на литературу в тексте даются по порядку, арабскими цифрами в квадратных скобках. Список литературы составляется в той же последовательности, в которой приводятся ссылки на литературу в тексте. Библиографические ссылки оформляются по следующим правилам:

- для книг: фамилии и инициалы авторов, название книги, место издания, издательство (без кавычек), год (для трудов конференций – город, страна, год);
- для статей в журнале: фамилии и инициалы авторов, название статьи, название журнала (без кавычек), год, том, выпуск, страницы;
- для авторефератов диссертаций: фамилия и инициалы автора, название автореферата диссертации, степень, место защиты (город) и год;
- для препринтов: фамилии и инициалы авторов, название препринта, место издания, год и номер;
- для патентов: вид патентного документа (А.с. или Пат.), его номер, название страны, выдавшей документ, индекс международной классификации изобретения, название издания, в котором опубликована формула изобретения, год и номер издания;
- для электронных источников – полный электронный адрес (включая дату обращения к источнику), позволяющий обратиться к публикации.

При необходимости в заголовке библиографической ссылки на работу четырех и более авторов могут быть указаны имена всех авторов или первых трех с добавлением слов «и др.». В списке литературы инициалы должны стоять после фамилий.

6. В конце текста (перед списком литературы) указывается контактная информация обо всех авторах статьи: фамилия, имя, отчество (полностью), место работы, должность, телефон, e-mail и по желанию автора – домашний почтовый адрес.

Все материалы по статьям должны направляться по адресу:

607188, г. Саров Нижегородской обл., пр. Мира, 37, РФЯЦ-ВНИИЭФ, ИТМФ, в редакцию журнала ВАНТ, сер. «Теоретическая и прикладная физика». Тел. (83130) 2-77-01. E-mail: Nadykto@vniief.ru