УДК 53.01

ФОРМУЛИРОВКА КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ БЕЗ ПЕРЕНОРМИРОВОК МАСС И КОНСТАНТ СВЯЗИ ФЕРМИОНОВ

В. П. Незнамов*

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Предложена формулировка квантовой теории поля без перенормировок масс и констант связи фермионов. Контрчлены, компенсирующие во всех порядках теории возмущений расходящиеся величины в собственно-энергетических диаграммах фермионов и в диаграммах поляризации вакуума, возникают в соответствующих гамильтонианах при проведении специального унитарного преобразования, зависящего от времени.

Ключевые слова: теория квантовых полей, гамильтониан, зависящее от времени унитарное преобразование, перенормировка массы, перенормировка заряда.

Введение

Как известно, в квантовой теории поля при вычислении матричных элементов, содержащих диаграммы Фейнмана с замкнутыми петлями фермионных и бозонных линий, возникают расходящиеся величины. Для выделения конечных выражений в перенормируемых теориях разработана специальная процедура. В ней присутствуют перенормировки масс и констант взаимодействия элементарных частиц. В процедуре перенормировок принимается, что наблюдаемые экспериментально массы и константы взаимодействия элементарных частиц состоят из «голых» и добавочных частей:

$$m_{phys} = m_0 + \Delta m; \qquad (1)$$

$$q_{phys} = q_0 + \Delta q. \qquad (2)$$

Каждая из частей (m_0 и Δm; q_0 и Δq) является бесконечной, но в сумме (равенства (1) и (2)) они являются конечными и равными наблюдаемым значениям m_{phys} и q_{phys} в экспериментах. Эта загадочная процедура вместе с двумя другими перенормировочными константами $Z_1 = Z_2$ позволяет устранять бесконечные выражения во всех порядках теории возмущений и с беспрецедентной точностью рассчитывать физические величины, фиксируемые в экспериментах. Процедура перенормировок широко представлена в монографиях и учебниках по квантовой теории поля (см., например, [1–5]).

В данной работе автор предлагает отказаться от разбиения масс и констант взаимодействия фермионов на две бесконечные части и все время работать с конечными m_{phys} и q_{phys}. Компенсация бесконечностей во всех порядках теории возмущений будет происходить за счет энергетических сдвигов в гамильтонианах, вызываемых специальными унитарными преобразованиями, зависящими от времени.

Дальнейшее рассмотрение в работе будет проводиться на примере квантовой электродинамики (КЭД), сформулированной в гамильтоновом виде. В этом случае $m_{phys} = m$ – масса электрона (или позитрона); $q_{phys} = e$ – заряд электрона.

В разделе 1 работы обсуждаются некоторые свойства унитарных преобразований, зависящих от времени. В разделе 2 рассматривается замена процедуры перенормировки массы и заряда электрона соответственно в собственно-энергетических

*E-mail: neznamov@vniief.ru.

диаграммах фермионов и в диаграммах поляризации вакуума. В Заключении обсуждаются полученные результаты.

Ниже будем использовать систему единиц $\hbar = c = 1$; метрика пространства Минковского берется в виде*

$$g^{\mu\nu} = diag\left[1,-1,-1,-1\right];;\; x = (\mathbf{x}, t);\; p^{\mu} = i\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}.$$

1. Унитарные преобразования, зависящие от времени

Первоначально рассмотрим квантовую механику электрона, взаимодействующего с электромагнитным полем.

В этом случае уравнение Дирака можно записать в виде

$$p_0\psi_D = H_D\psi_D = \left(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p} + \beta m + e\alpha_{\mu}A^{\mu}\right)\psi_D, \qquad (3)$$

где $\psi_D(x)$ – четырехкомпонентная волновая функция электрона; $A^{\mu}(x)$ – четырехвектор электромагнитного поля; H_D – дираковский гамильтониан; α^i, β – матрицы Дирака; $\alpha^{\mu} = \begin{cases} 1, & \mu = 0; \\ \alpha^i, & \mu = i = 1,2,3; \end{cases}$ e – заряд электрона.

Пусть $R(t)$ – некоторое зависящее от времени унитарное преобразование волновой функции $\psi_D(x)$. Тогда

$$\psi_R(x) = R(t)\psi_D(x). \qquad (4)$$

Уравнение Дирака (3) преобразуется к виду

$$p_0\psi_R(x) = H_R\psi_R(x), \qquad (5)$$

где

$$H_R = R(t)H_D R^{+}(t) - iR(t)\frac{\partial R^{+}}{\partial t}. \qquad (6)$$

Все другие преобразованные операторы O_R равны

$$O_R = ROR^{+}. \qquad (7)$$

Уравнение (5) эквивалентно первоначальному уравнению (3).

Действительно

$$p_0\psi_R(x) = p_0\left(R\psi_D(x)\right) = H_R R\psi_D(x),$$

$$Rp_0\psi_D(x) + \left(i\frac{\partial}{\partial t}R\right)\psi_D(x) =$$

$$= RH_D R^{+}R\psi_D(x) - iR\frac{\partial R^{+}}{\partial t}R\psi_D(x).$$

Умножая слева на оператор R^{+} и учитывая, что $\frac{\partial R^{+}}{\partial t}R = -R^{+}\frac{\partial R}{\partial t}$, приходим к исходному уравнению Дирака (3).

Далее рассмотрим гамильтониан неквантованных электрон-позитронных полей, взаимодействующих с классическими электромагнитными полями

$$\mathcal{H} = \int \psi_D^{+}(x)H_D\psi(x)d\mathbf{x} =$$

$$= \int \psi_D^{+}(x)\left(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p} + \beta m + e\alpha_{\mu}A^{\mu}(x)\right)\psi_D(x)d\mathbf{x}. \qquad (8)$$

В выражении (8) опущен гамильтониан свободных электромагнитных полей; значок «+» означает эрмитовое сопряжение.

Применим к полям $\psi_D(x), \psi_D^{+}(x)$ унитарное преобразование $R(t)$

$$\psi_R(x) = R(t)\psi_D(x); \quad \psi_R^{+}(x) = \psi_D^{+}(x)R^{+}(t). \qquad (9)$$

Гамильтониан (8) в *R*-представлении равен

$$\mathcal{H}_R = \int \psi_R^{+}(x)H_R\psi_R(x)d\mathbf{x}. \qquad (10)$$

Перейдем в гамильтониане (10) к записи через поля $\psi_D(x), \psi_D^{+}(x)$. Тогда, учитывая (9) и (6), получаем

$$\mathcal{H}_R = \int \psi_D^{+}(x)R^{+}\left(RH_D R^{+} - iR\frac{\partial R^{+}}{\partial t}\right)R\psi_D(x)d\mathbf{x} =$$

$$= \int\left[\psi_D^{+}(x)H_D\psi_D(x) - \psi_D^{+}(x)i\frac{\partial R^{+}}{\partial t}R\psi_D(x)\right]d\mathbf{x}. \qquad (11)$$

Гамильтониан (10) отличается от исходного гамильтониана (8) энергетическим сдвигом $-i\frac{\partial R^{+}}{\partial t}R$. Этот сдвиг можно использовать в качестве замены стандартных процедур перенормировки массы и заряда электрона (позитрона) в квантовой электродинамике.

Отметим, что лагранжиан неквантованных электрон-позитронных и электромагнитных полей

$$\mathcal{L} = \int \psi_D^{+}i\frac{\partial\psi_D}{\partial t}d\mathbf{x} - \mathcal{H} \qquad (12)$$

инвариантен относительно преобразования (4).

*Значки с греческими буквами принимают значения 0, 1, 2, 3, значки с римскими буквами принимают значения 1, 2, 3.

2. Компенсация расходящихся выражений в диаграммах собственной энергии электрона и фотона

В качестве унитарного преобразования в выражении (4) выбираем преобразование в виде

$$R(t)=\exp\left(i\beta\omega_m t+i\omega_e e\int\alpha_\mu A^\mu(x)\,dt\right),\qquad(13)$$

где ω_m, ω_e – произвольные числовые параметры, которые могут быть сколь угодно большими. Будем предполагать, что ω_m, ω_e зависят от константы связи e.

Гамильтониан классических полей (11) в R-представлении для преобразования (13) становится равным

$$\mathcal{H}_R=\int\psi_D^+(x)\Big(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p}+\beta m+e\alpha_\mu A^\mu(x)-$$
$$-\beta\omega_m-\omega_e e\alpha_\mu A^\mu(x)\Big)\psi_D(x)\,d\mathbf{x}.\qquad(14)$$

Гамильтониан (14) можно записать как сумму гамильтониана свободных полей H_0 и гамильтониана взаимодействия H_{int}.

$$H_0=\int\psi_D^+(x)(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p}+\beta m)\psi_D(x)\,d\mathbf{x},\qquad(15)$$

$$H_{int}=\int\psi_D^+(x)\Big(e\alpha_\mu A^\mu(x)-\beta\omega_m-$$
$$-\omega_e e\alpha_\mu A^\mu(x)\Big)\psi_D(x)\,d\mathbf{x}.\qquad(16)$$

Далее, учитывая разбиение (14) на (15) и (16), можно стандартными способами провести квантование электрон-позитронных и электромагнитных полей и перейти к квантовой электродинамике.

Если в терминологии [5] определить $-i\Sigma(p)$ как сумму всех одночастично-неприводимых (ОЧН) диаграмм с двумя внешними фермионными линиями, то контрчлен с Δm в гамильтониане взаимодействия КЭД, появляющийся из-за разбиения (1) и компенсирующий расходящиеся выражения в собственно-энергетических частях диаграмм Фейнмана во всех порядках теории возмущений, равен

$$\Delta m=\Sigma\left(p^2=m^2\right).\qquad(17)$$

В нижайшем (втором) порядке теории возмущений

$$\Delta m^{(2)}=\Sigma^{(2)}\left(p^2=m^2\right).\qquad(18)$$

Очевидно, что если в гамильтониане (16) параметр ω_m выбрать равным

$$\omega_m=\Delta m,\qquad(19)$$

то аналогичная компенсация расходящихся выражений в собственно-энергетических частях диаграмм Фейнмана произойдет за счет унитарного преобразования (13) без разбиения массы электрона на «голую» и добавочную части.

В существующей квантовой теории поля водится понятие «голой» и физической (наблюдаемой) констант взаимодействия элементарных частиц (см. равенство (2)). В квантовой электродинамике соотношение между ними определено равенством:

$$e=e_0 Z_3^{1/2}.\qquad(20)$$

При конечном наблюдаемом в экспериментах заряде электрона «голый» заряд e_0 и величина Z_3 являются бесконечно большими.

Если определить

$$i\Pi^{\mu\nu}(q)=\left(q^2g^{\mu\nu}-q^\mu q^\nu\right)\Pi\left(q^2\right)\qquad(21)$$

как сумму всех ОЧН вставок в фотонный пропагатор, то перенормировочная константа Z_3 равна

$$Z_3=\frac{1}{1-\Pi(0)}=1+\Pi^{(2)}(0)+\Pi^{(4)}(0)+\ldots\qquad(22)$$

В формуле (21) q^μ – четырехимпульс фотона.

В нашем случае роль константы Z_3 может выполнить последнее слагаемое в гамильтониане (16), если принять равным

$$\omega_e=1-\left(1-\Pi(0)\right)^{-1/2}.\qquad(23)$$

Тогда это слагаемое, как и Z_3, будет компенсировать во всех порядках теории возмущений бесконечно большие величины, возникающие при расчетах ОЧН-диаграмм поляризации вакуума. В этом случае нет необходимости разбивать физический наблюдаемый заряд электрона на бесконечно большие «голую» и добавочную части.

Отметим, что слагаемые в показателе $\exp$ в преобразовании (13) не коммутируют друг с другом. В этом случае согласно теореме Хаусдорфа [6], если коммутатор $[S_1,S_2]_-\neq 0$, то

$$e^{i(S_1+S_2)}\neq e^{iS_1}e^{iS_2}.\qquad(24)$$

В нашем случае к полям $\psi_D(x)$, $\psi_D^+(x)$ необходимо применять суммарное преобразование (13) с двумя слагаемыми в показателе экспоненты.

Заключение

В работе на примере квантовой электродинамики показано, что при использовании унитарного преобразования, зависящего от времени и генерирующего энергетические сдвиги в соответствующих гамильтонианах взаимодействующих квантовых полей, можно во всех порядках теории возмущений избежать перенормировок массы и константы связи электрона (позитрона). В теории остается единственная перенормировочная константа $Z_1 = Z_2$. Полученные результаты применимы и к другим взаимодействиям Стандартной модели, сформулированной в гамильтоновом виде.

Энергетический сдвиг ω_m в гамильтониане (14) физически не наблюдаем (см. дискуссию об этом в [7]). Наоборот, сдвиг ω_e в (14) меняет константу электромагнитного взаимодействия и должен выбираться из условия согласия с экспериментом. В данной работе с самого начала предполагается использование экспериментально наблюдаемых масс и констант взаимодействия частиц со спином 1/2.

Конечно, в теории по-прежнему остается проблема вычисления конечных значений собственных энергий фермионов и эффектов поляризации вакуума. Не исключено, что решения проблемы можно достичь при выборе некоторого унитарного преобразования $R_1(t)$. Применение этого преобразования будет приводить к компенсации бесконечно больших величин в собственно-энергетических диаграммах фермионов и в диаграммах поляризации вакуума, а остающиеся конечные значения будут определять искомые величины. Поиск такого преобразования представляется автору актуальным.

Список литературы

1. Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1969.
2. Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1980.
3. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1973.
4. Bjorken J. D., Drell S. D. Relativistic quantum mechanics. McGraw-Hill Book Company (1964) [Дж. Д. Бьеркен, С. Д. Дрелл. Релятивистская квантовая теория. Том 1, 2. М.: Наука (1978)].
5. Peskin M. E., Schroeder D. V. An introduction to quantum field theory. Addison-wesley publishing company, 1995 [Пескин М., Щредер Д. Введение в квантовую теорию поля. РХД (2001)].
6. Hausdorff F. Ber. Verh. Saechs. Akad. Wiss., Leipzig, Math. - Phys. Kl. 1906. Vol. 58. P. 19–48.
7. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. Ann. Phys. (Berlin), 1–6 (2014)/DOI 10.1002/andp.201300218.

Статья поступила в редакцию 22.08.2014