

НЕЙТРОННАЯ КИНЕТИКА ОДНОРОДНЫХ ШАРОВ ИЗ ПЛУТОНИЯ-238 И ПЛУТОНИЯ-239, НАХОДЯЩИХСЯ В ПРОИЗВОЛЬНЫХ СОСТОЯНИЯХ

Н. Б. Бабичев, И. В. Лутиков, А. А. Севастьянов

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

С помощью численных расчетов и аналитических вычислений исследованы нейтронные характеристики однородных шаров, выполненных из чистых (без примесей) изотопов ^{239}Pu и ^{238}Pu .

Ключевые слова: кинетическое уравнение, инвариантность, главные собственные функции и собственные значения, диффузия нейтронов.

Введение

Критическое состояние однородных шаров в случае изотопов ^{238}Pu и ^{239}Pu было изучено в работах [1, 2]. В работе [1] критические массы M_* шаров определены при использовании спектральных нейтронных констант ENDF B-6 [3]. В работе [2] с помощью расчетов на спектральных константах ENDF B-6, ENDL-82 [4], на многогрупповых и одnogрупповых константах тоже получены критические параметры шаров из рассматриваемых изотопов.

Основная цель данной статьи заключается в исследовании процессов нейтронной кинетики, протекающих в надкритических и подкритических однородных шарах из ^{238}Pu и ^{239}Pu .

Далее в расчетах и в вычислениях с помощью аналитических соотношений применяются следующие спектральные и одnogрупповые нейтронные константы: ENDL-82 [4] и 1-ENDL-82, 1-ENDF B-6, взятые из [2].

Особое внимание ниже уделено системам, подобным с точки зрения протекающих в них нейтронно-кинетических процессов. Формулы подобия полезны тем, что для нахождения характеристик нейтронной кинетики целого класса подобных систем достаточно определить главные собственные функции и главные собственные значения, например, путем численного решения кинетического уравнения в случае какой-то одной конкретной системы.

Отметим, что наряду с основной, поставленной выше задачей в данной статье рассмотрен частный вопрос о поведении собственных функций вблизи границы однородного шара.

1. Точные формулы подобия

В качестве исходного здесь принято общее по своему виду уравнение переноса нейтронов в однородных шарах, представленное в приложении.

Воспользуемся следующими теоретическими материалами приложения.

Кинетическое уравнение для нейтронов не содержит в себе ядерно-физических характеристик вещества. Это сделано специально для того, чтобы считать данное уравнение точным, предполагая, что все элементарные сечения взаимодействия нейтронов с ядрами известны.

Из доказательства фундаментального свойства инвариантности кинетического уравнения следует, что два однородных шара из конкретного вещества с разными плотностями ρ и радиусами R подобны, если выполняется условие

$$\rho_2 R_2 = \rho_1 R_1. \quad (1)$$

В случае критических однородных шаров (относящиеся к критическому состоянию величины далее отмечаются звездочкой) тоже выполняется равенство оптических толщин

$$\rho_{2*} R_{2*} = \rho_{1*} R_{1*}. \quad (2)$$

Кроме (1) и (2) существуют и вытекающие из (1) и (2) другие точные инвариантные соотношения, например следующие:

$$\rho_2 \sqrt{M_2} = \rho_1 \sqrt{M_1}, \quad (3)$$

$$\rho_{*2} \sqrt{M_{*2}} = \rho_{*1} \sqrt{M_{*1}}. \quad (4)$$

Отметим, что закон $M_* \rho_*^2 = \text{const}$ был открыт очень давно (не позднее 1943 года, см. [5]) на основе решения элементарного уравнения диффузии нейтронов в однородном активном шаре, находящемся в критическом состоянии.

В настоящее время имеется солидная экспериментальная информация (см., например, [6]) по критическим массам Pu- δ , Pu- α и урана с различным обогащением по изотопу ^{235}U . В справочнике [6] приведено большое количество измеренных в крит. массовых экспериментах величин M_{*j} , а также представлены плавные зависимости M_* от степеней обогащения делящихся материалов. Последние были получены с помощью расчетных интерполяций и экстраполяций с использованием измеренных значений M_{*j} .

В приложении показано, что главные собственные значения точного уравнения переноса нейтронов в шарах, выполненных из произвольных материалов с конкретными концентрациями ядер, связаны следующим образом:

$$\lambda_2(\rho_2, M_2) = \frac{\rho_2}{\rho_1} \lambda_1(\rho_1, M_1),$$

$$\lambda_2(\rho_2, M_2) = \sqrt{\frac{M_1}{M_2}} \lambda_1(\rho_1, M_1). \quad (5)$$

Если под M_1 подразумевать измеренное значение критической массы шара $M_{*0}(\rho_0)$, то формулу (5) можно считать откалиброванной на экспериментальный результат.

Отметим, что из (5) следует соотношение

$$M_2 = M_1 \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^2 \quad (6)$$

между массами и плотностями подобных шаров, состоящих не только из делящихся материалов, но также из поглотителей и идеальных рассеивателей нейтронов, у которых сечение упругого рассеяния нейтронов отлично от нуля, а сечения неупругого рассеяния, деления и поглощения равны нулю ($\sigma_s \neq 0$, $\sigma_{in} = \sigma_f = \sigma_c = 0$).

Обратим внимание на то, что точная формула подобия (6) обобщается следующим образом:

$$M_2 = M_1 \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^{\eta-1}. \quad (7)$$

Здесь $\eta = 3$, $\eta = 2$ и $\eta = 1$ соответственно в случаях одномерных сферических, цилиндрических и плоских систем.

Из соотношения (7) следует, что за счет сжатия плоской подкритичной активной системы ее невозможно перевести в критическое или надкритическое состояние. Эффективность перевода в надкритическое состояние за счет сжатия в случае активного шара выше, чем в случае цилиндра.

При рассмотрении активных шаров с ограниченным сверху уровнем надкритичности можно пользоваться простой приближенной формулой

$$\lambda(\rho) = \left(\frac{d\lambda}{d\rho} \right)_{*0} \left(\rho - \sqrt{\frac{M_{*0}}{M}} \rho_{*0} \right). \quad (8)$$

В приложении получены формулы подобия для главных собственных функций.

Приведем законы трансформации нейтронной плотности, которая определяется следующим образом: $n(t, \vec{r}) = \int \psi(t, \vec{r}, \vec{\Omega}) d\vec{\Omega}$, где $\psi(t, \vec{r}, \vec{\Omega})$ – функция распределения частиц в фазовом пространстве векторов \vec{r} и $\vec{\Omega} = \frac{\vec{V}}{V}$, V – модуль вектора скорости нейтрона.

$$n_2(\vec{r}) = \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^3 n_1 \left(\frac{R_2}{R_1} \vec{r} \right), \quad (9)$$

$$n_2(\vec{r}) = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^3 n_1 \left(\frac{R_2}{R_1} \vec{r} \right). \quad (10)$$

2. Односкоростное кинетическое уравнение для нейтронов и вывод формул подобия

2.1. Общий вид кинетического уравнения

Примем односкоростное приближение, в рамках которого считается, что ядра неподвижны, нейтроны имеют одинаковую по величине скорость V , индикатриса упругого рассеяния нейтронов изотропна и реакции неупругого рассеяния отсутствуют. При этом справедливо следующее нестационарное кинетическое уравнение для нейтронов:

$$\frac{1}{V} \frac{\partial \psi(t, \vec{r}, \vec{\Omega})}{\partial t} + (\vec{\Omega} \nabla) \psi(t, \vec{r}, \vec{\Omega}) + \alpha(\vec{r}) \psi(t, \vec{r}, \vec{\Omega}) = \frac{\beta(\vec{r})}{4\pi} n(t, \vec{r}), \quad (11)$$

$\psi(t, \vec{r}, \vec{\Omega})$ – функция распределения нейтронов в фазовом пространстве векторов \vec{r} и $\vec{\Omega}$ в момент времени t ; $\vec{\Omega} = \frac{\vec{V}}{V}$ – единичный вектор, направленный вдоль вектора \vec{V} скорости полета нейтрона; $\alpha = n_{\text{я}}(\sigma_s + \sigma_f + \sigma_c)$ – обратный полный пробег нейтронов в среде с плотностью ядер $n_{\text{я}}$, которая в случае рассматриваемых здесь однородных шаров постоянна; $\beta = h\alpha$, $h = \frac{v\sigma_f + \sigma_s}{\sigma_s + \sigma_f + \sigma_c}$ – активность вещества; σ_s , σ_f , σ_c – элементарные (микроскопические) сечения рассеяния, деления и поглощения нейтронов; v – среднее число вторичных нейтронов, испускаемых в одном акте деления ядра; $n(t, \vec{r}) = \int d\vec{\Omega}' \psi(t, \vec{r}, \vec{\Omega}')$ – нейтронная плотность в точке с радиус-вектором \vec{r} в момент времени t .

Пусть

$$\psi(t, \vec{r}, \vec{\Omega}) = e^{\lambda t} \psi(\vec{r}, \vec{\Omega}), \quad n(t, \vec{r}) = e^{\lambda t} n(\vec{r}),$$

$$\vec{j}(t, \vec{r}, \vec{V}) = e^{\lambda t} \vec{j}(\vec{r}, \vec{V}), \quad (12)$$

$\vec{j}(t, \vec{r}) = V \int \psi(t, \vec{r}, \vec{\Omega}') \vec{\Omega}' d\vec{\Omega}'$ – векторный поток нейтронов (число пересечений через поверхность шара); $\vec{j} = \vec{j}_+ + \vec{j}_-$ – односторонние векторные потоки, направленные преимущественно в сторону центра шара и против центра; $\lambda \equiv \lambda_0$ – главное собственное значение.

После подстановки (12) в (11) получается стационарное уравнение

$$\left(\vec{\Omega} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \right) \psi(\vec{r}, \vec{\Omega}) + \left(\alpha + \frac{\lambda}{V} \right) \psi(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \frac{\beta}{4\pi} n(\vec{r}). \quad (13)$$

2.2. Стационарное уравнение переноса нейтронов в однородных шарах и вытекающие из него следствия

Входящие в уравнение (13) параметры α и β теперь будем считать постоянными.

2.2.1. Инвариантность стационарного кинетического уравнения. В приложении показано,

что точное кинетическое уравнение, а значит, и (13) инвариантны по отношению к преобразованиям подобия

$$\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}_2 = \frac{\rho_1}{\rho_2} \vec{r}_1, \quad (14)$$

$$R_2 \rightarrow \frac{\rho_1}{\rho_2} R_1. \quad (15)$$

Для доказательства свойства инвариантности уравнения переноса нейтронов можно применять иной метод.

Уравнение (13) переведем в пространство безразмерных векторов

$$\vec{z} = \beta \vec{r}. \quad (16)$$

С учетом того, что

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}} = \frac{\partial \vec{z}}{\partial \vec{r}} \frac{\partial}{\partial \vec{z}} = \beta \frac{\partial}{\partial \vec{z}}, \quad (17)$$

для некоторого шара 1 имеем новое кинетическое уравнение

$$\beta_1 \left(\vec{\Omega} \frac{\partial}{\partial \vec{z}_1} \right) \psi_1(\vec{z}_1, \vec{\Omega}) + \left(\alpha_1 + \frac{\lambda_1}{V_1} \right) \psi_1(\vec{z}_1, \vec{\Omega}) = \frac{\beta_1}{4\pi} n_1(\vec{z}_1) \quad (18)$$

или

$$\left(\vec{\Omega} \frac{\partial}{\partial \vec{z}_1} \right) \psi_1(\vec{z}_1, \vec{\Omega}) + \left(\frac{1}{h_1} + \frac{\lambda_1}{\beta_1 V_1} \right) \psi_1(\vec{z}_1, \vec{\Omega}) = \frac{1}{4\pi} n_1(\vec{z}_1). \quad (19)$$

Для шара 2 справедливо следующее уравнение переноса нейтронов:

$$\left(\vec{\Omega} \frac{\partial}{\partial \vec{z}_2} \right) \psi_2(\vec{z}_2, \vec{\Omega}) + \left(\frac{1}{h_2} + \frac{\lambda_2}{\beta_2 V_2} \right) \psi_2(\vec{z}_2, \vec{\Omega}) = \frac{1}{4\pi} n_2(\vec{z}_2). \quad (20)$$

Уравнения (19) и (20) имеют одинаковый вид.

Это означает, что они инвариантны по отношению к преобразованиям подобия безразмерных векторов (16), что и требовалось доказать.

2.2.2. Вывод формул подобия. Структура уравнений (19), (20) такова, что позволяет сделать следующее априорное утверждение: главное собственное значение λ зависит только от двух параметров – от активности h и произведения βV .

Уравнение (19) перешло в (20) после очень простого преобразования подобия

$$\bar{z}_1 \rightarrow \bar{z}_2, \quad (21)$$

и при этом возникло равенство

$$Z_2 = Z_1 \quad (22)$$

безразмерных радиусов шаров 2 и 1: $Z_2 = \beta_2 R_2$ и $Z_1 = \beta_1 R_1$ в $\bar{z} = \beta \bar{r}$ -пространстве.

Уникальным является факт того, что отличавшиеся друг от друга в \bar{r} -пространстве подобные шары с разными размерами R при переходе в пространство векторов \bar{z} превратились в один шар с инвариантным радиусом

$$Z = \beta R = \text{const}. \quad (23)$$

Из уравнений (19) и (20) вытекают связи физических величин

$$\frac{1}{h_2} + \frac{\lambda_2}{\beta_2 V_2} = \frac{1}{h_1} + \frac{\lambda_1}{\beta_1 V_1}, \quad (24)$$

которые приводят к следующим соотношениям подобия для λ :

$$\lambda_2 = \frac{\beta_2 V_2}{\beta_1 V_1} \lambda_1 + \beta_2 V_2 \left(\frac{h_2 - h_1}{h_2 h_1} \right), \quad (25)$$

$$\lambda_2 = \frac{\beta_{02} \rho_{01} \rho_2 V_2}{\beta_{01} \rho_{02} \rho_1 V_1} \lambda_1 + \beta_{02} \frac{\rho_2}{\rho_{02}} V_2 \left(\frac{h_2 - h_1}{h_2 h_1} \right), \quad (26)$$

где $\beta(\rho) = h\alpha(\rho) \frac{\rho}{\rho_0}$, ρ_0 и ρ соответственно – критическая и произвольная по величине плотности однородного шара.

Если учесть, что $\beta = h\alpha$, то (25) переходит в соотношение подобия

$$\lambda_2 = \left[\frac{h_2}{h_1} \left(1 + \frac{\lambda_1}{\alpha_1 V_1} \right) - 1 \right] \alpha_2 V_2. \quad (27)$$

которое ранее было получено (см. [7]), исходя из уравнения (13) в \bar{r} -пространстве.

Нейтронная плотность подчиняется формуле

$$n_2(\bar{r}) = \left(\frac{h_2 \alpha_2}{h_1 \alpha_1} \right)^3 n_1(\bar{r}). \quad (28)$$

Кроме (23) существуют также и другие инвариантные соотношения, одним из которых является

$$M_2 = \gamma^3 \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^2 M_1, \quad (29)$$

$$\gamma = \frac{\beta_{01} \rho_{02}}{\beta_{02} \rho_{01}}. \quad (30)$$

Опустив выкладки, приведем зависимость λ от масс подобных шаров.

$$\lambda_2 = \sqrt{\gamma \frac{M_1}{M_2}} \left[\frac{V_2}{V_1} \lambda_1 + \gamma \beta_{02} \frac{\rho_1}{\rho_{02}} V_2 \left(\frac{h_2 - h_1}{h_2 h_1} \right) \right]. \quad (31)$$

Если принять равенство $M_1 = M_{*0}(\rho_0)$, в котором $M_{*0}(\rho_0)$ – измеренное значение критической массы шара, то формулу (31), справедливую в односкоростном приближении, можно считать откалиброванной на экспериментальный результат.

Представленными выше формулами для λ можно пользоваться в случае шаров, состоящих из произвольных делящихся, инертных и поглощающих нейтроны материалов, если выполняется условие (23).

Условие (23) существенно расширяет класс подобных систем по сравнению с найденными в приложении.

3. Аналитическое решение задачи на главные собственные функции и главные собственные значения, справедливое в диффузионном приближении для однородных активных шаров

В этом разделе используется асимптотическая диффузионная теория Ю. А. Романова, представленная в книге [8]. В ней рассмотрены критические однородные системы.

Ниже результаты, полученные в [8] для критических шаров, обобщены на случаи надкритических и подкритических шаров.

3.1. Случай активных шаров, находящихся в произвольных состояниях

Для однородных шаров с активностью $h > 1$ справедливо стационарное дифференциальное уравнение

$$\nabla^2 n(r) + \left(\frac{\lambda}{V} + \alpha \right)^2 (\text{tg } \varphi)^2 n(r) = 0, \quad (32)$$

которое нужно решать совместно со следующим трансцендентным уравнением:

$$h\alpha\varphi = \left(\frac{\lambda}{V} + \alpha \right) \text{tg } \varphi. \quad (33)$$

При этом для коэффициента диффузии нейтронов справедлива формула

$$D = \frac{(h-1)V}{\alpha h^2 \varphi^2}. \quad (34)$$

Записав лапласиан в сферических координатах $\nabla^2 n(r) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{dn(r)}{dr} \right]$ и воспользовавшись граничным условием обращения в ноль плотности нейтронов $n(r)$ на свободной экстраполированной поверхности шара с радиусом R , имеем:

$$n(r) = \frac{A}{r} \sin \left[\left(1 + \frac{\lambda}{\alpha V} \right) \alpha r (\text{tg } \varphi) \right], \quad (35)$$

A – нормировочная константа,

$$\left(1 + \frac{\lambda}{\alpha V} \right) \alpha \left(R + \frac{b}{\beta} \right) \text{tg } \varphi = \pi, \quad b = 0,71. \quad (36)$$

Решением уравнения (36) является

$$\lambda = \alpha V \left[\frac{h\varphi}{\text{tg } \varphi} - 1 \right], \quad (37)$$

где

$$\varphi = \frac{\pi}{\beta R + b} = \varphi(\tau) = \frac{\pi}{b \left(1 + \frac{h\alpha_0}{b\rho_0} \tau \right)}. \quad (38)$$

Формула (38) включает в себя величины $\beta = h\alpha(\rho) = h\alpha_0 \frac{\rho}{\rho_0}$ и оптическую толщину шара с плотностью ρ и радиусом R ($\tau = \rho R$).

Если активный шар находится в критическом состоянии, то уравнения (32) и (33) упрощаются:

$$\nabla^2 n(r) + (\alpha \text{tg } \varphi_*)^2 n(r) = 0, \quad (39)$$

$$h\varphi_* = \text{tg } \varphi_*. \quad (40)$$

Подставляя корень φ_* трансцендентного уравнения в формулу (38), для оптической толщины и плотности критического шара получаем:

$$\tau_* = \rho_* R_* = \frac{b\rho_0}{h\alpha_0} \left[\frac{\pi}{b\varphi_*} - 1 \right], \quad (41)$$

$$\rho_* = \sqrt{\frac{4\pi}{3M_*} \left[\frac{\pi\rho_0}{h\alpha_0\varphi_*} \left(1 - \frac{b\varphi_*}{\pi} \right) \right]^{3/2}}. \quad (42)$$

В работе Ю. А. Романова (см. [8]) трансцендентное уравнение (40) решалось численно.

В статье [9] получена следующая формула, дающая представление о явной зависимости коэффициента диффузии от активности h :

$$D = \frac{5V}{3\alpha(4h+1)}, \quad (43)$$

и уравнение диффузии (32) превратилось в

$$\nabla^2 n(r) + \frac{3}{5}(h-1)(4h+1)\alpha^2 n(r) = 0. \quad (44)$$

3.2. Вывод приближенных формул для линейного по плотности активного шара диапазона изменения λ

Расчеты и вычисления зависимости $\lambda(\rho)$, определенной по формуле (37), при $\rho \approx \rho_*$ неожиданно выявили не узкий, а достаточно широкий интервал изменения ρ , внутри которого справедлива формула

$$\lambda = C_0(\rho - \rho_*). \quad (45)$$

Чтобы это понять, выведем соответствующие формулы и по ним проведем вычисления $\lambda(\rho)$ (см. раздел 4).

Функцию (37) разложим в ряд Тейлора в окрестности точки $\rho = \rho_*$:

$$\begin{aligned} \lambda = \lambda(\rho_*) + \left(\frac{d\lambda}{d\rho} \right)_* (\rho - \rho_*) + \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\lambda}{d\rho^2} \right)_* (\rho - \rho_*)^2 + \dots \end{aligned} \quad (46)$$

Ограничимся линейным по плотности членом ряда (46).

Теперь осталось лишь найти не зависящую от плотности ρ однородного шара величину – постоянную $C_0 = \left(\frac{d\lambda}{d\rho} \right)_*$, которая определяется путем взятия полной производной функции $\lambda(\rho)$.

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\lambda}{d\rho} \right)_* = \frac{\alpha_0}{\rho_0} \left(\frac{\partial\lambda}{\partial\rho} \right)_* + \\ + \alpha_0 \frac{\rho}{\rho_0} V \frac{\partial}{\partial\tau} \left[\frac{h\varphi(\tau)}{\text{tg } \varphi(\tau)} - 1 \right] \left(\frac{d\tau}{d\rho} \right)_*. \end{aligned} \quad (47)$$

Опустив выкладки, запишем искомый ответ.

$$C_0 = \frac{bVh\alpha_0}{3\pi\rho_0} \varphi_*^2 \left(\frac{\pi}{b\varphi_*} - 1 \right) \frac{2\varphi_* - \sin(2\varphi_*)}{\sin^2 \varphi_*}. \quad (48)$$

4. Результаты аналитических вычислений и численных решений односкоростного кинетического уравнения для нейтронов

Ниже представлены результаты вычислений физических величин по формулам подобия, а так-

же результаты спектральных расчетов «Монте-Карло» (см. [10]) и одnogрупповых расчетов, выполненных с использованием одной из математических методик [11].

4.1. Результаты расчетов «Монте-Карло» и вычислений физических величин по точным формулам подобия

В задачах «Монте-Карло» моделировалось решение нестационарного уравнения переноса нейтронов в надкритических однородных шарах из плутония.

Рассмотрим шар из ^{239}Pu с плотностью $\rho_1 = 63,6 \text{ г/см}^3$ и массой $M_1 = 1 \text{ кг}$.

Расчет «Монте-Карло» на спектральных нейтронных константах ENDL-82 привел к следующему результату:

$$\lambda_1 = 0,867913 \cdot 10^7 \text{ 1/с.} \quad (49)$$

С помощью соотношения подобия (5)

$$\lambda_2(\rho_2, M_2) = \frac{\rho_2}{\rho_1} \lambda_1(\rho_1, M_1) \text{ для шара с плотностью } \rho_2 = 127,2 \text{ г/см}^3 \text{ и } M_2 = 0,25 \text{ кг}$$

получено значение

$$\lambda_2 = 1,735826 \cdot 10^7 \text{ 1/с.} \quad (50)$$

Вместо этого в расчете «Монте-Карло» реализовалась величина

$$\lambda_2 = 1,734834 \cdot 10^7 \text{ 1/с.} \quad (51)$$

В равенствах (15)–(17), как и далее, специально выписано много знаков, чтобы оценить погрешность расчетов «Монте-Карло». Погрешность в данном случае оказалась малой:

$$\delta = \frac{\lambda_2 - \lambda'_2}{\lambda_2} = 0,0006, \quad (52)$$

так как эти задачи решались значительно дольше (в 35 раз), чем обычные задачи «Монте-Карло». При этом, видимо, удалось добиться практически полного выхода нестационарного решения на главные собственные значения.

4.2. Результаты, полученные на основе односкоростного кинетического уравнения для нейтронов

Результаты решения односкоростного уравнения зависят от выбора счетной сетки в однородных шарах. Авторы статьи благодарны А. А. Горшихину за оказанные им консультации по вопросу о расстановке счетных точек в однородных и в некоторых профильных сферически-симметрических системах.

4.2.1. Одnogрупповые нейтронные константы ^{238}Pu и ^{239}Pu

Таблица 1

Взяты из статьи [3] одnogрупповые нейтронные константы изотопов плутония и значения λ в бесконечной однородной среде с плотностью ρ_0

Изотоп плутония	^{239}Pu		^{238}Pu	
	1-ENDF B-6	1-ENDL-82	1-ENDF B-6	1-ENDL-82
Нейтронные константы				
$\alpha(\rho_0), \text{ 1/см}$	0.2779	0.2988	0.2691	0.3049
$\beta(\rho_0), \text{ 1/см}$	0.4607	0.4795	0.4602	0.5006
$\rho_0, \text{ г/см}^3$	19.851	19.851	19.84	19.84
Скорость нейтронов $V, 10^7 \text{ см/с}$	120.588	120.588	120.588	120.588
Активность вещества h	1.6578	1.6048	1.7101	1.6418
ν	3.1309	3.1093	3.1868	3.1085
$\sigma_f, \text{ барн}$	1.7438	1.7412	1.8256	1.9100
$\sigma_s, \text{ барн}$	3.7504	4.1709	3.3488	4.0355
$\sigma_c, \text{ барн}$	0.0611	0.0614	0.1868	0.1286

4.2.2. Некоторые решения стационарной задачи на главные собственные значения. Покажем, что для нахождения λ у множества различных однородных шаров с помощью формулы (27)

$$\lambda_2 = \left[\frac{h_2}{h_1} \left(1 + \frac{\lambda_1}{\alpha_1 V_1} \right) - 1 \right] \alpha_2 V_2$$

достаточно располагать всего лишь одним численным решением одностороннего стационарного кинетического уравнения (13).

В качестве примера рассмотрим однородный шар из ^{239}Pu с массой $M_1 = 1$ кг и с плотностью $\rho_1 = 64$ г/см³, для которого односторонний расчет на нейтронных константах 1-ENDF В-6 привел к следующему результату:

$$\lambda_1 = 1,564729 \cdot 10^7 \text{ 1/с.} \quad (53)$$

Приведем результаты вычислений λ_2 по формуле подобия (27) и сравним с расчетными величинами λ_2 (табл. 2, 3).

ния (11) и в качестве примера рассмотрим два подобных шара из ^{239}Pu с разными плотностями $\rho_1 = 68,7$ г/см³, $\rho_2 = 70,4$ г/см³, для которых расчеты λ на односторонних константах 1-ENDF В-6 дали следующие результаты:

$$\lambda_1 = 7,01 \cdot 10^7 \text{ 1/с,} \quad (54)$$

$$\lambda_2 = 9,08 \cdot 10^7 \text{ 1/с.} \quad (55)$$

При постановке расчетов каждый шар разбивался на десять областей с равными оптическими толщинами, в каждой из которых определялись нейтронные плотности.

Отнормированные на единицу в центре шара расчетные зависимости плотностей нейтронов n_1 и n_2 от радиуса $r \leq R$, полученные к моменту выхода решения на главные собственные функции, представлены на рис. 1. Из рис. 1 видно, что $R_2 \neq R_1$.

Таблица 2

Результаты вычислений λ шаров из ^{239}Pu и ^{238}Pu и их сравнение с расчетными величинами

Изотоп плутония	^{239}Pu		^{238}Pu	
	1-ENDF В-6	1-ENDL-82	1-ENDF В-6	1-ENDL-82
Нейтронные константы				
ρ , г/см ³	64	60.2840	64.4578	56.8003
λ , 10^7 1/с	1.564729 (λ_1)	-2.002276	4.869964	0.483936
Расчетное значение λ , 10^7 1/с	1.564729	-2.002412	4.870084	0.483426

Таблица 3

Результаты расчетов и вычислений λ по формуле подобия (27) шаров с $M = 1$ кг из инертного материала и поглотителя нейтронов

Активность h	1	0.8
ρ , г/см ³	136.6203	190.9327
λ , 10^7 1/с	-89.881311	-165.218408
Расчетное значение λ , 10^7 1/с	-89.881264	-165.218354

Таблица 4

Нейтронные плотности в трех областях, одна из которых прилегает к внешней поверхности шара

Δr , см	1.05÷1.2	1.2÷1.35	1.35÷R
$n_1(\Delta r)$	0.5321	0.4211	0.2955
$n_2(\Delta r)$	0.5229	0.4102	0.2879
$n_1(\Delta r)/n_2(\Delta r)$	1.0176	1.0265	1.0253

Из представленных расчетно-теоретических материалов, следует, что на основе единственного расчетного значения λ_1 найдены подобные системы из разных веществ с отрицательными и положительными главными собственными значениями $\lambda_2 \neq \lambda_1$.

4.2.3. Определение погрешности решения одной из нестационарных задач на главные собственные функции. Будем исходить из нестационарного одностороннего кинетического уравне-

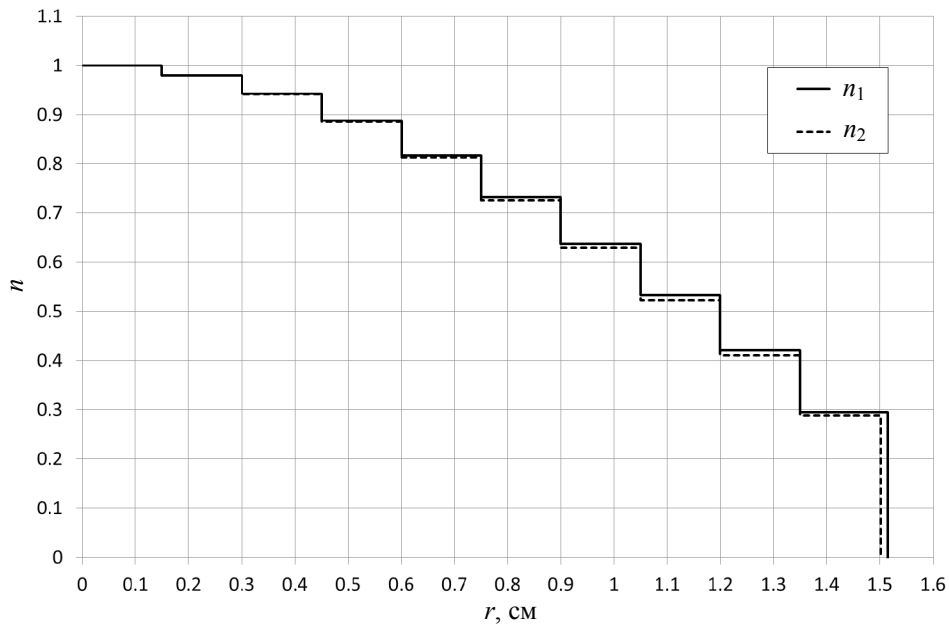


Рис. 1. Расчетные зависимости $n(r)$

Для оценки погрешности полученных расчетных результатов используем точную формулу подобия (10) (см. также приложение), в соответствии с которой $n_2(r) = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^3 n_1(r)$. Приняв в этой формуле $n_1(r)$ за расчетную собственную функцию

и определив по ней $n_2(r)$, вместо графиков рис. 1 получаем следующие графики (рис. 2).

Теперь значения собственных функций $n_1(r)$ и $n_2(r)$ совпали. Отсюда следует, что искомая погрешность расчетов составляет меньше, чем 2,7%. Без применения точной формулы подобия определить погрешность результатов расчетов было бы трудно.

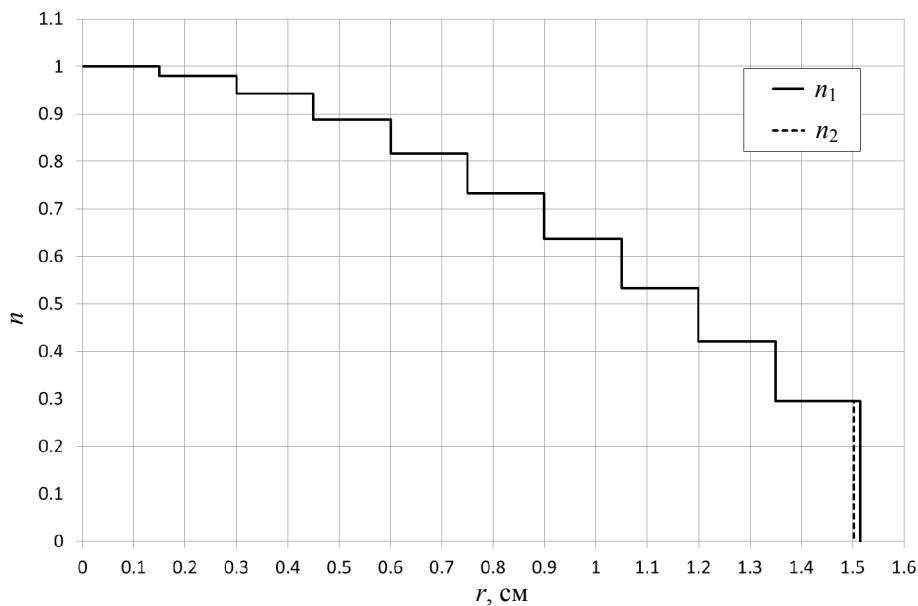


Рис. 2. Зависимости $n(r)$, найденные с помощью формулы подобия

4.3. Диапазон изменения плотности, внутри которого функция $\lambda(\rho)$ близка к линейной (сравнение расчетных величин λ с вычисленными по диффузионным формулам)

На рис. 3 приведены результаты расчетов и вычислений по диффузионной формуле (37)

$$\lambda = \alpha V \left[\frac{h\varphi}{\text{tg } \varphi} - 1 \right].$$

Отличия расчетных и вычисленных по формуле (37) главных собственных значений практически отсутствуют.

Результаты расчетов и вычислений λ по формуле (45) $\lambda = C_0(\rho - \rho_*)$ представлены на рис. 4.

Если за допустимую величину отклонения линейной зависимости $\lambda(\rho)$ от полученной в расчете принять 1 %, то для ^{239}Pu и ^{238}Pu соответственно имеем $(\rho/\rho_*) = 1,59$ и $(\rho/\rho_*) = 1,64$.

Следовательно, рассмотренные выше плутониевые шары нельзя считать слабонадкритическими. Объясним этот результат.

Для упрощения математических операций введем следующие безразмерные величины:

$x = \rho/\rho_*$ – плотность активного шара,

$y = \lambda/(\alpha_*V)$ – главное собственное значение (λ),

$w = (\rho R)/(\rho_* R_*)$ – оптическая толщина.

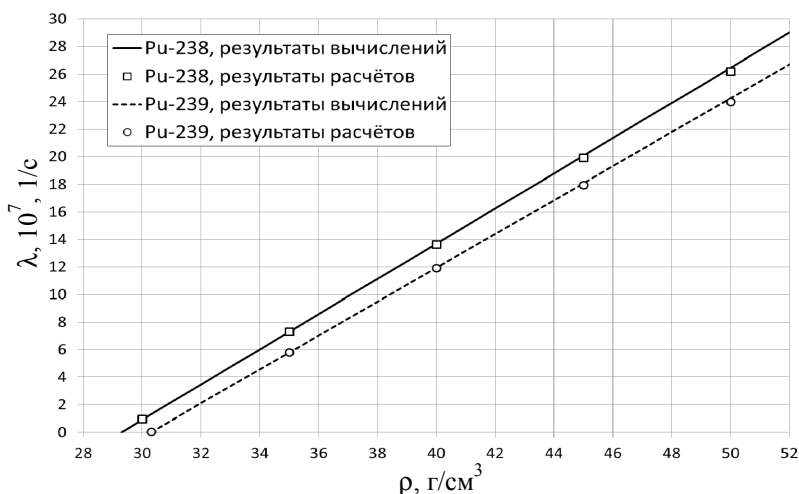


Рис. 3. Зависимости $\lambda(\rho)$ для шаров из ^{238}Pu и ^{239}Pu с массой $M = 4,3$ кг

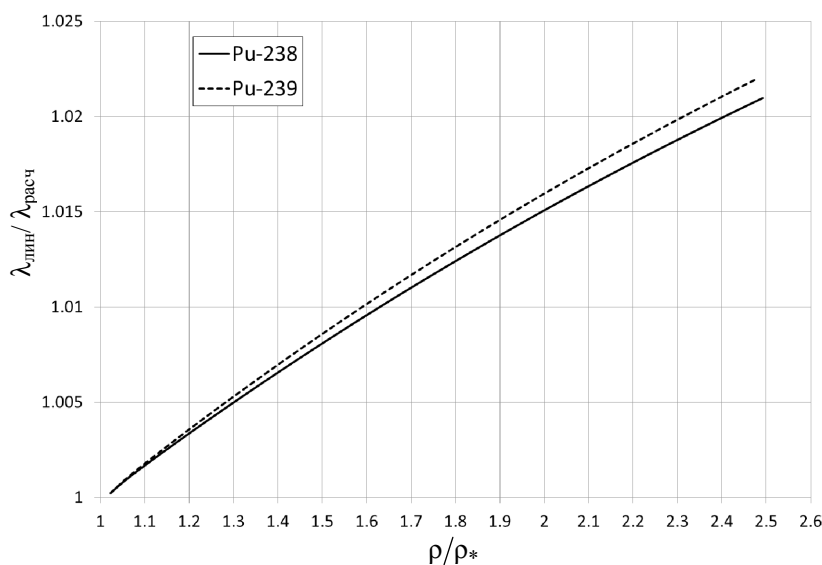


Рис. 4. Отклонение результатов, полученных по формуле (45), от расчетных значений λ при вариации ρ/ρ_*

Представив $y(x)$ в виде

$$y = xF(w), \quad (56)$$

функцию $y(x)$ разложим в ряд Тейлора, ограничившись первыми тремя слагаемыми:

$$y(x) = y'(1)(x-1) + y''(1)(x-1)^2/2 + y'''(1)(x-1)^3/6. \quad (57)$$

После проведения несложных, но громоздких выкладок получился следующий результат:

$$\left| \frac{y''(x=1)}{2} + \frac{y'''(x=1)}{6} \right| \ll y'(x=1), \quad (58)$$

чем и объясняется сделанное выше утверждение о достаточно высоком уровне надкритичности однородных шаров из ^{238}Pu и ^{239}Pu .

В самом деле, если временно предположить равенство модулей трех производных, то член ряда $y'''(1)(x-1)^3/6$ станет преобладающим. Тогда из-за наличия в нем сомножителя $(x-1)^3$, величина которого мала по сравнению с $(x-1)$, значение ρ окажется близким к ρ_* . Это привело бы к уменьшению ширины диапазона $\rho - \rho_*$, на котором справедлива линейная зависимость $\lambda = C_0(\rho - \rho_*)$.

Отметим, что входящая в разложение (57) вторая производная отрицательна, а две другие производные положительны.

5. Поведение собственных функций вблизи границы оптически толстого однородного шара

5.1. О расходимости логарифмической производной нейтронной плотности на границе шара, оптическая толщина которого бесконечна

Приведем некоторые результаты, полученные в статье [12] на основе интегрального уравнения Пайерлса с постоянными параметрами α и β (см. например, [13]), которое, как известно, соответствует односкоростному кинетическому уравнению.

В [12] при рассмотрении однородного шара с бесконечными оптической толщиной αR и

$$p = \left(1 + \frac{\lambda}{\alpha V} \right) \alpha R \quad (59)$$

получена следующая формула для логарифмической производной нейтронной плотности в предельном случае $\Delta r = R - r \rightarrow 0$:

$$\left[\frac{1}{n(r)} \frac{dn(r)}{dr} \right]_{r \rightarrow R \pm \Delta r} = \frac{\beta}{2} \ln \left[\left(\alpha + \frac{\lambda}{V} \right) (R \pm \Delta r) \right] \rightarrow -\infty. \quad (60)$$

Формула (60) справедлива при выполнении условия $\left(\alpha + \frac{\lambda}{V} \right) > 0$.

Следует отметить, что вопрос о расходимости собственной функции на границе однородного объекта имеет свою историю.

Логарифмическую расходимость производной нейтронной плотности на плоской границе полубесконечного пространства с однородным инертным веществом обнаружили Плачек, Зейдель и Марк (см. [14–16]) в 1947 г. при решении проблемы Милна.

Аналогичный результат, который не был опубликован в открытой печати, в 1948 г. получил Н. А. Дмитриев, решив стационарную задачу о поведении собственных функций вблизи плоской границы раздела двух однородных полубесконечных сред с различными ядерно-физическими свойствами. Стационарное решение в случае полубесконечных сред возможно только при выполнении обязательного условия $\lambda = 0$. Таким образом, фактически Н. А. Дмитриев решил двухобластную задачу с разными инертными веществами.

5.2. Поведение собственной функции вблизи границы конечного по размерам шара с большой оптической толщиной

Пусть теперь оптическая толщина шара $\alpha R \gg 1$ и

$$p = \left(1 + \frac{\lambda}{\alpha V} \right) \alpha R \gg 1. \quad (61)$$

При этом главное собственное значение λ очень слабо отличается от величины $\lambda_\infty = (\beta - \alpha)V$,

$$\text{т. е. } \frac{\lambda_\infty - \lambda}{\lambda_\infty} \ll 1.$$

5.2.1. Определение логарифмической производной в непосредственной близости к границе шара. Дополнительно к результатам, полученным в [12], выведем новые формулы.

В окрестности границы шара выделим узкую зону

$$r \in (R - \Delta r, R + \Delta r) \quad (62)$$

с шириной $2\Delta r \ll R$, в пределах которой вместо (60) можно записать приближенное соотношение

$$\left[\frac{1}{n(r)} \frac{dn(r)}{dr} \right]_{r \rightarrow R \pm \Delta r} \approx \frac{\beta}{2} \ln \left[\left(\alpha + \frac{\lambda}{V} \right) (R \pm \Delta r) \right]. \quad (63)$$

Введем новую переменную

$$x = \frac{r}{R} \quad (64)$$

и следующее обозначение:

$$\varepsilon = \frac{\Delta r}{R} \ll 1, \quad (65)$$

После перехода к аргументу (64) имеем

$$\left[\frac{1}{n(x)} \frac{dn(x)}{dx} \right]_{x \rightarrow 1 \pm \varepsilon} \approx \frac{\beta R}{2} \ln [p(1 \pm \varepsilon)], \quad (66)$$

p – большая, но конечная величина.

Устремив ε к нулю, из формулы (66) получаем следующий искомый ответ:

$$\left[\frac{1}{n(x)} \frac{dn(x)}{dx} \right]_{x=1} \approx \frac{\beta R}{2} \ln(p). \quad (67)$$

5.2.2. Результаты вычислений логарифмических производных для шаров из ^{239}Pu и ^{238}Pu по диффузионным формулам. Взяв логарифмическую производную собственной функции (35) с использованием (38), имеем

$$\frac{1}{n(x)} \frac{dn(x)}{dx} = p \operatorname{tg} \varphi \operatorname{ctg} [p(\operatorname{tg} \varphi)x] - \frac{1}{x}. \quad (68)$$

Разложим котангенс, входящий в (68), в ряд Тейлора:

$$\operatorname{ctg}(x) = \frac{1}{x} - \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{45} + \frac{2x^7}{945} + \dots + \frac{2^{2n} B_n}{(2n)!} x^{2n-1} + \dots \right], \quad (69)$$

где B_n – числа Бернулли.

При этом в случае малых значений x можно пользоваться выражением

$$\begin{aligned} \frac{1}{n(x)} \frac{dn(x)}{dx} &= p \operatorname{tg} \varphi \left[\frac{1}{p(\operatorname{tg} \varphi)x} - \frac{p(\operatorname{tg} \varphi)x}{3} \right] - \frac{1}{x} = \\ &= -\frac{(p \operatorname{tg} \varphi)^2 x}{3}. \end{aligned} \quad (70)$$

Очевидно $\left. \frac{1}{n(x)} \frac{dn(x)}{dx} \right|_{x \rightarrow 0} \rightarrow 0$.

Оказалось, что для нахождения логарифмической производной в окрестности границы оптически толстого шара с использованием разложения (69) необходимо учитывать более ста членов ряда. Поэтому в таком случае вычисления ниже проводились по формуле (68).

В качестве примера рассмотрим однородные шары из ^{239}Pu и ^{238}Pu с большими и сравнительно малыми оптическими толщинами, параметры и основные характеристики которых представлены в табл. 5.

Отрицательные величины $\frac{d \ln(x)}{dx}$ в виде графиков изображены на рис. 5.

Таблица 5

Параметры однородных шаров из ^{239}Pu , ^{238}Pu и некоторые результаты вычислений

Изотоп плутония	^{239}Pu		^{238}Pu	
	1.658		1.710	
Активность h	1.658		1.710	
Плотность, г/см ³	68.7	68.7	68.7	68.7
Радиус, см	1000	1.5122	1000	1.5122
Оптическая толщина αR	965.7	1.460	931.9	1.409
$\frac{1}{n(x)} \frac{dn(x)}{dx}$ при $x = 1$	-2256	-3.81	-2240	-3.79
$\lambda, 10^7, 1/\text{с}$	76.61146	7.01	79.76704	9.95
$\lambda_\infty, 10^7, 1/\text{с}$	76.61171	76.61171	79.76729	79.76729
Отношение $\frac{\lambda}{\lambda_\infty}$	0.999997	0.0915	0.999997	0.1247

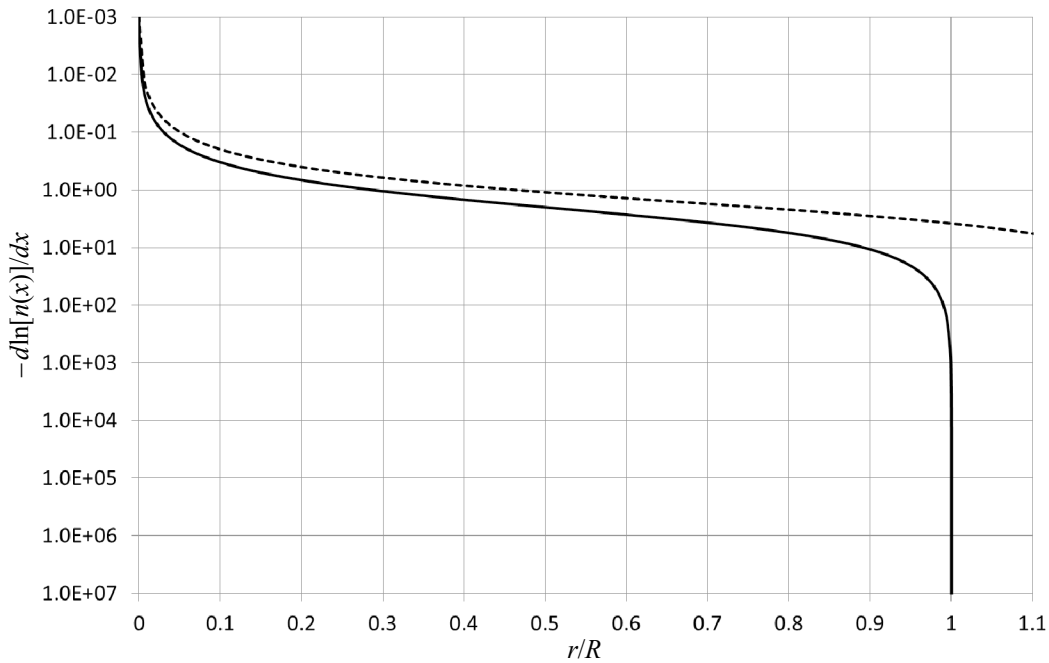


Рис. 5. Пространственные зависимости логарифмических производных

На рис. 5 сплошной и пунктирной кривыми показаны результаты, полученные для шаров с оптической толщиной $\alpha R \gg 1$ и для оптически тонких шаров. Так как ядерно-физические свойства ^{239}Pu и ^{238}Pu отличаются слабо, то различие соответствующих кривых на рис. 5 с логарифмической шкалой ординат оказалось незаметным.

Из рис. 5 видно, что в случае $\alpha R \gg 1$ наблюдается резкое изменение функции $\frac{d \ln(x)}{dx}$ на участке около границы шара.

Уменьшение оптической толщины шара приводит к размытию и исчезновению этого участка.

6. Основные выводы

На основе известного фундаментального свойства инвариантности кинетического уравнения по отношению к преобразованиям подобия получены аналитические соотношения между главными собственными функциями и главными собственными значениями λ в разных системах.

Точное уравнение переноса нейтронов в однородных шарах, записанное в общем виде, позволило получить столь же точные, как и само уравнение, соотношения подобия.

Практическая значимость точных формул подобия состоит в том, что с их помощью можно

определять погрешность собственных функций и собственных значений, найденных в расчетах по различным математическим методикам.

На основе точных формул подобия можно также уточнять математическую постановку расчетов и контролировать правильность полученных в них результатов.

Показано, что переход от точного к односкоростному кинетическому уравнению для нейтронов, в котором использованы упрощающие предположения, приводит к значительному расширению класса подобных систем.

В данной статье представлены аналитические решения диффузионных задач на главные собственные функции и главные собственные значения, при использовании которых формулы подобия не нужны.

Заключение

В статье подробно изучена нейтронная кинетика однородных шаров, выполненных из ^{238}Pu и ^{239}Pu .

Предложен и обоснован метод, который с помощью формул подобия позволяет определять погрешности результатов расчетов и точность различных математических методик, а также выбирать правильную постановку задач.

Авторы благодарны И. А. Андриюшину, Б. А. Надыкто и М. В. Шабурову, которые, ознакомившись со статьей, сделали ряд замечаний и дали полезные советы.

Список литературы

1. Wright R. Q., Jordan W. C., Westfall R. M. (Oak Ridge National Laboratory). Critical masses of bare metal spheres using SCALE/XSDRN// Proceeding of Annual Meeting of the American Nuclear Society, San Diego, June 4–8, 2000. P. 167.

2. Бабичев Н. Б., Севастьянов А. А. Критические параметры однородных шаров, состоящих из плутония-238 и плутония-239 // См. настоящий выпуск. С. 28–35.

3. Herman M., Trkov A. ENDF-6 format manual, data formats and procedures for the evaluated nuclear data files ENDF/B-VI and ENDF/B-VII. BNL-90365. National nuclear data center, Brookhaven national laboratory, Upton, New York 11973-5000, July 2010.

4. Howerton R. J., Dye R. E., Perkins S. T. Evaluated nuclear data library (ENDL). Report UCRL-50400, vol. 4, rev. 1, appendix C. 1982.

5. Build Atomic Bomb. Edited with an introduction by Richard Rhodes. ISBN: 0520075765. University of California Press, 1992.

6. Дубовский Б. Г., Камаев Ф. В., Кузнецов Ф. М. и др. Критические параметры систем с делящимися веществами и ядерная безопасность (справочник). М.: Госатомиздат, 1966.

7. Бабичев Н. Б., Лутиков И. В., Незнамов В. П. Теория подобия в рамках односкоростной нейтронной кинетики квазистационарных систем // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2008. Вып. 1. С. 56–66.

8. Романов Ю. А. Критические параметры реакторных систем. Точные решения односкоростного кинетического уравнения и их использование для решения диффузионных задач (усовершенствованный диффузионный метод). М.: Госатомиздат, 1960. С. 3–26.

9. Бабичев Н. Б., Беженцев Б. В., Бондарев П. С. Новые формулы для вычисления коэффициентов диффузии нейтронов // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2008. Вып. 3. С. 44–48.

10. Донской Е. Н., Ельцов В. А., Житник А. К. и др. Метод Монте-Карло во ВНИИЭФ // ВАНТ. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1993. Вып. 2. С. 61–64.

11. Шагалиев Р. М., Гребенников А. Н., Артемьев А. Ю., Будников В. И. Развитие основных

методик и программ ИТМФ // Журнал Атом. 2011, № 50–51.

12. Бабичев Н. Б., Севастьянов А. А. Особенности пространственного распределения нейтронов вблизи границ // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2008. Вып. 2. С. 32–37.

13. Ахизер А., Померачук И. Некоторые вопросы теории ядра. Л.: Оборонгиз, 1950.

14. Placzek G., Seidel W. // Phys. Rev. 1947. Vol. 72. P. 550.

15. Placzek G. // Phys. Rev. 1947. Vol. 72. P. 556.

16. Mark G. C. // Phys. Rev. 1947. Vol. 72. P. 558.

17. Климов В. Н. Кинетическое уравнение для примесей // Теория вероятностей и ее применения. 1957. Т. 2. Вып. 2.

18. Бабичев Н. Б., Бондарев П. С., Незнамов В. П. Уравнения переноса нейтронов (учебное пособие для студентов и молодых специалистов). Саров: РФЯЦ ВНИИЭФ, Институт теоретической и математической физики (ИТМФ). 2010.

19. Дэвисон Б. Теория переноса нейтронов. М.: Изд-во Главного управления по использованию атомной энергии при Совете Министров СССР, 1960.

Приложение

Общее уравнение переноса нейтронов, его инвариантность по отношению к преобразованиям подобия и вытекающие из этого следствия

За основу примем следующее кинетическое уравнение для нейтронов (см., например, [17]).

$$\frac{\partial \psi(t, \vec{r}, \vec{V})}{\partial t} + \left(\vec{V} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \right) \psi(t, \vec{r}, \vec{V}) + \zeta(\vec{r}, \vec{V}) \psi(t, \vec{r}, \vec{V}) = \int d\vec{V}' \Gamma(\vec{r}, \vec{V}', \vec{V}) \psi(t, \vec{r}, \vec{V}'). \quad (\text{П1})$$

Здесь $\psi(t, \vec{r}, \vec{V})$ – функция распределения нейтронов в момент времени t в фазовом пространстве векторов \vec{r} и \vec{V} , $\psi(t, \vec{r}, \vec{V}) d\vec{r} d\vec{V}$ – число частиц в окрестности точки с радиус-вектором \vec{r} внутри элементарного объема $d\vec{r}$, имеющих скорость \vec{V} с точностью до $d\vec{V}$; $\Gamma(\vec{r}, \vec{V}', \vec{V}) d\vec{V} dt$ – выражает вероятность того, что за время dt нейтрон скорости \vec{V}' взаимодействует с каким-либо ядром, и в результате этого получится нейтрон, имеющий скорость \vec{V} с точностью до $d\vec{V}$; $\zeta(\vec{r}, \vec{V}) dt$ – веро-

ятность нейтрона, обладающего скоростью \vec{V} , провзаимодействовать с веществом за время dt .

Возможны четыре канала взаимодействий нейтронов с ядрами: упругое s и неупругое in рассеяние, деление f активных ядер, поглощение c .

Им соответствуют элементарные (микроскопические) сечения $\sigma_1 = \sigma_s$, $\sigma_2 = \sigma_{in}$, $\sigma_3 = \sigma_f$, $\sigma_4 = \sigma_c$ и при этом

$$\Gamma(\vec{r}, \vec{V}', \vec{V}) = \sum_{k=1}^3 \Gamma_k(\vec{r}, \vec{V}', \vec{V}), \quad (\text{П2})$$

$$\zeta(\vec{r}, \vec{V}) = \sum_{k=1}^4 \zeta_k(\vec{r}, \vec{V}). \quad (\text{П3})$$

Обратим внимание на то, что в статье В. Н. Климова [17] подробно рассматривались только процессы упругого рассеяния нейтронов. При этом был найден явный вид интеграла столкновений $\Gamma_s = \Gamma_1(\vec{r}, \vec{V}', \vec{V})$ и функции $\zeta_s = \zeta_1(\vec{r}, \vec{V})$ для всевозможных распределений ядер по скоростям (покоящиеся ядра, мононаправленные пучки ядер, максвелловское и анизотропное распределения).

Общий вид входящих в правые части (П2) и (П3) функций, ответственных за скорости деления активных ядер, неупругого рассеяния и поглощения нейтронов, представлен в [18].

Сделав замечания по поводу имеющихся теоретических результатов, мы специально не будем касаться вопроса о конкретном явном виде функций (П2) и (П3). Это дает нам право считать их и, следовательно, кинетическое уравнение (П1) точными. Столь же точными являются также формулы подобия, которые получены ниже.

Описывающие вероятностные процессы взаимодействия нейтронов с ядрами функции $\Gamma(\vec{r}, \vec{V}', \vec{V})$ и $\zeta(\vec{r}, \vec{V})$ зависят от плотности среды и от макроскопических сечений

$$\alpha_k(\vec{r}) = n_j(\vec{r}) \sum_j \mu_j(\vec{r}) \sigma_{kj}, \quad (\text{П4})$$

Здесь $\mu_j(\vec{r})$ и σ_{kj} – соответственно концентрация по частицам ядер j -го сорта и элементарное сечение взаимодействия нейтрона с j -м ядром по каналу с номером k ; $n_j(\vec{r}) = \frac{N_a \rho(\vec{r})}{\sum_j \mu_j(\vec{r}) A_j}$ – плотность ядер, т. е. их количество в единице объема; N_a и A_j – число Авогадро и массовое число j -го ядра.

Раскроем, например, структуру функций $\Gamma_s = \Gamma_1$ и $\zeta_s = \zeta_1$:

$$\Gamma_1(\vec{r}, \vec{V}', \vec{V}) = n_j(\vec{r}) \sum_j \int d\vec{W}_j \mu_j(\vec{r}) |\vec{V}' - \vec{W}_j| \times \\ \times \sigma_1(|\vec{V}' - \vec{W}_j|) \eta_1(\vec{V}', \vec{W}_j, \vec{V}) \gamma(\vec{r}, \vec{W}_j); \quad (\text{П5})$$

$$\zeta_1(\vec{r}, \vec{V}) = \int d\vec{V}' \Gamma_1(\vec{r}, \vec{V}, \vec{V}')^*; \quad (\text{П6})$$

\vec{W}_j – скорость ядер j -го сорта; $\eta_1(\vec{V}', \vec{W}_j, \vec{V}) d\vec{V}'$ – вероятность нейтрону, имевшему до столкновения с j -м ядром скорость \vec{V}' , после упругого рассеяния приобрести скорость \vec{V} с точностью до $d\vec{V}'$; $\gamma(\vec{r}, \vec{W}_j)$ – скоростное распределение ядер j -го сорта в точке \vec{r} , нормированное равенством

$$\int d\vec{W}_j \gamma(\vec{r}, \vec{W}_j) = 1. \quad (\text{П7})$$

Очевидно, что в общем случае распределения различных ядер по скоростям зависят от температуры среды $T(\vec{r})$. Данные зависимости ярко проявляются в тех случаях, когда существенна роль тепловых нейтронов. Примером этого являются не рассматриваемые здесь водородосодержащие системы со сравнительно большим количеством сильно замедляющих нейтроны ядер водорода.

Поскольку функции $\Gamma(\vec{r}, \vec{V}', \vec{V})$ и $\zeta(\vec{r}, \vec{V})$ пропорциональны плотности вещества, то имеем:

$$\Gamma(\vec{r}, \vec{V}', \vec{V}) = \rho \Gamma_0(\vec{r}, \vec{V}', \vec{V}), \quad (\text{П8})$$

$$\zeta(\vec{r}, \vec{V}) = \rho \zeta_0(\vec{r}, \vec{V}), \quad (\text{П9})$$

вместо исходного уравнения (П1) перейдем к эквивалентному ему тоже точному кинетическому уравнению

$$\frac{\partial \psi(t, \vec{r}, \vec{V})}{\partial t} + \left(\vec{V} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \right) \psi(t, \vec{r}, \vec{V}) + \rho \zeta_0(\vec{r}, \vec{V}) \psi(t, \vec{r}, \vec{V}) = \\ = \rho \int d\vec{V}' \Gamma_0(\vec{r}, \vec{V}', \vec{V}) \psi(t, \vec{r}, \vec{V}'). \quad (\text{П10})$$

$\Gamma_0(\vec{r}, \vec{V}', \vec{V})$, $\zeta_0(\vec{r}, \vec{V})$ – новые функции.

Уравнение (П10) подвергнем преобразованию подобия

$$t \rightarrow t' = \frac{\rho}{\rho'} t, \quad (\text{П11})$$

* Отметим, что $\Gamma_1(\vec{r}, \vec{V}, \vec{V}') \neq \Gamma_1(\vec{r}, \vec{V}', \vec{V})$.

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = \frac{\rho}{\rho'} \vec{r}. \quad (\text{П12})$$

Из соотношения (П12) следует, что

$$R' = \frac{\rho}{\rho'} R. \quad (\text{П13})$$

Здесь R и R' – характерные размеры двух однородных систем, выполненных из произвольных, но одинаковых по изотопному составу веществ.

В данной статье рассматриваются однородные шары с радиусами R и R' из делящихся, инертных и поглощающих нейтроны материалов.

Так как $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\rho}{\rho'} \frac{\partial}{\partial t'}$ и $\frac{\partial}{\partial \vec{r}} = \frac{\rho}{\rho'} \frac{\partial}{\partial \vec{r}'}$, то для штрихованной функции распределения получаем:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \psi'(t', \vec{r}', \vec{V}')}{\partial t'} + \left(\vec{V}' \frac{\partial}{\partial \vec{r}'} \right) \psi'(t', \vec{r}', \vec{V}') + \\ & + \rho' \zeta'_0(\vec{r}', \vec{V}') \psi'(t', \vec{r}', \vec{V}') = \\ & = \rho' \int d\vec{V}' \Gamma'_0(\vec{r}', \vec{V}', \vec{V}') \psi'(t', \vec{r}', \vec{V}'). \quad (\text{П14}) \end{aligned}$$

Кинетические уравнения (П10) и (П14) по своему виду совпадают друг с другом.

Это означает, что они обладают известным свойством инвариантности относительно преобразований подобия (П11) и (П12).

В случае критических шаров $\frac{\partial \psi(t, \vec{r}, \vec{V})}{\partial t} = 0$ и выполняется следующее равенство:

$$R'_* = \frac{\rho_*}{\rho'_*} R_*. \quad (\text{П15})$$

Рассмотрим теперь активные шары, находящиеся в надкритических состояниях.

Известно (см., например, [19]), что уравнение переноса нейтронов в случае систем с конечными

размерами имеет дискретные решения на собственные значения $\lambda_0 > \lambda_1 > \lambda_2 > \dots$ и соответствующие им решения на собственные функции. Общим решением является суперпозиция

$\psi(t, \vec{r}, \vec{\Omega}) = \sum_m a_m e^{\lambda_m t} \psi_m(\vec{r}, \vec{\Omega})$, где $\vec{\Omega} = \frac{\vec{V}}{V}$. В данной сумме остается только первое слагаемое, если $t \geq t_0 \gg \frac{1}{\lambda}$, здесь $\lambda = \lambda_0$ главное собственное значение.

В этом случае $\frac{\partial \psi(t, \vec{r}, \vec{V})}{\partial t} = \lambda \psi(t, \vec{r}, \vec{V})$. Тогда из уравнения (П10) получаются следующие связи между главными собственными значениями и главными собственными функциями:

$$\lambda(\rho') = \frac{\rho'}{\rho} \lambda(\rho), \quad (\text{П16})$$

$$\psi'(t', \vec{r}', \vec{\Omega}) = \left(\frac{\rho'}{\rho} \right)^3 \psi(t, \vec{r}, \vec{\Omega}), \quad \vec{\Omega} = \frac{\vec{V}'}{V'}, \quad (\text{П17})$$

$$\psi'(t', \vec{r}', \vec{\Omega}) = \left(\frac{R'}{R} \right)^3 \psi(t, \vec{r}, \vec{\Omega}), \quad \vec{\Omega} = \frac{\vec{V}'}{V'}. \quad (\text{П18})$$

Очевидно, что нейтронная плотность $n(t, \vec{r}) = \int \psi(t, \vec{r}, \vec{\Omega}) d\vec{\Omega}$ (полное количество нейтронов N внутри шара, деленное на его объем) тоже преобразуется в соответствии с законами (П17) и (П18):

$$n_2(\vec{r}) = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^3 n_1 \left(\frac{R_2}{R_1} \vec{r} \right), \quad (\text{П19})$$

$$n_2(\vec{r}) = \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^3 n_1 \left(\frac{R_2}{R_1} \vec{r} \right). \quad (\text{П20})$$

Статья поступила в редакцию 27.11.2014