УДК 539.17

КИНЕТИКА ОДНОРОДНЫХ СИСТЕМ, ВЫПОЛНЕННЫХ ИЗ ПОГЛОЩАЮЩИХ НЕЙТРОНЫ И ИНЕРТНЫХ ВЕЩЕСТВ

Н. Б. Бабичев, И. В. Лутиков, А. А. Севастьянов

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Для однородных шаров с активностью $h \le 1$ в односкоростном приближении решена задача на главные собственные значения. С помощью теории подобия процессов нейтронной кинетики определены зависимости главных собственных значений от ядерно-физических свойств среды.

Ключевые слова: односкоростное кинетическое уравнение, инвариантность, главные собственные значения.

Введение

В работах [1, 2] на основе односкоростного уравнения переноса нейтронов в однородных системах получена общая формула для главных собственных значений. Она содержит в себе некоторую функцию, выражающую зависимость от ядерно-физических характеристик среды. Найти явный вид этой функции без конкретизации геометрии системы нельзя.

Цель данной статьи заключается в определении зависимости главных собственных значений от свойств среды в случае простой сферически-симметричной системы (пространственно однородный шар).

При решении поставленной выше задачи далее используется теория подобия нейтронно-кинетических процессов.

1. Односкоростные уравнения переноса нейтронов в однородных системах с произвольной геометрией и в однородных шарах

Односкоростное кинетическое уравнение для нейтронов имеет следующий общий вид (см. например, [3, 4]):

$$\frac{1}{V}\frac{\partial\psi\left(t,\vec{r},\vec{\Omega}\right)}{\partial t}+\left(\vec{\Omega}\,\nabla\right)\psi\left(t,\vec{r},\vec{\Omega}\right)+$$
$$+\alpha\left(\vec{r}\right)\psi\left(t,\vec{r},\vec{\Omega}\right)=\frac{\beta\left(\vec{r}\right)}{4\pi}n\left(t,\vec{r}\right), \quad (1)$$

где $\psi\left(t,\vec{r},\vec{\Omega}\right)$ – функция распределения нейтронов в фазовом пространстве векторов $\vec{r}$ и $\vec{\Omega}$ в момент времени *t*; $\vec{\Omega}=\frac{\vec{V}}{V}$ – единичный вектор, направленный вдоль вектора $\vec{V}$ скорости полета нейтрона; $\alpha = n_я\left(\sigma_s+\sigma_f+\sigma_c\right)$ – обратный полный пробег нейтронов в среде с плотностью ядер $n_я(\vec{r})$; $\beta = h\alpha$, $h=\frac{\nu\sigma_f+\sigma_s}{\sigma_s+\sigma_f+\sigma_c}$ – активность вещества; σ_s, σ_f, σ_c – элементарные (микроскопические) сечения рассеяния, деления и поглощения нейтронов; ν – среднее число вторичных нейтронов, испускаемых в одном акте деления ядра; $n(t,\vec{r}) = \int d\vec{\Omega}'\psi(t,\vec{r},\vec{\Omega}')$ – нейтронная плотность в точке с радиус-вектором $\vec{r}$ в момент времени *t*.

Если при решении нестационарного кинетического уравнения (1) задать ограниченное по количеству начальное число нейтронов N_0, то они могут вылететь из системы еще до установления главного собственного значения (ГСЗ). Но это не имеет принципиального значения, поскольку в чисто нейтронно-кинетической задаче можно полноправно задавать настолько большое* N_0, что установление ГСЗ обязательно осуществится.

В данной статье рассматриваются системы, в которых эволюция функции распределения во времени подчиняется экспоненциальному закону

$$\psi(t,\vec{r},\vec{\Omega}) = e^{\lambda t}\psi(\vec{r},\vec{\Omega}). \qquad (2)$$

В соответствии с поставленной во введении задачей требуется решить односкоростное стационарное уравнение переноса нейтронов в однородных шарах

$$\frac{d\psi(r)}{dr} + \left(1+\frac{\lambda}{\alpha V}\right)\alpha\psi(r) = \frac{\beta}{4\pi}n(r) \qquad (3)$$

с постоянными параметрами α и $\beta = h\alpha$.

Ниже исследуется параметрическая зависимость функции распределения от активности среды в широком диапазоне ее изменения

$$0 < h \le 1. \qquad (4)$$

Вообще говоря, под входящей в соотношение (3) величиной λ можно подразумевать логарифмическую производную от полного количества нейтронов в системе в момент времени t_0 выхода решения нестационарного кинетического уравнения (1) на равновесный экспоненциальный закон (2), т. е.

$$\lambda = \left[\frac{1}{N(\mathrm{t})}\frac{dN(\mathrm{t})}{dt}\right]_{t\to t_0}. \qquad (5)$$

2. Теоретические материалы

2.1. Соотношения подобия

В статье [5] получены формулы, вытекающие из свойства инвариантности односкоростного кинетического уравнения, подвергнутого преобразованиям подобия, и показано, что при выполнении инвариантного условия подобия

$$inv = \beta R = \text{const}, \qquad (6)$$

где R – характерный размер однородного объекта с произвольной геометрической формой, или же

$$h_2\alpha_2 R_2 = h_1\alpha_1 R_1, \qquad (7)$$

имеет место следующая связь между главными собственными значениями для любых двух подобных систем:

$$\lambda_2 = \left[\frac{h_2}{h_1}\left(1+\frac{\lambda_1}{\alpha_1 V_1}\right) - 1\right]\alpha_2 V_2. \qquad (8)$$

2.2. Зависимость собственных значений от ядерно-физических свойств, справедливая в случае однородных шаров

Общим решением односкоростного кинетического уравнения (1) является суперпозиция

$$\psi\left(t,\vec{r},\vec{\Omega}\right) = \sum_m a_m e^{\lambda_m t}\psi_m\left(\vec{r},\vec{\Omega}\right), \qquad (9)$$

ψ_m и λ_m – соответственно собственные функции и собственные значения с произвольным номером m.

В работе [1] на основе свойства инвариантности кинетического уравнения по отношению к преобразованиям подобия представлен вывод следующей формулы для собственных значений с номером m:

$$\lambda_m = \alpha h V\left[\Lambda_m(\beta R) - \frac{1}{h}\right], \qquad (10)$$

которая справедлива, если выполняется соотношение подобия (6).

В работе [2] формула (10) была получена не только с использованием инвариантности, а также другим способом – на основе анализа общего вида нестационарного кинетического уравнения (1), записанного в пространстве безразмерных переменных $\tau = \beta V t$, $\vec{z} = \beta\vec{r}$. Поэтому очевидно, что область применимости формулы (10) не ограничена инвариантным условием (6). То есть формула (10) справедлива для произвольных объектов, а не только для подобных систем.

Отметим, что из вывода формулы (10) следует, что она верна для произвольных по геометрии однородных систем при следующих ограничениях: они должны быть односвязными и их наружные поверхности не могут содержать вогнутых участков.

Функцию $\Lambda_m(\beta R)$ можно определить, зная в общем случае 3D-геометрию системы с характерным размером R. При этом в качестве R достаточно взять любой размер конкретной трехмерной системы.

Действительно, по характерному размеру R восстанавливается облик односвязного однородного 3D-объекта без невогнутых участков наружной поверхности.

*И даже сколь угодно большое начальное число нейтронов.

2.3. Решение задачи на главные собственные значения, справедливое в случае однородных шаров

С течением времени в сумме, входящей в правую часть (9), остается только главное слагаемое $a_1 e^{\lambda_1 t}\psi_1\left(\vec{r},\vec{\Omega}\right)$, где $\lambda_1 \equiv \lambda$ это главное собственное значение

$$\lambda = \alpha h V\left[\Lambda(\beta R) - \frac{1}{h}\right]. \qquad (11)$$

В случае однородных шаров функцию $\Lambda(\beta R)$ можно определить. Из (11) видно, что Λ зависит только от произведения βR.

Ниже с помощью формул подобия найдены величины λ и некоторые значения функции

$$\Lambda(\beta R) = \frac{1}{h}\left(1 + \frac{\lambda}{\alpha V}\right), \qquad (12)$$

соответствующие условию подобия (6).

3. Результаты аналитических вычислений и численных решений односкоростного уравнения переноса нейтронов в однородных шарах

Численные расчеты, результаты которых приведены ниже, выполнены по одной из математических методик [6].

Для простоты выберем системы с одинаковыми параметрами $\alpha_2 = \alpha_1 = \alpha$ и скоростями нейтронов $V_1 = V_2 = V$, но с радиусами $R_1 \neq R_2$. Тогда вместо (7) и (8) получим

$$h_2 R_2 = h_1 R_1, \qquad (13)$$

$$\lambda_2 = \left[\frac{h_2}{h_1}\left(1 + \frac{\lambda_1}{\alpha V}\right) - 1\right]\alpha V. \qquad (14)$$

Рассмотрим частный случай второй среды с малой активностью

$$h_2 << h_1, \qquad (15)$$

когда соотношение (6) приводит к сильному неравенству

$$R_2 >> R_1. \qquad (16)$$

При этом

$$\lambda_2 \approx -\left(1 - \frac{h_2 \lambda_1}{h_1 \alpha V}\right)\alpha V. \qquad (17)$$

В предельном случае стремления h_2 к нулю

$$\lambda_2 \to \lambda_\infty = -\alpha V. \qquad (18)$$

В качестве первой системы был выбран надкритический шар с активностью $h_1 = 2$, $\alpha = 2$ 1/см, $V = 100 \cdot 10^7$ см/с и с радиусом $R_1 = 0{,}8$ см, т. е. $h_1 \alpha R_1 = 3{,}2$. Для данного шара численное решение односкоростного кинетического уравнения привело к значению

$$\lambda_1 = 110{,}03 \cdot 10^7 \text{ 1/с}. \qquad (19)$$

Результаты вычислений λ_2 по формуле подобия (14), выполненных при постоянном параметре α, представлены на рис. 1 и 2.

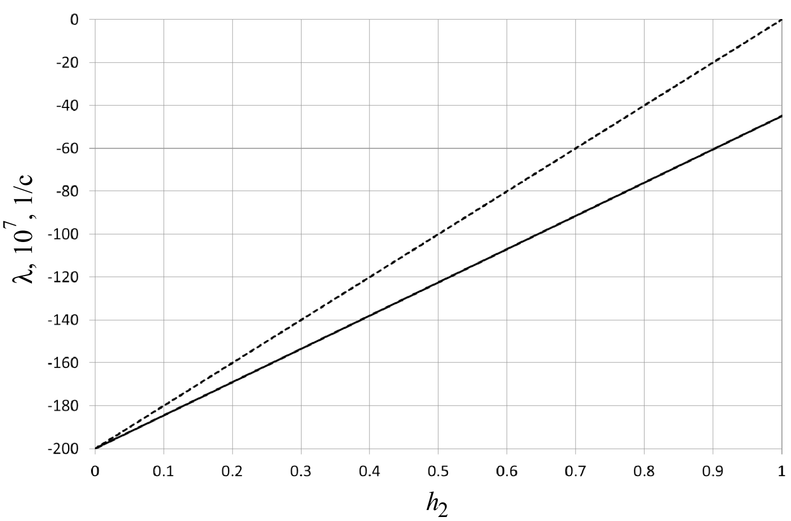

Рис. 1. Обзорные графики функций $\lambda_2\left(h_2\right)_{\alpha=\text{const}}$ (сплошная линия) и $\lambda_\infty\left(h_2\right)_{\alpha=\text{const}}$ (пунктир)

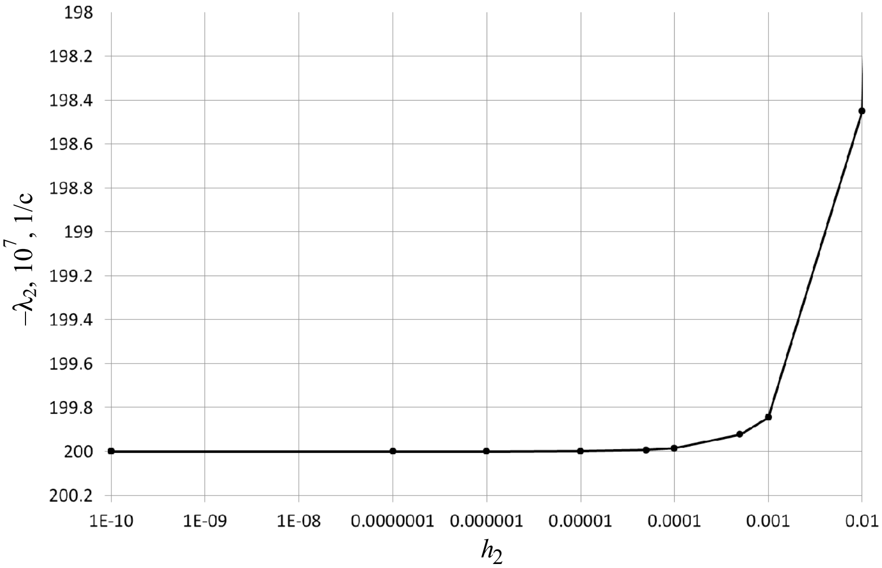

Рис. 2. Зависимость $-\lambda_2\left(h_2\right)_{\alpha=\text{const}}$ в узкой области с $h_2 << 1$

Величина $\lambda_2\left(h_2=0,9\right)=-60,48475\cdot 10^7$ 1/с, найденная в аналитических вычислениях по формуле подобия, была также определена путем численного решения кинетического уравнения и составила $\lambda_{2\text{расч}}\left(h_2=0,9\right)=-60,47565\cdot 10^7$ 1/с.

Из сравнения полученных результатов следует, что расчет привел к погрешности $\delta = \left|\frac{\lambda_{2\text{расч}}-\lambda_2}{\lambda_2}\right| = 0,015$ % в величине $\lambda_{2\text{расч}}\left(h_2=0,9\right)$.

Из соотношения (17) следует, что при $h_2 \to 0$ значение стоящего в показателе эспоненты (2) множителя λ представляет собой величину

$$\lambda_\infty = -\alpha V = -200\cdot 10^7 \ \text{1/с}, \qquad (20)$$

которая характеризует убывание полного числа нейтронов со временем в нестационарной системе с бесконечной оптической толщиной αR.

В случае предельно малого значения $h_2 = 10^{-10}$ (см. рис. 2) вычисления привели к равенству

$$\lambda_2\left(h_2=10^{-10}\right) = -200,0000000\cdot 10^7 \ \text{1/с}, \qquad (21)$$

т. е. с точностью до семи нулей после запятой (точки) реализовалось значение λ такое же, как λ_∞ (20).

Теперь на основе формулы

$$\Lambda_2(h_2\alpha R) = \frac{1}{h_2}\left[1+\frac{\lambda_2(h_2)}{\alpha V}\right] \qquad (22)$$

найдем $\Lambda_2(h_2\alpha R)$, например, при значении $\alpha = 2$ 1/см.

После подстановки функции $\lambda_2(h_2)$ в формулу (22) получаем следующую константу $C_{\alpha=\text{const}}$

$$\Lambda_2 = C_{\alpha=\text{const}} = 0,775. \qquad (23)$$

Взяв величину $\lambda_2(h_2=0,9) = -60,48475\cdot 10^7$ 1/с и воспользовавшись формулой подобия для случая $h_3 = h_2 = 0,9$

$$\lambda_3 = \left[\frac{h_3}{h_2}\left(1+\frac{\lambda_2}{\alpha_2 V}\right)-1\right]\alpha_3 V, \qquad (24)$$

определим $\Lambda_3(\alpha_3)_{h_3=\text{const}}$.

Аналитические вычисления показали, что

$$\Lambda_3 = C_{h=\text{const}} = 0,775. \qquad (25)$$

Оказалось, что $C_{h=\text{const}} = C_{\alpha=\text{const}} = C = 0,775$.

Приведем графические результаты, соответствующие равенству (25).

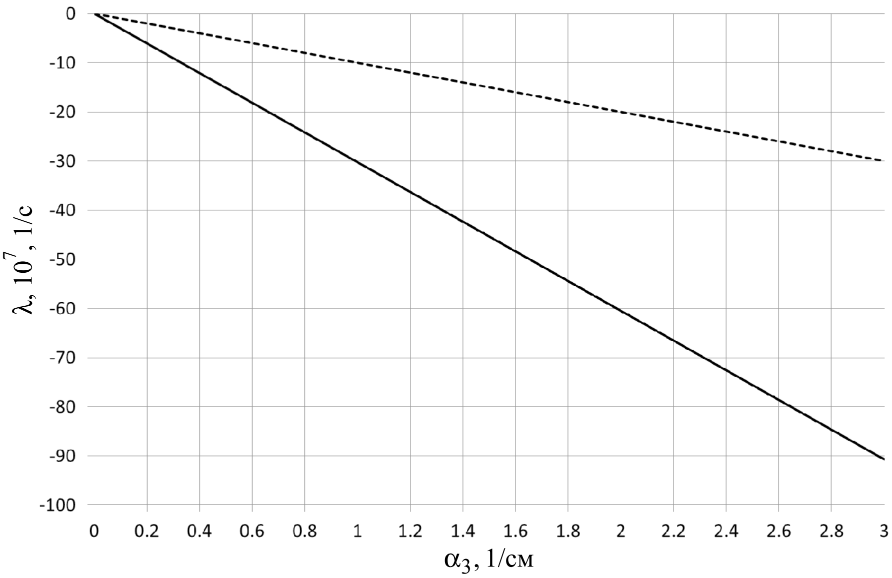

Рис. 3. Зависимости $\lambda_3(\alpha_3)_{h_3=\text{const}}$ (сплошная линия) и $\lambda_\infty(\alpha_3)_{h_3=\text{const}}$ (пунктир) при постоянной активности среды $h_3 = 0{,}9$

Заключение

В статье получены следующие основные результаты.

Определены главные собственные значения в случае однородных шаров, ядерно-физические свойства которых находятся между следующими двумя предельными позициями:

– воображаемым идеальным поглотителем нейтронов, у которого отлично от нуля только элементарное сечение σ_c и нет других каналов взаимодействия с веществом, поскольку $\sigma_s = \sigma_f = 0$;

– идеализированной инертной средой ($\sigma_s \neq 0$, $\sigma_c = \sigma_f = 0$).

Использован метод аналитических вычислений по формулам подобия, обоснованный в [7]. Благодаря этому получены не менее точные, чем односкоростное кинетическое уравнение, следующие результаты:

– найдены зависимости $\lambda(h)_{\alpha=\text{const}}$ и $\lambda(\alpha)_{h=\text{const}}$;

– определено значение $\Lambda(\beta R = 3{,}2) = 0{,}775$ универсальной функции $\Lambda(\beta R)$, входящей в общую формулу (11) $\lambda = \alpha h V\left[\Lambda(\beta R) - \frac{1}{h}\right]$.

Авторы статьи благодарны П. С. Бондареву, который обратил внимание на работу [8]. В ней показано, что решение односкоростной задачи на главные собственные значения для однородного шара существует только при условии $\beta R > 1$. Отметим, что данное условие выполняется в случае рассмотренных выше однородных шаров.

Список литературы

1. Бабичев Н. Б., Беженцев Б. В., Бондарев П. В., Забусов П. В. Собственные значения односкоростного уравнения переноса нейтронов в однородных системах // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2009. Вып. 3. С. 68–70.
2. Бабичев Н. Б., Лутиков И. В. Решение односкоростной задачи по нейтронной кинетике на собственные значения и собственные функции, справедливое в классе однородных односвязных объектов с невогнутыми внешними поверхностями // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2011. Вып. 1–2. С. 65–69.
3. Дэвисон Б. Теория переноса нейтронов. М.: Изд-во Главного управления по использованию атомной энергии при Совете Министров СССР, 1960.
4. Смелов В. В. Лекции по теории переноса нейтронов. М.: Атомиздат, 1978.
5. Бабичев Н. Б., Лутиков И. В., Незнамов В. П. Теория подобия в рамках односкоростной нейтронной кинетики квазистационорных систем // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2008. Вып. 1. С. 56–66.

6. Шагалиев Р. М., Гребенников А. Н., Артемьев А. Ю., Будников В. И. Развитие основных методик и программ ИТМФ // Журнал Атом, 2011, № 50–51.

7. Бабичев Н. Б., Лутиков И. В., Севастьянов А. А. Нейтронная кинетика однородных шаров из плутония-238 и плутония-239, находящихся в произвольных состояниях // См. настоящий выпуск. С. 46–60.

8. Yamagishi T. Solutions of monoenergetic time dependent neutron transport equation in slab geometry // Journal of Nuclear Science and Technology. 1973. Vol. 10 (5). P. 284–291.

Статья поступила в редакцию 12.12.2014