

УДК 519.6

НЕКОТОРЫЕ АЛГОРИТМЫ ПОСТРОЕНИЯ НЕСТРУКТУРИРОВАННЫХ МНОГОУГОЛЬНЫХ СЕТОК ДЛЯ МЕТОДИКИ "ТИМ-2D"

А. И. Панов, А. В. Шурыгин
(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области)

Представлены некоторые алгоритмы построения неструктурированных многоугольных сеток при расчете начальных данных для методики ТИМ-2D. Приведено описание формата хранения топологии сетки. Описаны метод, с помощью которого выполняется отсечение ячеек границами счетной области, и метод, позволяющий объединять сетки различных типов в рамках одной счетной области. Даны практические рекомендации по использованию тех или иных типов сеток в зависимости от специфики решаемых задач.

Ключевые слова: методика ТИМ-2D, неструктурированная сетка, расчет начальных данных, сшивка различных типов сеток.

Введение

Методика ТИМ-2D [1] предназначена для решения задач механики сплошной среды в многообластной постановке на неструктурированных лагранжевых сетках.

Практический интерес к использованию неструктурированных сеток особенно проявляется при решении задач со сложными геометриями, имеющих локальные мелкомасштабные подобласти, в которых применение многоугольных ячеек позволяет строить сетку с заданными свойствами более эффективно. При решении задач с малыми деформациями с целью сокращения календарных сроков расчета часто используется четырехугольная сетка. При больших деформациях используется многоугольная сетка с произвольным числом сторон. Ячейки многоугольной сетки имеют большее число степеней свободы, что позволяет лучше описывать характер сложных течений.

В мировой практике к классическим методам построения неструктурированных сеток относятся методы построения триангуляции Делоне [2, 3] и диаграммы Вороного [4, 5]. Другим достаточно популярным подходом для построения триангуляционных сеток является метод подвижного фронта [6]. Также существуют методы формирования сетки на основе уже по-

строенной триангуляции [7], методы граничной коррекции [8] и многие другие.

Данная статья посвящена описанию основных алгоритмов, используемых для построения начальной сетки в методике ТИМ-2D.

Способы построения неструктурированной сетки для методики ТИМ-2D

При задании начальной геометрии задачи используются два вида областей: *математические* и *физические*. Исходная счетная область (рис. 1) в зависимости от класса решаемой задачи разбивается на математические области (рис. 2). Для лучшей сеточной аппроксимации каждая математическая область может быть разбита на несколько физических областей (рис. 3). Каждая физическая область представляет собой односвязную область и содержит одно вещество.

Границы как математических, так и физических областей состоят из произвольного числа гладких участков, состыкованных между собой под произвольными углами. Стандартно участками границы являются отрезки прямых и дуги окружностей и эллипсов. Предусмотрена так-

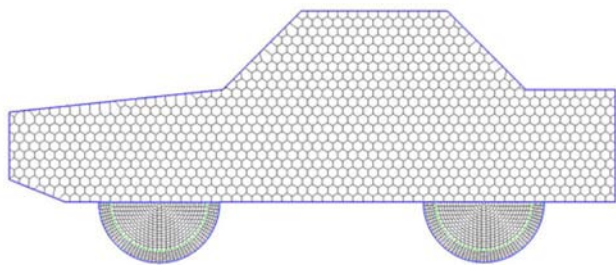


Рис. 1. Исходная счетная область

же возможность параметрического задания для нестандартных участков границы.

Счетные сетки физических областей строятся независимо друг от друга и не связаны между собой. Построение счетной сетки в каждой математической области проводится в два этапа:

- 1) независимым образом строятся сетки во всех ее физических областях;
- 2) полученные счетные сетки физических областей *сшиваются* в единую сетку математической области.

Построение счетной сетки в криволинейной области (рис. 4) осуществляется в три этапа:

- 1) строится счетная сетка, полностью покрывающая рассматриваемую область (рис. 5);
- 2) покрывающая сетка "разрезается" границей области (рис. 6);

- 3) из сетки удаляются мелкие приграничные ячейки, которые могут получиться в результате разрезания (рис. 7).

При необходимости над построенной сеткой могут выполняться различные преобразования: перемещение, сдвиг, поворот сетки вокруг произвольной оси, сгущение ячеек и т. д.

В методике ТИМ-2D возможно построение различных типов начальной сетки:

- из правильных шестиугольников;
- четырехугольной;
- из вырожденных шестиугольников (*квази-регулярная сетка*);
- многоугольной с возрастающим числом ячеек по слоям.

Построение сетки из правильных шестиугольников

Пример построения сетки из правильных шестиугольников был приведен в предыдущем разделе. Здесь остановимся более подробно на алгоритмах по расстановке центров будущих ячеек, узлов сетки, а также формировании топологии сетки.

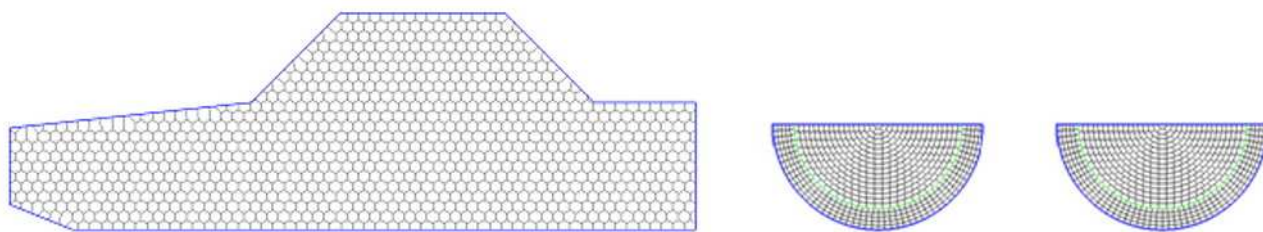


Рис. 2. Математические области исходной счетной области

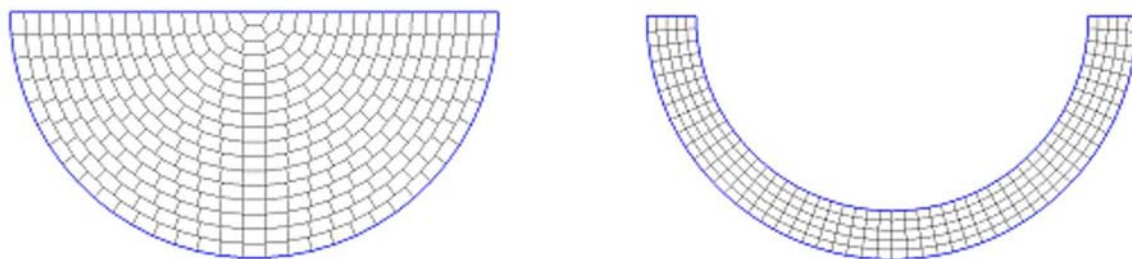


Рис. 3. Физические области одной из математических областей

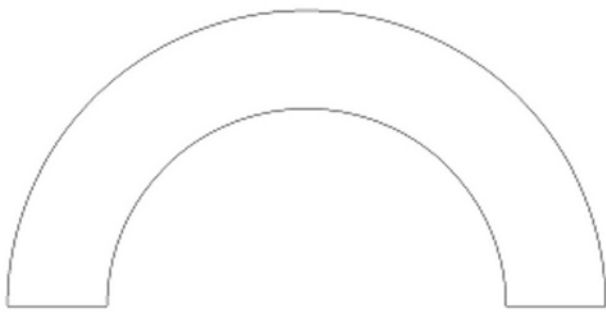


Рис. 4. Исходная геометрия счетной области

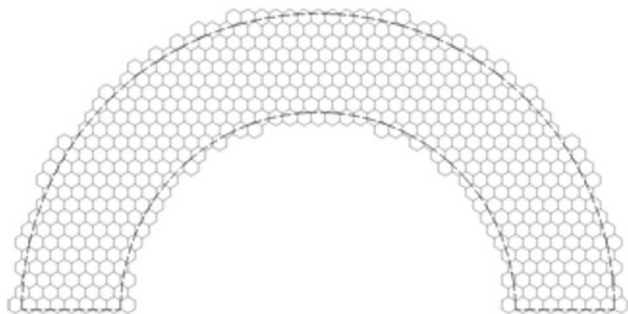


Рис. 5. Сеточное покрытие исходной области

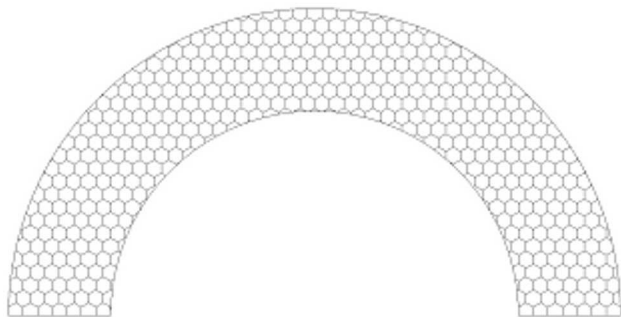


Рис. 6. Сетка после разрезания границей области

Расстановка центров ячеек сетки. Для расстановки центров ячеек исходная область вписывается в прямоугольник, ограниченный прямыми

$$X = X_{\min}; \quad X = X_{\max}; \quad Y = Y_{\min}; \quad Y = Y_{\max}.$$

Площадь S исходной области вычисляется по следующей формуле:

$$2S = \sum_{i=2}^N (XG_i \cdot YG_{i-1} - XG_{i-1} \cdot YG_i),$$

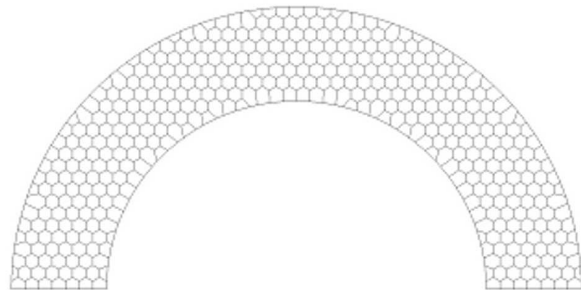


Рис. 7. Итоговая сетка для исходной области

где N — число точек границы контура данной области; XG_i, YG_i ($i = 1, \dots, N$) — координаты этих точек. Периметр области вычисляется по следующей формуле:

$$P = \sum_{i=2}^N \sqrt{(XG_i - XG_{i-1})^2 + (YG_i - YG_{i-1})^2}.$$

Зная площадь, периметр области и число ячеек N_{cells} , которые в ней строятся, можно вычислить расстояние между противоположными сторонами ячеек (или расстояние между центрами ячеек):

$$R = \frac{0,5P}{2N_{cells}} + \sqrt{\left(\frac{0,5P}{2N_{cells}}\right)^2 + \frac{2S}{\sqrt{3}N_{cells}}}.$$

Страна A и высота H ячейки определяются выражениями

$$A = \frac{R}{\sqrt{3}}; \quad H = \frac{3A}{2}.$$

Координаты центра начальной ячейки получаются по следующим формулам:

$$X_0 = X_{\min} - \frac{R}{2}; \quad Y_0 = Y_{\min}.$$

Зная размеры области и размеры ячейки, вычисляем число ячеек по оси абсцисс K_{Cx} и по оси ординат K_{Cy} . При этом число ячеек по обоим направлениям берется с запасом, так чтобы ячейки перекрывали прямоугольную область.

Координаты центров ячеек вычисляются следующим образом:

$$X_C = \Delta X + (j - 1) R; \quad Y_C = Y_0 + (i - 1) H,$$

где $\Delta X = R/2$, если i — нечетное и $\Delta X = 0$, если i — четное; $i = 1, \dots, K_{Cy}$; $j = 1, \dots, K_{Cx}$.

Для каждого центра ячейки проверяется, попал ли он в окрестность рассматриваемой (исходной) области. Окрестность области получается расширением ее границы на величину, равную стороне ячейки. При этом составляется список ячеек, попавших в эту окрестность.

Расстановка узлов сетки. Вычисление координат узлов выполняется следующим образом:

$$X_N = X_0 - \frac{R}{2} + (j - 1) \frac{R}{2}; \quad Y_N = \Delta Y + (i - 1) H.$$

Здесь $\Delta Y = Y_0 - A/2$, если j — нечетное и $\Delta Y = Y_0 - A$, если j — четное; $i = 1, \dots, K_{Ny}$, $j = 1, \dots, K_{Nx}$, где K_{Nx} , K_{Ny} — соответственно число узлов сетки по оси абсцисс и оси ординат.

Каждый узел проверяется на принадлежность окрестности области, при этом формируется список узлов, принадлежащих этой окрестности. Затем для каждого узла проверяется наличие окружающих его ячеек в списке ячеек, принадлежащих окрестности области, и, если для рассматриваемого узла таких ячеек не обнаружено, он исключается из рассмотрения.

Координаты построенного узла запоминаются в соответствующих массивах. После этого для каждого узла формируются список номеров окружающих ячеек и список номеров соседних узлов в порядке обхода против часовой стрелки. Списки согласуются по правилу *узел "догоняет" ячейку* (рис. 8). Для граничных узлов в списке соседства вместо третьей соседней ячейки (в случае углового узла — также вместо второй) хранится номер граничного условия.

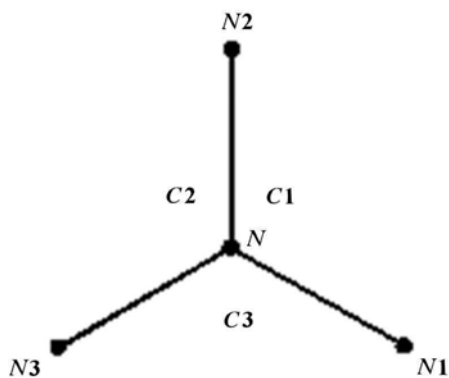


Рис. 8. Структура нерегулярной сетки. Связи узла N ($C1$, $C2$, $C3$ — номера ячеек; $N1$, $N2$, $N3$ — номера узлов)

После формирования структуры счетной сетки выполняются процедуры разрезания ячеек вдоль границы контура и удаления мелких приграничных ячеек путем их объединения с более крупными ячейками из внутреннего слоя.

Пример полученной нумерации элементов сетки показан на рис. 9.

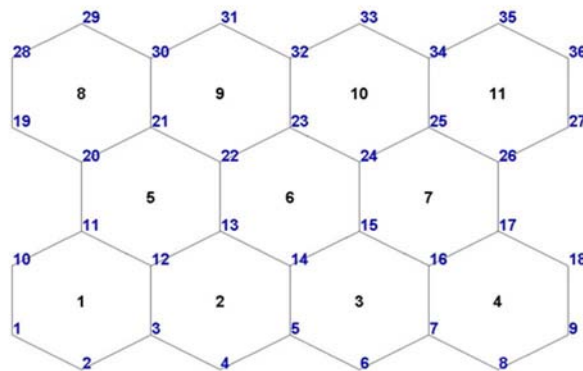


Рис. 9. Пример нумерации элементов сетки

Алгоритм разрезания ячеек границей области. Разрезание ячеек границей области (рис. 10) осуществляется следующим образом. На каждом из пересекаемых границей ребер ($M1, M2$) и ($M3, M4$) ячейки C добавляем два узла по обе стороны от точки пересечения (соответственно $N1, N2$ и $N3, N4$ — см. рис. 10), геометрическим расстоянием между которыми можно пренебречь. Соединяем узлы: $N1$ с $N3$, $N2$ с $N4$. В результате ячейка C "распадается" на две части.

Аналогично поступаем со следующей ячейкой $C + 1$ и т. д. Таким образом разрезаются все ячейки, пересекаемые границей области. В общем случае процесс разрезания выглядит так, как показано на рис. 11, а линия разреза может быть ломаной, содержать отрезки, части дуг окружностей или эллипсов.

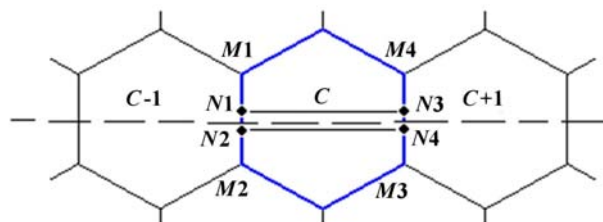


Рис. 10. Схема добавления дополнительных узлов при разрезании ячейки (— — — — граница области)

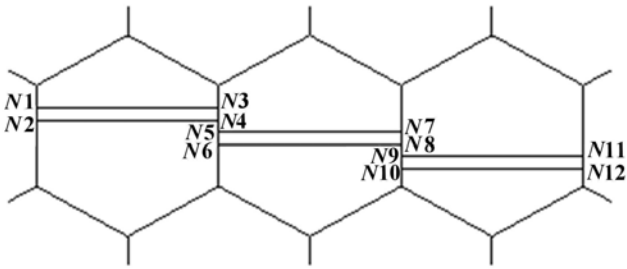


Рис. 11. Схема процесса разрезания ячеек области в целом

Предположим, что процесс деления ячеек закончен. Если отбросить внешнюю часть сетки разрезанной области, то внутренняя ее часть будет иметь конфигурацию, показанную на рис. 12. Как видно из рисунка, граница математической области ($N1, N3, N5, N7, \dots$) содержит лишние угловые узлы $N5, N9, N13, \dots$, оставшиеся от разреза. Эти узлы удаляются из сетки. Критерием удаления угловых узлов является совпадение у них левого и правого граничных условий. На рис. 13 показана сетка математической области после удаления лишних угловых узлов.

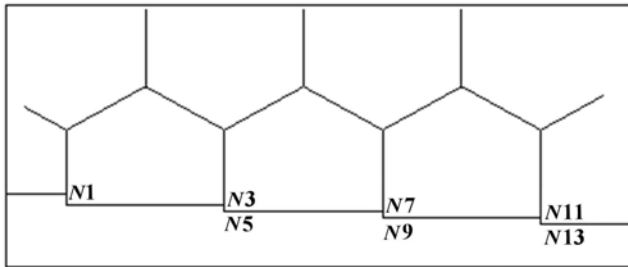


Рис. 12. Внутренняя часть сетки математической области после процесса разрезания ячеек

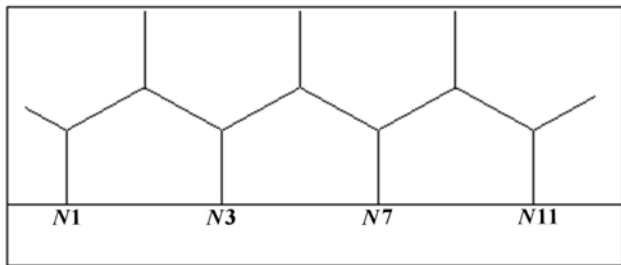


Рис. 13. Внутренняя часть сетки математической области после удаления лишних угловых узлов

Формат хранения топологии неструктурированной сетки. После выполнения алгоритмов построения начальной сетки полученная топология сетки записывается в универсальном *реберно-ячеечном* формате, в котором хранятся сетки счетной методики ТИМ-2D.

Универсальный формат образован двумя списками.

Первый список предназначен для описания ячеек сетки. Для каждой ячейки хранятся ее ребра в порядке обхода против часовой стрелки (на рис. 14 для $C1$ — ребра $(N1, N2), (N2, N3), \dots, (N6, N1)$).

Второй список содержит описание ребер. Для каждого ребра хранится пара ячеек и пара узлов. При этом для ячейки с меньшим номером $C1$ (см. рис. 14) пара узлов $N1, N2$ упорядочена против часовой стрелки. Для граничного ребра E вместо номера первой ячейки всегда записывается номер граничного условия.

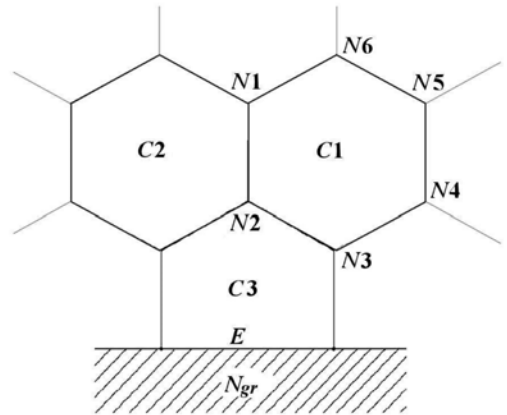


Рис. 14. Взаимное расположение узлов и ячеек

Построение четырехугольной сетки

Данный тип сетки используется в четырехугольных областях. Описание контура физической области, в которой строится четырехугольная сетка, начинается с любого угла, и обход совершается по часовой стрелке (рис. 15).

Для построения четырехугольной сетки задаются координаты опорных точек контура ($T1, T2, T3, T4$) (углы четырехугольника или области в виде полукольца). Сетка представляет собой два семейства линий: одно семейство — прямые линии, второе — ломаные (рис. 16).

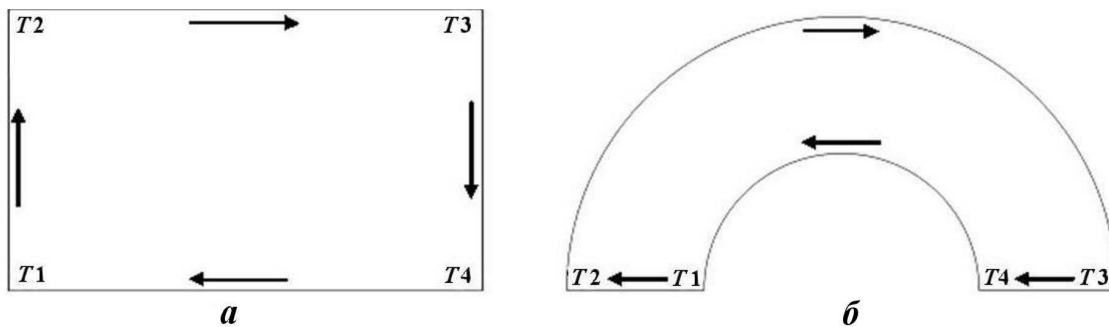


Рис. 15. Схема обхода контура четырехугольной физической области: *a* — прямоугольной; *б* — в виде полукольца

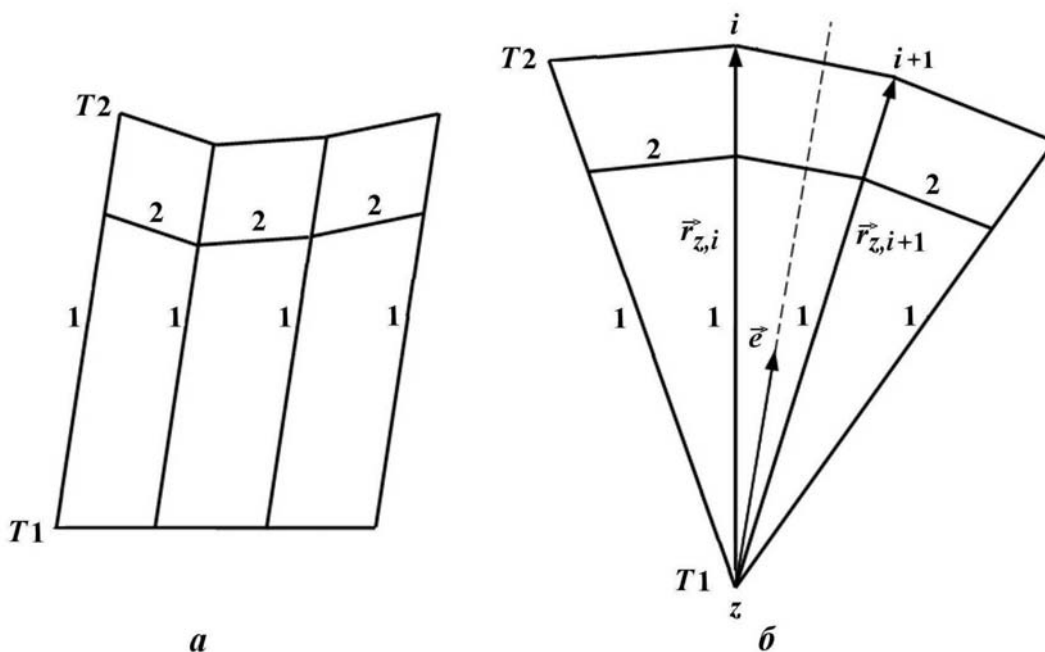


Рис. 16. Примеры построения линий первого и второго семейств сетки: *a* — в декартовой системе координат; *б* — в полярной системе координат

Начальной линией первого семейства является граница замкнутого контура ($T1, T2$). Следующие линии этого семейства в декартовой системе координат получаются через приращение координаты по оси абсцисс ΔX , в полярной системе координат (для области в виде полукольца) — из одного центра через определенный угол $\Delta\varphi$.

Для того чтобы определить линии второго семейства, необходимо знать, какие отрезки ломаных, представляющих нижнюю или верхнюю границу контура, пересекают лучи, задающие направление линий первого семейства (см. рис. 16).

Вычисление координат узлов сетки в декартовой системе координат очевидно.

Координаты узлов в полярной системе координат вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} X_i &= XG_i + (XG_{i+1} - XG_i) L; \\ Y_i &= YG_i + (YG_{i+1} - YG_i) L, \end{aligned}$$

где XG_i, YG_i — координаты точек границы контура данной области; $L = \frac{\vec{r}_{z,i} \cdot \vec{e}^\perp}{\vec{r}_{z,i+1} \cdot \vec{e}^\perp}$ (см. рис. 16, б).

На рис. 17 показан пример четырехугольной сетки, построенной в соответствии с указанными правилами.

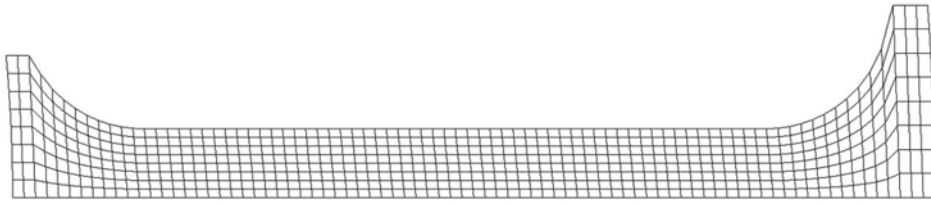


Рис. 17. Пример четырехугольной сетки

Построение сетки из вырожденных шестиугольников

На рис. 18 показана область с сеткой, построенной из вырожденных шестиугольников (квазирегулярной).

Основой для построения такого типа сетки служит четырехугольная сетка, в которой каждый внутренний узел i заменяется двумя узлами $i1$ и $i2$ (рис. 19), отстоящими от исходного узла по диагоналям соответствующих ячеек на величину ΔR , зависящую от задаваемой величины ε . По умолчанию $\varepsilon = L_{\text{ср}}/10$, где $L_{\text{ср}}$ — средняя длина ребра ячейки исходной четырехугольной сетки. Также существует возможность задания ε пользователем.

На рис. 19 сплошными линиями изображен фрагмент четырехугольной сетки, а пунктирными — фрагмент сетки из вырожденных шестиугольников. Штрих-пунктиром обозначена диагональ ячейки четырехугольной сетки.

Координаты узлов квазирегулярной сетки определяются линейной интерполяцией координат концов диагоналей (узлов исходной сетки). В частности, для узла $i1$ $\vec{R}_{i1} = \vec{R}_i + \Delta\vec{R}_{i1}$, т. е. радиус-вектор точки $i1$ есть алгебраическая сумма радиуса-вектора точки i и поправки $\Delta\vec{R}_{i1} = \varepsilon\vec{R}_{ik}$, где \vec{R}_{ik} — вектор, направленный из точки i в точку k . Окончательно формулы для определения координат точки $i1$ следующие:

$$\begin{aligned} X_{i1} &= X_i + \varepsilon(X_k - X_i); \\ Y_{i1} &= Y_i + \varepsilon(Y_k - Y_i). \end{aligned}$$

Точно так же определяются координаты точки $i2$, необходимо только взять диагональ соответствующей ячейки.

Построение сетки с возрастающим числом ячеек по слоям

Построение сетки с возрастающим числом ячеек по слоям используется в областях, представляющих собой круг, полукруг, полукольцо и т. д.

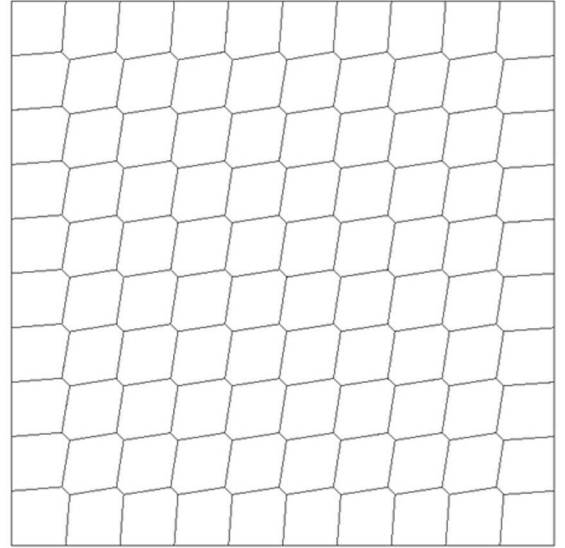


Рис. 18. Пример сетки из вырожденных шестиугольников

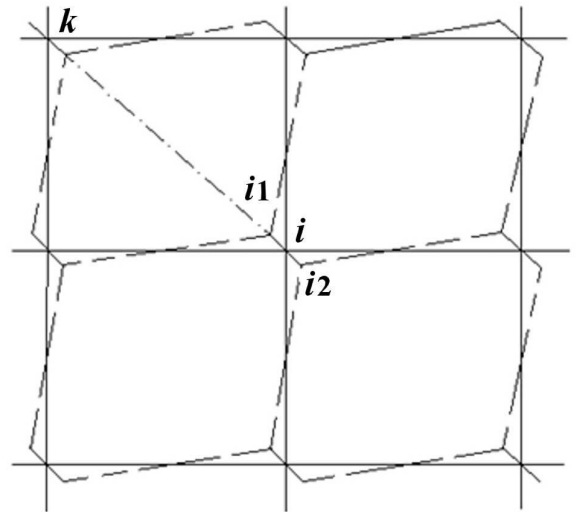


Рис. 19. Фрагмент четырехугольной сетки и полученной на ее основе сетки из вырожденных шестиугольников

Для построения такого типа сетки необходимо задавать следующие параметры: n — число ячеек, добавляемых на каждом слое; $T1, T2$ (для полукруга) или $T2, T3$ (для полукольца) — координаты точек, задающих начальное радиальное направление, в котором строится сетка (рис. 20); K_R — число слоев ячеек.

Для вычисления координат узлов сетки сначала необходимо вычислить приращения по углу $DF = \pi/n$ и по радиусу $DR = L/K_R$ для каждого слоя. Здесь L — расстояние между точками $T1, T2$ (для полукруга) или $T2, T3$ (для полукольца).

На рис. 21 показан фрагмент сетки, где координаты узлов формируемого слоя ($R1, R2$ — внутренний и внешний радиусы слоя соответственно) вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} X(N_i) &= R1 \cos(DF); \\ Y(N_i) &= R1 \sin(DF); \\ X(N_{i+1}) &= R2 \cos(DF); \\ Y(N_{i+1}) &= R2 \sin(DF), \end{aligned}$$

На рис. 20 изображена счетная сетка двух областей. Во внутренней области на каждом слое

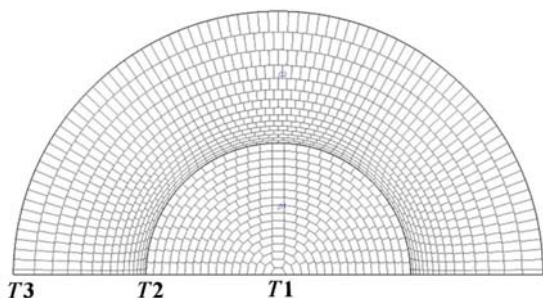


Рис. 20. Пример сетки с возрастающим числом ячеек по слоям

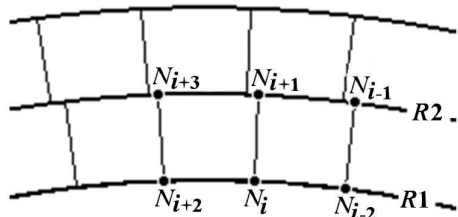


Рис. 21. Фрагмент сетки с возрастающим числом ячеек по слоям

добавляются 2 ячейки. Во внешней области ячейки сгущаются к центру по радиусу с коэффициентом сгущения $Q = 10$ и на каждом следующем слое добавляются 3 ячейки.

Возможность построения различных типов сеток в одной счетной области

Методика ТИМ-2D позволяет выполнять расчеты на сетках с произвольным количеством связей в узлах, т. е. в одной счетной области сетка может состоять из многоугольных ячеек с произвольным числом сторон. Единая счетная сетка в математической области получается объединением сеток, построенных независимым образом в физических подобластях, с использованием программы сшивки сеток.

Программа сшивки использует информацию о сетках всех физических областей, участвующих в этой операции, поэтому для каждой физической области рассчитывается топология сетки и вычисляются координаты узлов.

Алгоритм сшивки сеток физических областей состоит из нескольких этапов:

- поиск участков сшивки;
- сшивка контура вдоль границы;
- обработка стыков сшиваемых областей;
- замена нумерации узлов в топологии сетки (при сшивке удаляются близкие узлы и узлы, имеющие одинаковые координаты).

После сшивки сеток физических областей в единую сетку математической области узлы и ячейки имеют сквозную нумерацию.

На рис. 22, а (см. также цветную вкладку) показана геометрия задачи без использования процедуры сшивки; она состоит из трех математических областей, в каждой из которых построена своя сетка. На рис. 22, б показана та же геометрия задачи, но теперь она состоит из одной математической области, сетка которой сшита из трех сеток физических областей. Границы математических областей отрисованы синим цветом, физических — красным.

На рис. 23 показаны фрагменты сетки расчетной задачи. В первом случае сшивка не использовалась (см. рис. 23, а). Во втором случае со сшивкой сеток физических областей (см. рис. 23, б) узлы и ячейки сетки имеют сквозную нумерацию, совпадающие узлы на границе областей после сшивки удалены.

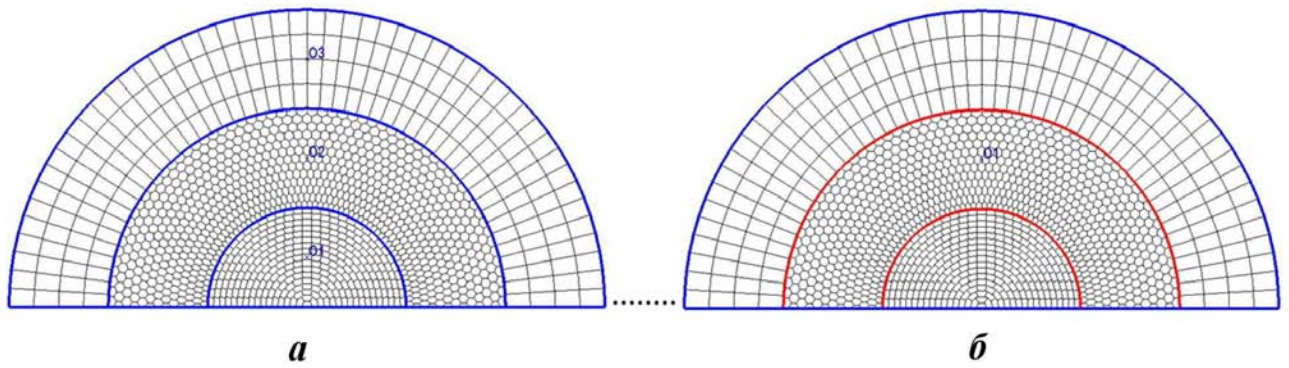


Рис. 22. Сетка задачи, рассчитанной без использования (а) и с использованием (б) процедуры сшивки

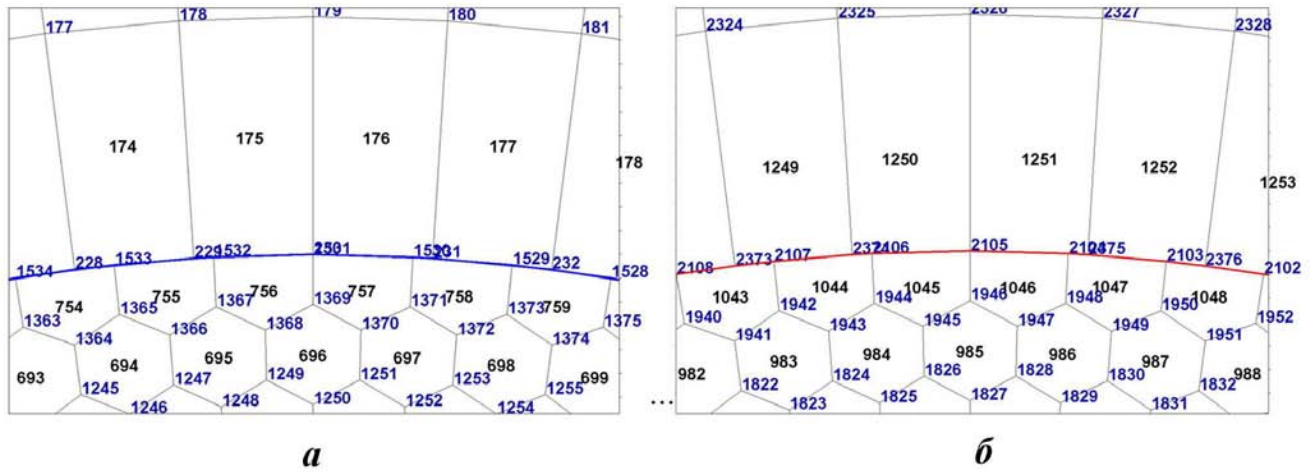


Рис. 23. Фрагменты сетки рассчитанной задачи без использования (а) и после использования (б) процедуры сшивки

Заключение

В данной работе приведен краткий обзор основных методов, применяемых для построения двумерных неструктурированных сеток. Основное внимание уделено описанию алгоритмов построения неструктурированных многоугольных сеток, используемых в методике ТИМ-2D. Также описан метод, позволяющий объединять сетки различных типов в пределах одной счетной области.

Все алгоритмы построения начальной сетки собраны в специальную библиотеку, которая подключена к единому пакету расчета двумерных сеток и начальных данных 2D-РНД [9]. Подготовка начальных данных для методики ТИМ-2D осуществляется с помощью редакторов геометрий 2D-VisRed [10] и SolidEditor [11].

Для всех типов сеток используется единый счетный алгоритм (решатель), позволяющий

проводить расчеты на комбинированных сетках в одной счетной области.

Список литературы

1. Соколов С. С., Воропинов А. А., Новиков И. Г. и др. Методика ТИМ-2D для расчета задач механики сплошной среды на нерегулярных многоугольных сетках с произвольным количеством связей в узлах // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2006. Вып. 4. С. 29–43.
2. Делоне Б. Н. О пустоте сферы // Изв. АН СССР. 1934. № 4. С. 793–800.
3. Скворцов А. В. Триангуляция Делоне и ее применение. Томск: Изд-во Томского университета, 2002.

4. Voronoi G. Nouvelles applications des parametres continus a la theorie des formes quadratiques. Deuxieme memorie: recherches sur les paralleloedres primitifs // J. Reine und Angew. Math. 1908. No 134. С. 198—287.
5. Гордеев Э. Н. Диаграмма Вороного: обзор // Распознавание, классификация, прогноз. Математические методы и их применение. Вып. 4. М.: Наука, 1992. С. 41—67.
6. Lohner R. Progress in grid generation via the advancing front technique // Engineering with Computers. 1996. Vol. 12. P. 186—210.
7. Eppstein D. Linear complexity hexahedral mesh generation // Symposium on Computational Geometry. Philadelphia, 1996. New York: ACM, 1996. P. 58—67.
8. Галанин М. П., Щеглов И. А. Разработка и реализация алгоритмов трехмерной триангуляции сложных пространственных областей: прямые методы: Препринт № 10 ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 2006.
9. Тарасов В. И., Борисенко О. Н., Олесницкая К. К. Программа расчета начальных данных двумерных задач // Сб. тез. докл. VI науч.-тех. конф. "Молодежь в науке". Саров, 1 ноября 2007 г. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2007. С. 10.
10. Тарасов В. И., Борисенко О. Н., Калмыкова К. К., Шабуров В. М. Единая технология расчета начальных данных двумерных газодинамических задач для численных методик РФЯЦ-ВНИИЭФ // Тез. докл. конф. "Прикладная геометрия, построение расчетных сеток и высокопроизводительные вычисления". Т. 2. Москва, 28 июня — 1 июля 2004 г. М.: ВЦ им. А. А. Дородницына РАН, 2004. С. 198—207.
11. Черенков П. В., Борисенко О. Н., Черенкова М. В. и др. Подготовка начальных данных двумерных задач по программам SolidEditor и 2D-РНД // Сб. докл. VIII науч.-тех. конф. "Молодежь в науке". Саров, 28 октября 2010. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2010. С. 141—146.

Статья поступила в редакцию 10.04.14.

SOME GRID GENERATION ALGORITHMS FOR UNSTRUCTURED POLYGONAL GRIDS IN THE TIM-2D CODE / A. I. Panov, A. V. Shurygin (FSUE RFNC-VNIIEF, Sarov, Nizhny Novgorod region).

Some grid generation algorithms for unstructured polygonal preprocessing grids for the TIM-2D code are presented. The format of grid topology data storage is identified. The method of cell cutoff by domain boundaries and the grid cross-linking method to integrate different types of grids within the same domain are described. Practical recommendations are given for the use of some or other types of grids depending on problem features.

Keywords: TIM-2D code, unstructured grid, preprocessing, cross-linking of different types of grids.
