

УДК 519.6+533.6

ИСКУССТВЕННАЯ ВЯЗКОСТЬ В СХЕМАХ ТИПА ГОДУНОВА КАК МЕТОД ПОДАВЛЕНИЯ "КАРБУНКУЛ"-НЕУСТОЙЧИВОСТИ

А. В. Родионов, И. Ю. Тагирова
(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области)

Описан новый метод решения "карбункул"-проблемы в схемах типа Годунова при моделировании гиперзвуковых течений с ударными волнами. Метод предполагает подавление карбункул-неустойчивости за счет введения в расчет диссипативных добавок в виде правых частей уравнений Навье—Стокса с заменой физической вязкости на искусственную. Эффективность предлагаемого подхода демонстрируется на примерах решения тестовых задач.

Ключевые слова: гиперзвуковые течения, уравнения Эйлера и Навье—Стокса, карбункул-проблема, схемы типа Годунова, искусственная вязкость.

Введение

Эффективным инструментом численного решения многомерных задач газовой динамики являются методы сквозного счета. При их использовании газодинамические разрывы не выделяются специальным образом, а "размазываются" на некоторое число ячеек расчетной сетки. Одна из основных трудностей сквозного счета связана с появлением нефизических осцилляций решения в окрестности разрывов, которые могут его заметно исказить.

Первая схема сквозного счета была описана в 1950 г. Нейманом и Рихтмайером [1]. Главная идея заключалась в добавлении специального члена *искусственной вязкости*, приводящего к диссипации ударной волны (УВ) на несколько сеточных интервалов. При этом действие искусственной вязкости по своему характеру напоминает действие физической вязкости, но ее значение зависит от интенсивности скачка и размера счетной ячейки.

Одними из наиболее популярных методов сквозного счета являются схемы типа Годунова. В 1959 г. С. К. Годунов опубликовал работу [2], в которой предложил "наиболее точную" монотонную схему первого порядка, основанную на двух предположениях. Согласно первому предположению пространственное распределение всех параметров газа на *нижнем* временном слое считается кусочно-постоянным. Второе предположение заключается в использовании решения задачи о распаде произвольного разрыва (задачи Римана) при вычислении потоков на границах ячеек.

В 1988 г. была обнаружена серьезная проблема [3] в применении методов типа Годунова к задачам гиперзвуковой аэродинамики, получившая название "carbuncle phenomenon". Постепенно эта проблема привлекла к себе внимание большого числа специалистов в области численного моделирования. Так, ван Лир в своем обзоре [4], посвященном истории развития численных методов в США и Канаде, выделил "карбункул"-проблему как одну из главных нерешенных проблем классических конечно-объемных схем.

Эффект карбункула обнаруживается при сквозном расчете сильных УВ в гиперзвуковых потоках и проявляется как численная неустойчивость, приводящая к сильному искажению течения. Появление неустойчивости зависит и от расчетной сетки, и от метода решения задачи Римана: менее точные методы свободны от этой проблемы, в то время как большинство более точных методов подвержены карбункул-неустойчивости.

Основные способы борьбы с эффектом карбункула связаны с модификацией методов решения задачи Римана. Кёрк [5] первым предложил комбинировать различные методы решения задачи Римана в зависимости от локальных условий течения.

Наиболее эффективным считается использование "rotated Riemann solvers" [6–9], когда делается декомпозиция нормали к боковой грани и в каждом из направлений решается своя задача Римана. В случае, когда по разным направлениям используются разные методы решения задачи распада разрыва, говорят о "rotated-hybrid Riemann solvers" [7–9]. Такой способ считается самым эффективным, поскольку позволяет выгодно комбинировать диссипативные свойства двухволновых и трехволновых методов приближенного решения задачи Римана.

В данной работе предлагается новый способ борьбы с карбункул-неустойчивостью, который является универсальным (применим к различным схемам) и эффективным (действует избирательно, а именно только на фронте УВ). Для этого в базовый метод решения уравнений Эйлера предлагается добавлять некоторое количество диссипации в форме правых частей уравнений Навье—Стокса (*вязких* членов). Коэффициент физической вязкости заменяется коэффициентом искусственной вязкости, который согласуется с [1], но имеет свои особенности; вводится в рассмотрение искусственная теплопроводность. Новый способ тестируется на схеме Годунова и ее модификации второго порядка точности (схема Годунова—Колгана—Родионова (ГКР) [10, 11]) с использованием точного решения задачи Римана.

Краткий обзор работ по искусственной вязкости

Первая схема сквозного счета была описана в 1950 г. Рихтмайером и Нейманом [1]. Главная идея их работы заключалась в добавлении к давлению диссипативного источника, который размазывает профиль ударной волны на несколько ячеек:

$$q = c\rho(\Delta x)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2. \quad (1)$$

Стоит отметить, что в [1] вязкость добавлялась в основные уравнения и при сжатии, и при разрежении. Позднее было предложено использовать искусственную вязкость только на сжатии. Далее, где говорится об аддитивном источнике в давлении, будет подразумеваться только сжатие (если не оговорено другое).

После введения искусственной вязкости (1) за фронтом УВ все еще оставались осцилляции. Для борьбы с ними была разработана линейная комбинация квадратичного и линейного вязкостных источников [12]:

$$q = c_1\rho(\Delta x)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + c_2\rho a\Delta x \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|,$$

где c_1 и c_2 — эмпирические константы; a — скорость звука.

Существуют и другие формы искусственной вязкости (см., например, [13]). В [13] В. Ф. Куропатенко для описания роста энтропии использует тот же механизм, что и на УВ. Выражение для искусственной вязкости выводится из законов сохранения на поверхности сильного разрыва с привлечением уравнения состояния. Так, для идеального газа $p = (\gamma - 1)\rho e$ искусственная вязкость будет иметь вид

$$q = \frac{\gamma + 1}{4}\rho(\Delta x)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \sqrt{\left(\frac{\gamma + 1}{4}\rho \right)^2 (\Delta x)^4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^4 + (\rho a)^2 (\Delta x)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2}. \quad (2)$$

Неоспоримым достоинством метода является отсутствие каких-либо эмпирических констант.

Вместо громоздкой формулы (2) также используют более простую формулу в форме [12] с конкретными коэффициентами (например Уилкинса [14]):

$$q = \frac{\gamma + 1}{2}\rho(\Delta x)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + a\rho\Delta x \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|. \quad (3)$$

Одним из недостатков метода сквозного счета [1] является действие численной вязкости как при ударном, так и при адиабатическом сжатии. Для решения данной проблемы было предложено использовать ограничители [15, 16]. Данные функции-ограничители основаны на базе TVD-метода ограничения потоков Хартена и находят сегодня широкое применение (см., например, [17, 18]). Их использование также позволяет сократить численную вязкость (диссипацию) в областях умеренных градиентов скоростей.

Лалипус [19] предложил новый подход, заключающийся в добавлении к вектору численного потока $\mathbf{F} = (\rho u, \rho u^2 + p, \rho u(e + p/\rho))$ диссипативных источников вида

$$\mathbf{D} = -c(\Delta x)^2 \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x},$$

где $\mathbf{U} = (\rho, \rho u, \rho e)$ — вектор консервативных переменных. Стоит подчеркнуть, что диффузионный поток вводится во все законы сохранения, включая уравнение неразрывности. Искусственную вязкость в форме Лалипуса использовали Колелла и Вудвард в расчетах по схеме PPM [20].

Обобщение искусственной вязкости на многомерный случай может быть реализовано двумя способами, каждый из которых имеет свои сложности.

Первый способ имеет скалярный характер и заключается в рассмотрении искусственной вязкости как источника давления. При этом, как правило, в выражении для искусственной вязкости производная скорости заменяется на ее дивергенцию. При таком способе обобщения желательно учитывать направление движения УВ в формуле для характерного размера счетной ячейки (см. например, [14, 21]). К типичным недостаткам скалярной многомерной вязкости следует отнести ее действие при адиабатическом сжатии, что может приводить к искажению численного решения.

Второй способ обобщения имеет ярко выраженный многомерный характер и сводится к рассмотрению тензорной природы искусственной вязкости. Пионерской работой в этом направлении считается работа Шульца [22]. Он разработал тензор вязких напряжений на основе одномерных вязкостей, вычисленных в каждом из направлений линий сетки; при этом было использовано понятие одномерной дивергенции. Полученный тензор не обладает симметрией.

Работу [22] можно назвать ключевой, поскольку здесь впервые сформулирован ряд требований (критериев), которым должна удовлетворять искусственная вязкость. Позднее в [17] были развиты идеи Шульца [22] и расширен набор критериев.

В 2000 г. в работе [18] были предложены два вида тензорной искусственной вязкости. Первую из них называли симметричной, поскольку тензор искусственных вязких напряжений имеет симметричную форму:

$$\tau_{ij} = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (4)$$

Данная форма близка к физическим вязким напряжениям для несжимаемых течений. Другой тензор искусственных вязких напряжений имеет несимметричную форму:

$$\tau_{ij} = \mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j}. \quad (5)$$

Авторы [18] на основе некоторых теоретических рассуждений и результатов численных экспериментов делают вывод, что несимметричная форма вязкости (5) дает лучшее решение, чем симметричная форма (4). В более поздних работах авторы рассматривают уже только несимметричную форму тензора искусственных вязких напряжений (5).

Интересно отметить, что Уилкинс в работе [14] предложил совместно с вязкостью (3) использовать тензорную вязкость в форме уравнений Навье—Стокса для борьбы с искажением сетки типа *песочных часов* (для разнесенных сеток).

А. М. Стенин и Е. А. Соловьева предложили метод [23], названный *матрицей искусственных вязкостей*. Тензор искусственных вязких напряжений [23] имеет симметричную форму, которая

отличается от тензора вязких напряжений уравнений Навье—Стокса диагональным членом:

$$\tau = C_{UL}\rho \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{1}{2}\nabla\mathbf{u} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} - \frac{1}{2}\nabla\mathbf{u} \end{pmatrix}.$$

Примечательно, что в [23] вводится в рассмотрение не только тензор искусственных вязких напряжений, но и диффузия массы с искусственной теплопроводностью [24].

Искусственная вязкость в форме физической вязкости

По мнению авторов настоящей работы, наиболее естественно добавлять искусственную вязкость, которая по форме соответствует физической вязкости. Такой подход особенно привлекателен для тех CFD-кодов, которые уже имеют аппроксимацию уравнений Навье—Стокса, поскольку в этом случае доработки минимальны. Тогда в двумерном случае тензор искусственных вязких напряжений принимает вид

$$\tau = 2\mu_{AV} \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{1}{3}\operatorname{div}\vec{u} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} - \frac{1}{3}\operatorname{div}\vec{u} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Входящий в (6) коэффициент искусственной вязкости μ_{AV} предлагается вычислять как

$$\mu_{AV} = k_1\rho l^2 \max\left(0, -\operatorname{div}\vec{u} - k_2\frac{a}{l}\right), \quad (7)$$

где a — скорость звука; k_1, k_2 — коэффициенты.

Общий вид выражения (7) обуславливает наличие искусственной вязкости только в областях сжатия, а наличие ограничителя ($k_2 > 0$) гарантирует, что введенная искусственная вязкость будет действовать только на фронте интенсивной УВ (отсутствие реакции на безударное сжатие). Кроме того, такой подход дает дополнительное преимущество, связанное с экономией вычислительных ресурсов (если $\mu_{AV} = 0$, вязкие члены не рассчитываются).

Характерный размер l в выражении (7) предлагается вычислять по формуле

$$l^2 = \frac{V^2}{\vec{S}_i^2 + \vec{S}_j^2},$$

где V — объем ячейки; \vec{S}_i^2, \vec{S}_j^2 — квадраты площадей боковых граней вдоль двух линий сетки. Нетрудно показать, что характерный размер близок к минимальной стороне ячейки с некоторым запасом.

На основе большого количества тестовых расчетов были выбраны следующие значения для постоянных множителей в (7): $k_1 = 0,5$; $k_2 = 0,02$. Данные значения обеспечивают минимальное значение диссипации, необходимое для регуляризации численного решения.

В дополнение к членам искусственной вязкости (6) предлагается добавлять искусственную теплопроводность, определяемую через коэффициент

$$\lambda_{AV} = \frac{\mu_{AV}C_P}{\operatorname{Pr}},$$

где C_P — удельная теплоемкость при постоянном давлении; Pr — число Прандтля, полагаемое равным единице.

Численные расчеты

Задача Кёрка. Подробная постановка задачи приведена в [5] ("odd-even decoupling"). В плоском канале исследуется гиперзвуковое течение газа с числом Маха $M = 6$. Область покрывалась равномерной сеткой с единичным шагом ($h_x = h_y = 1$). В положение узлов центральной линии счетной сетки $j = 11$ (соответствует $y = 10$) вносились возмущения следующим образом:

$$\check{y}(i, j) = y(i, j) + (-1)^i \varepsilon.$$

В оригинальной работе [5] использовалось $\varepsilon = 10^{-6}$. В данной работе для ускорения развития карбункул-неустойчивости используется значение $\varepsilon = 10^{-3}$. Задача рассчитывалась до момента времени

$$t = 0,8 \text{ Scale}, \quad \text{Scale} = \frac{800}{U_{shock}},$$

что соответствует положению фронта УВ $x_{shock} = 640$ (U_{shock} — скорость УВ).

На рис. 1 (см. также цветную вкладку) представлены распределения числа Маха в расчетах по схемам Годунова и ГКР в оригинальном варианте и с введением искусственной вязкости. Видно, что искусственная вязкость позволяет предотвратить появление карбункула, фронт волны остается гладким, а задача — одномерной (что соответствует физической постановке).

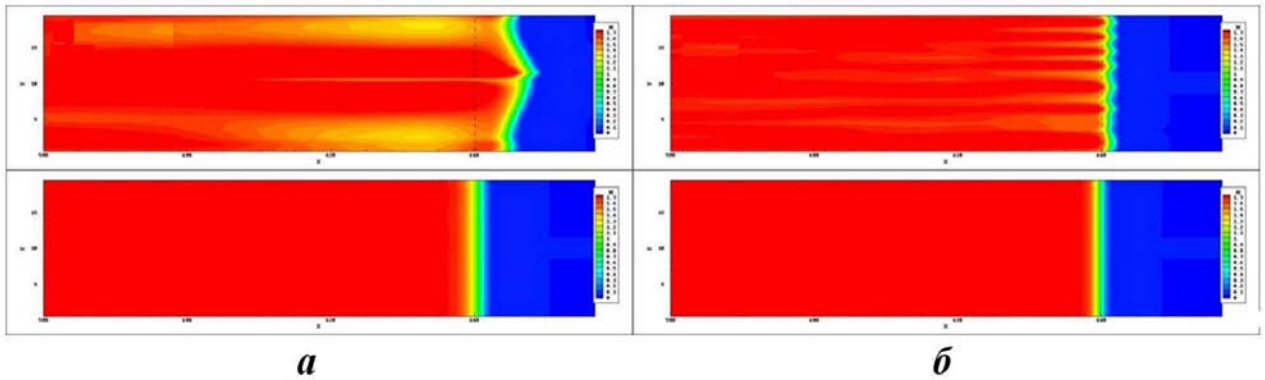
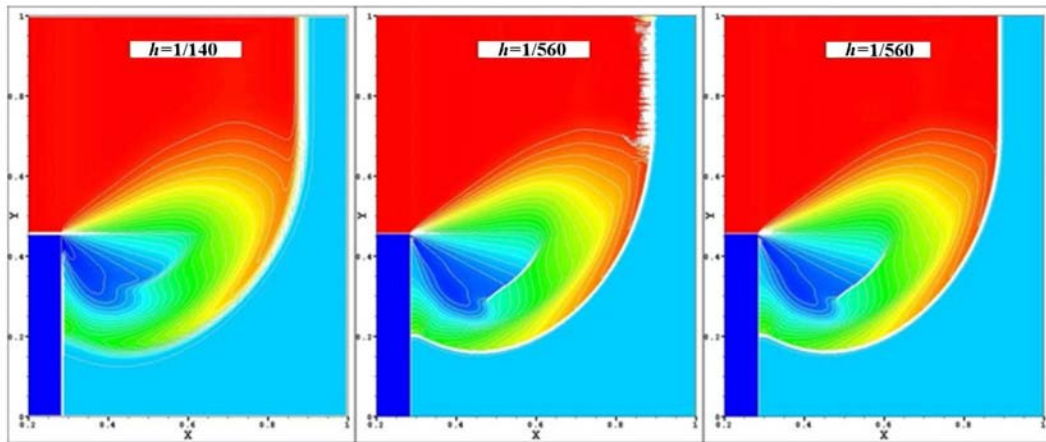


Рис. 1. Распределение числа Маха в задаче Кёрка: *a* — расчеты по схеме Годунова; *б* — расчеты по схеме ГКР; сверху — без искусственной вязкости; снизу — с искусственной вязкостью

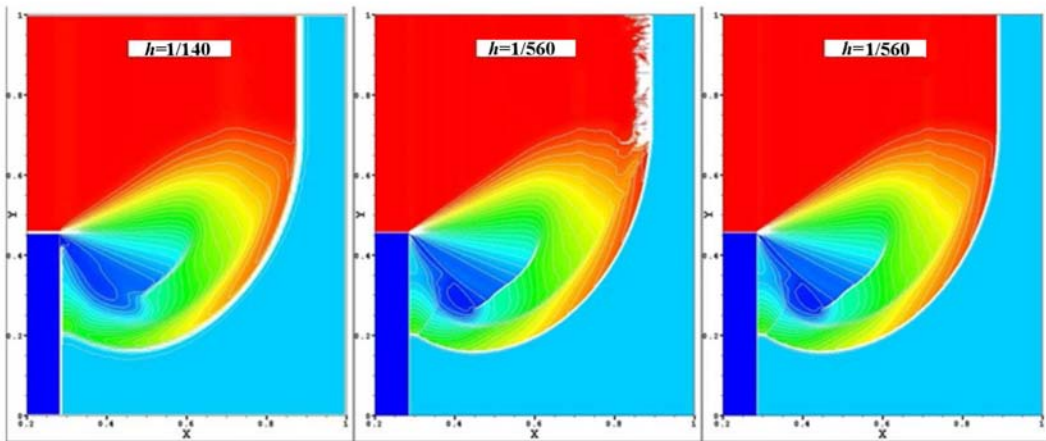
Дифракция сильной УВ на прямом угле. Постановка взята из [5], где УВ с числом Маха $M = 5$ движется слева направо, обтекая конструкцию в виде ступеньки (плоская постановка). На рис. 2 (см. также цветную вкладку) представлены результаты расчетов на двух сеточных разбиениях: $h = 1/140$ и $h = 1/560$. На грубом сеточном разбиении получаемое решение является приемлемым. При измельчении сетки диссипативных свойств схем недостаточно, чтобы подавить развитие карбункул-неустойчивости на фронте УВ. Введение искусственной вязкости позволяет корректно выполнить расчет без развития возмущений на фронте УВ.

Задача "Double Mach Reflection". Постановка задачи взята из [25]. Задача представляет собой моделирование взаимодействия плоской УВ (число Маха $M = 10$) с клином под углом 30° . Расчет проводится до момента времени $t = 0,2$. Область покрывается равномерной сеткой с равными по всем направлениям разбиениями: $h = 1/120; 1/240; 1/480$.

На рис. 3, 4 представлены результаты численного моделирования, выполненного по схемам Годунова и ГКР на серии сгущающихся сеток без искусственной вязкости и с ее использованием. Введение искусственной вязкости позволяет избежать излома *ножки Маха* и правильно описать контактный разрыв грибовидной формы. Рис. 5 демонстрирует, что введенная искусственная вязкость действует только на фронтах сильных УВ и не затрагивает остальную область течения, в том числе контактный разрыв.

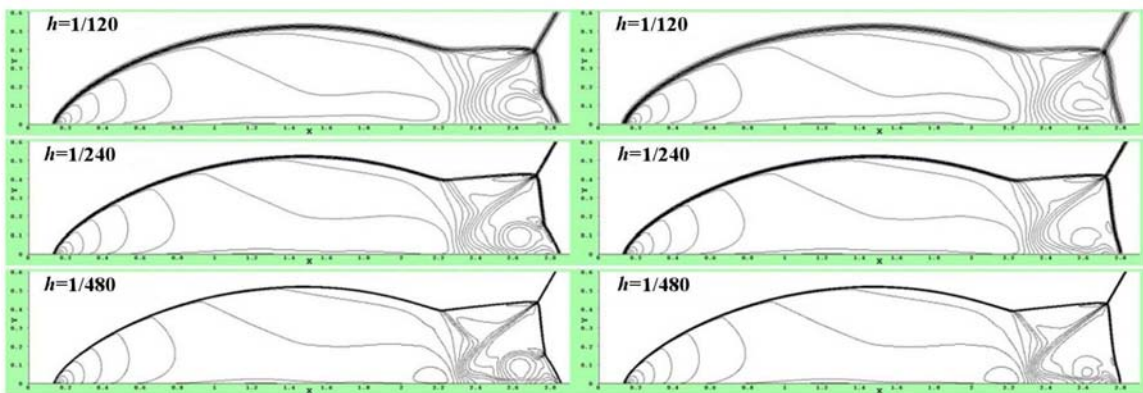


a



б

Рис. 2. Распределение числа Маха в задаче дифракции сильной УВ на прямом угле: *a* — расчеты по схеме Годунова; *б* — расчеты по схеме ГКР



a

б

Рис. 3. Изолинии плотности в расчетах задачи "Double Mach Reflection" на последовательно сгущающихся сетках по схеме Годунова без искусственной вязкости (*a*) и с ее использованием (*б*)

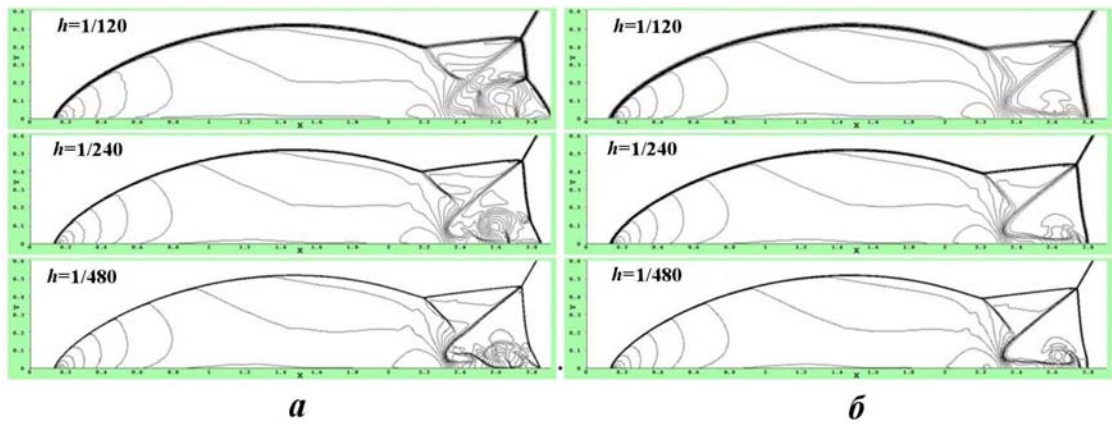


Рис. 4. Изолинии плотности в расчетах задачи "Double Mach Reflection" на последовательно сгущающихся сетках по схеме ГКР без искусственной вязкости (а) и с ее использованием (б)

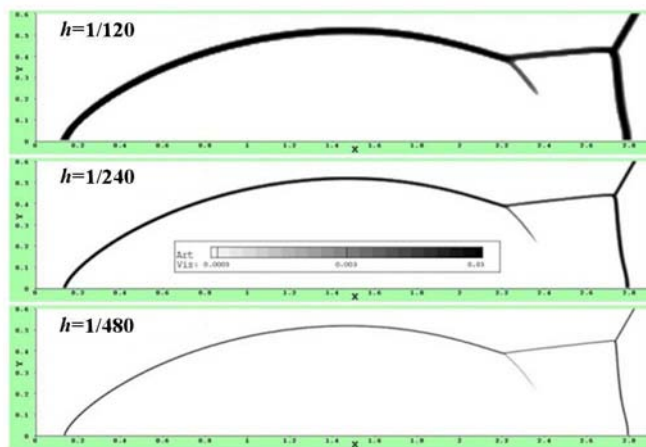


Рис. 5. Поле искусственной вязкости в расчетах задачи "Double Mach Reflection" на последовательно сгущающихся сетках по схеме ГКР

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-01-06224).

Авторы выражают признательность Ю. А. Бондаренко за полезные обсуждения и ценные замечания.

Список литературы

1. Neumann J. von, Richtmyer R.D. A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks // J. Appl. Phys. 1950. Vol. 21. P. 232–237.
2. Годунов С. К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Матем. сб., 1959. Т. 47, № 3. С. 271–306.
3. Peery K. M., Imlay S. T. Blunt body flow simulations // AIAA Paper. 1988. No 88-2924.
4. Leer B. van. The development of numerical fluid mechanics and aerodynamics since the 1960s: US and Canada // 100 Volumes of "Notes on Num. Fluid Mech" / Ed. by E. H. Hirschel et al. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag. 2009. P. 159–185.
5. Quirk J. J. A contribution to the great Riemann solver debate // Int. J. Numer. Meth. Fluids. 1994. Vol. 18. P. 555–574.

6. Ren Y.-X. A robust shock-capturing scheme based on rotated Riemann solvers // *Comp. and Fluids*. 2003. Vol. 32. P. 1379–1403.
7. Nishikawa H., Kitamura K. Very simple, carbuncle-free, boundary-layer-resolving, rotated-hybrid Riemann solvers // *J. Comp. Phys.* 2008. Vol. 227. P. 2560–2581.
8. Shen Y., Gecheng Zha G., Huerta M. A. Rotated hybrid low diffusion ECUSP-HLL scheme and its applications to hypersonic flows // *AIAA Paper*. 2011. No 2011–3345.
9. Huang K., Wu H., Yu H., Yan D. Cures for numerical shock instability in HLLC solver // *Int. J. Numer. Meth. Fluids*. 2011. Vol. 65. P. 1026–1038.
10. Родионов А. В. Монотонная схема второго порядка аппроксимации для сквозного расчета неравновесных течений // *Журнал вычисл. мат. и мат. физ.* 1987. Т. 27, № 4. С. 585–593.
11. Родионов А. В., Мышкина И. Ю., Спиридонов В. Ф. и др. Программный модуль для решения двумерных аэродинамических задач на основе явной схемы Годунова—Колгана—Родионова // *Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов*. 2013. Вып. 2. С. 19–36.
12. Landshoff R. A Numerical Method for Treating Fluid Flow in the Presence of Shocks. Technical Report LANL-1930, 1955.
13. Куропатенко В. Ф. О разностных методах для уравнений газовой динамики // *Тр. Матем. ин-та АН СССР*. 1966. Т. 74. С. 107–137.
14. Wilkins M. L. Use of artificial viscosity in multidimensional shock wave problems // *J. Comp. Phys.* 1980. Vol. 36. P. 281.
15. Christiansen R. Godunov Methods on a Staggered Mesh — An Improved Artificial Viscosity. LLNL Report UCRL-JC-105269, 1991.
16. Christiansen R. High resolution hydrodynamics methods using artificial viscosity // *Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов*. 1996. Вып. 4. С. 89–93.
17. Caramana E. J., Shashkov M. J., Whalen P. P. Formulations of artificial viscosity for multidimensional shock wave computations // *J. Comp. Phys.* 1998. Vol. 144. P. 70–97.
18. Campbell J. C., Shashkov M. J. A Tensor Artificial Viscosity Using a Mimetic Finite Difference Algorithm. LANL Report LA-UR-00-2290, 2000.
19. Lapidus A. A detached shock calculation by second-order finite differences // *J. Comp. Phys.* 1967. Vol. 2. P. 154–177.
20. Colella P., Woodward P. The piecewise parabolic method (PPM) for gas-dynamical simulations // *Ibid.* 1984. Vol. 54. P. 174–201.
21. Бахрах С. М., Глаголева Ю. П., Самигулин М. С. и др. Расчет газодинамических течений на основе метода концентраций // *Докл. АН СССР*. 1981. Т. 257, № 3. С. 566.
22. Schulz W. D. Tensor artificial viscosity for numerical hydrodynamics // *J. Math. Phys.* 1964. Vol. 5. P. 133–138.
23. Стенин А. М., Соловьева Е. А. Матрица искусственных вязкостей для двумерной лагранжевой газодинамики, способствующая уменьшению «энтропийного следа» в численных расчетах // *Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов*. 2010. Вып. 1. С. 3–18.
24. Noh W. F. Errors for calculations of strong shocks using an artificial viscosity and an artificial heat flux // *J. Comp. Phys.* 1987. Vol. 72. P. 78.

25. *Woodward P., Colella P.* The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks // J. Comp. Phys. 1984. Vol. 54. P. 115—173.

Статья поступила в редакцию 25.11.14.

ARTIFICIAL VISCOSITY IN THE GODUNOV'S-TYPE SCHEMES AS THE METHOD OF "CARBUNCLE"-INSTABILITY SUPPRESSION / A. V. Rodionov, I. Yu. Tagirova (FSUE "RFNC-VNIIEF", Sarov, Nizhny Novgorod Region).

The paper describes a new method of solving the "carbuncle"-problems in the Godunov's type schemes when simulating hypersonic flows with shock waves. The method assumes the carbuncle-instability suppression by means of the introduction of dissipative additions into the calculation in the form of right-hand parts of the Navier-Stokes equations with the physical viscosity replaced by the artificial one. The efficiency of the proposed approach is demonstrated by the examples of benchmark problem solutions.

Keywords: hypersonic flows, Euler and Navier-Stokes equations, carbuncle-problem, Godunov's-type schemes, artificial viscosity.
