

УДК 517.9:519.6:533.6.011:534.2

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЗВУКА С ГРАНИЦЕЙ РАЗНЫХ ВЕЩЕСТВ В РАЗНОСТНЫХ СХЕМАХ ОДНОМЕРНОЙ ЛАГРАНЖЕВОЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ. ЗАВИСИМОСТЬ ТОЧНОСТИ ОТ СПОСОБА СОГЛАСОВАНИЯ СЕТКИ

Ю. А. Бондаренко, В. Н. Софронов
(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области)

Для нескольких газодинамических разностных схем построены решения линейных разностных уравнений (без вязкости), описывающие взаимодействие звука с границей разных веществ. Показано, что точность значительно улучшается, когда сетка согласована по акустической толщине. Эффект улучшения точности ярко проявляется в задаче прохождения слабой ударной волны по периодической многослойной среде (когда сравниваются сетки, равномерные по массе, и сетки, согласованные по акустической толщине).

Ключевые слова: малые возмущения, дисперсионные уравнения, коэффициенты отражения звука, разностный закон сохранения акустической энергии, неравномерные сетки, правила согласования сетки на границах разных веществ.

Введение

Уже на заре развития вычислительной газовой динамики стало понятно, что основные погрешности разностного счета при моделировании газодинамических течений появляются при наличии разрывов в решении или в параметрах газов. Примером могут служить энтропийные следы, наблюдаемые в виде конечных погрешностей плотности и энергии вблизи контактной границы при моделировании взаимодействия ударных волн с контактными разрывами. И даже при отсутствии ударных волн наиболее заметные погрешности появляются именно на контактных разрывах. Быстро выяснилось, что погрешность сильно зависит от характера согласования сетки на контактном разрыве. Например, в работе [1] посредством анализа кусочно-линейных непрерывных решений показано, что в схеме Годунова для системы линейных уравнений акустики численные ошибки определенного вида уменьшаются, если разностная сетка согласована по акустической толщине, т. е. на контактном разрыве выполнено условие $\Delta x_1/c_1 = \Delta x_2/c_2$, связывающее толщины ячеек со скоростями звука в них (этот результат изложен также в [2]). В [3] приведены аргументы в пользу того, что применение обобщения этого критерия (использование скорости ударной волны вместо скорости звука) уменьшает энтропийные следы в разностной схеме типа "крест" с искусственной вязкостью.

Классические методы исследования точности (вычисление ошибок аппроксимации и последующее получение оценок норм погрешностей энергетическим методом [4] или с помощью теоремы Лакса об эквивалентности [5]) в случае разрывных коэффициентов (разрывной скорости звука) даже в линейном случае приводят к серьезным затруднениям. Главное из них связано с тем, что в случае разрывной скорости звука в волновом уравнении в точке ее разрыва точное решение теряет гладкость (уже первые пространственные производные становятся разрывными), что вызывает непростые вопросы уже при вычислении ошибок аппроксимации. И даже в случае гладких решений резкое различие размеров ячеек сетки обычно приводит к ухудшению, а иногда и к полной потере локальной аппроксимации. Нет уверенности, что после преодоления подобных трудностей полученные оценки норм погрешностей будут правильно описывать зависимости погрешностей от способа согласования сетки в окрестности разрывов коэффициентов.

Более предпочтительным и заведомо более наглядным представляется нахождение тех или иных точных решений разностных уравнений и их сравнение с точными решениями дифференциальных задач. Конечно, такие точные решения разностных уравнений можно найти только в идеализированных условиях. В частности, можно построить точные разностные решения, описывающие отражение малых звуковых возмущений от границы двух газов в линейном случае, когда слева и справа от границы плотность, скорость звука и размеры ячеек сетки постоянные. В этом случае удастся явно вычислить разностный коэффициент отражения звука от границы и разностный коэффициент прохождения (ослабления) звука при пересечении границы двух газов и затем сравнить разностные коэффициенты отражения и прохождения с точными их значениями. Это дает в итоге физически наглядную меру погрешности.

Данный план исследования реализован в настоящей работе для двух лагранжевых разностных схем одномерной газовой динамики на разнесенных пространственных сетках (схемы "крест" [5, 6] и схемы с искусственной антидисперсией [7]) и для двух разностных схем на неразнесенных пространственных сетках (балансно-характеристической разностной схемы типа КАБАРЕ [8, 9] и схемы Годунова [1]). Все вычисления проводятся для линейных моделей при отсутствии искусственных вязкостей и иных искусственных диссипативных добавок. Разностные уравнения для внутренней энергии не учитываются; это оправдано тем, что для малых возмущений состояния покоя можно использовать изэнтропическую скорость звука, связывающую малые возмущения давления и плотности.

1. Коэффициенты отражения и прохождения звука на границе двух разных веществ в дифференциальных уравнениях одномерной газовой динамики

Начнем с рассмотрения коэффициентов отражения и прохождения звука на границах двух разных веществ в дифференциальных уравнениях одномерной газовой динамики. Процедура вычисления данных коэффициентов хорошо известна (см., например, [10, 11]). Исследуются уравнения акустики с разрывными коэффициентами для малых возмущений

$$\frac{\partial \delta \eta}{\partial t} = \frac{\partial \delta u}{\partial m}; \quad \frac{\partial \delta u}{\partial t} = -\frac{\partial \delta p}{\partial m}; \quad \delta p = -[a(m)]^2 \delta \eta = \begin{cases} -a_{(1)}^2 \delta \eta, & m < 0; \\ -a_{(2)}^2 \delta \eta, & m > 0. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $a_{(k)} = c_k / \eta_k$ — коэффициенты волнового сопротивления; $c_k = \eta_k \sqrt{-\frac{dP_k(\eta)}{d\eta} \Big|_{\eta=\eta_{k0}}}$ — скорость звука, соответствующая невозмущенному состоянию веществ.

При вычислении коэффициентов отражения и прохождения звука используются энергетические соотношения. Из уравнений (1) следует закон сохранения акустической энергии

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\delta u^2}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\delta p}{a(m)} \right)^2 \right] + \frac{\partial Q}{\partial m} = 0, \quad Q = \delta p \delta u. \quad (2)$$

Решение задачи о взаимодействии волны с границей веществ обычно ищется в виде суммы решений для падающей, проходящей и отраженной волн (они помечены соответственно индексами (1+), (2+) и (1-), указывающими номер области и направление движения волны):

$$\delta p(t, m) = \begin{cases} \delta p_{(1+)}(t - m/a_{(1)}) + \delta p_{(1-)}(t + m/a_{(1)}), & m < 0; \\ \delta p_{(2+)}(t - m/a_{(2)}), & m > 0; \end{cases} \quad (3)$$

$$\delta u(t, m) = \begin{cases} \delta u_{(1+)}(t - m/a_{(1)}) + \delta u_{(1-)}(t + m/a_{(1)}), & m < 0; \\ \delta u_{(2+)}(t - m/a_{(2)}), & m > 0. \end{cases} \quad (4)$$

Из уравнений акустики и условий непрерывности скорости и давления на границе $m = 0$ параметры отраженной и проходящей волн выражаются через параметры падающей волны. Коэффициенты отражения и прохождения определяются как отношения потоков энергии отраженной и проходящей звуковых волн к потоку энергии падающей волны:

$$K_{\text{отраж}}^2 = \frac{Q_{(1-)}(t)}{Q_{(1+)}(t)} = \left(\frac{a_{(2)} - a_{(1)}}{a_{(2)} + a_{(1)}} \right)^2; \quad K_{\text{прох}}^2 = \frac{Q_{(2+)}(t)}{Q_{(1+)}(t)} = \frac{4a_{(1)}a_{(2)}}{(a_{(1)} + a_{(2)})^2}. \quad (5)$$

При этом выполнено уравнение баланса потоков энергии в виде $K_{\text{отраж}}^2 + K_{\text{прох}}^2 = 1$.

2. Коэффициенты отражения и прохождения звука на границе двух разных веществ в разностной схеме "крест"

Схема "крест" в акустическом приближении имеет вид

$$\frac{\delta p_{j+1/2}^{n+1} - \delta p_{j+1/2}^n}{\Delta t} = -a_{j+1/2}^2 \frac{\delta u_{j+1}^{n+1/2} - \delta u_j^{n+1/2}}{\Delta m_{j+1/2}}; \quad (6)$$

$$\frac{\delta u_j^{n+1/2} - \delta u_j^{n-1/2}}{\Delta t} = -\frac{\delta p_{j+1/2}^n - \delta p_{j-1/2}^n}{\Delta m_j}. \quad (7)$$

Полагаем шаг по времени Δt постоянным. Волновые сопротивления, массы ячеек и узлов сетки определены формулами

$$a_{j+1/2} = \begin{cases} a_{(1)}, & j < 0; \\ a_{(2)}, & j \geq 0; \end{cases} \quad \Delta m_{j+1/2} = \begin{cases} \Delta m_{(1)}, & j < 0; \\ \Delta m_{(2)}, & j \geq 0; \end{cases} \quad \Delta m_j = \frac{\Delta m_{j-1/2} + \Delta m_{j+1/2}}{2}.$$

Решение системы разностных уравнений (6), (7) ищем в виде суммы трех гармонических волн вида $e^{i(\omega t \pm \xi m)}$ с комплексными амплитудами (это аналог формул (3), (4)):

$$\delta p_{j+1/2}^n = \begin{cases} \delta p_{(1+)} e^{i(\omega n \Delta t - \xi_{(1)}(j+1/2)\Delta m_{(1)})} + \delta p_{(1-)} e^{i(\omega n \Delta t + \xi_{(1)}(j+1/2)\Delta m_{(1)})}, & j < 0; \\ \delta p_{(2+)} e^{i(\omega n \Delta t - \xi_{(2)}(j+1/2)\Delta m_{(2)})}, & j \geq 0; \end{cases} \quad (8)$$

$$\delta u_j^{n+1/2} = \begin{cases} \delta u_{(1+)} e^{i(\omega(n+1/2)\Delta t - \xi_{(1)}j\Delta m_{(1)})} + \delta u_{(1-)} e^{i(\omega(n+1/2)\Delta t + \xi_{(1)}j\Delta m_{(1)})}, & j \leq 0; \\ \delta u_{(2+)} e^{i(\omega(n+1/2)\Delta t - \xi_{(2)}j\Delta m_{(2)})}, & j \geq 0. \end{cases} \quad (9)$$

Все три волны имеют одинаковую угловую частоту $\omega = 2\pi/\tau > 0$ (τ — период осцилляций по времени), но разные длины волн ($\lambda_{(2)} = 2\pi/\xi_{(2)} > 0$ для проходящей волны в правой полуплоскости; $\lambda_{(1)} = 2\pi/\xi_{(1)} > 0$ для падающей и отраженной волн, распространяющихся во встречных направлениях в левой полуплоскости (длины волн здесь выражены в массовых координатах)). Предполагаем всюду в дальнейшем выполненными следующие естественные ограничения:

$$0 < \omega \Delta t \leq \pi; \quad 0 < \xi_{(k)} \Delta m_{(k)} < \pi, \quad k = 1, 2 \quad (10)$$

и условие устойчивости разностной схемы (6), (7)

$$\chi^{(k)} = \frac{a_{(k)} \Delta t}{\Delta m_{(k)}} \leq 1, \quad k = 1, 2. \quad (11)$$

Формулы (8), (9) дополняются требованием "непрерывности" возмущений скорости в граничной точке $j = 0$:

$$\delta u_{(1+)} + \delta u_{(1-)} = \delta u_{(2+)}. \quad (12)$$

После подстановки в разностные уравнения (6), (7) каждого из трех компонентов решения (8), (9) получаем

$$\delta p_{(k\pm)} \frac{\sin(\omega\Delta t/2)}{\Delta t} = \pm a_{(k)}^2 \delta u_{(k\pm)} \frac{\sin(\xi_{(k)}\Delta m_{(k)}/2)}{\Delta m_{(k)}}, \quad k = 1, 2; \quad (13)$$

$$\delta u_{(k\pm)} \frac{\sin(\omega\Delta t/2)}{\Delta t} = \pm \delta p_{(k\pm)} \frac{\sin(\xi_{(k)}\Delta m_{(k)}/2)}{\Delta m_{(k)}}, \quad k = 1, 2. \quad (14)$$

Условие нетривиальной разрешимости (т. е. условие существования хотя бы одного ненулевого решения $|\delta p|^2 + |\delta u|^2 \neq 0$) системы двух уравнений (13), (14) дает дисперсионные уравнения

$$\frac{\sin(\omega\Delta t/2)}{\sin(\xi_{(k)}\Delta m_{(k)}/2)} = \chi_{(k)} = \frac{a_{(k)}\Delta t}{\Delta m_{(k)}}, \quad k = 1, 2 \quad (15)$$

и соотношения между амплитудами

$$\delta p_{(k\pm)} = \pm a_{(k)} \delta u_{(k\pm)}, \quad k = 1, 2. \quad (16)$$

При выполнении условий (10), (11) дисперсионные уравнения (15) дают однозначно разрешимые вещественные зависимости $\xi_k = \xi_k(\omega)$.

Соотношения (15), (16) обеспечивают выполнение всех уравнений из набора (6), (7), кроме уравнения (7) для $j = 0$, которое определяет скорость узла сетки, являющегося границей между подобластями. Подставляя в это уравнение решение в виде гармонических волн (8), (9), получаем формулы для компонентов возмущений скорости и давления в отраженной и проходящей волнах при известной амплитуде падающей волны:

$$\delta u_{(1-)} = \delta u_{(1+)} \frac{a_{(1)} \cos(\xi_{(1)}\Delta m_{(1)}/2) - a_{(2)} \cos(\xi_{(2)}\Delta m_{(2)}/2)}{a_{(1)} \cos(\xi_{(1)}\Delta m_{(1)}/2) + a_{(2)} \cos(\xi_{(2)}\Delta m_{(2)}/2)}; \quad (17)$$

$$\delta u_{(2+)} = \delta u_{(1+)} \frac{2a_{(1)} \cos(\xi_{(1)}\Delta m_{(1)}/2)}{a_{(1)} \cos(\xi_{(1)}\Delta m_{(1)}/2) + a_{(2)} \cos(\xi_{(2)}\Delta m_{(2)}/2)}; \quad (18)$$

$$\delta p_{(1-)} = -\delta p_{(1+)} \frac{a_{(1)} \cos(\xi_{(1)}\Delta m_{(1)}/2) - a_{(2)} \cos(\xi_{(2)}\Delta m_{(2)}/2)}{a_{(1)} \cos(\xi_{(1)}\Delta m_{(1)}/2) + a_{(2)} \cos(\xi_{(2)}\Delta m_{(2)}/2)}; \quad (19)$$

$$\delta p_{(2+)} = \delta p_{(1+)} \frac{2a_{(2)} \cos(\xi_{(2)}\Delta m_{(2)}/2)}{a_{(1)} \cos(\xi_{(1)}\Delta m_{(1)}/2) + a_{(2)} \cos(\xi_{(2)}\Delta m_{(2)}/2)}. \quad (20)$$

Эти формулы завершают построение решения разностных уравнений (6), (7). При их выводе использовались условие непрерывности (12), дисперсионное соотношение (15) и связь между амплитудами (16).

Для вычисления разностных коэффициентов отражения и прохождения требуется получение разностного закона сохранения энергии акустических колебаний, с помощью которого устанавливается явный вид потока энергии звуковой волны. Как известно, разные алгебраически эквивалентные формы схемы "крест" [6, 12, 13] имеют законы сохранения полной энергии с разными способами определения кинетической энергии. Поэтому линейная схема (6), (7) допускает несколько разных форм закона сохранения с разными формулами для потоков энергии звуковой волны. Тем не менее конечный результат (коэффициенты отражения и прохождения) получается один и тот же.

Определим по аналогии с [12] плотность энергии звуковой волны, отнесенную к единице массы, формулой

$$E_{j+1/2}^n = \frac{\overline{\delta u_j^{n-1/2} \delta u_j^{n+1/2}} + \overline{\delta u_j^{n-1/2} \delta u_j^{n+1/2}} + \overline{\delta u_{j+1}^{n-1/2} \delta u_{j+1}^{n+1/2}} + \overline{\delta u_{j+1}^{n-1/2} \delta u_{j+1}^{n+1/2}}}{8} + \frac{\overline{\delta p_{j+1/2}^n \delta p_{j+1/2}^n}}{2a_{j+1/2}^2}. \quad (21)$$

Здесь принят во внимание тот факт, что рассматриваются комплексные решения уравнений акустики вида (8), (9). Верхней чертой обозначена операция комплексного сопряжения. С использованием разностной схемы (6), (7) вычислим приращения кинетической (первое слагаемое в (21)) и потенциальной энергии на одном шаге. Опустив промежуточные выкладки, выпишем разностный закон сохранения энергии звуковых возмущений, являющийся аналогом уравнения (2):

$$\frac{E_{j+1/2}^{n+1} - E_{j+1/2}^n}{\Delta t} = -\frac{Q_{j+1}^{n+1/2} - Q_j^{n+1/2}}{\Delta m_{j+1/2}};$$

$$Q_j^{n+1/2} = \frac{1}{8\Delta m_j} \left\{ \overline{\delta u_j^{n+1/2}} \left[\Delta m_{j+1/2} \left(\delta p_{j-1/2}^n + \delta p_{j-1/2}^{n+1} \right) + \Delta m_{j-1/2} \left(\delta p_{j+1/2}^n + \delta p_{j+1/2}^{n+1} \right) \right] + \right.$$

$$\left. + \delta u_j^{n+1/2} \left[\Delta m_{j+1/2} \left(\overline{\delta p_{j-1/2}^n} + \overline{\delta p_{j-1/2}^{n+1}} \right) + \Delta m_{j-1/2} \left(\overline{\delta p_{j+1/2}^n} + \overline{\delta p_{j+1/2}^{n+1}} \right) \right] \right\}.$$

Здесь $Q_j^{n+1/2}$ — поток энергии звуковой волны через узел сетки с номером j в интервале времени $t^n < t < t^{n+1}$. Тогда значения разностных потоков энергии для узлов сетки с номерами $j \neq 0$ отдельно для каждого из трех компонентов решения вида (8), (9) будут равны

$$Q_{j(k\pm)}^{n+1/2} = Q_{(k\pm)}^{(\text{крест})} = \frac{\overline{\delta u_{(k\pm)}} \delta p_{(k\pm)} + \delta u_{(k\pm)} \overline{\delta p_{(k\pm)}}}{2} \cos(\omega \Delta t / 2) \cos(\xi_{(k)} \Delta m_{(k)} / 2), \quad k = 1, 2. \quad (22)$$

В этой формуле показательно то, что поток энергии звуковой волны для компонентов гармонических возмущений не зависит от номера шага и номера узла сетки. Поэтому индексы $n + 1/2$ и j можно опустить. Подставив в (22) выражения (17)–(20), получим следующие формулы потоков энергии звуковой волны для каждого из трех компонентов решения:

$$Q_{(1+)}^{(\text{крест})} = a_{(1)} \cos(\omega \Delta t / 2) \cos(\xi_{(1)} \Delta m_{(1)} / 2) |\delta u_{(1+)}|^2;$$

$$Q_{(1-)}^{(\text{крест})} = a_{(1)} \cos(\omega \Delta t / 2) \cos(\xi_{(1)} \Delta m_{(1)} / 2) |\delta u_{(1+)}|^2 \times$$

$$\times \left(\frac{a_{(1)} \cos(\xi_{(1)} \Delta m_{(1)} / 2) - a_{(2)} \cos(\xi_{(2)} \Delta m_{(2)} / 2)}{a_{(1)} \cos(\xi_{(1)} \Delta m_{(1)} / 2) + a_{(2)} \cos(\xi_{(2)} \Delta m_{(2)} / 2)} \right)^2 |\delta u_{(1+)}|^2;$$

$$Q_{(2+)}^{(\text{крест})} = a_{(1)} \cos(\omega \Delta t / 2) \cos(\xi_{(1)} \Delta m_{(1)} / 2) |\delta u_{(1+)}|^2 \times$$

$$\times \frac{4a_{(1)}a_{(2)} \cos(\xi_{(1)} \Delta m_{(1)} / 2) \cos(\xi_{(2)} \Delta m_{(2)} / 2)}{\left(a_{(1)} \cos(\xi_{(1)} \Delta m_{(1)} / 2) + a_{(2)} \cos(\xi_{(2)} \Delta m_{(2)} / 2) \right)^2} |\delta u_{(1+)}|^2.$$

Коэффициенты отражения и прохождения определяются отношением соответствующих потоков энергии (отраженной и проходящей волн) к потоку энергии падающей волны:

$$\left(K_{(\text{отраж})}^{(\text{крест})} \right)^2 = \frac{Q_{(1-)}^{(\text{крест})}}{Q_{(1+)}^{(\text{крест})}} = \left(\frac{a_{(2)} \cos(\xi_{(2)} \Delta m_{(2)} / 2) - a_{(1)} \cos(\xi_{(1)} \Delta m_{(1)} / 2)}{a_{(2)} \cos(\xi_{(2)} \Delta m_{(2)} / 2) + a_{(1)} \cos(\xi_{(1)} \Delta m_{(1)} / 2)} \right)^2; \quad (23)$$

$$\left(K_{(\text{прох})}^{(\text{крест})} \right)^2 = \frac{Q_{(2+)}^{(\text{крест})}}{Q_{(1+)}^{(\text{крест})}} = \frac{4a_{(1)}a_{(2)} \cos(\xi_{(1)} \Delta m_{(1)} / 2) \cos(\xi_{(2)} \Delta m_{(2)} / 2)}{\left(a_{(2)} \cos(\xi_{(2)} \Delta m_{(2)} / 2) + a_{(1)} \cos(\xi_{(1)} \Delta m_{(1)} / 2) \right)^2}. \quad (24)$$

Из (23), (24) следует, что в длинноволновом пределе, когда $\xi_{(k)} \Delta m_{(k)} \rightarrow 0$, разностные коэффициенты отражения и прохождения схемы "крест" приближаются к соответствующим коэффициентам дифференциальной задачи.

Главное же здесь следующее. Разностные коэффициенты отражения и прохождения (23), (24) в схеме "крест" равны точным значениям (5) тогда и только тогда, когда сетка согласована по акустической толщине: $\Delta m_{(1)}/a_1 = \Delta m_{(2)}/a_2$, и это справедливо для любых длин волн или частот.

Качественное и количественное поведения погрешностей в разностных коэффициентах отражения и прохождения звука при использовании равномерных по массе сеток демонстрирует рис. 1. Ошибка в коэффициенте отражения превышает 10% для падающей волны, на длину которой приходится 5 ячеек (примерно на столько ячеек размазывается ударная волна квадратичной искусственной вязкостью [5]).

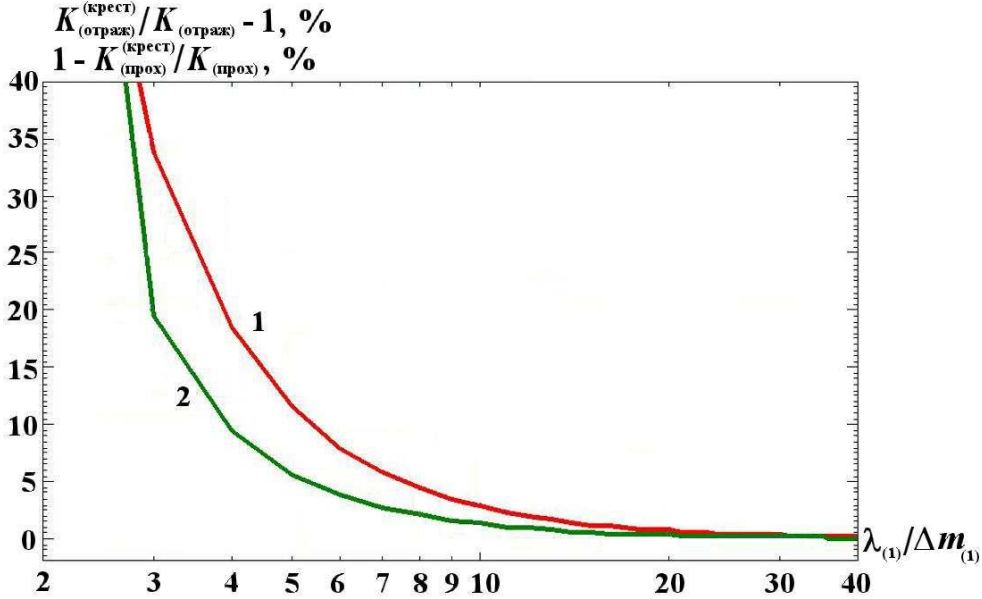


Рис. 1. Зависимости относительных погрешностей разностных коэффициентов отражения (1) и прохождения (2) от числа ячеек $\lambda_{(1)}/\Delta m_{(1)}$, приходящихся на длину падающей волны, для параметров веществ ($a_{(1)} = 9,3$; $a_{(2)} = 32,5$) в случае равномерной по массе сетки ($\Delta m_{(1)} = \Delta m_{(2)} = 10^{-3}$; $c_2\rho_2 = 3,5c_1\rho_1$)

3. Коэффициенты отражения и прохождения звука на границе двух разных веществ в разностной схеме с искусственной антидисперсией

Схема с искусственной антидисперсией (СИАД) [7] отличается от схемы "крест" наличием антидисперсионной добавки к давлению. При отсутствии вязкостей и других искусственных диссипаторов в линейном приближении эта схема имеет вид

$$\frac{\delta p_{j+1/2}^{n+1} - \delta p_{j+1/2}^n}{\Delta t} = -a_{j+1/2}^2 \frac{\delta u_{j+1}^{n+1/2} - \delta u_j^{n+1/2}}{\Delta m_{j+1/2}}; \quad (25)$$

$$\frac{\delta u_j^{n+1/2} - \delta u_j^{n-1/2}}{\Delta t} = - \frac{(\delta p_{j+1/2}^n + \delta q_{j+1/2}^n) - (\delta p_{j-1/2}^n + \delta q_{j-1/2}^n)}{\Delta m_j}; \quad (26)$$

$$\delta q_{j+1/2}^n = (A\delta p^n)_{j+1/2} \equiv -(\chi_{j+1/2})^2 \Delta m_{j+1/2} \left(\zeta_{j+1} \frac{\delta p_{j+3/2}^n - \delta p_{j+1/2}^n}{\Delta m_{j+1}} - \zeta_j \frac{\delta p_{j+1/2}^n - \delta p_{j-1/2}^n}{\Delta m_j} \right); \quad (27)$$

$$a_{j+1/2} = \begin{cases} a_{(1)}, & j < 0; \\ a_{(2)}, & j \geq 0; \end{cases} \quad \chi_{j+1/2} = \begin{cases} \chi_{(1)} = \frac{\Delta t a_1}{\Delta m_{(1)}}, & j < 0; \\ \chi_{(2)} = \frac{\Delta t a_2}{\Delta m_{(2)}}, & j \geq 0; \end{cases} \quad \zeta_j = \begin{cases} \zeta(\chi_{(1)}, \chi_{(1)}), & j < 0; \\ \zeta(\chi_{(1)}, \chi_{(2)}), & j = 0; \\ \zeta(\chi_{(2)}, \chi_{(2)}), & j > 0. \end{cases} \quad (28)$$

Здесь безразмерный коэффициент антидисперсии ζ_j , определенный в узлах сетки, есть некоторая положительная функция $\zeta(\chi_{j-1/2}, \chi_{j+1/2})$ от чисел Куранта для двух ячеек сетки, соседствующих с данным узлом*.

Вследствие расширенного пространственного шаблона усложнилась структура решения разностных уравнений схемы СИАД по сравнению с соответствующей структурой схемы "крест" (8), (9). Для однозначной разрешимости уравнений для амплитуд отраженной и проходящей волн понадобилось включение в общее решение дополнительных степеней свободы в виде амплитуд экспоненциально затухающих компонентов.

Выяснилось, что решением разностных уравнений (25)–(28) является суперпозиция падающей, отраженной и прошедшей звуковых волн гармонического вида, к которым добавляется гармонически зависящий от времени экспоненциально затухающий компонент (стоячая погранслоиная волна с быстрым затуханием при удалении от границы веществ):

$$\delta p_{j+1/2}^n = \begin{cases} e^{i\omega n \Delta t} \left(\delta p_{(1+)} e^{-i\xi_{(1)}(j+1/2)\Delta m_{(1)}} + \delta p_{(1-)} e^{i\xi_{(1)}(j+1/2)\Delta m_{(1)}} + \Delta p_{(1+)} e^{\psi_{(1)}(j+1/2)\Delta m_{(1)}} \right), & j < 0; \\ e^{i\omega n \Delta t} \left(\delta p_{(2+)} e^{-i\xi_{(2)}(j+1/2)\Delta m_{(2)}} + \Delta p_{(2-)} e^{-\psi_{(2)}(j+1/2)\Delta m_{(2)}} \right), & j \geq 0; \end{cases} \quad (29)$$

$$\delta u_j^{n+1/2} = \begin{cases} e^{i\omega(n+1/2)\Delta t} \left(\delta u_{(1+)} e^{-i\xi_{(1)}j\Delta m_{(1)}} + \delta u_{(1-)} e^{i\xi_{(1)}j\Delta m_{(1)}} + \Delta u_{(1+)} e^{\psi_{(1)}j\Delta m_{(1)}} \right), & j \leq 0; \\ e^{i\omega(n+1/2)\Delta t} \left(\delta u_{(2+)} e^{-i\xi_{(2)}j\Delta m_{(2)}} + \Delta u_{(2-)} e^{-\psi_{(2)}j\Delta m_{(2)}} \right), & j \geq 0. \end{cases} \quad (30)$$

Для получения разностных коэффициентов отражения и прохождения звука требуется повторить вычисления, представленные в разд. 2. Дисперсионные соотношения для вещественных $\xi_{(k)} = \xi_{(k)}(\omega)$ и мнимых $\psi_{(k)} = \psi_{(k)}(\omega)$ волновых чисел, а также уравнения для амплитуд звуковых волн и амплитуд экспоненциально затухающих решений имеют вид

$$\begin{aligned} \sin(\xi_{(k)}\Delta m_{(k)}/2) &= \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{1 + 16\zeta_{(k)} \sin^2(\omega\Delta t/2)}}{8\zeta_{(k)}(\chi_{(k)})^2}}, & k = 1, 2; \\ \text{sh}(\psi_{(k)}\Delta m_{(k)}/2) &= \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 + 16\zeta_{(k)} \sin^2(\omega\Delta t/2)}}{8\zeta_{(k)}(\chi_{(k)})^2}}, & k = 1, 2; \\ \delta p_{(k\pm)} &= \pm \frac{a_{(k)}}{\sqrt{1 + 4(\chi_{(k)})^2 \zeta_{(k)} \sin^2(\xi_{(k)}\Delta m_{(k)}/2)}} \delta u_{(k\pm)}, & k = 1, 2; \\ \Delta p_{(k\pm)} &= \mp \frac{a_{(k)}}{\sqrt{1 - 4(\chi_{(k)})^2 \zeta_{(k)} \text{sh}^2(\psi_{(k)}\Delta m_{(k)}/2)}} \Delta u_{(k\pm)}, & k = 1, 2. \end{aligned}$$

Наличие погранслоиных функций сильно усложняет построение точного решения разностной задачи взаимодействия звука с границей веществ. Соответствующие формулы здесь не приводятся ввиду их сложности. Ограничимся рассмотрением сеток, согласованных по акустической толщине: $\Delta m_{(1)}/a_1 = \Delta m_{(2)}/a_2$. В этом случае формулы для амплитуд отраженной и падающей волн приобретают компактный вид, совпадающий с аналитическим решением дифференциальной задачи:

$$\begin{aligned} \delta u_{(1-)} &= \frac{a_{(1)} - a_{(2)}}{a_{(1)} + a_{(2)}} \delta u_{(1+)}; & \delta u_{(2+)} &= \frac{2a_{(1)}}{a_{(1)} + a_{(2)}} \delta u_{(1+)}; & \Delta u_{(1+)} &= \Delta u_{(2-)} = 0; \\ \delta p_{(1-)} &= -\frac{a_{(1)} - a_{(2)}}{a_{(1)} + a_{(2)}} \delta p_{(1+)}; & \delta p_{(2+)} &= \frac{2a_{(2)}}{a_{(1)} + a_{(2)}} \delta p_{(1+)}; & \Delta p_{(1+)} &= \Delta p_{(2-)} = 0. \end{aligned}$$

* Фазовая ошибка схемы СИАД будет иметь четвертый порядок малости тогда и только тогда, когда безразмерные коэффициенты дисперсии (в области постоянных чисел Куранта) равны $\zeta(\chi_{(k)}, \chi_{(k)}) = \zeta_{(k)} = (1 - \chi_{(k)}^2)/12\chi_{(k)}^2$, $k = 1, 2$. В узлах сетки с разными слева и справа от них числами Куранта используются более сложные конструкции эмпирического происхождения, например $\zeta(\chi_{(1)}, \chi_{(2)}) = \min(\zeta_{(1)}, \zeta_{(2)})$ [7].

Отметим, что при использовании сеток, согласованных по акустической толщине, в численном решении отсутствуют стоячие погранслойные волны вблизи контактной границы.

Приступим к конструированию разностного аналога закона сохранения акустической энергии схемы СИАД. Как уже отмечалось, в разностных схемах типа "крест" существуют различные формы данного закона с разными свойствами знакоопределенности кинетической и внутренней энергий. Рассмотрим один из таких вариантов с положительно определенной кинетической энергией. Определим плотность удельной энергии звуковой волны для комплексных сеточных функций формулой

$$E_{j+1/2}^{n+1/2} = \frac{|\delta u_j^{n+1/2}|^2 + |\delta u_{j+1}^{n+1/2}|^2}{4} + \frac{\overline{\delta p_{j+1/2}^n} \delta p_{j+1/2}^{n+1} + \delta p_{j+1/2}^n \overline{\delta p_{j+1/2}^{n+1}} + \Delta m_{j+1/2} \chi_{j+1/2}^2 (Z_j^{n+1/2} + Z_{j+1}^{n+1/2})}{2a_{j+1/2}^2}, \quad (31)$$

$$Z_j^{n+1/2} = \frac{\zeta_j}{2\Delta m_j} \left[\left(\overline{\delta p_{j+1/2}^n - \delta p_{j-1/2}^n} \right) \left(\delta p_{j+1/2}^{n+1} - \delta p_{j-1/2}^{n+1} \right) + \left(\delta p_{j+1/2}^n - \delta p_{j-1/2}^n \right) \overline{\left(\delta p_{j+1/2}^{n+1} - \delta p_{j-1/2}^{n+1} \right)} \right]. \quad (32)$$

Здесь плотность потенциальной энергии, в отличие от кинетической энергии (первое слагаемое в (31)), не является положительно определенной. Отметим, что для схемы "крест" использовалась формула (21) с прямо противоположным свойством. Выбранная аппроксимационная формула для акустической энергии (31), (32) приводит к следующему закону сохранения:

$$\frac{E_{j+1/2}^{n+1/2} - E_{j+1/2}^{n-1/2}}{\Delta t} = -\frac{Q_{j+1}^n - Q_j^n}{\Delta m_{j+1/2}},$$

$$Q_j^n = \frac{\overline{\delta P_j^n} (\delta u_j^{n+1/2} + \delta u_j^{n-1/2}) + \delta P_j^n (\overline{\delta u_j^{n+1/2} + \delta u_j^{n-1/2}}) - Y_j^n}{4}.$$

Здесь для сокращения записи введены обозначения:

$$Y_j^n = \frac{\zeta_j \Delta t}{2\Delta m_j} \left[\left(\overline{\delta p_{j+1/2}^n - \delta p_{j-1/2}^n} \right) \left(\delta p_{j-1/2}^{n+1} + \delta p_{j+1/2}^{n+1} - \delta p_{j-1/2}^{n-1} - \delta p_{j+1/2}^{n-1} \right) + \left(\delta p_{j+1/2}^n - \delta p_{j-1/2}^n \right) \overline{\left(\delta p_{j-1/2}^{n+1} + \delta p_{j+1/2}^{n+1} - \delta p_{j-1/2}^{n-1} - \delta p_{j+1/2}^{n-1} \right)} \right];$$

$$\delta P_j^n = \frac{\Delta m_{j+1/2} \left(\delta p_{j-1/2}^n + (A\delta p^n)_{j-1/2} \right) + \Delta m_{j-1/2} \left(\delta p_{j+1/2}^n + (A\delta p^n)_{j+1/2} \right)}{2\Delta m_j}.$$

Следующим шагом является определение разностных потоков энергии для каждого из трех компонентов решения (29), (30). Вычисления показывают, что экспоненциально убывающие компоненты с амплитудами $\Delta u_{(1+)}$, $\Delta u_{(2-)}$, $\Delta p_{(1+)}$, $\Delta p_{(2-)}$ дают нулевой вклад в поток энергии звуковой волны Q_j^n . Тем не менее окончательные формулы остаются очень громоздкими. По этой причине ограничимся рассмотрением сеток, согласованных по акустической толщине: $\Delta m_{(1)}/a_1 = \Delta m_{(2)}/a_2$. Из этого предположения следуют упрощающие соотношения, позволяющие для перечисленных ниже величин ввести безындексные выражения:

$$\chi_{(k)} = \chi, \quad \zeta_{(k)} = \zeta, \quad \xi_{(k)} \Delta m_{(k)} = \xi \Delta m = 2 \arcsin \left(\sqrt{\frac{-1 + \sqrt{1 + 16\zeta \sin^2(\omega \Delta t/2)}}{8\chi^2 \zeta}} \right), \quad k = 1, 2. \quad (33)$$

С учетом упрощающих соотношений (33) формулы потоков энергии звуковой волны для каждого из трех компонентов решения принимают вид

$$\begin{aligned}
 Q_{(1+)}^{(\text{СИАД})} &= \frac{a_{(1)} \cos(\omega\Delta t/2) \cos(\xi\Delta m/2)}{\sqrt{1+4\chi^2\zeta \sin^2(\xi\Delta m/2)}} |\delta u_{(1+)}|^2; \\
 Q_{(1-)}^{(\text{СИАД})} &= \frac{a_{(1)} \cos(\omega\Delta t/2) \cos(\xi\Delta m/2)}{\sqrt{1+4\chi^2\zeta \sin^2(\xi\Delta m/2)}} \left(\frac{a_{(1)} - a_{(2)}}{a_{(1)} + a_{(2)}}\right)^2 |\delta u_{(1+)}|^2 = \left(K_{(\text{отраж})}^{(\text{СИАД})}\right)^2 Q_{(1+)}^{(\text{СИАД})}; \\
 Q_{(2+)}^{(\text{СИАД})} &= \frac{a_{(1)} \cos(\omega\Delta t/2) \cos(\xi\Delta m/2)}{\sqrt{1+4\chi^2\zeta \sin^2(\xi\Delta m/2)}} \frac{4a_{(1)}a_{(2)}}{(a_{(1)} - a_{(2)})^2} |\delta u_{(1+)}|^2 = \left(K_{(\text{прох})}^{(\text{СИАД})}\right)^2 Q_{(1+)}^{(\text{СИАД})}; \\
 \left(K_{(\text{отраж})}^{(\text{СИАД})}\right)^2 &= \left(\frac{a_{(1)} - a_{(2)}}{a_{(1)} + a_{(2)}}\right)^2; \quad \left(K_{(\text{прох})}^{(\text{СИАД})}\right)^2 = \frac{4a_{(1)}a_{(2)}}{(a_{(1)} - a_{(2)})^2}.
 \end{aligned}$$

Таким образом, при использовании сеток, согласованных по акустической толщине, разностные коэффициенты отражения и прохождения звука схемы СИАД совпадают с соответствующими коэффициентами дифференциальной задачи.

4. Коэффициенты отражения и прохождения звука на границе двух разных веществ в разностных схемах одномерной газовой динамики в переменных Лагранжа на неразнесенных пространственных сетках (схема КАБАРЕ и схема Годунова)

Схема КАБАРЕ принадлежит к классу компактных схем с пространственным расщеплением временной производной [8]. Ее отличительной особенностью является наличие двух наборов переменных — консервативных и потоковых. Дублирование переменных позволяет аппроксимировать как законы сохранения, так и уравнения газовой динамики в характеристической форме. Для обеспечения монотонности сеточных функций используется процедура нелинейной коррекции потоков.

Схема КАБАРЕ (балансно-характеристическая схема [9]) для линеаризованных уравнений акустики (все вычисления проведены в отсутствие искусственных вязкостей и иных искусственных диссипативных операторов) имеет вид

$$\frac{\delta p_{j+1/2}^{n+1} - p_{j+1/2}^n}{\Delta t} = -a_{j+1/2}^2 \frac{\delta U_{j+1}^{n+1/2} - \delta U_j^{n+1/2}}{\Delta m_{j+1/2}}; \quad \frac{\delta u_{j+1/2}^{n+1} - \delta u_{j+1/2}^n}{\Delta t} = -\frac{\delta P_{j+1}^{n+1/2} - \delta P_j^{n+1/2}}{\Delta m_{j+1/2}}. \quad (34)$$

Здесь $\delta U_j^{n+1/2} = 0,5 (\delta U_j^{n+1} + \delta U_j^n)$; $\delta P_j^{n+1/2} = 0,5 (\delta P_j^{n+1} + \delta P_j^n)$. Расчет потоковых переменных δU_j^n , δP_j^n осуществляется с использованием разностных уравнений, аппроксимирующих характеристические уравнения для инвариантов Римана с помощью схемы КАБАРЕ [9]:

$$(1 + \sigma) \left(\delta U_j^{n+1} + \frac{\delta P_j^{n+1}}{a_{j-1/2}} \right) = 2 \left(\delta u_{j-1/2}^{n+1/2} + \frac{\delta p_{j-1/2}^{n+1/2}}{a_{j-1/2}} \right) - (1 - \sigma) \left(\delta U_j^n + \frac{\delta P_j^n}{a_{j-1/2}} \right); \quad (35)$$

$$(1 + \sigma) \left(\delta U_j^{n+1} - \frac{\delta P_j^{n+1}}{a_{j+1/2}} \right) = 2 \left(\delta u_{j+1/2}^{n+1/2} - \frac{\delta p_{j+1/2}^{n+1/2}}{a_{j+1/2}} \right) - (1 - \sigma) \left(\delta U_{j+1}^n - \frac{\delta P_{j+1}^n}{a_{j+1/2}} \right). \quad (36)$$

Здесь параметр σ изменяется в интервале $0 \leq \sigma \leq 1$. Значению $\sigma = 0$ соответствует схема КАБАРЕ в стандартном представлении. Дополнительная схемная диссипация возникает при увеличении параметра σ . При $\sigma = 1$ получаем схему, совпадающую в линейном приближении со схемой Годунова первого порядка [1]. Из однопараметрического семейства схем выберем для рассмотрения эти два предельных варианта.

Исследование разностных законов прохождения и отражения звуковых волн удобнее проводить для трехслойного представления схемы КАБАРЕ, записанного относительно потоковых переменных. Для такого представления требуется исключить из исходных уравнений (34) консервативные

переменные. Объектом дальнейшего исследования будет следующая трехслойная разностная схема для потоковых переменных:

$$\begin{aligned} \delta U_{j+1}^{n+1} + \delta U_j^{n+1} - \delta U_{j+1}^{n-1} - \delta U_j^{n-1} &= \\ &= - \frac{\delta P_{j+1}^{n+1} - \delta P_j^{n+1} - (2 - 4\chi_{j+1/2}) (\delta P_{j+1}^{n-1} - \delta P_j^{n-1}) + \delta P_{j+1}^{n-1} - \delta P_j^{n-1}}{a_{j+1/2}}; \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \delta U_{j+1}^{n+1} - \delta U_j^{n+1} - (2 - 4\chi_{j+1/2}) (\delta U_{j+1}^n - \delta U_j^n) + \delta U_{j+1}^{n-1} - \delta U_j^{n-1} &= \\ &= - \frac{\delta P_{j+1}^{n+1} + \delta P_j^{n+1} - \delta P_{j+1}^{n-1} - \delta P_j^{n-1}}{a_{j+1/2}}. \end{aligned} \quad (38)$$

Представленные в работе [14] расчеты распространения монохроматической волны на однородных и сильно неоднородных сетках, а также расчеты взаимодействия волны с контактным разрывом показали преимущества схемы КАБАРЕ по сравнению со схемами, использующими центральные конечно-разностные аппроксимации.

Представляет интерес вычисление разностных коэффициентов отражения и прохождения звука для данной схемы. Схема КАБАРЕ имеет компактный шаблон, и по этой причине структура решения разностных уравнений совпадает с соответствующей структурой схемы "крест":

$$\begin{aligned} \delta P_j^n &= \begin{cases} \delta P_{(1+)} e^{i(\omega n \Delta t - j \xi_{(1)} \Delta m_1)} + \delta P_{(1-)} e^{i(\omega n \Delta t + j \xi_{(1)} \Delta m_1)}, & j \leq 0; \\ \delta P_{(2+)} e^{i(\omega n \Delta t - j \xi_{(2)} \Delta m_2)}, & j \geq 0; \end{cases} \\ \delta U_j^n &= \begin{cases} \delta U_{(1+)} e^{i(\omega n \Delta t - j \xi_{(1)} \Delta m_1)} + \delta U_{(1-)} e^{i(\omega n \Delta t + j \xi_{(1)} \Delta m_1)}, & j \leq 0; \\ \delta U_{(2+)} e^{i(\omega n \Delta t - j \xi_{(2)} \Delta m_2)}, & j \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Процедура вычисления разностных коэффициентов отражения и прохождения звука описана в разд. 2.

Связь между амплитудами давления и скорости и дисперсионные соотношения имеют вид

$$\delta P_{(k\pm)} = \pm a_{(k)} \delta U_{(k\pm)}; \quad \frac{\sin(\omega \Delta t)}{\sin(\xi_{(k)} \Delta m_k / 2)} = \frac{2\chi_{(k)} + \cos(\omega \Delta t) - 1}{\cos(\xi_{(k)} \Delta m_k / 2)}, \quad k = 1, 2. \quad (39)$$

Из дисперсионного соотношения (39) следует, что для значений коэффициента Куранта $\chi_{(k)} = 0,5$ и $\chi_{(k)} = 1$ дисперсия отсутствует [9].

Для схемы КАБАРЕ значения амплитуд отраженной и проходящей волн (для любых значений чисел Куранта) не зависят от условий согласования сетки на контактной границе и в точности равны их значениям для дифференциальных уравнений акустики:

$$\begin{aligned} \delta U_{(1-)} &= \frac{a_{(1)} - a_{(2)}}{a_{(1)} + a_{(2)}} \delta U_{(1+)}; & \delta U_{(2+)} &= \frac{2a_{(1)}}{a_{(1)} + a_{(2)}} \delta U_{(1+)}; \\ \delta P_{(1-)} &= - \frac{a_{(1)} - a_{(2)}}{a_{(1)} + a_{(2)}} \delta P_{(1+)}; & \delta P_{(2+)} &= \frac{2a_{(2)}}{a_{(1)} + a_{(2)}} \delta P_{(1+)}. \end{aligned}$$

Отличительной особенностью схемы КАБАРЕ является ее трехслойность. Здесь также, как и для схем "крест" и СИАД, можно различными способами определить плотность энергии звуковых возмущений на пространственно-временной сетке. В [14] в качестве энергии акустических возмущений выбрана линейная комбинация положительно определенных квадратичных форм от инвариантов Римана.

Следствием разностных уравнений (34) является закон сохранения энергии звуковых возмущений

$$E_{j+1/2}^{n+1} - E_{j+1/2}^n = - \frac{\Delta t}{m_{j+1/2}} \left(Q_{j+1}^{n+1/2} - Q_j^{n+1/2} \right),$$

в котором акустическая энергия определена формулой

$$E_{j+1/2}^n = \frac{\delta p_{j+1/2}^n \overline{\delta p_{j+1/2}^n}}{2a_{j+1/2}^2} + \frac{\chi_{j+1/2} (1 - \chi_{j+1/2}) (\delta P_{j+1}^n - \delta P_j^n) \overline{(\delta P_{j+1}^n - \delta P_j^n)}}{8a_{j+1/2}^2} +$$

$$+ \frac{\delta u_{j+1/2}^n \overline{\delta u_{j+1/2}^n}}{2} + \frac{\chi_{j+1/2} (1 - \chi_{j+1/2}) (\delta U_{j+1}^n - \delta U_j^n) \overline{(\delta U_{j+1}^n - \delta U_j^n)}}{8}. \quad (40)$$

Акустической энергии (40) соответствует следующее значение потока:

$$Q_j^{n+1/2} = \frac{1}{8} \left[\overline{(\delta P_j^{n+1} + \delta P_j^n)} (\delta U_j^{n+1} + \delta U_j^n) + (\delta P_j^{n+1} + \delta P_j^n) \overline{(\delta U_j^{n+1} + \delta U_j^n)} \right].$$

Значения разностных потоков энергии для трех компонентов решения равны

$$Q_{(1+)}^{(\text{КАБАРЕ})} = (\cos(\omega \Delta t / 2))^2 a_{(1)} |\delta U_{(1+)}|^2;$$

$$Q_{(1-)}^{(\text{КАБАРЕ})} = (\cos(\omega \Delta t / 2))^2 a_{(1)} \left(\frac{a_{(1)} - a_{(2)}}{a_{(1)} + a_{(2)}} \right)^2 |\delta U_{(1+)}|^2 = \left(K_{(\text{отраж})}^{(\text{КАБАРЕ})} \right)^2 Q_{(1+)}^{(\text{КАБАРЕ})};$$

$$Q_{(2+)}^{(\text{КАБАРЕ})} = (\cos(\omega \Delta t / 2))^2 a_{(2)} \left(\frac{2a_{(1)}}{a_{(1)} + a_{(2)}} \right)^2 |\delta U_{(1+)}|^2 = \left(K_{(\text{прох})}^{(\text{КАБАРЕ})} \right)^2 Q_{(1+)}^{(\text{КАБАРЕ})}.$$

Отсюда получаем, что для схемы КАБАРЕ разностные коэффициенты отражения и прохождения равны

$$K_{(\text{отраж})}^{(\text{КАБАРЕ})} = \frac{a_{(1)} - a_{(2)}}{a_{(1)} + a_{(2)}}; \quad K_{(\text{прох})}^{(\text{КАБАРЕ})} = \frac{2\sqrt{a_{(1)}a_{(2)}}}{a_{(1)} + a_{(2)}},$$

они не зависят от способа согласования сетки и совпадают с соответствующими коэффициентами дифференциальной задачи.

Аналогичные вычисления были проведены для схемы Годунова (уравнения (34)–(36) для $\sigma = 1$). В этом случае отношения потоков акустической энергии отражения и прохождения равны произведению двух сомножителей. Один сомножитель не зависит от номеров узлов сетки и условий согласования, его естественно назвать разностным коэффициентом отражения или прохождения, а другой сомножитель, определяющий затухание в зависимости от пройденного волной пути, можно назвать коэффициентом затухания, или диссипации. Выяснилось, что так определенные разностные коэффициенты отражения и прохождения звука для схемы Годунова всегда равны соответствующим коэффициентам дифференциальной задачи.

Это утверждение в каком-то смысле противоречит результатам С. К. Годунова, согласно которым для улучшения точности схемы требуется согласование сетки по акустической толщине. В статье Годунова [1] рассмотрена задача о формировании в разностном решении линейных профилей давления и скорости вблизи границы раздела двух сред. Уменьшение точности расчетов проявлялось в том, что экстраполяция сеточных функций на контактную границу из левого и правого веществ приводила к разным значениям. Указанный эффект исчезал, если сетка была согласована по акустической толщине. Разность двух этих экстраполяций трактуется в [1] как мера погрешности. Эта мера погрешности отражает совсем другие свойства решений, чем погрешности коэффициентов отражения и прохождения звука, что снимает противоречие.

Рассмотрим с этой точки зрения поведение сеточных функций вблизи контактной границы в рассмотренных выше решениях линейных разностных уравнений для схем КАБАРЕ и Годунова. Для анализа экстраполяции на контактную границу консервативных переменных из левой и правой областей используются полученное решение разностных уравнений для потоковых переменных и соотношения (37), (38), выражающие связь двух типов переменных. Вычисления показывают, что относительная ошибка консервативных величин на границе двух веществ (относительный аппроксимационный скачок возмущений давления и возмущений скорости) прямо пропорциональна величине

$$\varepsilon^{(\text{КАБАРЕ})} = \cos(\omega\Delta t/2 - \xi_{(2)}\Delta m_{(2)}/2) - \cos(\omega\Delta t/2 - \xi_{(1)}\Delta m_{(1)}/2).$$

С использованием дисперсионного уравнения это выражение для длинноволновых возмущений преобразуется к виду

$$\varepsilon^{(\text{КАБАРЕ})} = \frac{\omega^2}{8} \left[\left(\frac{\Delta m_{(1)}}{a_{(1)}} \right)^2 - \left(\frac{\Delta m_{(2)}}{a_{(2)}} \right)^2 \right] + O((\omega\Delta t)^4).$$

Хотя в разностной схеме КАБАРЕ разностные коэффициенты отражения и прохождения звуковых волн равны точным значениям при любом отношении размеров ячеек сетки, разностное решение, описывающее взаимодействие звуковой волны с границей разных веществ, содержит ошибки второго порядка малости, главные члены которых прямо пропорциональны разности акустических толщин ячеек.

Аналогичные вычисления для схемы Годунова дают следующую относительную ошибку консервативных величин на границе двух веществ:

$$\varepsilon^{(\text{Годунов})} = \sqrt{\frac{e^{i\omega\Delta t} - 1 + \chi_{(1)}}{e^{i\omega\Delta t} - 1 + \chi_{(2)}} \cdot \frac{\chi_{(2)}}{\chi_{(1)}}} - 1 = \frac{i\omega}{2} \left(\frac{\Delta m_{(1)}}{c_1\rho_1} - \frac{\Delta m_{(2)}}{c_2\rho_2} \right) + O((\omega\Delta t)^2).$$

В разностной схеме Годунова разностные коэффициенты отражения и прохождения звуковых волн равны точным значениям при любом отношении размеров ячеек сетки, однако разностное решение, описывающее взаимодействие звуковой волны с границей разных веществ, содержит другие ошибки первого порядка малости, главные члены которых прямо пропорциональны разности акустических толщин ячеек.

Таким образом, и в схеме КАБАРЕ, и в схеме Годунова для улучшения точности следует согласовывать сетку в разных веществах по акустической толщине ячеек.

5. Влияние способа согласования сетки на точность счета задачи прохождения слабой ударной волны по многослойной периодической среде

Примером, ярко демонстрирующим роль правильного согласования сетки на границах разных веществ, является задача взаимодействия слабых ударных волн с многослойной периодической средой, образованной двумя веществами — вольфрамом и парафином. Постановка задачи взята из работы В. Ф. Куропатенко [15]. Геометрия — одномерная плоская, $0 \leq x \leq X_{\text{правое}}$, с одинаковой толщиной вольфрама и парафина $L_1 = L_2 = 0,05$ на каждом периоде толщиной $L = 0,1$. На левой лагранжевой границе задана скорость $u|_{X_{\text{левое}}} = u_{\text{гран}} = 10^{-4}$, правая граница неподвижна. Уравнения состояния для обоих веществ имеют одинаковый вид:

$$p = P_k(\rho, E) = (\gamma_k - 1)\rho E + \frac{\rho_{0k}(c_{0k})^2}{n_k} \left[\frac{n_k - \gamma_k}{n_k - 1} \left(\frac{\rho}{\rho_{0k}} \right)^{n_k} + \frac{(\gamma_k - 1)n_k}{n_k - 1} \frac{\rho}{\rho_{0k}} - \gamma_k \right]$$

с параметрами из таблицы.

Подробно свойства решений этой задачи рассмотрены в [16]. Структура газодинамических профилей в такой задаче формируется многократными отражениями слабых ударных волн и очень коротких волн разрежения. В этом процессе происходит очень быстрое размножение числа скачков,

Параметры уравнений состояния и начальные данные

k	ρ_{0k}	c_{0k}	n_k	γ_k	$\rho^{\text{нач}}$	$P^{\text{нач}}$
1	19,35	4,051	3,6	2,67	19,2	10^{-4}
2	0,93	3,357	3,5	1,66666	0,91	10^{-4}

приходящихся на один период. После прохождения основной волной тридцати и более периодов профили давления и скорости приобретают характерную (для волнового уравнения с дисперсией) структуру с крупномасштабными осцилляциями большой амплитуды с длиной волны порядка нескольких периодов после фронта основной волны и с экспоненциально затухающим профилем на фронте основной волны (рис. 2; для иллюстрации периода на рис. 2, *a* схематически показан профиль плотности).

Для вычисления норм погрешности проведены расчеты на сходимость на сетках, согласованных по акустической толщине ($N = A20, A40, A100, A200, A500$ и $A1000$), и на сетках, равномерных по массе ($N = M40, M100, M200, M500$). Здесь N — число ячеек на одном периоде, а буквы (A, M) указывают тип согласования сетки. Выбрано два контрольных момента времени: $t_{\text{кон}} = 2$ и $t_{\text{кон}} = 30$. В качестве эталона на момент времени $t_{\text{кон}} = 2$ использовалось решение на сетке $N = A1000$, на момент времени $t_{\text{кон}} = 30$ за эталон взято решение на сетке $N = A200$. В этом случае для вычисления норм погрешности использовались расчеты на сетках $N = A20, A40, A100, M40, M100$.

Крупномасштабное поведение численных решений с разными способами согласования сетки в целом одинаковое. Но при рассмотрении деталей течения оказывается, что результаты расчетов с сеткой, равномерной по массе, сильно отличаются от результатов эталонного расчета.

Для объективной оценки точности расчетов требуется сравнение норм погрешностей. Интегральные сеточные нормы погрешностей скорости и давления типа L_1 вычислялись после предварительной интерполяции сравниваемых численных решений (в том числе и эталонов) на самую грубую сетку $N = A20$. Полученные таким способом нормы погрешностей в зависимости от сетки в расчетах по схемам СИАД и КАБАРЕ приведены на рис. 3, 4. Из рис. 3, *a*, 4, *a* видно, что погрешности расчета на сетке M200 больше, чем на сетке A40, а погрешности на сетке M500 в несколько раз больше, чем на сетке A100. Из рис. 3, *b*, 4, *b* следует, что на сетке M100 погрешности в несколько раз больше, чем на сетке A20. В целом различие в расчетах по схемам СИАД и КАБАРЕ незначительное.

Следует учесть, что в расчетах с одинаковым числом ячеек на периоде шаг по времени на равномерных по массе сетках более чем в 2 раза меньше, чем на сетках, согласованных по акустической толщине. Это еще больше ухудшает соотношение между точностью и временем счета на равномерных по массе сетках.

Для получения близких значений норм погрешностей на равномерных по массе сетках надо брать в 5–10 раз больше ячеек, чем в расчетах на сетке, согласованной по акустической толщине. Время счета при этом увеличивается более чем в 30 раз.

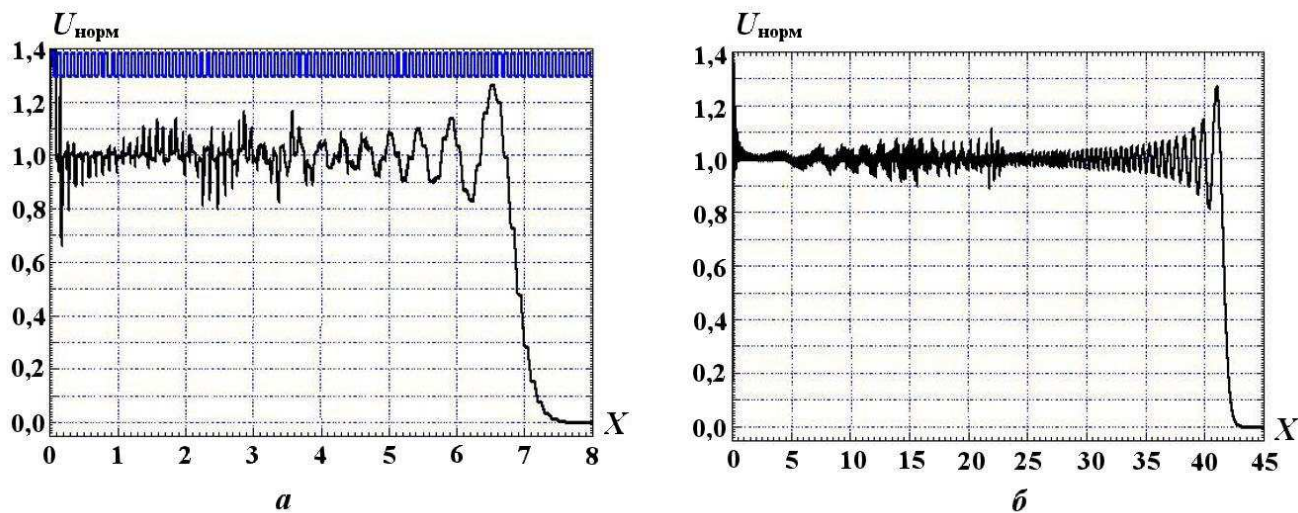


Рис. 2. Профиль нормированной скорости $U_{\text{норм}} = u/u_{\text{гран}}$: *a* — $t = 5$; *b* — $t = 30$

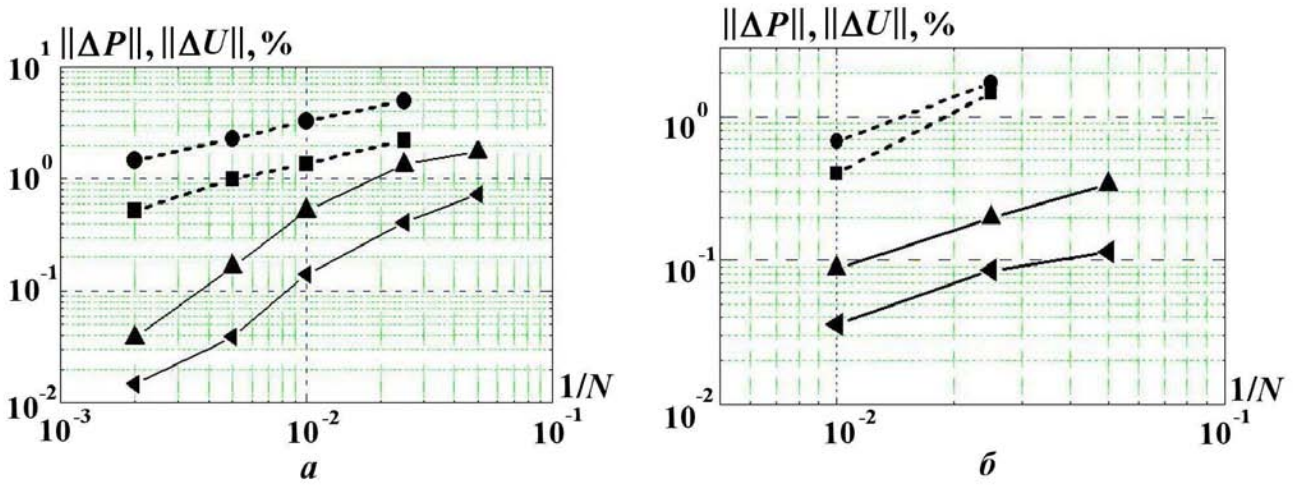


Рис. 3. Зависимость норм погрешностей от сетки (N — число ячеек на одном периоде) в расчетах по схеме СИАД: $a - t = 2$; $b - t = 30$; \blacktriangle — $\|\Delta P^A\|_{L_1(A_{20})}$; \blacktriangleleft — $\|\Delta U^A\|_{L_1(A_{20})}$; \bullet — $\|\Delta P^M\|_{L_1(A_{20})}$; \blacksquare — $\|\Delta U^M\|_{L_1(A_{20})}$

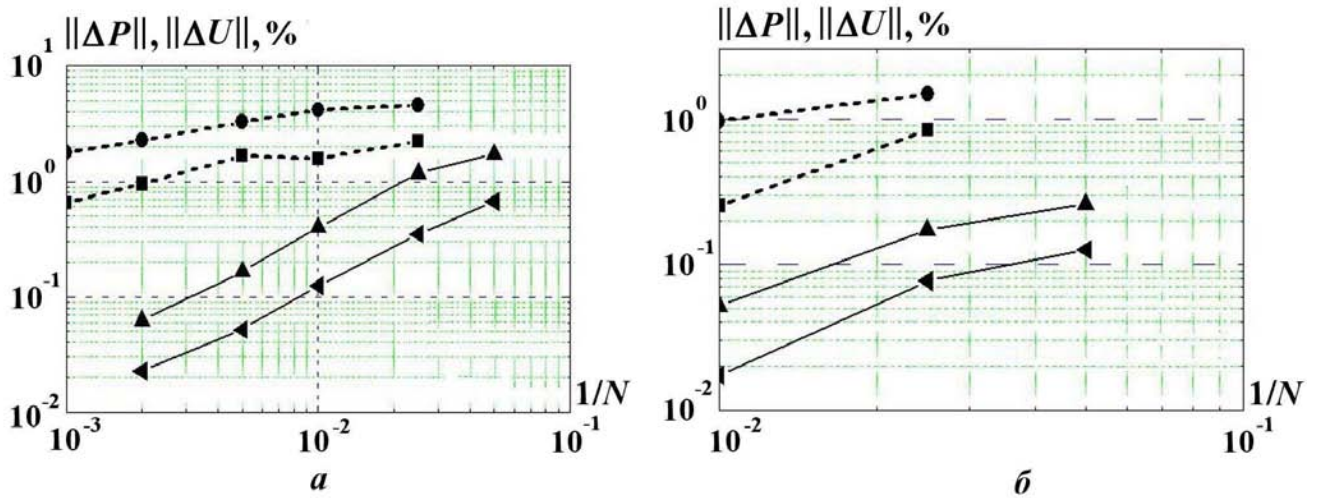


Рис. 4. Зависимость норм погрешностей от сетки (N — число ячеек на одном периоде) в расчетах по схеме КАБАРЕ: $a - t = 2$; $b - t = 30$; \blacktriangle — $\|\Delta P^A\|_{L_1(A_{20})}$; \blacktriangleleft — $\|\Delta U^A\|_{L_1(A_{20})}$; \bullet — $\|\Delta P^M\|_{L_1(A_{20})}$; \blacksquare — $\|\Delta U^M\|_{L_1(A_{20})}$

Заключение

Вычислены разностные коэффициенты отражения и прохождения звуковых волн при их взаимодействии с контактной границей для четырех разностных схем: двух схем разного типа на разнесенных пространственных сетках (схема "крест" и СИАД) и двух схем на неразнесенных пространственных сетках (схема КАБАРЕ второго порядка аппроксимации и схема Годунова первого порядка аппроксимации).

В разностных схемах на разнесенных пространственных сетках разностные коэффициенты отражения и прохождения равны точным значениям коэффициентов отражения и прохождения тогда и только тогда, когда сетка согласована по акустической толщине ячеек.

В схемах КАБАРЕ и Годунова для системы уравнений одномерной линейной акустики отсутствует зависимость коэффициентов отражения и прохождения от способа согласования сетки.

В схемах КАБАРЕ и Годунова на границе разных веществ скачок экстраполяции консервативных переменных пропорционален разности акустических толщин ячеек. Для схемы КАБАРЕ этот скачок имеет второй порядок малости, а для схемы Годунова — первый порядок малости. Эти скачки равны нулю тогда и только тогда, когда сетка согласована по акустической толщине. Расчеты прохождения слабой ударной волны по периодической многослойной среде показали, что при использовании сеток, согласованных по акустической толщине, точность расчетов может быть увеличена в несколько раз, а время счета при сохранении заданной точности уменьшено более чем на порядок.

Список литературы

1. Годунов С. К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Математический сборник. 1959. Т. 47, № 3. С. 271—306.
2. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978.
3. Куропатенко В. Ф. О разностных методах для уравнений гидродинамики // Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР. 1966. Т. 74. С. 107—137.
4. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. М.: Физматлит, 1971.
5. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. М.: Мир, 1972.
6. Бондаренко Ю. А. Консервативные разностные схемы типа "крест" с положительно определенной кинетической энергией для лагранжевой газодинамики // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1995. Вып. 4. С. 19—23.
7. Бондаренко Ю. А. Порядок аппроксимации, порядок численной сходимости и экономичность счета многомерной газовой динамики в переменных Эйлера на примере расчетов задачи "blast waves" // Там же. 2004. Вып. 4. С. 51—61.
8. Головизнин В. М., Самарский А. А. Разностная аппроксимация конвективного переноса с пространственным расщеплением временной производной // Математическое моделирование. 1998. Т. 10, № 1. С. 88—100.
9. Головизнин В. М., Зайцев М. А., Карабасов С. А., Короткин И. А. Новые алгоритмы вычислительной гидродинамики для многопроцессорных вычислительных комплексов. М.: Изд-во МГУ, 2013.
10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1988.
11. Исакович М. А. Общая акустика. М.: Наука, 1973.
12. Троцкий В. Е. О дивергентности схемы "крест" численного решения уравнений газовой динамики // Числ. методы мех. спл. среды. 1970. Т. 1, № 5. С. 87—93.
13. Стенин А. М. Явная полностью консервативная вариационная разностная схема для решения системы уравнений газовой динамики в переменных Лагранжа // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2012. Вып. 1. С. 3—16.
14. Головизнин В. М., Карабасов С. А., Козубская Т. К., Максимов Н. В. Схема КАБАРЕ для численного решения задач аэроакустики: обобщение на линеаризованные уравнения Эйлера в одномерном случае // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 2009. Т. 49, № 12. С. 2265—2280.
15. Куропатенко В. Ф. Скорость звука в многокомпонентной смеси // Докл. АН. 2012. Т. 446, № 4. С. 401—403.

16. *Бондаренко Ю. А., Софронов В. Н.* Прямое одномерное газодинамическое моделирование распространения волн в периодических двухслойных средах и волновые уравнения с дисперсией // XV Межд. конф. "Супервычисления и математическое моделирование". г. Саров, 13—17 октября 2014 г.

Статья поступила в редакцию 12.12.14.

INTERACTION OF SOUND WITH MATERIAL-MATERIAL INTERFACE IN DIFFERENCE SCHEMES OF 1D LAGRANGIAN GAS DYNAMICS. ACCURACY DEPENDENCE ON THE GRID ADJUSTMENT METHOD / Yu. A. Bondarenko, V. N. Sofronov (FSUE "RFNC-VNIIEF", Sarov, Nizhny Novgorod Region).

Solutions of linear difference equations (without viscosity) describing the interaction of sound with material-material interface were built for several gas-dynamic difference schemes. It has been shown that the accuracy improves significantly when the grid is adjusted over the acoustic thickness. The effect of the accuracy improvement shows itself superbly in the problem about weak shock passage through the periodical stratified medium (when the mass-equal grids and the acoustic-thickness-adjusted grids are matched).

Keywords: weak perturbations, dispersion equations, sound reflection coefficients, difference law of acoustic energy conservation, uneven grids, rules of grid adjustment on the material-material interface.
