

УДК 519.6

## ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ АЛГОРИТМА SIMPLE ДЛЯ РАСЧЕТА СЖИМАЕМЫХ ТЕЧЕНИЙ

Н. В. Тарасова, А. С. Козелков, Д. П. Мелешкина,  
С. В. Лашкин, О. В. Денисова, М. А. Сизова  
(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области)

Данная работа посвящена описанию модификации алгоритма SIMPLE для случая сжимаемых течений и исследованию применимости реализованного алгоритма для расчета трансзвуковых сжимаемых течений в рамках пакета программ ЛОГОС. На примере задач обтекания крылового профиля и течения внутри диффузора демонстрируются возможности реализованного алгоритма по достижению приемлемой точности и скорости сходимости при использовании различных схем дискретизации конвективного слагаемого и изменении других счетных параметров. Полученные результаты сравниваются с данными известных экспериментальных тестов.

*Ключевые слова:* алгоритм SIMPLE, сжимаемые трансзвуковые течения, схемы дискретизации конвективного слагаемого, пакет программ ЛОГОС.

### Введение

Проблема построения универсального алгоритма для численного решения системы уравнений Навье—Стокса, пригодного для расчета течений при произвольных значениях числа Маха, хорошо известна. Для решения этой проблемы было предложено несколько подходов, которые можно условно разделить на две группы. К первой группе относятся методы, изначально сконструированные для расчета сжимаемых течений и основанные на решении полной системы уравнений Навье—Стокса [1–4]. Эти методы позволяют рассчитывать как дозвуковые, так и сверхзвуковые течения, однако при их использовании возникает проблема численного моделирования течений при значениях числа Маха, близких к нулю, которая решается с помощью специальных подходов. Ко второй группе относятся методы, предназначенные для решения несжимаемых течений, основанные на решении системы уравнений Навье—Стокса с расщеплением по физическим процессам и обобщенные на сжимаемый случай [5, 6].

Численное решение полной системы уравнений Навье—Стокса без расщепления при значениях числа Маха, существенно меньших единицы, сопряжено с серьезными трудностями, связанными со значительно различающимися временами конвективного переноса и распространения акустических возмущений, а также с малыми изменениями относительного давления. В этом случае ввиду жесткости системы при использовании классических методов решения полной системы уравнений Навье—Стокса резко ухудшаются свойства их сходимости и устойчивости, а некоторые методы вообще становятся непригодными. Более того, здесь практически становится невозможным использование явных схем расчета в силу неприемлемо жесткого ограничения на шаг по времени. Для решения проблемы численного моделирования *гипозвуковых* течений (число Маха много меньше единицы) на основе уравнений динамики сжимаемого газа был предложен подход, основанный на модификации коэффициентов, отвечающих за производную по времени, методом искусственной сжимаемости [3, 4]. К недостаткам метода искусственной сжимаемости можно отнести, в частности, его существенно итерационную формулировку: даже при использовании явной схемы на каждом шаге по физическому времени требуются итерации (установление по псевдовремени) для сведения баланса

массы. Выбор коэффициента искусственной сжимаемости также является нетривиальной задачей, поскольку на него накладываются определенные ограничения как сверху, так и снизу.

Методы второй группы изначально ориентированы на расчет несжимаемых течений [5, 6], в которых для нахождения поля давления, обеспечивающего выполнение уравнения непрерывности, решается специальным образом "сконструированное" уравнение Пуассона. Одним из таких методов, широко применяемых на практике, является метод SIMPLE [5]. Метод SIMPLE несложно обобщить на случай расчета сжимаемых течений [6], модифицировав имеющееся уравнение Пуассона. Модификация состоит в добавлении в уравнение Пуассона конвективного члена и дополнительного нестационарного слагаемого, возникающего из-за необходимости коррекции плотности для удовлетворения уравнения непрерывности. Таким образом, при малых значениях числа Маха преобладающее влияние оказывает диффузионный член и получается фактически исходное уравнение Пуассона. При больших значениях числа Маха преобладает конвективный член, отражающий гиперболическую природу течения. Данный метод автоматически учитывает локальную природу течения и может применяться ко всей области течения. Методы второй группы, очевидно, более экономичны по сравнению с методами первой группы, и их точность в большинстве случаев достаточна для расчета дозвуковых и транзвуковых течений.

Несмотря на активное использование метода SIMPLE на практике, широкого исследования применимости этого метода для задач с различными значениями числа Маха, по крайней мере в русскоязычной литературе, не существует, а англоязычная ограничивается отдельными комментариями по применению той или иной модификации метода для решения конкретных задач.

В данной работе представлено исследование применимости метода SIMPLE для расчета транзвуковых течений. Рассмотрены задачи моделирования внутренних течений, а также задачи внешнего обтекания, путем расчета которых определяются основные аэродинамические характеристики тел различной конфигурации. На основе анализа результатов расчетов сделан вывод о необходимости использования модификации SIMPLEC [6] с целью увеличения скорости сходимости алгоритма в условиях ощутимого изменения плотности при достаточно больших значениях числа Маха. Кроме того, приведены оптимальные значения коэффициентов релаксации. Произведен сравнительный анализ использования различных схем дискретизации конвективных потоков в рамках данного алгоритма применительно к расчету сжимаемых течений.

### Обобщение алгоритма SIMPLE на случай сжимаемых течений

Для описания несжимаемых течений используется следующая система уравнений Навье—Стокса:

$$\begin{aligned} \nabla \vec{u} &= 0; \\ \frac{\partial (\rho \vec{u})}{\partial t} + \nabla (\rho \vec{u} \vec{u}) &= -\nabla p + \nabla (\tau_\mu + \tau_t). \end{aligned}$$

Основная идея SIMPLE-подобных алгоритмов заключается в том, что неявная связь давления и скорости, имеющаяся при описании несжимаемых течений, учитывается с помощью применения некоторой итерационной процедуры решения. На первом этапе алгоритма (шаг предиктора) из уравнения сохранения импульса с использованием градиента давления с предыдущей итерации вычисляется предварительное поле скорости, которое пока не удовлетворяет уравнению непрерывности. В дискретной форме в общем виде уравнение выглядит следующим образом:

$$A_P^{u_i} u_{i,P}^{m*} + \sum_l A_l^{u_i} u_{i,l}^{m*} = Q_{u_i}^{m-1} - \left( \frac{\delta p^{m-1}}{\delta x_i} \right)_P. \quad (1)$$

Здесь  $P$  — индекс некоторого контрольного объема, а  $l$  — индексы контрольных объемов, соседних с данным;  $m$  — номер итерации;  $u_i^{m*}$  — компонента предварительного поля скоростей;  $p$  — давление;  $A_P^{u_i}$  — полученные коэффициенты линейного уравнения;  $Q_{u_i}^{m-1}$  — источниковые члены (правая часть);  $\frac{\delta}{\delta x}$  обозначает дискретизированную пространственную производную в общем виде (дискретизация может быть разной).

На следующем этапе данное поле скорости корректируется за счет корректировки поля давления (шаг корректора) таким образом, чтобы одновременно выполнялись закон сохранения импульса и закон сохранения массы:

$$p^m = p^{m-1} + p'; \quad u^m = u^{m*} + u'. \quad (2)$$

Подставив соотношения (2) в дискретизированное уравнение моментов и приняв во внимание уравнение (1), получим

$$u'_{i,P} = \tilde{u}'_{i,P} - \frac{1}{A_P^{u_i}} \left( \frac{\delta p'}{\delta x_i} \right)_P, \quad \tilde{u}'_{i,P} = - \frac{\sum_l A_l^{u_i} u'_{i,l}}{A_P^{u_i}}. \quad (3)$$

Членом  $\tilde{u}'_{i,P}$  пренебрегают. При подстановке (2) в уравнение непрерывности получается выражение

$$- \left[ \frac{\delta (\rho u'_i)}{\delta x_i} \right]_P = \left[ \frac{\delta (\rho u_i^{m*})}{\delta x_i} \right]_P,$$

или после интегрирования по объему в случае применения конечно-объемной дискретизации

$$\sum_f F_f^* + \sum_f \rho_f (\tilde{u}'_n)_f \vec{S}_f = 0,$$

где  $F_f^* = \rho_f (\tilde{u}_n^{m*})_f \vec{S}_f$  — поток массы через грань  $f$  с направляющим вектором  $\vec{S}_f$ ;  $\rho_f$  — плотность потока через грань  $f$ .

При использовании выражения (3) для коррекции скорости получается уравнение Пуассона для вычисления коррекции давления:

$$\frac{\delta}{\delta x_i} \left[ \frac{\rho}{A_P^{u_i}} \left( \frac{\delta p'}{\delta x_i} \right) \right]_P = \left[ \frac{\delta (\rho u_i^{m*})}{\delta x_i} \right]_P. \quad (4)$$

Шаги предиктора и корректора повторяются итерационно до момента достижения приемлемой точности для выполнения законов сохранения.

Этот метод можно обобщить на случай сжимаемых течений [6]. В общих чертах модификация метода состоит в том, что после стандартного первого шага алгоритма SIMPLE (шага предиктора) и получения предварительного поля скорости  $\vec{u}^{m*}$  ( $m^*$  — номер промежуточной итерации) необходимо скорректировать не только скорость, но и плотность таким образом, чтобы удовлетворялось уравнение непрерывности. В этом случае при применении конечно-объемной дискретизации поток массы корректируется [2, 6]:

$$F_f = (\rho^{m-1} + \rho')_f (\vec{u}^{m*} + \vec{u}')_f \vec{S}_f, \\ \text{или } F_f = F_f^{m*} + (\rho' \vec{u}^{m*} \vec{S})_f + (\rho^{m-1} \vec{u}' \vec{S})_f + (\rho' \vec{u}' \vec{S})_f. \quad (5)$$

Последним членом в (5), как правило, пренебрегают, так как он имеет второй порядок малости.

Третий член в правой части (5), характеризующий коррекцию скорости, выражается, как и для случая несжимаемых течений, через градиент приращения давления  $p'$ :

$$(\rho^{m-1} S u'_n)_f = -A_f \left( \frac{\delta p'}{\delta n} \right)_f.$$

Здесь  $S$  — модуль направляющего вектора грани, равный площади грани;  $n$  — индекс, обозначающий нормальную составляющую вектора;  $A_f$  — коэффициент пропорциональности, определенный на грани и зависящий от дискретизации уравнения сохранения импульсов;  $\frac{\delta}{\delta n}$  — нормальная составляющая градиента.

Второй член в правой части уравнения (5), отвечающий за коррекцию плотности и появившийся благодаря сжимаемости, также выражается через приращение давления, если использовать связь плотности и давления из уравнения состояния в адиабатическом приближении:

$$\left(\rho' u_n^{m*} S\right)_f = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_f B_f p'_f.$$

Здесь  $B_f$  — некоторый коэффициент, отражающий общую зависимость.

Тогда уравнение непрерывности со скорректированными потоками и плотностью в дискретном объеме будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{(\rho^{m-1} - \rho^\nu) \Delta V}{\Delta t} + \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\Delta V}{\Delta t} p' + \sum_f \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_f B_f p'_f - \sum_f A_f \left(\frac{\delta p'}{\delta n}\right)_f + \sum_f F_f^{m*} = 0. \quad (6)$$

Здесь верхний индекс  $\nu$  — номер предыдущего момента времени;  $\Delta V$  — объем ячейки;  $\Delta t$  — шаг по времени.

Уравнение (6) для сжимаемых течений отличается от аналогичного уравнения относительно приращения давления для несжимаемых течений главным образом тем, что оно по сути своей гиперболическое и присутствие конвективного члена делает его решение единственным. Это, в свою очередь, отражается на задании граничных условий и трактовке роли давления во всей системе. Расчет энергии также оказывает влияние на всю систему в целом.

Опыт проведения расчетов течений со значениями числа Маха порядка единицы с использованием данной модификации метода SIMPLE показал, что необходимо выбирать достаточно малые коэффициенты релаксации для получения устойчивого решения. Однако это приводит к медленной скорости сходимости при вычислении поля давления. Для исправления данного недостатка предложено несколько уточненных вариантов алгоритма SIMPLE [6]. Наиболее предпочтительным из них по соотношению скорости сходимости и численных затрат является метод SIMPLEC [6].

Эта разновидность метода SIMPLE менее груба при оценке приращения скорости на шаге корректора. В алгоритме SIMPLE при получении уравнения Пуассона относительно приращения давления использовалось допущение: пренебрегали членом  $\left[\frac{\delta(\rho \tilde{u}'_i)}{\delta x_i}\right]_P$  ( $i$  — индекс координатных осей, по повторяющимся индексам выполняется суммирование), потому что  $\tilde{u}'_P = -\sum_l A_l^u \tilde{u}'_l / A_P^u$  (здесь  $A_l^u$  — недиагональные элементы матрицы линейных уравнений относительно скорости на этапе предиктора;  $A_P^u$  — диагональный член) неизвестно на данном этапе счета. Будет более точно, если использовать некоторое приближение этого члена. Например, приращение скорости в каждом контрольном объеме можно записать как средневзвешенное приращения скоростей из соседних контрольных объемов:

$$\tilde{u}'_P = -\frac{\sum_l A_l^u \tilde{u}'_l}{\sum_l A_l^u} \implies \tilde{u}'_P = -\tilde{u}'_P \frac{\sum_l A_l^u}{A_P^u}.$$

При использовании данного выражения для  $\tilde{u}'_P$  уравнение (4) изменится в части коэффициента при градиенте приращения давления:

$$\frac{\delta}{\delta x_i} \left[ \frac{\rho}{A_P^{u_i}} \left( \frac{\delta p'}{\delta x_i} \right) \right]_P \mapsto \frac{\delta}{\delta x_i} \left[ \frac{\rho}{A_P^{u_i} + \sum_l A_l^{u_i}} \left( \frac{\delta p'}{\delta x_i} \right) \right]_P.$$

Заметим, что  $A_P^{u_i} \neq -\sum_l A_l^{u_i}$ , потому что к матрице коэффициентов системы линейных уравнений относительно скоростей на данный момент уже была применена релаксация с коэффициентом  $\alpha_u$ .

Указанные изменения можно расценивать как некоторую дополнительную релаксацию матрицы давления с коэффициентом релаксации  $\alpha_p = 1 - \alpha_u$ . Это улучшает обусловленность матрицы и ускоряет сходимость.

Для ускорения сходимости и повышения точности численного решения при трансзвуковых сжимаемых течениях необходимо тщательно подходить к выбору схемы дискретизации конвективных потоков [7]. Существующие схемы отличаются способом реконструкции значения искомой величины на грань и, следовательно, имеют разные диссипативные свойства. Схемы первого порядка сохраняют ограниченность (отсутствие сильных осцилляций) решения, но являются более диссипативными, что зачастую приводит к чрезмерному размыванию фронта ударной волны. Схемы второго порядка точности имеют меньшую диссипативную ошибку, но могут порождать нефизичные осцилляции [7]. Исследование диссипативных свойств различных схем дискретизации для расчета гидродинамических турбулентных течений, включая вихреразрешающие подходы, можно найти, например, в [8, 9]. В данной работе для исследования будем использовать классические схемы дискретизации: противопоточную, центрально-разностного дифференцирования и гибридную.

При применении центрально-разностных и гибридных схем возможно возникновение сильных осцилляций, приводящих к развитию неустойчивости и, как следствие, к расходимости итерационного процесса, особенно на начальном этапе расчетов в условиях отсутствия устойчивого решения. Одним из способов подавления осцилляций является введение схем типа TVD [10], в которых используются ограничители градиентов. Такой подход представляет собой способ уменьшения порядка точности схемы до первого в областях разрывов решения. Однако в результате решение может получиться недостаточно точным и обладать большой численной диффузией в данных областях. Альтернативой в таком случае является использование ограничителей лишь в начале итерационного процесса. При выполнении некоторого критерия (например устойчивого падения невязки решения), обозначающего достижение некоторого устойчивого состояния итерационного процесса, необходимо перейти на схему второго порядка точности уже без ограничителей. Данная стратегия оказалась успешной и была опробована на серии тестовых задач. В настоящей работе использовался ограничитель из [11] (Venkatarishnan).

Исключить осцилляции можно также, применяя на начальном этапе расчета противопоточную схему первого порядка точности с последующим переключением на схему второго порядка точности при достижении того же самого критерия.

## Численные эксперименты

В настоящей работе все расчеты проводились в рамках пакета программ ЛОГОС — российского программного продукта инженерного анализа, предназначенного для решения сопряженных трехмерных задач конвективного теплопереноса, аэродинамики и гидродинамики на *параллельных* ЭВМ [12, 13]. В этом разделе рассматриваются некоторые известные задачи, для которых имеются достоверные экспериментальные данные и которые используются для калибровки численных методов ведущими коллективами, разрабатывающими численные методы и программное обеспечение.

**Задача 1. Расчет аэродинамических характеристик крылового профиля RAЕ 2822.** Рассматриваемый крыловой профиль [14] изображен на рис. 1.

В представленной модели используются блочно-структурированные сетки. Каждая расчетная сетка имеет сгущение в области образования скачка уплотнения потока. Вблизи твердых стенок построены призматические слои с коэффициентом роста не более 1,12. Толщина первой расчетной ячейки во всех сетках обеспечивает значение безразмерного расстояния до стенки  $y^+ < 1$ . Расчетная область представляет собой прямоугольный параллелепипед, размеры которого в двух направлениях ( $x, y$ ) определяются из условия обеспечения расстояния в 20 характерных длин (корневых хорд) от модели до границы расчетной области, а в направлении третьей координаты  $z$  он имеет толщину, равную 0,1 м. Для численного исследования использовались три последовательно сгущающиеся расчетные сетки с числом ячеек  $N = 52\,000; 666\,746; 791\,226$  и характерным размером ячейки в основной области скачка  $d = 0,03; 0,012; 0,0008$  м соответственно.

В расчетах рассматривались три режима с разными значениями числа Маха (табл. 1). Все расчеты выполнялись с коэффициентом релаксации  $\alpha_u = 0,95; \alpha_p = 0,001$ .

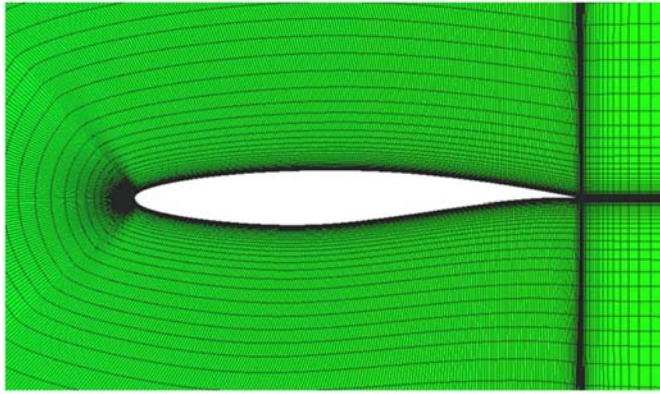


Рис. 1. Общий вид расчетной сетки задачи 1

Таблица 1

Режимы расчета задачи 1

Номер	Число Маха M	Угол атаки $\alpha, ^\circ$	Число Рейнольдса Re	Плотность $\rho_\infty, \text{кг/м}^3$	Давление $p_\infty, \text{Па}$	Молекулярная вязкость $\mu_\infty, \text{Па/с}$
1	0,725	2,92	$6,5 \cdot 10^6$	1,26	92 810	$4,5 \cdot 10^{-5}$
2	0,75	3,19	$6,2 \cdot 10^6$	1,16	84 970	$4,49 \cdot 10^{-5}$
3	0,729	2,31	$6,5 \cdot 10^6$	1,48	108 987,8	$5,34 \cdot 10^{-5}$

Сравнение результатов моделирования с экспериментальными данными проводилось для распределения коэффициента давления  $C_p$  и для интегральных характеристик — коэффициентов подъемной силы  $C_y$  и лобового сопротивления  $C_x$ .

Рассматривалось влияние расчетной сетки, модели турбулентности, схем дискретизации конвективного потока и ограничителей на конечный результат. Такие исследования проводились для одного режима — при  $M = 0,729$ . Результаты расчетов по распределению коэффициента давления приведены на рис. 2—4 (см. также цветную вкладку).

Характерной особенностью данного течения является отрыв потока за скачком уплотнения, замыкающим трансзвуковую зону, которая формируется на верхней поверхности профиля. Из рис. 2—4 видно, что скачок находится несколько выше по потоку и является менее интенсивным, чем в эксперименте.

На рис. 2 (см. также цветную вкладку) представлены результаты расчетов на сходимость на последовательности сгущающихся сеток. Расчеты проводились с  $(k-\omega)$ -моделью турбулентности (SST) [15] с применением CD-схемы дискретизации. Видно, что путем измельчения сетки в основной области, где происходит сильное изменение давления, была достигнута сеточная сходимость на двух более подробных сетках. Для дальнейших вычислений использовалась сетка с количеством ячеек 791 226 ( $d = 0,0008 \text{ м}$ ).

На рис. 3 (см. также цветную вкладку) представлены результаты расчетов по двум моделям турбулентности: Спаларта—Аллмараса (SA) [16] и  $(k-\omega)$ -модели Ментера (SST) (схема дискретизации CD).

На рис. 4 (см. также цветную вкладку) представлены результаты расчетов с применением различных схем дискретизации конвективного потока с ограничителями и без них, где UD — противопоточная схема первого порядка точности; CD — центрально-разностная схема второго порядка точности; QUICK — гибридная схема, сочетающая в себе схему UD совместно с градиентной поправкой и схему CD. Расчеты проводились с использованием  $(k-\omega)$ -модели турбулентности.

Видно, что точности противопоточной схемы и схем с ограничителями недостаточно для получения результата, приемлемо близкого к экспериментальным данным.

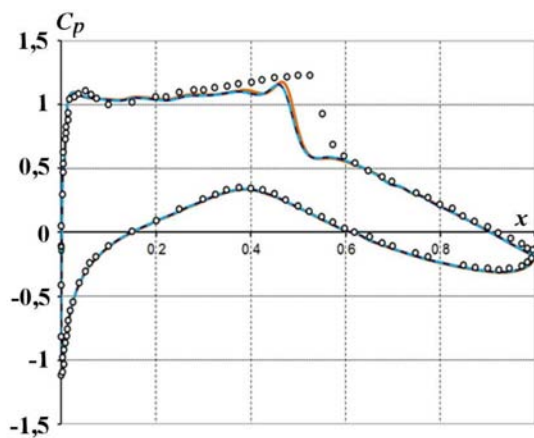


Рис. 2. Задача 1. Распределение коэффициента давления для режима с  $M = 0,729$  в расчетах на сеточную сходимость: — —  $d = 0,03$  м; — —  $d = 0,012$  м; — — —  $d = 0,0008$  м;  $\circ$  — эксперимент

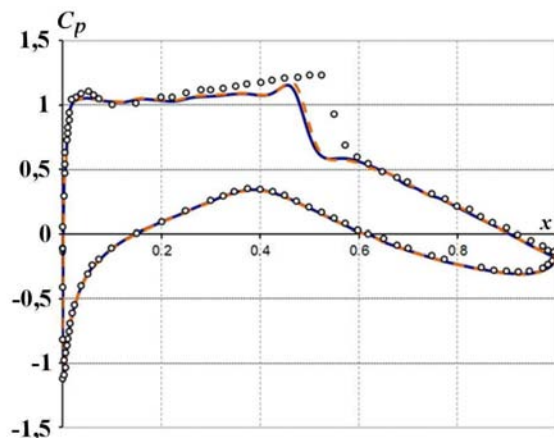


Рис. 3. Задача 1. Распределение коэффициента давления для режима с  $M = 0,729$  в расчетах с разными моделями турбулентности: — — SST; — — — SA;  $\circ$  — эксперимент

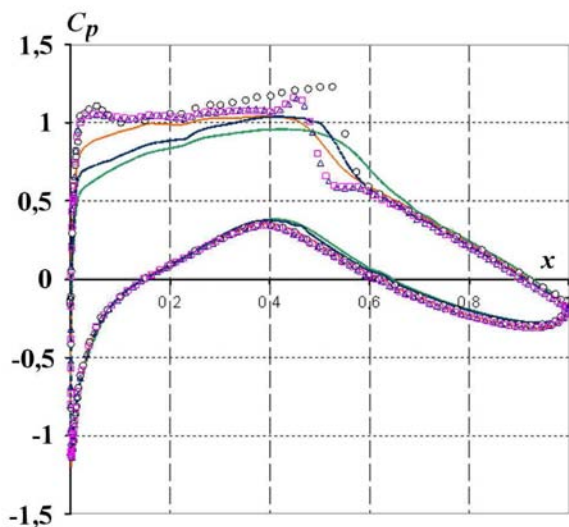


Рис. 4. Задача 1. Распределение коэффициента давления для режима с  $M = 0,729$  в расчетах с разными дифференциальными схемами: — — UD; — — UD с ограничителями;  $\Delta$  — CD; — — CD с ограничителями;  $\square$  — QUICK;  $\circ$  — эксперимент

Из представленных данных видно, что основное несовпадение полученных результатов наблюдается на верхней кромке крыла в области формирования прямого скачка уплотнения, где существенно преобладают разномасштабные значения давления и плотности. С ростом числа Маха точность описания скачка уплотнения падает, максимальная погрешность интегральных характеристик достигает 19% по  $C_x$  и 9,6% по  $C_y$ , что ограничивает использование методики определенным спектром значений числа Маха.

Проводилась серия расчетов с увеличением преобладания схем второго порядка точности при дискретизации, т. е. с увеличением коэффициента смешения ( $\gamma = 0,5; 0,7; 1$ ). По мере увеличения коэффициента смешения наблюдается приближение численных результатов к экспериментальным. Ввиду идентичности результатов на рис. 4 приводятся результаты с максимальным коэффициентом смешения ( $\gamma = 1$ ).

Разные схемы второго порядка точности дают практически одинаковый результат, однако все они плохо описывают скачок уплотнения на верхней кромке крылового профиля, что в итоге влияет на точность определения интегральных характеристик.

На рис. 5 приводятся графики распределения коэффициента давления  $C_p$  для режимов 1 и 2 ( $M = 0,725$  и  $M = 0,75$ ) с использованием  $(k-\omega)$ -модели турбулентности.

В табл. 2 приведены значения интегральных характеристик — коэффициентов подъемной силы  $C_y$  и лобового сопротивления  $C_x$  — для этих режимов расчета в сравнении с экспериментом [14].

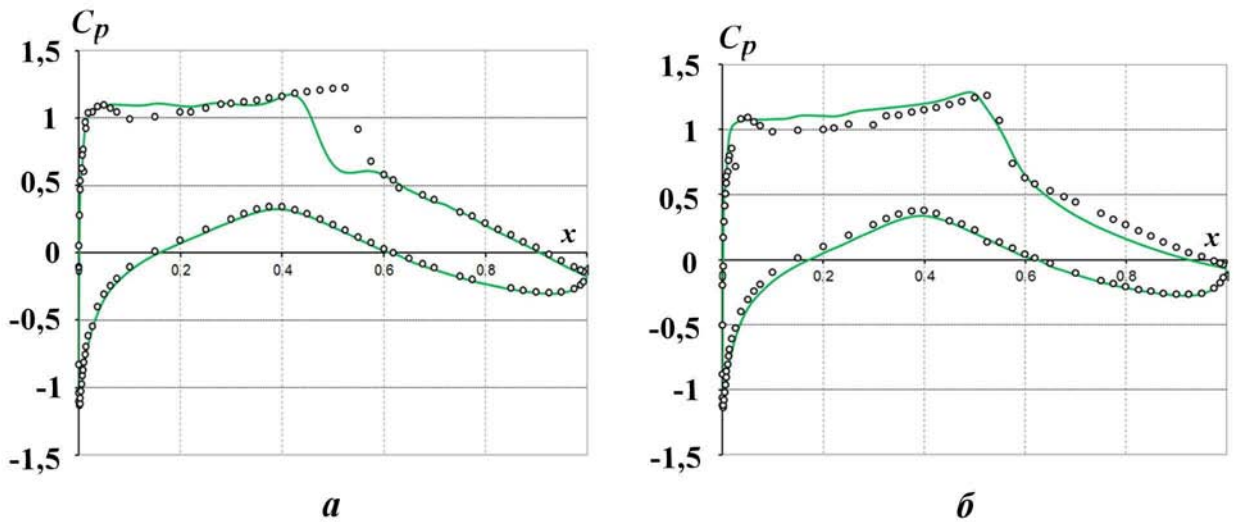


Рис. 5. Задача 1. Распределение давления  $C_p$ : а — режим 1; б — режим 2; — — расчет; о — эксперимент

Таблица 2

Задача 1. Коэффициенты подъемной силы  $C_y$  и лобового сопротивления  $C_x$

Режим	Источник данных	Сетка, $d$	$C_y$	$\Delta C_y, \%$	$C_x$	$\Delta C_x, \%$
1 ( $M = 0,725$ )	Расчет	0,03	0,77	-3,6 %	0,0139	-9,6 %
	—"	0,012	0,76	-2,9 %	0,0137	-8,6 %
	—"	0,0008	0,76	-2,9 %	0,0136	-7,2 %
	Эксперимент	—	0,743	—	0,0127	—
2 ( $M = 0,75$ )	Расчет	0,03	0,69	7,1 %	0,0288	-19,3 %
	—"	0,012	0,7	5,8 %	0,0287	-18,6 %
	—"	0,0008	0,7	5,8 %	0,0287	-18,6 %
	Эксперимент	—	0,743	—	0,0242	—

**Задача 2. Расчет аэродинамических характеристик крыла ONERA M6.** Рассматривается тестовое крыло самолета [17] (рис. 6).

Для расчета аэродинамических характеристик представленной модели используется блочно-структурированная сетка, состоящая из 2 млн ячеек. Расчетная область представляет собой прямоугольный параллелепипед, размеры которого определяются из условия обеспечения расстояния в 20 характерных длин (корневых хорд) от модели до границы расчетной области. Для моделирования обтекания крыла взяты параметры сжимаемого газа (воздуха) при следующих условиях:  $p_\infty = 30\,000$  Па;  $\rho_\infty = 0,348$  кг/м<sup>3</sup>;  $T_\infty = 300$  К. В расчетах рассматривались четыре режима обтекания со значениями числа Маха от 0,699 до 0,919 (табл. 3). Расчеты выполнялись с коэффициентом релаксации  $\alpha_u = 0,95$ ;  $\alpha_p = 0,001$ .

Сравнение результатов моделирования с экспериментальными данными [17] проводится по распределению коэффициента давления  $C_p$  для всех режимов. Значения  $C_p$  определяются в следующих сечениях крыла:  $z = 0,239$ ;  $z = 1,077$ ;  $z = 1,184$  (рис. 7).

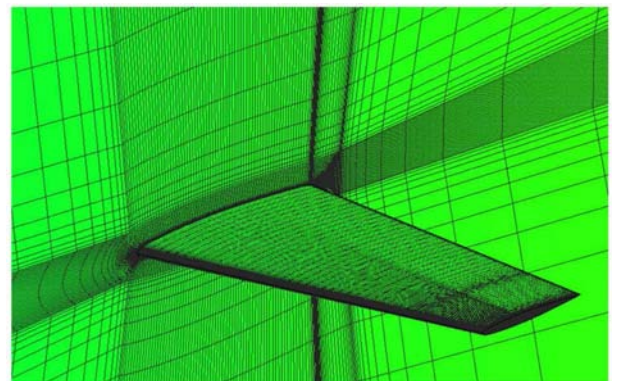


Рис. 6. Общий вид расчетной сетки задачи 2



Таблица 3

Режимы расчета задачи 2

Режим	М	$\alpha, ^\circ$	$\mu_\infty, \text{Па/с}$
1	0,699	3,06	$4,65342 \cdot 10^{-6}$
2	0,8399	0,04	$5,6 \cdot 10^{-6}$
3	0,8395	3,06	$5,6 \cdot 10^{-6}$
4	0,9190	3,07	$6,1 \cdot 10^{-6}$

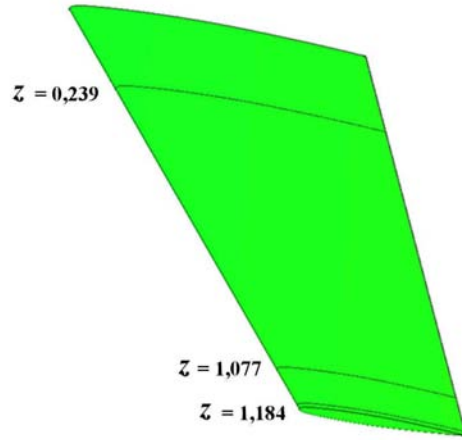


Рис. 7. Задача 2. Сечения крыла для определения  $C_p$

На рис. 8–11 представлены распределения коэффициента давления  $C_p$  в сечениях крыла для всех режимов, полученные с использованием ( $k-\omega$ )-модели турбулентности ( $c$  — нормировочный коэффициент, равный диапазону изменения координаты  $x$  в каждом сечении). Для режима 3 (рис. 10, см. также цветную вкладку) распределения коэффициента давления  $C_p$  приводятся с использованием ( $k-\omega$ )-модели и модели Спаларта—Аллмараса.

Как видно из рис. 8–11, с ростом числа Маха и угла атаки согласие полученных данных с экспериментальными значениями ухудшается, особенно это проявляется в сечении, расположенном ближе к краю крыла. Это связано с возникновением срывающихся вихрей, на точность описания которых изменение давления и плотности влияет еще заметнее.

Так, на рис. 8, 10 и 11 представлены результаты расчетов с одинаковым углом атаки, но с различными значениями числа Маха. Точность описания скачка уплотнения в сечениях  $z = 1,077$  и  $z = 1,184$  см (на рисунках *б* и *в*) по мере роста числа Маха ухудшается. Как и в задаче 1, имеется тенденция к формированию скачка уплотнения несколько выше по потоку, чем следует. При  $M = 0,919$  (см. рис. 11) результаты уже нельзя считать удовлетворительными.

На рис. 9, 10 представлены расчеты с числом Маха  $M = 0,83$  с разными углами атаки. Очевидно, что при меньших углах атаки результаты лучше согласуются с экспериментальными данными. Это связано с интенсивностью скачка уплотнения, которая при меньших углах атаки менее выражена и лучше поддается описанию в связи с меньшими разрывами в поле давления.

Таким образом, при проведении расчетов с использованием описанной методики следует ограничиваться допустимым диапазоном исследуемых параметров. Для точного определения этого диапазона необходимы дополнительные исследования в рамках каждого класса задач. Для данной задачи приемлемые результаты получаются при рассмотрении режимов со значениями числа Маха до 0,85 с углами атаки при этом до  $\alpha = 3^\circ$ . При угле атаки  $\alpha = 0 \div 1^\circ$  возможно рассмотрение течения с числом Маха до  $M = 0,9$ .

**Задача 3. Расчет внутреннего течения в трансзвуковом диффузоре.** Применимость алгоритма SIMPLE для моделирования внутренних течений рассмотрим на задаче течения вязкого сжимаемого газа в двумерном трансзвуковом диффузоре. Для данного течения имеются экспериментальные данные по распределению статического давления на верхней стенке диффузора [18].

Для расчета аэродинамических характеристик представленной модели используется блочно-структурированная сетка, состоящая из 70 тыс. ячеек. Расчетная область представлена на рис. 12 (см. также цветную вкладку).

Для моделирования течения в диффузоре взяты параметры сжимаемого газа (воздуха) при условиях, представленных в табл. 4. Проведены расчеты двух режимов обтекания с начальным числом Маха, равным 0,5. Расчеты выполнялись с коэффициентом релаксации  $\alpha_u = 0,95$ ;  $\alpha_p = 0,001$ .

Сравнение результатов моделирования с экспериментальными данными [18] проводится для распределения коэффициента давления  $C_p$  на верхней стенке диффузора.

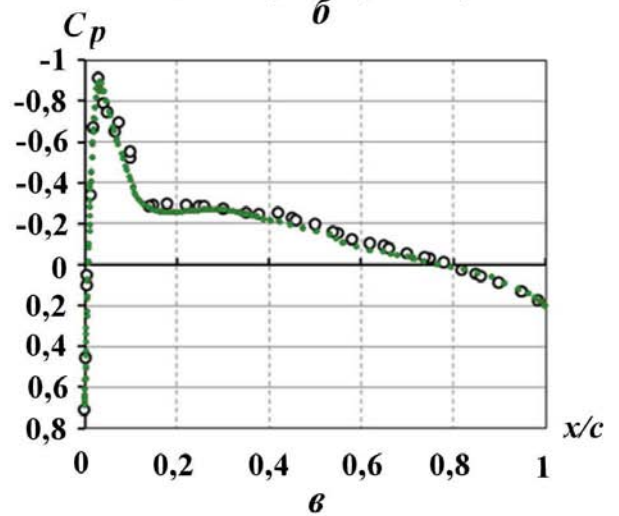
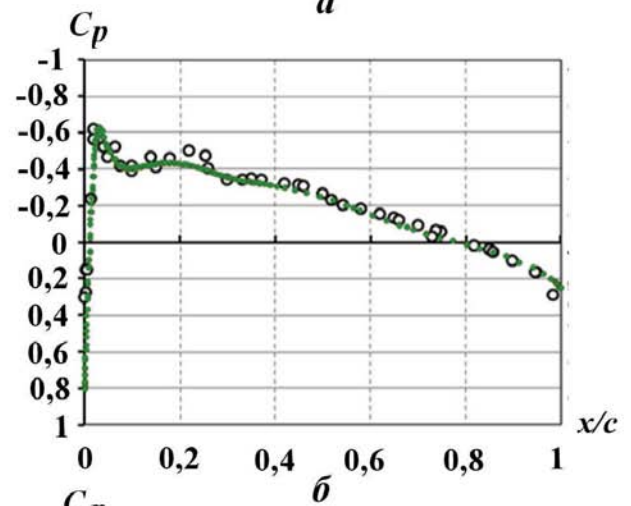
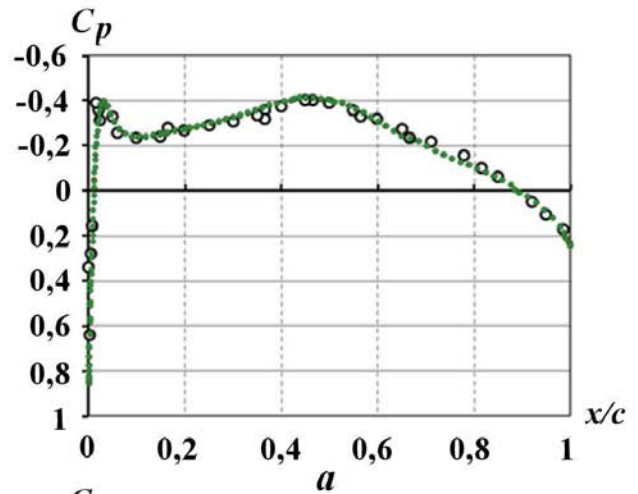
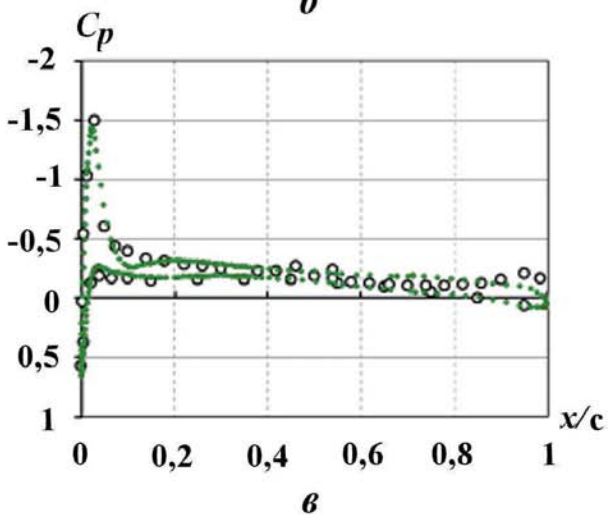
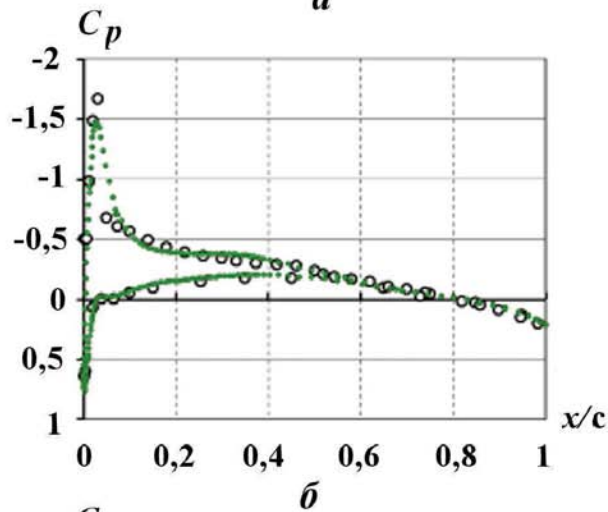
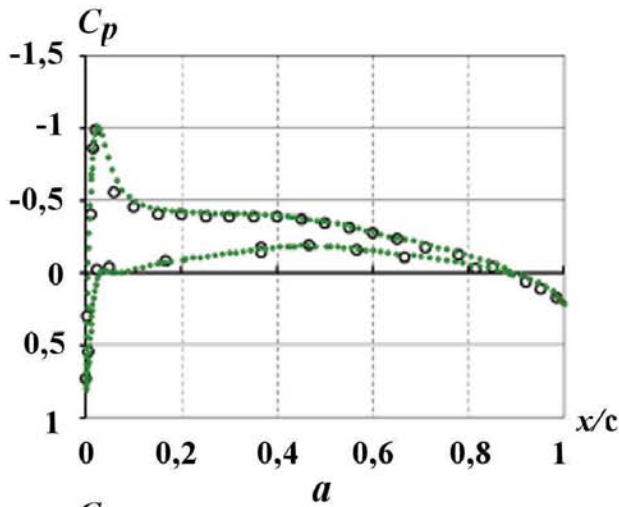


Рис. 8. Задача 2. Распределения  $C_p$  в сечениях для режима 1:  $a - z = 0,239$ ;  $b - z = 1,077$ ;  $v - z = 1,184$ ;  $\bullet$  — расчет ЛОГОС;  $\circ$  — эксперимент

Рис. 9. Задача 2. Распределения  $C_p$  в сечениях для режима 2:  $a - z = 0,239$ ;  $b - z = 1,077$ ;  $v - z = 1,184$ ;  $\bullet$  — расчет ЛОГОС;  $\circ$  — эксперимент

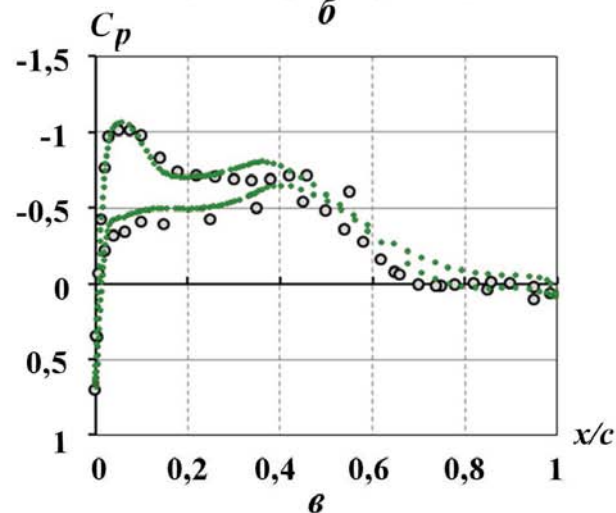
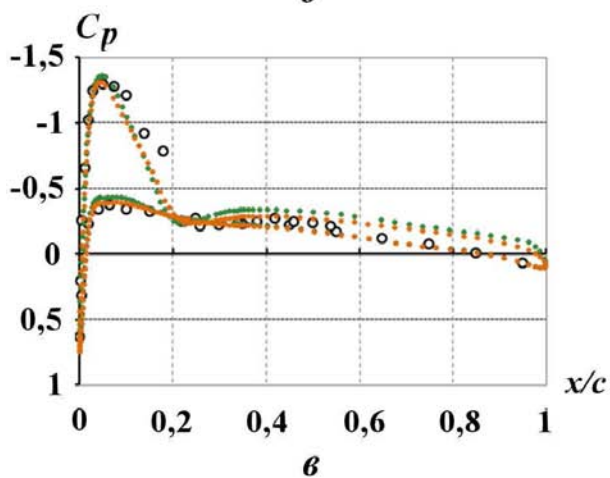
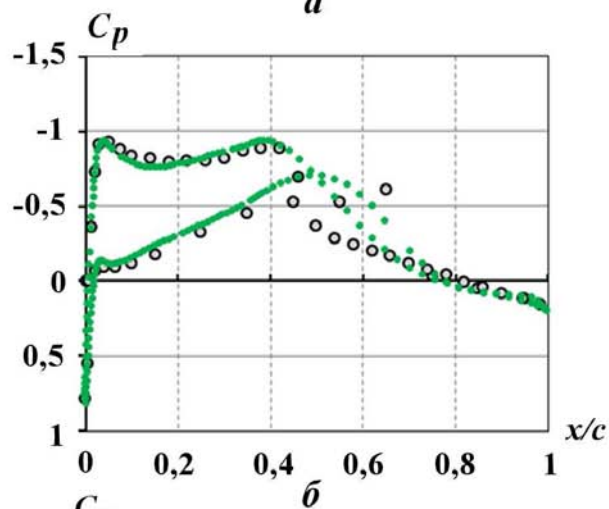
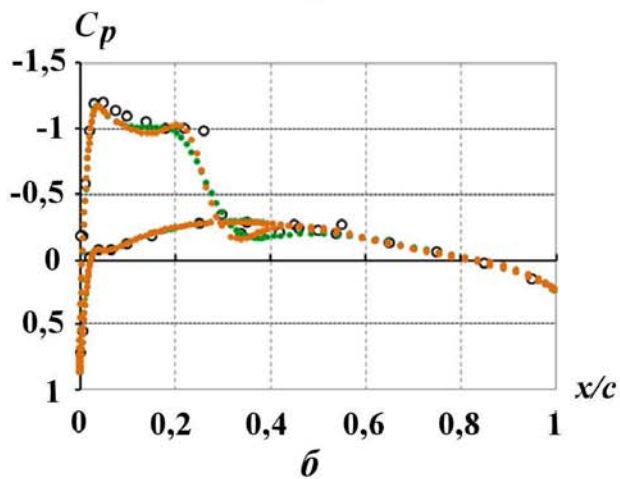
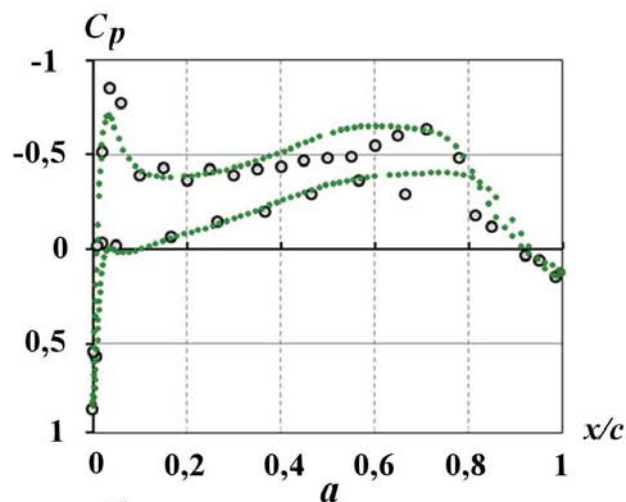
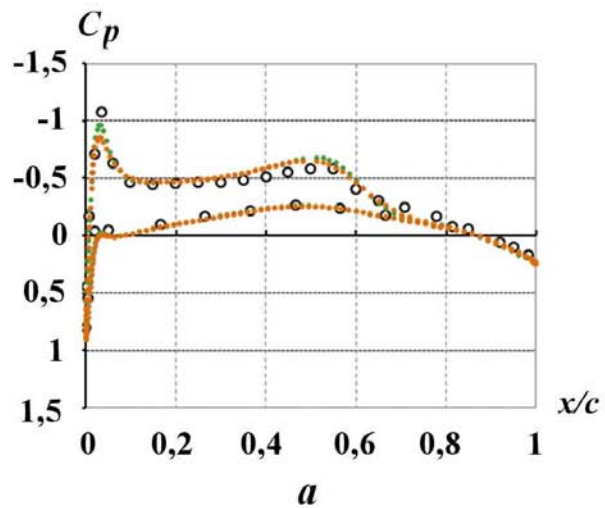


Рис. 10. Задача 2. Распределения  $C_p$  в сечениях для режима 3:  $a - z = 0,239$ ;  $b - z = 1,077$ ;  $v - z = 1,184$ ; ● — расчет с моделью SST; ● — расчет с моделью SA; ○ — эксперимент

Рис. 11. Задача 2. Распределения  $C_p$  в сечениях для режима 4:  $a - z = 0,239$ ;  $b - z = 1,077$ ;  $v - z = 1,184$ ; ● — расчет; ○ — эксперимент

На рис. 13, 14 (см. также цветную вкладку) представлены поля распределения скорости и статического давления во всей области диффузора для режима *слабый скачок*, полученные с использованием моделей турбулентности SST и SA соответственно. Аналогичные результаты для режима *сильный скачок* представлены на рис. 15, 16 (см. также цветную вкладку). Из рисунков видно, что для режима *слабый скачок* обе модели турбулентности одинаково описывают поле течения, в то время как для режима *сильный скачок* поля различаются.

Такие наблюдения подтверждаются представленными на рис. 17 (см. также цветную вкладку) графиками распределения статического давления вдоль верхней стенки диффузора для двух режимов течения (на рисунке статическое давление нормировано на полное давление  $p_{tot}$ , координата  $x$  — на высоту "горла" диффузора  $h$ ). Видно, что результаты расчетов в целом хорошо согласуются с экспериментальными данными. Для режима *слабый скачок* полученное решение (см. рис. 17, а) ни с одной моделью турбулентности не описывает точно местоположение скачка уплотнения, занижая значение статического давления. Тем не менее результаты с использованием модели турбулентности SST попадают в доверительный интервал. Для режима *сильный скачок* (см. рис. 17, б) полученное решение точно описывает местоположение скачка уплотнения, где статическое давление начинает сильно расти от своего минимального значения. Наиболее точные результаты для данного режима продемонстрировала модель турбулентности Спаларта—Аллмараса.

Таблица 4

Параметры режимов задачи 3

Граничные условия	Параметр	Режимы	
		Сильный скачок	Слабый скачок
Вход	$p_{tot}$ , Па	135 000	135 000
	$T_{tot}$ , К	277,78	277,78
Выход	$p_{вых}$ , Па	97216	110 660,9

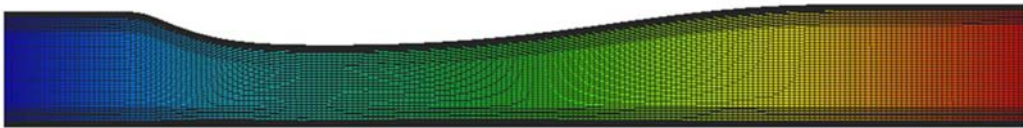


Рис. 12. Общий вид расчетной сетки задачи 3



Рис. 13. Задача 3. Распределение скорости и статического давления в диффузоре для режима *слабый скачок*; модель турбулентности SST



Рис. 14. Задача 3. Распределение скорости и статического давления в диффузоре для режима *слабый скачок*; модель турбулентности SA

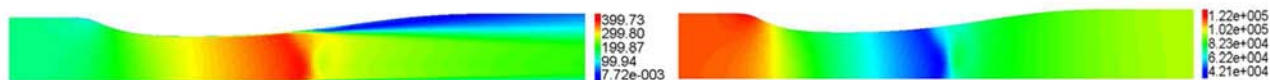


Рис. 15. Задача 3. Распределение скорости и статического давления в диффузоре для режима *сильный скачок*; модель турбулентности SST



Рис. 16. Задача 3. Распределение скорости и статического давления в диффузоре для режима *сильный скачок*; модель турбулентности SA

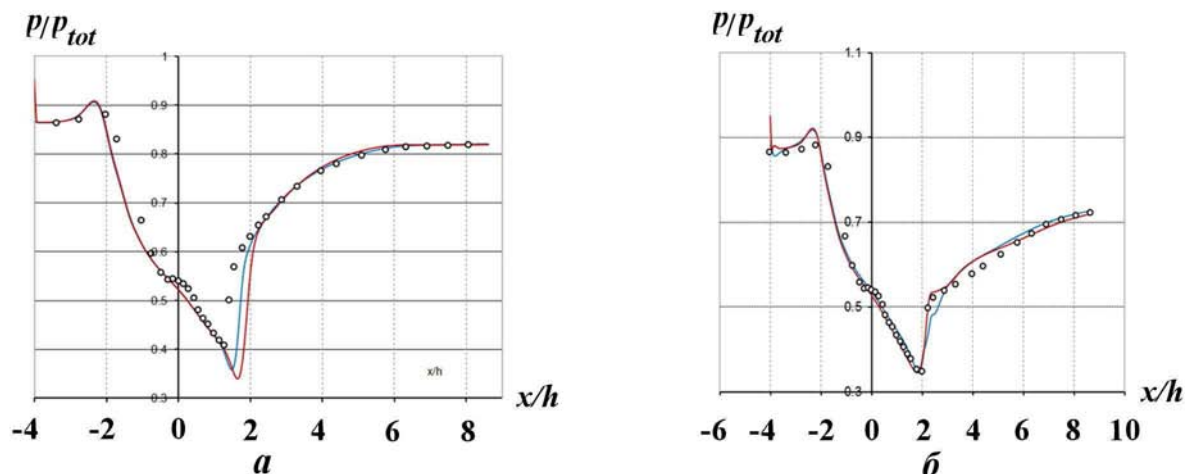


Рис. 17. Задача 3. Распределения статического давления вдоль верхней стенки диффузора: *a* — слабый скачок уплотнения; *b* — сильный скачок уплотнения; — расчет с моделью SST; — расчет с моделью SA;  $\circ$  — эксперимент

Таким образом, данную методику можно применять для расчета внутренних течений и получать достоверные результаты. Такие результаты обладают приемлемой точностью. Особое внимание следует уделять выбору модели турбулентности, наиболее подходящей для данного класса задач.

## Выводы

Проанализирована применимость метода SIMPLE для расчета сжимаемых течений. Выполнено сравнительное тестирование схем аппроксимации и ограничителей потока с целью определения степени влияния данных параметров на локальные и интегральные характеристики потока. Проведено сравнение полученных результатов с экспериментальными данными.

В результате исследований можно сделать вывод о том, что алгоритм применим для расчета задач внешних и внутренних трансзвуковых течений с некоторыми ограничениями, которые для каждого класса задач могут быть своими. Так, например, для задач внешнего обтекания область рассмотрения ограничивается значениями числа Маха до 0,85. Это связано с недостаточной точностью группы методов типа SIMPLE для описания скачка уплотнения.

По результатам исследований определена стратегия проведения расчетов. Указаны оптимальные счетные параметры решателя. Выработаны общие рекомендации в этом направлении:

1. Необходимо использовать схемы второго порядка точности с коэффициентом перемешивания, как можно большим, применяя для устойчивости на первых итерациях описанную выше стратегию с использованием ограничителей и противопоточной схемы.
2. Поскольку используется релаксация типа SIMPLEC, т. е.  $\alpha_p = 1 - \alpha_u$ , то чем больше релаксация по скорости, тем меньше неявная релаксация для давления. Это улучшает обусловленность матрицы для приращения давления. Приведенные расчеты проводились с коэффициентом релаксации  $\alpha_u \geq 0,85$ .

Часть расчетов проводилась с использованием моделей турбулентности Спаларта—Аллмараса и Ментера. Для разных классов задач лучшие результаты достигаются на разных моделях. Необходимо проводить отдельное численное исследование по их определению.

Следует отметить, что представленный алгоритм реализован в рамках отечественного программного кода ЛОГОС, который обладает гибкостью в плане расширения функционала, что практически невозможно при использовании коммерческих пакетов программ. Это позволит адаптировать код для решения задач в тех областях, в которых это будет востребовано.

### Список литературы

1. *Patankar S. V.* Numerical Heat Transfer and Fluid Flow. N. Y., Washington: Hemisphere Publ. Corp., 1980.
2. *Ferziger J. H., Peric M.* Computational Method for Fluid Dynamics. New York: Springer, 2002.
3. *Стрелец М. Х., Шур М. Л.* Метод масштабирования сжимаемости для расчета стационарных течений вязкого газа при произвольных числах Маха // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1988. Т. 28, № 2. С. 254—266.
4. *Флетчер К.* Вычислительные методы в динамике жидкости. М.: Мир, 1991.
5. *Van Doormaal J. R., Raithby G. D.* Enhancement of the SIMPLE method for predicting incompressible fluid flow // Heat Transfer. 1984. Vol. 7. P. 147—163.
6. *Hrvoj J.* Error Analysis and Estimation for the Finite Volume Method with Applications to Fluid Flows. Thesis. University of London, Department of Mechanical Engineering Imperial College of Science, Technology and Medicine, 1996.
7. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.
8. *Козелков А. С., Курулин В. В., Тятюшкина Е. С. и др.* Исследование схем дискретизации конвективного потока для моделирования турбулентных течений вязкой несжимаемой жидкости методом отсоединенных вихрей // Фундаментальные исследования. 2013. № 10. С. 1051—1058.
9. *Козелков А. С., Курулин В. В., Тятюшкина Е. С. и др.* Моделирование турбулентных течений вязкой несжимаемой жидкости на неструктурированных сетках с использованием модели отсоединенных вихрей // Математическое моделирование. 2014. Т. 26, № 8. С. 81—96.
10. *Колган В. П.* Применение принципа минимальных значений производной к построению конечно-разностных схем для расчета разрывных решений газовой динамики // Ученые записки ЦАГА. 1972. Т. 3, № 6. С. 68—77.
11. *Zijlema M., Wesseling P.* Higher Order Flux-Limiting Methods for Steady-State Multidimensional Convection-Dominated Flow. Delft University of Technology. Technical Report DUT-TWI-95-131, 1995.
12. *Козелков А. С., Дерюгин Ю. Н., Лашкин С. В. и др.* Реализация метода расчета вязкой несжимаемой жидкости с использованием многосеточного метода на основе алгоритма SIMPLE в пакете программ ЛОГОС // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2013. Вып. 4. С. 44—56.
13. *Волков К. Н., Дерюгин Ю. Н., Емельянов В. Н. и др.* Методы ускорения газодинамических расчетов на неструктурированных сетках. М.: Физматлит, 2013.

14. *Cook P. H., McDonald M. A., Firmin M. C. P.* Aerofoil RAE 2822 — pressure distributions, and boundary layer and wake measurements // Experimental Data Base for Computer Program Assessment. AGARD Advisory Report 138, 1979.
15. *Spalart P. R., Allmaras S. R.* A One-Equation Turbulence Model for Aerodynamic Flows // Recherche Aerospatiale. 1994. No 1. P. 5—21.
16. *Menter F. R.* Two-equation eddy viscosity turbulence models for engineering applications // AIAA J. 1994. Vol. 32, No 11. P. 1299—1310.
17. *Schmitt V., Charpin F.* Pressure distributions on the ONERA-M6-Wing at transonic Mach numbers // Experimental Data Base for Computer Program Assessment. AGARD Advisory Report 138, 1979.
18. *Stanniland D.* Investigation of the flow development on a highly swept canard/wing research model with segments leading and trailing edge flaps // Experimental Data Base for Computer Program Assessment. AGARD Advisory Report 303, 1988.

Статья поступила в редакцию 19.11.14.

SPECIFICS OF THE SIMPLE ALGORITHM APPLICATION FOR THE CALCULATION OF INCOMPRESSIBLE FLOWS / N. V. Tarasova, A. S. Kozelkov, D. P. Meleshkina, A. V. Lashkin, O. V. Denisova, M. A. Sizova (FSUE RFNC-VNIEF, Sarov, Nizhny Novgorod region).

This paper describes the modification of the SIMPLE algorithm for the case of incompressible flows and the study of the applicability of the implemented algorithm for the calculation of transonic compressible flows within the LOGOS program package. The problems about flow over an airfoil and inside a diffuser are used to demonstrate the capabilities of the implemented algorithm in terms of reaching acceptable accuracy and convergence velocity when various schemes of convective component discretization are used and other computational parameters are changed. The obtained results are compared with the data of well known experimental tests.

*Keywords:* SIMPLE algorithm, incompressible transonic flows, schemes of convective component discretization, LOGOS program package.

---