

УДК 517.95+514.86

## ОБ ОДНОМ РЕЖИМЕ РАЗЛЕТА В ВАКУУМ ПЛОСКОГО СЛОЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

В. Е. Шемарулин, С. С. Львова, Ю. В. Янилкин  
(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области)

Найден и подробно исследован класс точных решений уравнений одномерной газовой динамики, описывающих изэнтропический разлет в вакуум идеального газа, заполняющего плоский слой конечной толщины, в случае специальным образом заданных начальных распределений газодинамических параметров при показателе адиабаты, равном 3.

В качестве примера рассмотрен частный случай, когда начальная скорость газа равна нулю, а начальная плотность распределена по квадратичному закону и обращается в нуль на границе с вакуумом. Полученное частное решение может быть использовано для тестирования методик и программ, предназначенных для численного решения задач газовой динамики.

*Ключевые слова:* уравнения одномерной газовой динамики, идеальный газ, изэнтропический разлет в вакуум, точные решения, численное решение.

### Введение

Известно, что уравнения, описывающие одномерные плоские изэнтропические течения газа, линеаризуются, если поменять ролями зависимые и независимые переменные. Например, в [1, 2] в качестве независимых переменных выбраны инварианты Римана, а в [3, 4] — скорость и удельная энтальпия. В случае политропного газа такое преобразование уравнений позволяет в замкнутой форме представить их общее решение для показателей адиабаты  $\gamma = (2m + 3)/(2m + 1)$ ,  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Особенно просто уравнения интегрируются, когда  $\gamma = 3$ . При этом даже не требуется их линеаризация, поскольку уравнения для инвариантов Римана оказываются независимыми (в этом случае система в инвариантах представляет собой пару уравнений — каждое для одного инварианта) и интегрируются методом характеристик. Однако общее решение записывается в неявном виде и не дает полного представления о возможных особенностях решений. В связи с этим представляет интерес построение специальных классов решений, обладающих какими-либо отличительными особенностями.

В настоящей работе решена одномерная задача об изэнтропическом истечении в вакуум идеального газа, заполняющего плоский слой конечной толщины для специальным образом заданных начальных распределений газодинамических параметров. Показатель адиабаты  $\gamma = 3$ . При  $t = 0$  все газодинамические величины являются непрерывными функциями переменной  $x$ ,  $-\infty < x < +\infty$ ; начальные распределения инвариантов Римана являются выпуклыми функциями.

Одна из особенностей течений состоит в том, что границы газовой области остаются неподвижными до некоторого момента времени  $t = t^*$ , после которого начинается разлет. Течения остаются гладкими всюду до момента  $t = t^*$ . При  $t \geq t^*$  градиенты плотности и скорости терпят разрыв первого рода на звуковых линиях, на плоскости  $R^2(x, t)$  границы течений становятся огибающими характеристик и кривыми градиентных катастроф — градиент плотности обращается на них в бесконечность. Между звуковыми линиями расположена область дозвукового течения, между звуковыми линиями и линиями вакуума — области сверхзвукового течения. Звуковые точки течений неподвижны.

### 1. Постановка задачи

Рассматриваются одномерные плоские изэнтропические движения политропного газа с  $\gamma = 3$ . То есть предполагается, что в области течения энтропия  $S \equiv \text{const}$ , давление  $p$  и плотность  $\rho$  связаны соотношением [2]  $p = A\rho^3$ ,  $A \equiv A(S)$ , скорость звука  $c = A_1\rho$ ,  $A_1 = \sqrt{3A}$ , а сами течения в эйлеровых переменных описываются уравнениями

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0; \quad u_t + uu_x + \frac{1}{\rho}p_x = 0. \quad (1)$$

При  $t = 0$  газ заполняет плоский слой  $a_2 \leq x \leq a_1$ ,  $a_2 < 0 < a_1$ , вне которого находится вакуум. Состояние газа задано соотношениями

$$\begin{aligned} u(x, 0) = u_0(x), \quad \rho(x, 0) = \rho_0(x), \quad a_2 \leq x \leq a_1; \\ u_0(a_2) = u_0(a_1) = 0; \quad \rho_0(a_2) = \rho_0(a_1) = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $u_0(x)$ ,  $\rho_0(x)$  — известные дважды непрерывно дифференцируемые функции такие, что распределения  $r(x, 0) = r_0(x)$ ,  $l(x, 0) = l_0(x)$  инвариантов Римана удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} l_0 \leq 0; \quad r_0 \geq 0; \quad l'_0 < 0 \text{ при } x < b, \quad l'_0 > 0 \text{ при } x > b; \quad l''_0 > 0; \quad a_2 < b < a_1; \\ r'_0 > 0 \text{ при } x < 0, \quad r'_0 < 0 \text{ при } x > 0; \quad r''_0 < 0. \end{aligned} \quad (3)$$

В частности, функции  $r_0(x)$  и  $l_0(x)$  являются выпуклыми вверх и вниз соответственно.

Требуется найти решение задачи Коши (1)–(3) и исследовать соответствующее течение газа.

**Инварианты Римана и характеристики.** Задача (1)–(3) решается методом характеристик. Для  $\gamma = 3$  инварианты Римана  $r = u + c$ ,  $l = u - c$ ; система (1) эквивалентна системе в инвариантах

$$r_t + rr_x = 0; \quad l_t + ll_x = 0; \quad (4)$$

звуковые характеристики  $C_+$  и  $C_-$  являются прямыми; контактных характеристик  $C_0$  в изэнтропических течениях нет [2]. Характеристики, проходящие через точку  $(x, 0)$ , имеют уравнения

$$C_+ : \quad x(t) = x + r_0(x)t; \quad C_- : \quad x(t) = x + l_0(x)t. \quad (5)$$

**Огибающие семейств характеристик.** В верхней полуплоскости  $R^2(x, t)$ ,  $t > 0$  характеристики семейств (5) с параметром  $a_2 < x < a_1$  заполняют область, правой границей  $\gamma_+$  которой является огибающая  $C_+$ -характеристик с параметром  $0 < x \leq a_1$ , а левой границей  $\gamma_-$  — огибающая  $C_-$ -характеристик с параметром  $a_2 \leq x < b$ . Расположение характеристик в симметричном случае, когда  $u_0(x) = 0$ ,  $\rho_0(x) = 1 - x^2$ ,  $a_2 = -1$ ,  $a_1 = 1$ , показано на рис. 1.

В силу качественной "симметрии" начальных данных для анализа свойств решения достаточно ограничиться рассмотрением первой четверти плоскости  $R^2(x, t) : x > 0, t > 0$ .

Пусть в области  $x > 0$  уравнение  $r = r_0(x)$ , определяющее начальное распределение инварианта Римана, разрешено относительно переменной  $x$ :  $x = f(r)$ ;  $f'(r) < 0$ ;  $f''(r) < 0$ . Тогда правая граница  $\gamma_+$  имеет параметрические уравнения

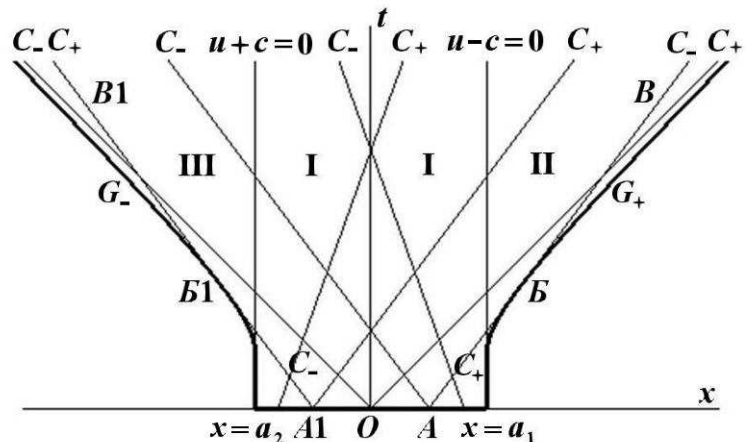


Рис. 1. Поведение характеристик и кривой  $\gamma = \gamma_+ \cup \gamma_-$  ( $G_+ \cup G_-$ ) градиентных катастроф

$$x = f(r_0) - r_0 f'(r_0); \quad t = -f'(r_0); \quad r_0(a_1) = 0 < r_0 < r_0(0), \quad (6)$$

где параметр  $r_0$  — значение инварианта  $r$  в точке  $(x_0, 0)$ .  $C_+$ -характеристика, проходящая через точку  $(x_0, 0)$ , касается кривой  $\gamma_+$  в точке  $(x, t)$  с координатами (6). Тогда функция  $x = x(t)$ , определенная уравнениями (6), является преобразованием Лежандра функции  $-f(r)$  [5]. Преобразование Лежандра сохраняет свойство выпуклости, откуда для функции  $x = f(r)$  следует, что кривая  $\gamma_+$  выпукла вверх. Кроме того,  $\gamma_+$  лежит в области  $x \geq a_1$ , асимптотически приближается к прямой  $x = r_0(0)t$  (см. ниже) и имеет вертикальную касательную в своей начальной точке  $(a_1, -f'(0))$ , соответствующей параметру  $r_0 = 0$ , поскольку прямая  $x = a_1$  является  $C_+$ -характеристикой. Преобразование Лежандра инволютивно, т. е. его квадрат равен тождественному преобразованию. Поэтому функцию (6), задающую огибающую, оно переводит в функцию  $-f(r)$ , противоположную функции  $x = f(r)$ , определяющей начальное распределение инварианта  $r$ . Таким образом, задание выпуклого распределения  $r = r_0(x)$ ,  $0 < x \leq a_1$ , с отмеченными свойствами эквивалентно заданию выпуклой кривой  $\gamma_+$  в области  $x > 0$ ,  $t > 0$ , имеющей асимптоту и касающейся вертикальной прямой  $x = a_1$ .

**Кривая градиентных катастроф.** Градиентная катастрофа по  $r$ -инварианту на  $C_+$ -характеристике (обращение в бесконечность производной  $r_x$ ) происходит в точке ее касания с огибающей  $\gamma_+$ , являющейся правой частью кривой градиентных катастроф. Момент  $t_k$  наступления этой катастрофы на  $C_+$ -характеристике, проходящей через точку  $(x_0, 0)$ , определяется равенством [1, 2, 6] (переменная  $x_0$  параметризует семейство характеристик)

$$t_k = -\frac{1}{r'_0(x_0)}. \quad (7)$$

Равенство (7) непосредственно следует из (6), поскольку  $f'(r_0) = 1/r'_0(x_0)$ .

Первоначально градиентная катастрофа наступает на  $C_+$ -характеристике, выходящей из точки  $(a_1, 0)$ . Далее она распространяется по  $C_+$ -характеристикам в сторону убывания параметра  $x_0$ , все время оставаясь на кривой  $\gamma_+$ . Таким образом, при  $r'_0(a_1) \neq -\infty$ , по крайней мере до момента времени  $t = t_k = -1/r'_0(a_1) > 0$ , в области  $x > 0$  течение является гладким. Более того, до момента  $t_k$  правая граница течения остается неподвижной, поскольку огибающая  $\gamma_+$  касается вертикальной  $C_+$ -характеристики — прямой  $x = a_1$ . Поскольку  $r'_0(0) = 0$  (см. (3)), на  $C_+$ -характеристике  $x = r(0)t$  градиентной катастрофы не происходит и прямая  $x = r_0(0)t$  является асимптотой кривой  $\gamma_+$ .

Аналогичные утверждения распространяются на градиентную катастрофу по  $l$ -инварианту на  $C_-$ -характеристиках, происходящую на кривой  $\gamma_-$  — огибающей  $C_-$ -характеристик, и на характер течения в области  $x < 0$ .  $\gamma_-$  является левой частью кривой градиентных катастроф.

## 2. Решение задачи

Покажем, что областью определения искомого непрерывного течения является изображенная на рис. 1 область, лежащая выше жирной кривой. Эта область естественным образом разбивается на три подобласти — I, II, III. Область I расположена между прямыми  $x = a_2$  и  $x = a_1$ , в области II  $x > a_1$ , в области III  $x < a_2$ .

В силу условий (3) через любую точку области I проходит по одной  $C_+$ - и  $C_-$ -характеристике, начинающейся на интервале  $(a_2, a_1)$  при  $t = 0$ . Следовательно, в этой области решение однозначно определено начальными условиями (2). Согласно тем же условиям (3) в области I  $r > 0$ ,  $l < 0$ , т. е.  $-c < u < c$  и течение является дозвуковым.

Через любую точку области II проходит пара  $C_+$ -характеристик, выходящих из точек интервала  $(a_2, a_1)$  при  $t = 0$ . При этом  $C_+$ -характеристики, начинающиеся на интервале  $(0, a_1)$ , имеют в качестве огибающей кривую  $\gamma_+$  градиентных катастроф. Так как  $\gamma_+$  — граница области предполагаемого течения, то она должна быть траекторией частицы и линией вакуума. Следовательно,

на  $\gamma_+$  должны быть выполнены равенства  $c = 0$ ,  $\rho = 0$ ,  $p = 0$ , а значит, и равенства  $r|_{\gamma_+} = l|_{\gamma_+} = u|_{\gamma_+} = x'(t)$ . Так как течение предполагается непрерывным, то через любую точку области II должна проходить только одна  $C_+$ -характеристика. Поскольку  $C_+$ - и  $C_-$ -характеристики должны касаться линии вакуума  $\gamma_+$ , это означает, что для любой прямой  $ABB$ ,  $A \in (0, a_1]$  (см. рис. 1), касающейся кривой  $\gamma_+$ , отрезок  $AB$  должен быть  $C_+$ -характеристикой, в то время как его продолжение, луч  $BB$ , —  $C_-$ -характеристикой. Это уже однозначно определяет решение в области II. Наклон  $C_-$ -характеристики, совпадающий с наклоном прямой  $ABB$ , будет положительным:  $\frac{dx}{dt} = l(B) = r(A) > 0$ . Следовательно, в области II  $l = u - c > 0$  и течение является сверхзвуковым. На вертикальной  $C_-$ -характеристике  $x = a_1$   $\frac{dx}{dt} = u - c = 0$ , следовательно, она является звуковой линией.

Аналогично, область III является областью сверхзвукового течения, а  $C_+$ -характеристика  $x = a_2$  — звуковой линией.

Понятно, что найденное решение допускает продолжение в область  $t < 0$ , которое может быть построено таким же образом.

**О гладкости решения.** Пусть начальные распределения инвариантов  $r = r_0(x)$  и  $l = l_0(x)$  являются гладкими функциями класса  $C^k$ . Решение задачи (1)–(3) в точке  $(x, t)$  определяется равенствами  $u(x, t) = (r + l)/2$ ;  $c(x, t) = (r - l)/2$ . При этом для области I  $r = r(x_{0,2})$ ;  $l = l(x_{0,1})$ ; функции

$$x_{0,2} = x_{0,2}(x, t); \quad x_{0,1} = x_{0,1}(x, t) \quad (8)$$

находятся из уравнений

$$x = x_{0,2} + r_0(x_{0,2})t; \quad x = x_{0,1} + l_0(x_{0,1})t. \quad (9)$$

Для области II  $r = r(x_{0,2})$ ;  $l = l(x_{0,1})$ ; функции (8) находятся из уравнений

$$x = x_{0,2} + r_0(x_{0,2})t; \quad x = x_{0,1} + r_0(x_{0,1})t. \quad (10)$$

Для области III  $r = l(x_{0,2})$ ;  $l = l(x_{0,1})$ ; функции (8) находятся из уравнений

$$x = x_{0,2} + l_0(x_{0,2})t; \quad x = x_{0,1} + l_0(x_{0,1})t. \quad (11)$$

При этом всегда  $x_{0,2} < x_{0,1}$ . Так как равенства  $1 + r'_0(x_{0,i})t = 0$  и  $1 + l'_0(x_{0,i})t = 0$ ,  $i = 1, 2$ , выполняются только на соответствующих частях огибающих семейств характеристик, то всюду в области определения течения  $1 + r'_0(x_{0,i})t \neq 0$  и  $1 + l'_0(x_{0,i})t \neq 0$ ,  $i = 1, 2$ . Поэтому уравнения (9)–(11) однозначно разрешимы относительно  $x_{0,2}$  и  $x_{0,1}$  и функции (8), а значит, и само решение вне звуковых линий принадлежит классу  $C^k$ .

**Поведение решения на звуковых линиях.** Покажем, что градиенты всех величин терпят разрыв первого рода на звуковых линиях. Производные по  $t$  на звуковых линиях непрерывны. Здесь предполагается, что  $t > -1/r'_0(a_1) > 0$ .

Инвариант  $r = r(x, t) = r_0(x_{0,2})$  в области  $x > 0$  имеет класс  $C^k$ . В области  $0 < x < a_1$  инвариант  $l = l(x, t) = l_0(x_{0,1})$ , где  $x_{0,1}$  находится из уравнения (9), а в области II  $\left(x > a_1, t > -\frac{1}{r'_0(a_1)} > 0\right)$   $l = l(x, t) = r_0(x_{0,1})$ , где  $x_{0,1}$  находится из уравнения (10). Поэтому слева от звуковой линии  $x = a_1$  производная  $l_x = l'_0(x_{0,1}) \frac{\partial x_{0,1}}{\partial x} = \frac{l'_0(x_{0,1})}{1 + l'_0(x_{0,1})t}$ , а справа от нее  $l_x = r'_0(x_{0,1}) \frac{\partial x_{0,1}}{\partial x} = \frac{r'_0(x_{0,1})}{1 + r'_0(x_{0,1})t}$ . Согласно (3)  $l'_0(a_1) > 0 > r'_0(a_1)$  и, следовательно,  $\lim_{x \rightarrow a_1-0} l_x(x, t) \neq \lim_{x \rightarrow a_1+0} l_x(x, t)$ . Таким образом, скачок  $[l_x]_{x=a_1} \neq 0$ . Поскольку  $[r_x]_{x=a_1} = 0$ , то  $[u_x]_{x=a_1} \neq 0$  и  $[c_x]_{x=a_1} \neq 0$ , а следовательно, градиенты плотности и давления также имеют разрывы первого рода на линии  $x = a_1$ .

**Поведение градиентов на линии вакуума.** Найдем частные производные по  $x$  функций  $u = u(x, t)$  и  $c = c(x, t)$  при  $t = t_0 > -1/r'_0(a_1) > 0$  в окрестности линии вакуума  $\gamma_+$ , лежащей под

асимптотой этой линии. В данной окрестности  $r = r(x, t) = u + c = r_0(x_{0,2}) = r_2$ ,  $l = l(x, t) = u - c = r_0(x_{0,1}) = r_1$ , где  $x_{0,2} = x_{0,2}(x, t)$ ,  $x_{0,1} = x_{0,1}(x, t)$  — решения уравнений (10). Следовательно, при  $t = t_0$

$$r_x = r'_2 \frac{\partial x_{0,2}}{\partial x}, \quad l_x = r'_1 \frac{\partial x_{0,1}}{\partial x}, \quad \frac{\partial x_{0,i}}{\partial x} = \frac{1}{1 + r'_i t_0}, \quad r'_i \equiv r'_0(x_{0,i}), \quad i = 1, 2. \quad (12)$$

Прямые, определяемые уравнениями (10) при фиксированных  $x_{0,2}$  и  $x_{0,1}$ , касаются огибающей  $\gamma_+$  в точках  $(x_2, t_2)$  и  $(x_1, t_1)$  таких, что  $1 + r'_i t_i = 1 + r'_0(x_{0,i}) t_i = 0$ ,  $i = 1, 2$ . Поэтому  $r'_i = -1/t_i$  и  $\frac{\partial x_{0,i}}{\partial x} = \frac{t_i}{t_i - t_0}$ ,  $i = 1, 2$ . Подставляя последние выражения в формулы (12), получаем

$$\begin{aligned} r_x &= -\frac{1}{t_2 - t_0} < 0; \quad l_x = -\frac{1}{t_1 - t_0} > 0; \\ u_x &= -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{t_1 - t_0} + \frac{1}{t_2 - t_0} \right); \quad c_x = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{t_1 - t_0} - \frac{1}{t_2 - t_0} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Так как  $x_{0,2} < x_{0,1}$ , то  $t_1 < t_0 < t_2$ .

Найдем выражение для произведения  $cc_x$ , аналогичное (13). Пусть  $x = \varphi(t)$  — уравнение огибающей  $\gamma_+$ . Тогда координаты точки  $(x, t_0)$  связаны с  $t_1$  и  $t_2$  соотношениями  $x = x_{0,2} + \varphi'(t_2) t_0$  и  $x = x_{0,1} + \varphi'(t_1) t_0$ . Поэтому  $r_2 - r_1 = r'(\xi)(x_{0,2} - x_{0,1}) = r'(\xi)(\varphi'(t_1) - \varphi'(t_2)) t_0 = r'(\xi) \varphi''(\tau) t_0 \times (t_1 - t_2)$ ,  $x_{0,2} < \xi < x_{0,1}$ ,  $t_1 < \tau < t_2$ . Из (13) и предыдущего равенства получаем

$$cc_x = \frac{1}{2} (r_2 - r_1) c_x = \frac{1}{4} r'(\xi) \varphi''(\tau) t_0 \left( 2 - \frac{t_2 - t_0}{t_1 - t_0} - \frac{t_1 - t_0}{t_2 - t_0} \right). \quad (14)$$

Когда точка  $(x, t_0)$  стремится к точке, лежащей на  $\gamma_+$ , очевидно,  $(t_1 - t_0) \rightarrow -0$ ,  $(t_2 - t_0) \rightarrow +0$ . Поэтому из (13) следует, что  $\lim_{(x, t_0) \rightarrow \gamma_+} r_x = -\infty$ ,  $\lim_{(x, t_0) \rightarrow \gamma_+} l_x = +\infty$ ,  $\lim_{(x, t_0) \rightarrow \gamma_+} c_x = -\infty$ . Для вычисления аналогичных пределов производной  $u_x$  и произведения  $cc_x$  требуется более подробное рассмотрение.

Пусть огибающая  $\gamma_+$  является кривой класса  $C^4$ , т. е. в ее уравнении  $x = \varphi(t)$  функция  $\varphi \in C^4$ . Для упрощения выкладок при оценке выражений, содержащихся в скобках в формулах (13) и (14), изменим начало отсчета времени таким образом, чтобы  $t_0 = 0$ , оставив без изменения уравнение кривой  $\gamma_+$ . В этом случае

$$\varphi(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + O(t^4), \quad a_i = \frac{\varphi^{(i)}(0)}{i!}, \quad i = 1, 2, 3; \quad a_j > 0, \quad j = 0, 1, 2$$

и уравнение  $x_i - x = \varphi'(t_i) t_i$ ,  $x_i = \varphi(t_i)$ ,  $i = 1, 2$ , для точек касания  $C_+$ -характеристик, проходящих через точку  $(x, 0)$ , с кривой  $\gamma_+$  легко приводится к виду  $a_0 - x = t_i^2 (a_2 + 2a_3 t_i + O(t_i^2))$ . Отсюда получаем

$$t_i = (-1)^i \sqrt{\frac{a_0 - x}{a_2 + 2a_3 t_i + O(t_i^2)}}, \quad i = 1, 2. \quad (15)$$

Следовательно, поскольку  $\lim_{\substack{(x, 0) \rightarrow \gamma_+ \\ (x \rightarrow a_0)}} t_i = 0$ , то  $\lim_{(x, 0) \rightarrow \gamma_+} \frac{t_2}{t_1} = -1$ . Возвращаясь к прежнему началу

отсчета времени, находим  $\lim_{(x, 0) \rightarrow \gamma_+} \frac{t_2 - t_0}{t_1 - t_0} = -1$ , и в силу формулы (14)  $\lim_{(x, t_0) \rightarrow \gamma_+} cc_x = r'_0(x_0) \varphi''(t_0) t_0$ ,

$x_0 = \varphi(t_0) - \varphi'(t_0) t_0$ . Из параметрических уравнений огибающей  $x = x_0 + r_0(x_0) t$ ,  $t = -\frac{1}{r'_0(x_0)}$

следует, что  $\varphi''(t_0) = \frac{(r'_0(x_0))^3}{r''_0(x_0)}$ . Кроме того,  $1 + r'_0(x_0) t_0 = 0$ . Поэтому

$$\lim_{(x, t_0) \rightarrow \gamma_+} cc_x = -\varphi''(t_0) = -\frac{(r'_0(x_0))^3}{r''_0(x_0)}. \quad (16)$$

Из (13) и (15) следует также, что  $\lim_{(x,t_0) \rightarrow \gamma_+} \left( \frac{1}{t_1 - t_0} + \frac{1}{t_2 - t_0} \right) = \frac{2a_3}{a_2} = \frac{2\varphi'''(t_0)}{3\varphi''(t_0)}$ ,  $\lim_{(x,t_0) \rightarrow \gamma_+} u_x = -\frac{\varphi'''(t_0)}{3\varphi''(t_0)}$ . На линии вакуума ( $c = 0$ )  $\nabla p = 0$ : согласно (16)  $cc_x \neq \infty$ , следовательно,  $\lim_{(x,t_0) \rightarrow \gamma_+} p_x = \lim_{(x,t_0) \rightarrow \gamma_+} \frac{1}{\sqrt{3A}} c^2 c_x = 0$ .

### 3. Уравнения траекторий частиц газа

**Интеграл уравнения траекторий в дозвуковой области.** Рассмотрим траекторию  $x = x(t)$  произвольной частицы газа, расположенную в дозвуковой области, начинающуюся в точке  $x_0 = x(0)$  (рис. 2). Любая точка  $(x, t)$  этой траектории является точкой пересечения  $C_+$ -характеристики, начинающейся в некоторой точке  $x_{0,2}$ , и  $C_-$ -характеристики, начинающейся в точке  $x_{0,1}$ . При этом  $x_{0,2} < x_0 < x_{0,1}$  и вся траектория расположена в треугольнике, образованном характеристиками и осью абсцисс, поскольку никакая траектория не может пересекать одну характеристику в двух точках.

Координаты  $(x, t)$  точки траектории и параметры  $x_{0,2}$  и  $x_{0,1}$  связаны уравнениями характеристик

$$\begin{aligned} x &= x_{0,2} + r_2 t, & r_2 &= r_0(x_{0,2}); \\ x &= x_{0,1} + l_1 t, & l_1 &= l_0(x_{0,1}), \end{aligned} \quad (17)$$

из которых следует, что вдоль траектории

$$x = \frac{x_{0,1} r_2 - x_{0,2} l_1}{r_2 - l_1} \equiv x(x_{0,1}, x_{0,2}); \quad t = \frac{x_{0,1} - x_{0,2}}{r_2 - l_1} \equiv t(x_{0,1}, x_{0,2}) \quad (18)$$

выполняются равенства

$$dx = dx_{0,2} + r_2' dx_{0,2} t + r_2 dt; \quad dx = dx_{0,1} + l_1' dx_{0,1} t + l_1 dt. \quad (19)$$

На траектории  $x_{0,2} = \mu(x_{0,1})$ , и, следовательно, координаты  $x$  и  $t$  являются функциями одного из параметров:  $x_{0,1}$  или  $x_{0,2}$ . Из (19) находим

$$dx = \frac{\begin{vmatrix} (1 + r_2' t) dx_{0,2} & -r_2 \\ (1 + l_1' t) dx_{0,1} & -l_1 \end{vmatrix}}{r_2 - l_1}; \quad dt = \frac{\begin{vmatrix} 1 & (1 + r_2' t) dx_{0,2} \\ 1 & (1 + l_1' t) dx_{0,1} \end{vmatrix}}{r_2 - l_1}. \quad (20)$$

На траектории

$$\frac{dx}{dt} = u(x, t) = \frac{r + l}{2} = \frac{r_2 + l_1}{2}. \quad (21)$$

Подставляя (20) в (21), получаем уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \frac{r_2 (1 + l_1' t) dx_{0,1} - l_1 (1 + r_2' t) dx_{0,2}}{(1 + l_1' t) dx_{0,1} - (1 + r_2' t) dx_{0,2}} = \frac{r_2 + l_1}{2}. \quad (22)$$

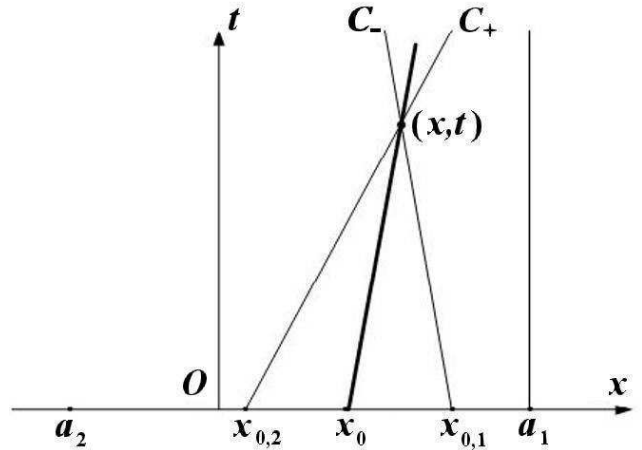


Рис. 2. Траектория (жирная линия), расположенная в дозвуковой области течения

Так как  $t$ ,  $r_2$ ,  $l_1$  являются функциями параметров  $x_{0,1}$  и  $x_{0,2}$ , уравнение (22) — это дифференциальное уравнение для функции  $x_{0,2} = \mu(x_{0,1})$ . Из (22) после элементарных преобразований находим  $(r_2 - l_1) \left[ (1 + l_1' t) dx_{0,1} + (1 + r_2' t) dx_{0,2} \right] = 0$ . Поскольку  $r_2 > 0 > l_1$ , то  $(1 + l_1' t) dx_{0,1} + (1 + r_2' t) dx_{0,2} = 0$ , или в другой форме

$$(dl_1 + dr_2)t + dx_{0,1} + dx_{0,2} = 0. \quad (23)$$

Заменяя в (23) функцию  $t$  ее выражением из (18), получаем

$$d(r_2 x_{0,1}) - d(l_1 x_{0,2}) + (r_2 - r_2' x_{0,2}) dx_{0,2} + (l_1' x_{0,1} - l_1) dx_{0,1} = 0.$$

Последнее соотношение, очевидно, можно переписать в виде полного дифференциала

$$d(r_2 x_{0,1}) - d(l_1 x_{0,2}) + d\left(\int_{x_0}^{x_{0,2}} (r_2 - r_2' \bar{x}_{0,2}) d\bar{x}_{0,2}\right) + d\left(\int_{x_0}^{x_{0,1}} (l_1' \bar{x}_{0,1} - l_1) d\bar{x}_{0,1}\right) = 0,$$

поскольку на фиксированной траектории  $x_0 = \text{const}$ .

Таким образом, показано, что уравнение траекторий в дозвуковой области имеет интеграл

$$r_2 x_{0,1} - l_1 x_{0,2} + \int_{x_0}^{x_{0,2}} (r_2 - r_2' \bar{x}_{0,2}) d\bar{x}_{0,2} + \int_{x_0}^{x_{0,1}} (l_1' \bar{x}_{0,1} - l_1) d\bar{x}_{0,1} = \text{const}_1. \quad (24)$$

Для начальной точки траектории  $(x_0, 0)$  параметры  $x_{0,2} = x_{0,1} = x_0$ . Поэтому в точке  $(x_0, 0)$  траектории интеграл (24) имеет следующее значение, которое определяет константу:  $\text{const}_1 = (r_0(x_0) - l_0(x_0))x_0$ . Отсюда получаем выражение для интеграла в дозвуковой области:

$$r_2 x_{0,1} - l_1 x_{0,2} + \int_{x_0}^{x_{0,2}} (r_2 - r_2' \bar{x}_{0,2}) d\bar{x}_{0,2} + \int_{x_0}^{x_{0,1}} (l_1' \bar{x}_{0,1} - l_1) d\bar{x}_{0,1} = (r_0(x_0) - l_0(x_0))x_0. \quad (25)$$

После подстановки в (25) функций  $x_{0,2} = x_{0,2}(x, t)$ ,  $x_{0,1} = x_{0,1}(x, t)$ , найденных из уравнений (17), получим неявное уравнение траектории, начинающейся в точке  $(x_0, 0)$ .

**Физический смысл интеграла уравнения траекторий в дозвуковой области.** Учитывая, что  $r - l = 2c = 2\sqrt{3A}\rho$ , перепишем интеграл (25) в виде

$$\begin{aligned} r_2 x_{0,1} - l_1 x_{0,2} + \int_0^{x_{0,2}} (r_2 - r_2' \bar{x}_{0,2}) d\bar{x}_{0,2} + \int_0^{x_{0,1}} (l_1' \bar{x}_{0,1} - l_1) d\bar{x}_{0,1} = \\ = 2\sqrt{3A}\rho(x_0)x_0 + \int_0^{x_0} [r_0 - l_0 - (r_0' - l_0')x] dx, \quad r_0 = r_0(x), \quad l_0 = l_0(x). \end{aligned}$$

Отсюда, интегрируя справа по частям, получаем

$$r_2 x_{0,1} - l_1 x_{0,2} + \int_0^{x_{0,2}} (r_0 - r_0' x) dx + \int_0^{x_{0,1}} (l_0' x - l_0) dx = 4\sqrt{3A}m(x_0), \quad (26)$$

где  $m(x_0) = \int_0^{x_0} \rho_0(x) dx$  — масса газа, содержащегося в области  $(0, x_0)$ .

Таким образом, найденный интеграл уравнения траекторий выражает закон сохранения массы газа, заключенного между двумя траекториями, начинающимися в точках  $(0, 0)$  и  $(x_0, 0)$ .

Интеграл (26) допускает очевидное упрощение. Интегрируя в (26) по частям, находим окончательное выражение для интеграла уравнения траекторий в дозвуковой области:

$$(r_2 + l_1)(x_{0,1} - x_{0,2}) + 2 \int_0^{x_{0,2}} r_0(x) dx - 2 \int_0^{x_{0,1}} l_0(x) dx = 4\sqrt{3}Am(x_0). \quad (27)$$

**Интеграл уравнения траекторий в сверхзвуковой области.** Теперь рассмотрим траекторию  $x = x(t)$  частицы газа, расположенную в сверхзвуковой области, начинающуюся в точке  $(a_1, t_0)$  звуковой линии:  $x(t_0) = a_1$  (рис. 3). Любая точка  $(x, t)$  этой траектории является точкой пересечения пары  $C_+$ -характеристик, начинающихся в точках  $x_{0,2}$  и  $x_{0,1}$ . При этом, как и прежде,  $x_{0,2} < x_{0,1}$  и вся траектория расположена в треугольнике, образованном характеристиками и звуковой линией  $x = a_1$ .

Координаты  $(x, t)$  точки траектории и параметры  $x_{0,2}$  и  $x_{0,1}$  связаны уравнениями двух  $C_+$ -характеристик:

$$\begin{aligned} x &= x_{0,2} + r_2 t, & r_2 &= r_0(x_{0,2}); \\ x &= x_{0,1} + r_1 t, & r_1 &= r_0(x_{0,1}), \end{aligned} \quad (28)$$

из которых следует, что вдоль траектории  $x = \frac{x_{0,1}r_2 - x_{0,2}r_1}{r_2 - r_1} \equiv x(x_{0,1}, x_{0,2})$ ,  $t = \frac{x_{0,1} - x_{0,2}}{r_2 - r_1} \equiv t(x_{0,1}, x_{0,2})$ . Вдоль траектории  $x_{0,2} = \mu(x_{0,1})$ , и, следовательно, координаты  $x$  и  $t$  являются функциями одного из параметров:  $x_{0,1}$  или  $x_{0,2}$ . На траектории

$$\frac{dx}{dt} = u(x, t) = \frac{r + l}{2} = \frac{r_2 + r_1}{2}, \quad (29)$$

так как в этом случае  $l = l(x, t) = r_1$ .

Формулы (28), (29) получаются из формул (17), (18) и (21) для дозвуковой области, если в последних  $l_1$  заменить на  $r_1$ . Кроме того, для точки  $(x, t)$ , не лежащей на оси абсцисс,  $r_2 > r_1$ . Поэтому все выкладки для дозвуковой области, предшествующие определению константы в интеграле (24), справедливы и для сверхзвуковой области. Следовательно, в сверхзвуковой области имеет место аналог интеграла (24), получающийся из (24) заменой  $l_1$  на  $r_1$ :

$$r_2 x_{0,1} - r_1 x_{0,2} + \int_{x_0}^{x_{0,1}} (r_1' \bar{x}_{0,1} - r_1) d\bar{x}_{0,1} + \int_{x_0}^{x_{0,2}} (r_2 - r_2' \bar{x}_{0,2}) d\bar{x}_{0,2} = \text{const}_2.$$

В данном случае два интеграла можно объединить в один:

$$r_2 x_{0,1} - r_1 x_{0,2} + \int_{x_{0,2}}^{x_{0,1}} (r_1' \bar{x}_{0,1} - r_1) d\bar{x}_{0,1} = \text{const}_2. \quad (30)$$

Интегрируя в (30) по частям, получаем

$$(r_2 + r_1)(x_{0,1} - x_{0,2}) - 2 \int_{x_{0,2}}^{x_{0,1}} r_0(x) dx = \text{const}_2. \quad (31)$$

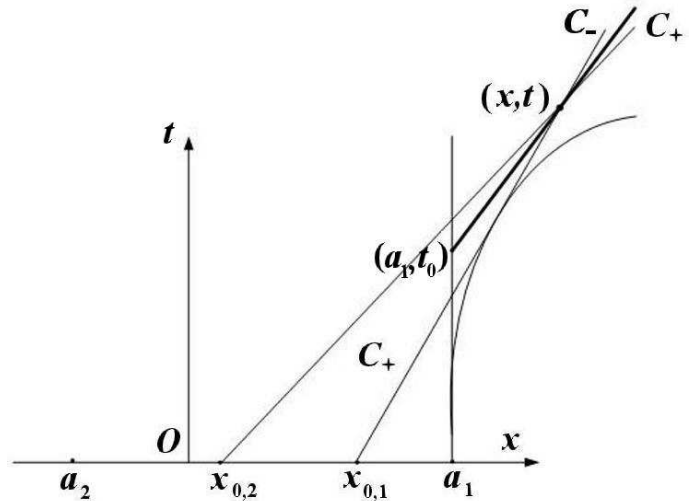


Рис. 3. Траектория (жирная линия), расположенная в сверхзвуковой области течения



Заметим, что левая часть интеграла (31) формально получается из левой части интеграла (27) для дозвуковой области, если в (27) положить  $l_0(x) = r_0(x)$  (в полном соответствии с тем, что  $l$ -инвариант в сверхзвуковой области равен  $r$ -инварианту в точке  $x_{0,1}$ ).

Найдем константу в интеграле (31). Полагать  $t = 0$ , считая  $x_{0,2} = x_{0,1}$ , в данном случае нельзя, поскольку в сверхзвуковой области  $t > t_k = -1/r'_0(a_1) > 0$ . Начальная точка траектории  $(a_1, t_0)$ ,  $t_0 > 0$ , является пересечением  $C_+$ -характеристики, выходящей из точки  $(x_{0,2}, 0)$ , и звуковой линии ( $C_+$ -характеристики)  $x = a_1$ . Поэтому  $a_1 = x_{0,1} = x_{0,2} + r_2 t_0$  и для точки  $(a_1, t_0)$   $x_{0,1} - x_{0,2} = a_1 - x_{0,2}$ ;  $r_2 = (a_1 - x_{0,2})/t_0$ ;  $r_1 = r_0(a_1) = 0$ . Следовательно, значение интеграла (31) в точке  $(a_1, t_0)$

$$\frac{(a_1 - x_{0,2})^2}{t_0} - 2 \int_{x_{0,2}}^{a_1} r_0(x) dx = \text{const}_2. \quad (32)$$

Пусть  $x_2(a_1, t_0)$  — решение уравнения  $a_1 = x_{0,2} + r_2 t_0$ ,  $r_2 = r_0(x_{0,2})$  относительно  $x_{0,2}$  при заданном  $t_0$ . Тогда согласно (32)  $\text{const}_2 = \frac{(a_1 - x_2(a_1, t_0))^2}{t_0} - 2 \int_{x_2(a_1, t_0)}^{a_1} r_0(x) dx$ . В результате приходим к окончательному выражению для интеграла уравнения траекторий в сверхзвуковой области:

$$(r_2 + r_1)(x_{0,1} - x_{0,2}) - 2 \int_{x_{0,2}}^{x_{0,1}} r_0(x) dx = \frac{(a_1 - x_2(a_1, t_0))^2}{t_0} - 2 \int_{x_2(a_1, t_0)}^{a_1} r_0(x) dx, \quad r_2 = r_0(x_{0,2}), \quad r_1 = r_0(x_{0,1}). \quad (33)$$

После подстановки в (33) функций  $x_{0,2} = x_{0,2}(x, t)$ ,  $x_{0,1} = x_{0,1}(x, t)$ , найденных из уравнений (28), получим неявное уравнение траектории, начинающейся в точке  $(a_1, t_0)$ .

**"Сшивка" интегралов уравнений траекторий в дозвуковой и сверхзвуковой областях.** Чтобы "сшить" интеграл (27) для дозвуковой области с интегралом (33) для сверхзвуковой области, необходимо привести левые части этих интегралов к одному виду. Прибавляя к обеим частям интеграла (27) величину  $-2 \int_0^{x_{0,1}} r_0(x) dx$  и учитывая, что  $r_0(x) - l_0(x) = 2c_0(x) = 2\sqrt{3A}\rho_0(x)$ , получаем

$$(r_2 + l_1)(x_{0,1} - x_{0,2}) - 2 \int_{x_{0,2}}^{x_{0,1}} r_0(x) dx = 4\sqrt{3A} \left( m(x_0) - m(x_{0,1}) \right), \quad r_2 = r_0(x_{0,2}), \quad l_1 = l_0(x_{0,1}), \quad (34)$$

где  $m(x_0) = \int_0^{x_0} \rho_0(x) dx$  и  $m(x_{0,1}) = \int_0^{x_{0,1}} \rho_0(x) dx$  — массы газа, содержащегося в областях  $(0, x_0)$  и  $(0, x_{0,1})$  соответственно.

Сравним интеграл (34) с интегралом (33) для сверхзвуковой области. В интеграле (33) инвариант  $r_1$  играет ту же роль, что инвариант  $l_1$  в интеграле (34), — это значение  $l$ -инварианта в точке  $(x, t)$  траектории. Следовательно, левые части интегралов (34) и (33) "совпадают" по существу. Для одной траектории, переходящей из дозвуковой области в сверхзвуковую, интегралы (34) и (33) должны принимать одно значение в точке пересечения данной траектории со звуковой линией. То есть эти интегралы должны совпадать при  $x_{0,1} = a_1$ , при этом параметр  $x_{0,2}$  у них один и тот же. Значит, правая часть (константа) "сверхзвукового" интеграла (33) равна  $4\sqrt{3A} \left( m(x_0) - m(a_1) \right)$ , где  $m(a_1) = \int_0^{a_1} \rho_0(x) dx$  — полная масса газа, содержащегося в области  $(0, a_1)$ .

**Физический смысл интеграла уравнения траекторий в сверхзвуковой области и продолжение траектории из дозвуковой области в сверхзвуковую.** Таким образом, инте-

грал (33) уравнения траекторий в сверхзвуковой области приведен к виду

$$(r_2 + r_1)(x_{0,1} - x_{0,2}) - 2 \int_{x_{0,2}}^{x_{0,1}} r_0(x) dx = 4\sqrt{3A} \left( m(x_0) - m(a_1) \right), \quad (35)$$

проясняющему его физический смысл: этот интеграл выражает закон сохранения массы газа, заключенного между двумя траекториями, — траекторией, начинающейся в точке  $(x_0, 0)$  и проходящей через точку  $(a_1, t_0)$ , и линией вакуума. При этом  $m(x_0, a_1) \equiv m(a_1) - m(x_0)$  — масса газа, содержащегося в области  $x_0 < x < a_1$ . При заданном значении  $x_0$  интеграл (35) в неявном виде задает в сверхзвуковой области уравнение траектории, которая является продолжением траектории, начинающейся в точке  $x_0$  дозвуковой области и описываемой интегралом (27).

#### 4. Пример

Здесь подробно исследовано течение частного вида, принадлежащее описанному общему классу.

**Постановка задачи.** Идеальный газ подчиняется уравнению состояния

$$p = \frac{\rho^3}{3}, \quad (36)$$

при  $t=0$  заполняет плоский слой  $-1 \leq x \leq 1$ ; его начальное состояние задано соотношениями

$$u(x, 0) = 0; \quad \rho(x, 0) = 1 - x^2; \quad -1 \leq x \leq +1. \quad (37)$$

**Характер возникающего течения.** На плоскости  $R^2(x, t)$  область определения течения разбивается на три части: в области  $|x| < 1$  течение дозвуковое, в областях  $|x| > 1$  — сверхзвуковое. Прямые  $x = \pm 1$  являются звуковыми линиями. Картина течения симметрична относительно координатных осей:

$$\rho(-x, t) \equiv \rho(x, t); \quad u(-x, t) \equiv -u(x, t); \quad \rho(x, -t) \equiv \rho(x, t); \quad u(x, -t) \equiv -u(x, t); \quad x \geq 0; \quad t \geq 0. \quad (38)$$

Кривые градиентных катастроф имеют уравнения

$$x = \pm \left( \frac{1}{4t} + t \right), \quad |t| \geq \frac{1}{2}. \quad (39)$$

Линии вакуума являются объединениями отрезков прямых  $x = \pm 1$ ,  $|t| \leq 1/2$  с кривыми (39).

**Решение задачи.** В обозначениях  $P = \sqrt{1 - 2xw + w^2}$ ;  $Q = \sqrt{1 + 2xw + w^2}$ ;  $w = 2t$  решение задачи (1), (36), (37) для положительных  $x$  и  $t$  имеет следующий аналитический вид:

– в дозвуковой области для  $0 < x \leq 1$ ,  $t > 0$

$$\rho(x, t) = \frac{1}{w^2} (P + Q - 2); \quad u(x, t) = \frac{1}{w^2} (P - Q + 2xw); \quad (40)$$

– в сверхзвуковой области для  $1 \leq x \leq \frac{1}{4t} + t$ ,  $t \geq \frac{1}{2}$

$$\rho(x, t) = \frac{2}{w^2} P; \quad u(x, t) = \frac{2}{w^2} (xw - 1). \quad (41)$$

Верхняя часть области определения течения, описываемого формулами (40), (41) и (38), и поведение характеристик в полуплоскости  $R^2(x, t)$ ,  $t > 0$  представлены на рис. 1, поведение плотности и скорости — на рис. 4, 5.

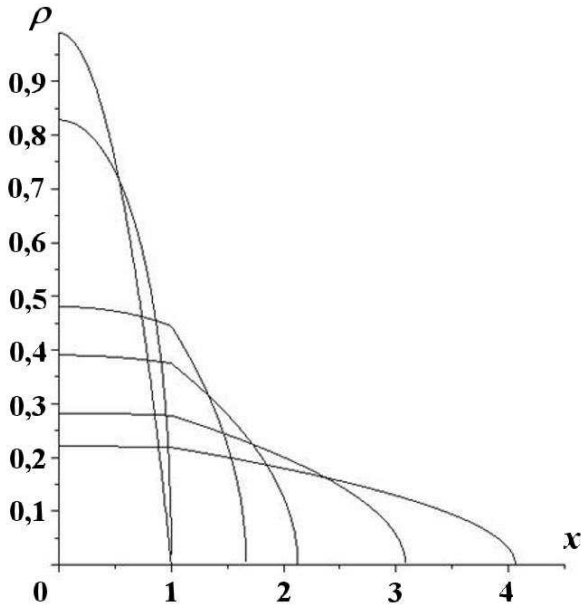


Рис. 4. Графики плотности на моменты времени  $t = 0,1; 0,5; 1,5; 2; 3; 4$

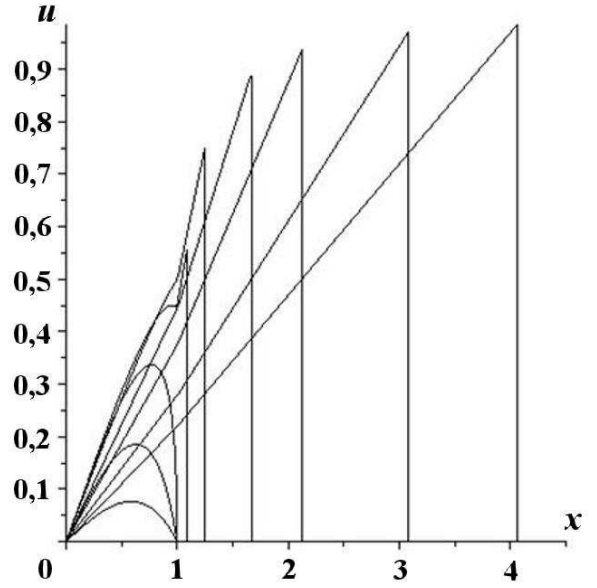


Рис. 5. Графики скорости на моменты времени  $t = 0,1; 0,25; 0,5; 0,75; 1,0; 1,5; 2; 3; 4$

**Уравнения траекторий частиц газа.** В дозвуковой области траектории частиц газа определяются из уравнения

$$\frac{dx}{dt} = u(x, t) = \frac{1}{w^2} (P - Q + 2xw). \quad (42)$$

Одна траектория в дозвуковой области заранее известна — это очевидная траектория  $x = x(t) \equiv 0$ . Следовательно, интеграл массы для уравнения (42) записывается в виде

$$m(t) = \int_0^{x(t)} \rho(x, t) dx = m(x_0) = \int_0^{x_0} \rho(x, 0) dx = x_0 - \frac{x_0^3}{3} = \text{const}(x_0), \quad 0 < x_0 < 1, \quad (43)$$

где  $x = x(t)$  — траектория, выходящая из точки  $(x_0, 0)$  оси  $Ox$ . Подставляя (40) в (43) и вычисляя интеграл, получаем неявное уравнение для траектории  $x = x(t)$ ,  $x(0) = x_0$ :

$$\frac{1}{3w^3} \left[ (1 + 2xw + w^2)^{3/2} - (1 - 2xw + w^2)^{3/2} \right] - \frac{2x}{w^2} = x_0 - \frac{x_0^3}{3}. \quad (44)$$

В сверхзвуковой области траектории находятся интегрированием линейного уравнения  $\frac{dx}{dt} = u(x, t) = \frac{2}{w^2} (xw - 1)$ . Траектория, выходящая из точки  $(1, w_0)$  звуковой линии, имеет уравнение

$$x \equiv x(w) = \frac{1}{2w} + \left( \frac{1}{w_0} - \frac{1}{2w_0^2} \right) w, \quad x(w_0) = 1, \quad w_0 \geq 1. \quad (45)$$

При  $w_0 = 1$  из (45) получаем уравнение правой границы течения при  $t \geq 0,5$  — линии вакуума  $x \equiv x(w) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{w} + w \right)$ .

Продолжение траектории (44) в сверхзвуковую область задается уравнением (45) с параметром

$$w_0 = \frac{1}{1 + \sqrt[3]{\frac{3x_0 - x_0^3}{2} - 1}}. \quad (46)$$

**Интегральные величины течения.** Масса  $m^+$  и полная энергия  $E^+$  газа, расположенного в области  $x \geq 0$ , определяются формулами

$$m^+ = \int_0^1 \rho(x, 0) dx = \int_0^1 (1 - x^2) dx = \frac{2}{3} = \text{const};$$

$$E^+ = \int_0^1 \left( \frac{1}{2} \rho u^2 + \rho \varepsilon \right) \Big|_{t=0} dx = \int_0^1 \frac{1}{2} p \Big|_{t=0} dx = \frac{1}{6} \int_0^1 (1 - x^2)^3 dx = \frac{8}{105} = \text{const}.$$

Функция  $I^+(t)$ , задающая импульс массы газа, расположенного в области  $x \geq 0$ , в зависимости от времени  $t$  равна  $I^+(t) = \int_0^t p(0, \tilde{t}) d\tilde{t}$ . Согласно формулам (36) и (40)  $p(0, t) = \frac{1}{3} (\rho(0, t))^3 = \frac{8}{3w^6} (\sqrt{1+w^2} - 1)^3 = \frac{8}{3} \frac{1}{(\sqrt{1+w^2} + 1)^3}$ . Поэтому

$$I^+(t) \equiv I^+(w) = \frac{4}{15w^5} [5w^2 + 4 + (w^2 - 4)(1 + w^2)^{3/2}]. \quad (47)$$

Формула (47), очевидно, справедлива и для отрицательного времени ( $w < 0$ ).

**Интегралы уравнения траекторий.** Интеграл (27) уравнения траекторий в дозвуковой области в случае уравнения состояния (36) и начальных данных (37) принимает вид ( $A = 1/3$ )

$$\frac{1}{3} (x_{0,1} + x_{0,2}) (x_{0,1}^2 - 4x_{0,1}x_{0,2} + x_{0,2}^2 + 6) = 4m(x_0). \quad (48)$$

Для дозвуковой области

$$x_{0,2} = \frac{1 - \sqrt{1 - 2xw + w^2}}{w}; \quad x_{0,1} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 2xw + w^2}}{w}. \quad (49)$$

Подставив выражения (49) в левую часть (48), после некоторых преобразований получим, как и полагается, учетверенную левую часть уравнения траекторий (44).

В сверхзвуковой области интеграл (33) в форме (35) уравнения траекторий в случае уравнения состояния (36) и начальных данных (37) принимает простой вид ( $A = 1/3; a_1 = 1$ )

$$\frac{(x_{0,2} - x_{0,1})^3}{3} = 4(m(x_0) - m(1)), \quad (50)$$

где  $m(x_0, 1) \equiv m(1) - m(x_0)$  — масса газа, заключенного в области  $x_0 < x < 1$  (между траекторией и линией вакуума). Для сверхзвуковой области

$$x_{0,2} = \frac{1 - \sqrt{1 - 2xw + w^2}}{w}; \quad x_{0,1} = \frac{1 + \sqrt{1 - 2xw + w^2}}{w}. \quad (51)$$

Подставив выражения (51) в левую часть (50), получим уравнение траектории в форме

$$-\frac{8}{3\omega^3} (1 - 2xw + w^2)^{3/2} = 4(m(x_0) - m(1)),$$

означающей, что  $m(x_0, 1) = \frac{2}{3w^3} (1 - 2xw + w^2)^{3/2}$ . То же самое следует из (41):  $m(t) = m(x_0, 1) = \int_{x(t)}^{xb} \rho(x, t) dx = \frac{2}{w^2} \int_{x(t)}^{xb} P dx = \frac{2}{3w^3} (1 - 2xw + w^2)^{3/2}$ , поскольку при  $w > 1$  на линии вакуума  $1 - 2xw + w^2 = 0$ .

**Замечание о характере траекторий в сверхзвуковой области.** Согласно (50) в сверхзвуковой области каждая точка движется таким образом, что разность соответствующих ей параметров  $x_{0,1}$  и  $x_{0,2}$  остается постоянной:  $x_{0,1} - x_{0,2} = \sqrt[3]{12(m(1) - m(x_0))} = \text{const}$ . В силу (28) на траектории выполнено также равенство

$$\left( r_0(x_{0,2}) - r_0(x_{0,1}) \right) t = x_{0,1} - x_{0,2} = \text{const}. \quad (52)$$

Чтобы найти константу в соотношении (52) для траектории, проходящей через точку  $(1, w_0)$  звуковой линии (при этом параметры  $w_0$  и  $x_0$  связаны соотношением (46)), подставим выражение (45) для координаты  $x$  на траектории как функции времени  $t$  в выражения (51) для параметров  $x_{0,1}$ ,  $x_{0,2}$ . В результате получим, что на этой траектории

$$\begin{aligned} x_{0,1} &= \frac{1}{w} - \frac{1}{w_0} + 1; & x_{0,2} &= \frac{1}{w} + \frac{1}{w_0} - 1; & \text{const} &= 2 \left( 1 - \frac{1}{w_0} \right); \\ \rho(x, t) = c(x, t) &= \frac{r_0(x_{0,2}) - r_0(x_{0,1})}{2} = \frac{2}{w} \left( 1 - \frac{1}{w_0} \right); \\ \lim_{t \rightarrow \infty} x_{0,1} &= - \lim_{t \rightarrow \infty} x_{0,2} = 1 - \frac{1}{w_0}; & \lim_{t \rightarrow \infty} r_0(x_{0,1}) &= 1 - \left( \lim_{t \rightarrow \infty} x_{0,1} \right)^2 = \lim_{t \rightarrow \infty} r_0(x_{0,2}) = \frac{2}{w_0} - \frac{1}{w_0^2}. \end{aligned} \quad (53)$$

Из (45) для предельного значения скорости на траектории, проходящей через точку  $(1, w_0)$ , получаем выражение  $\lim_{t \rightarrow \infty} u = \frac{2}{w_0} - \frac{1}{w_0^2}$ , совпадающее с предельными значениями (53) инвариантов  $r_0(x_{0,1})$  и  $r_0(x_{0,2})$ .

**Разложение функций  $\rho \equiv \rho(x, t)$  и  $u \equiv u(x, t)$  в ряды Тейлора по переменной  $t$ .** Представим функции  $\rho \equiv \rho(x, t)$  и  $u \equiv u(x, t)$ , дающие решение задачи (1), (36), (37) на отрезке  $-1 \leq x \leq 1$  при  $t < 0,5$ , в виде рядов Тейлора по переменной  $t$ :

$$\rho(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho_{nt}^0}{n!} t^n; \quad u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_{nt}^0}{n!} t^n; \quad \rho_{nt}^0 \equiv \rho_{nt}(x, 0), \quad u_{nt}^0 \equiv u_{nt}(x, 0), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (54)$$

Коэффициенты рядов определяются через выводящие производные

$$\rho_{nt} \equiv \rho_{nt}(x, t) \equiv \frac{\partial^n \rho(x, t)}{\partial t^n}, \quad u_{nt} \equiv u_{nt}(x, t) \equiv \frac{\partial^n u(x, t)}{\partial t^n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (55)$$

функций  $\rho$  и  $u$  на начальном многообразии  $\{t = 0\}$ . Выводящие производные находятся в силу системы уравнений (1) и начальных условий (37).

Сначала найдем аналитические выражения производных (55) через производные  $\rho_{kx} \equiv \rho_{kx}(x, t) \equiv \frac{\partial^k \rho(x, t)}{\partial x^k}$ ,  $u_{kx} \equiv u_{kx}(x, t) \equiv \frac{\partial^k u(x, t)}{\partial x^k}$ ,  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ , в силу уравнений (1), т. е. через внутренние координаты на бесконечном продолжении системы (1). С целью упрощения необходимых для этого преобразований используем систему уравнений (4) в инвариантах Римана в матричном виде:  $\rho_t^* =$

$$= J \rho_x^*, \quad \rho^* \equiv \begin{pmatrix} r \\ \ell \end{pmatrix}, \quad J = - \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & \ell \end{pmatrix}. \quad \text{По индукции доказывается формула}$$

$$\rho_{nt}^* = (J^n \rho_x^*)_{(n-1)x}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (56)$$

Так как  $J^n \rho_x^* = (-1)^n \begin{pmatrix} r^n r_x \\ \ell^n \ell_x \end{pmatrix} = \frac{(-1)^n}{n+1} \begin{pmatrix} (r^{n+1})_x \\ (\ell^{n+1})_x \end{pmatrix}$ , то равенство (56) можно переписать в виде  $\begin{pmatrix} r_{nt} \\ \ell_{nt} \end{pmatrix} \equiv \rho_{nt}^* = \frac{(-1)^n}{n+1} \begin{pmatrix} r^{n+1} \\ \ell^{n+1} \end{pmatrix}_{nx}$ . Поскольку  $\tilde{\rho} \equiv \begin{pmatrix} \rho \\ u \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ l \end{pmatrix}$ , то из предыдущего равенства получаем выражение для  $\tilde{\rho}_{nt}$  через производные по  $x$ :

$$\tilde{\rho}_{nt} \equiv \begin{pmatrix} \rho_{nt} \\ u_{nt} \end{pmatrix} = \frac{(-1)^n}{2(n+1)} \begin{pmatrix} r^{n+1} - l^{n+1} \\ r^{n+1} + l^{n+1} \end{pmatrix}_{nx}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (57)$$

В силу (37) для начальных значений величин  $r^{n+1}$  и  $l^{n+1}$  имеем равенства  $r^{n+1}(x, 0) = (1 - x^2)^{n+1}$ ,  $l^{n+1}(x, 0) = (-1)^{n+1} r^{n+1}(x, 0)$ ,  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Поэтому согласно формуле (57)

$$\rho_{nt}^0 \equiv \rho_{nt}(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{при } n \text{ нечетном;} \\ \frac{1}{n+1} [(1-x^2)^{n+1}]_{nx} & \text{при } n \text{ четном.} \end{cases} \quad (58)$$

Очевидно,  $\int_{-1}^x [(1-x^2)^{n+1}]_{(n+1)x} dx = \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{n+1} (1+x)^{n+1}] \Big|_{-1}^x = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{d^k}{dx^k} (1-x)^{n+1} \times \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} (1+x)^{n+1} = [(1-x^2)^{n+1}]_{nx}$ . Следовательно,

$$[(1-x^2)^{n+1}]_{nx} = \int_{-1}^x [(1-x^2)^{n+1}]_{(n+1)x} dx = (-1)^{n+1} \cdot 2^{n+1} (n+1)! \int_{-1}^x P_{n+1}(x) dx. \quad (59)$$

Здесь  $P_{n+1}(x)$  — стандартизованный полином Лежандра степени  $n+1$  [7, 8]:  $P_{n+1}(x) = \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!} \times \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (x^2 - 1)^{n+1}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Из (58), (59) получаем

$$\rho_{nt}^0 = \begin{cases} 0 & \text{при } n \text{ нечетном;} \\ -2^{n+1} n! \int_{-1}^x P_{n+1}(x) dx & \text{при } n \text{ четном.} \end{cases} \quad (60)$$

В силу (60) ряд (54) для функции плотности принимает следующий вид:

$$\rho(x, t) = -2 \sum_{k=0}^{\infty} (2t)^{2k} \int_{-1}^x P_{2k+1}(x) dx. \quad (61)$$

Ряд (61) суммированием легко приводится к выражению (40). При  $-1 \leq x \leq 1$   $|P_n(x)| \leq 1$ ,  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  ([8], с. 128) и функциональный ряд  $R(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} (2t)^{2k} P_{2k+1}(x)$  мажорируется рядом  $R(t) = \sum_{k=0}^{\infty} |2t|^{2k}$ . Следовательно, для любого фиксированного  $t$ :  $|w| \equiv |2t| < 1$  ряд  $R(x, t)$  равномерно сходится на отрезке  $-1 \leq x \leq 1$  и допускает почленное интегрирование на любом отрезке  $[-1, x]$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ . В силу этого равенство (61) можно переписать в виде

$$\rho(x, t) = -2 \int_{-1}^x \left[ \sum_{k=0}^{\infty} (2t)^{2k} P_{2k+1}(x) \right] dx, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2}. \quad (62)$$

Пусть  $A$  — производящая функция для многочленов Лежандра ([7], с. 324; [8], с. 120):  $A \equiv A(x, w) \equiv \frac{1}{\sqrt{1-2xw+w^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) w^n$ ,  $|x| \leq 1$ ,  $|w| < 1$ . Положим  $B \equiv B(x, w) \equiv \frac{1}{\sqrt{1+2xw+w^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) (-w)^n$ ,  $|x| \leq 1$ ,  $|w| < 1$ . Тогда, очевидно,  $\sum_{k=0}^{\infty} w^{2k} P_{2k+1}(x) = \frac{A-B}{2w}$ ,  $w \neq 0$ ,  $|w| < 1$ ,  $|x| \leq 1$  и из формулы (62) при  $w \neq 0$  получаем выражение (40) для плотности  $\rho(x, t)$  в дозвуковой области:  $\rho(x, t) = \int_{-1}^x \frac{B-A}{w} dx = \frac{1}{w^2} (P+Q-2)$ ,  $-1 < w \equiv 2t < 1$ ,  $w \neq 0$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ .

Однако справедливость полученного выражения в данном разделе обоснована только для  $|t| < 1/2$ .

Ряд (54) для скорости в дозвуковой области течения аналогичным образом приводится к виду

$$u(x, t) = -2 \sum_{k=0}^{\infty} (2t)^{2k+1} \int_{-1}^x P_{2(k+1)}(x) dx, \quad (63)$$

и в области  $-1 < w < 1$ ,  $w \neq 0$ ,  $-1 \leq x \leq 1$  суммированием получается выражение (40). В (61) и (63) можно избавиться от интегралов с помощью известной формулы ([8], с. 162)

$$\int_{-1}^x P_k(x) dx = \frac{1}{2k+1} (P_{k+1}(x) - P_{k-1}(x)).$$

## 5. Численное моделирование задачи

Численное моделирование задачи, поставленной в разд. 4, проводилось по *двумерной* методике ЭГАК [9] в эйлеровых переменных на квадратных неподвижных сетках. В расчетах в поперечном направлении ( $OY$ ) бралось 3 ячейки, а в направлении  $Ox$  в области  $-3 \leq x \leq 3$  бралось  $N = 1200$ ,  $2N$  и  $4N$  ячеек с соответствующими размерами  $h = 0,005; 0,0025; 0,00125$ . Граничные условия: *вытекания* на вертикальных границах и *жесткие стенки* — на горизонтальных. Распределение плотности задавалось по формуле  $\rho_i = 1 - x_i^2$  для  $|x_i| < 1$ ,  $\rho_i = 0$  для  $1 < |x_i| < 3$ , где  $x_i$  — координата центра  $i$ -й ячейки. Уравнение состояния использовалось в стандартной форме  $p = 2\rho e$ . Начальная внутренняя энергия вычислялась по формуле  $e = \rho^2/6$ . Поскольку в задаче рассматривается политропный газ  $p = A\rho^3$ ,  $A \equiv A(S)$ ,  $A(S) = R \exp((S - S_0)/c_V)$ , с константой  $A = 1/3$ , погрешность энтропии оценивалась по степени выполнения тождества  $p/\rho^3 \equiv 1/3$ .

Для оценки точности численных расчетов использовалась процедура отображения эталонного решения на соответствующую сетку ЭГАК. Погрешность плотности в ячейке с номером  $i$  вычислялась по формуле  $\delta\rho_i = \rho_i - \rho_i^{etalon}$ , где  $\rho_i^{etalon}$  — эталонное значение плотности в центре ячейки.

Относительная интегральная погрешность плотности (в норме  $L_1$ ) вычислялась по формуле

$$\|\delta\rho\|_{L_1} = \frac{\sum_i |\delta\rho_i| V_i}{\sum_i \rho_i^{etalon} V_i},$$

где  $V_i$  — объем  $i$ -й ячейки. Функция  $\|\delta\rho\|_{L_1}$  аппроксимировалась выражением  $C(h/h_0)^\sigma$ , где  $h_0$  — размер ячейки самой грубой сетки. Параметры  $C$  и  $\sigma$ , определяющие порядок сходимости, находились методом наименьших квадратов. Аналогичные формулы использовались для давления и энтропии.

Результаты расчетов представлены на рис. 6–9.  $(X, t)$ -диаграммы границ области приведены на рис. 6. Профили плотностей на моменты времени, предшествующие времени начала разлета области, изображены на рис. 7, после начала разлета — на рис. 8. Для большей наглядности на рисунках приведены лишь результаты, полученные в расчетах на самой грубой сетке (с  $h = 0,005$ ). Помимо этого на рис. 9 (см. также цветную вкладку) представлен эталонный профиль плотности вместе с

локальными погрешностями  $\delta\rho$  для каждой счетной сетки на момент времени  $t = 1$ . Сводные данные об относительных интегральных погрешностях плотности, давления и энтропийной функции ( $p/\rho^3$ ) газа на момент времени  $t = 1$  приведены в таблице и на рис. 10. Отметим, что в расчетах имеет место близкая к линейной сходимость решения.

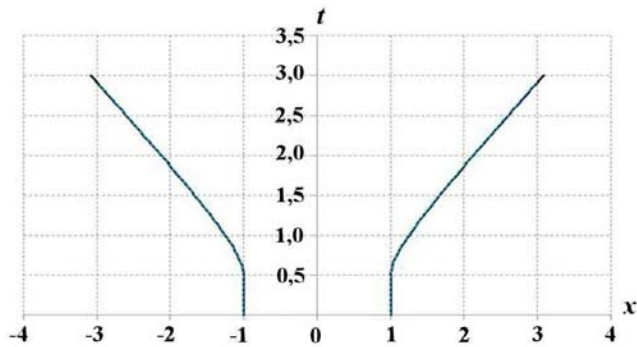


Рис. 6.  $(X,t)$ -диаграммы границ области: — — аналитическое решение; ---- — расчет на сетке размером  $N$  ( $h = 0,005$ )

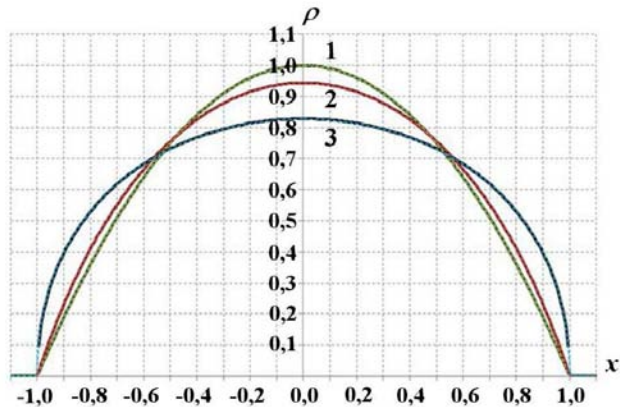


Рис. 7. Профили плотности на моменты времени до начала разлета области: 1 —  $t = 0$ ; 2 —  $t = 0,25$ ; 3 —  $t = 0,5$ ; — — аналитическое решение; ---- — расчет на сетке размером  $N$  ( $h = 0,005$ )

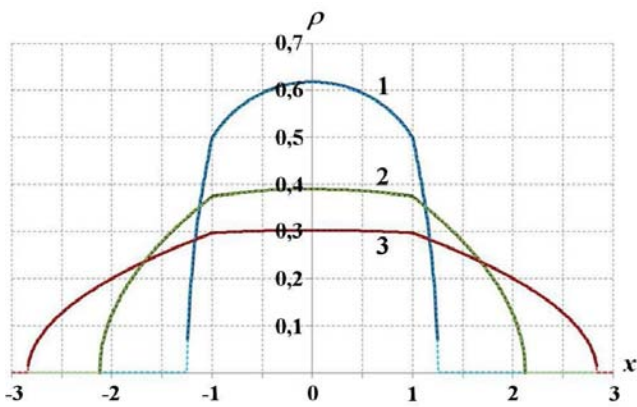


Рис. 8. Профили плотности на моменты времени после начала разлета области: 1 —  $t = 1$ ; 2 —  $t = 2$ ; 3 —  $t = 2,75$ ; — — аналитическое решение; ---- — расчет на сетке размером  $N$  ( $h = 0,005$ )

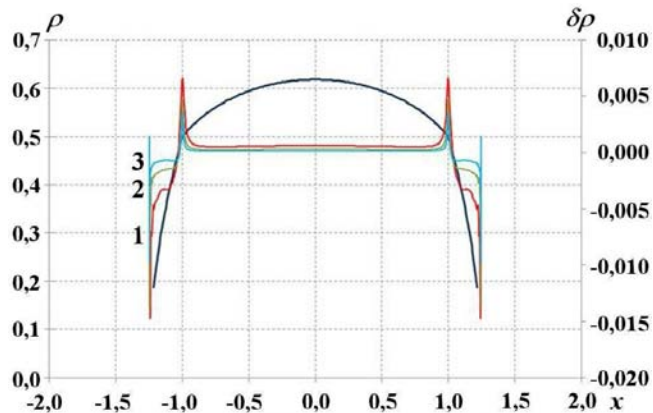


Рис. 9. Эталонный профиль плотности (—) и локальные погрешности  $\delta\rho$  на момент времени  $t = 1$ : 1 — на сетке  $N$  ( $h = 0,005$ ); 2 — на сетке  $2N$  ( $h = 0,0025$ ); 3 — на сетке  $4N$  ( $h = 0,00125$ )

**Нормы относительных интегральных погрешностей и порядки сходимости для плотности, давления и энтропийной функции газа на момент времени  $t = 1$**

Величина	$\ \delta\ _{L_1}$			$C$	$\sigma$
	$N$	$2N$	$4N$		
$\rho$	0,0024	0,0009	0,0006	0,0024	1,00
$p/\rho^3$	0,010025	0,006823	0,004396	0,01	0,59
$p$	$9,82 \cdot 10^{-6}$	$3,09 \cdot 10^{-6}$	$1,65 \cdot 10^{-6}$	$9,82 \cdot 10^{-6}$	1,29



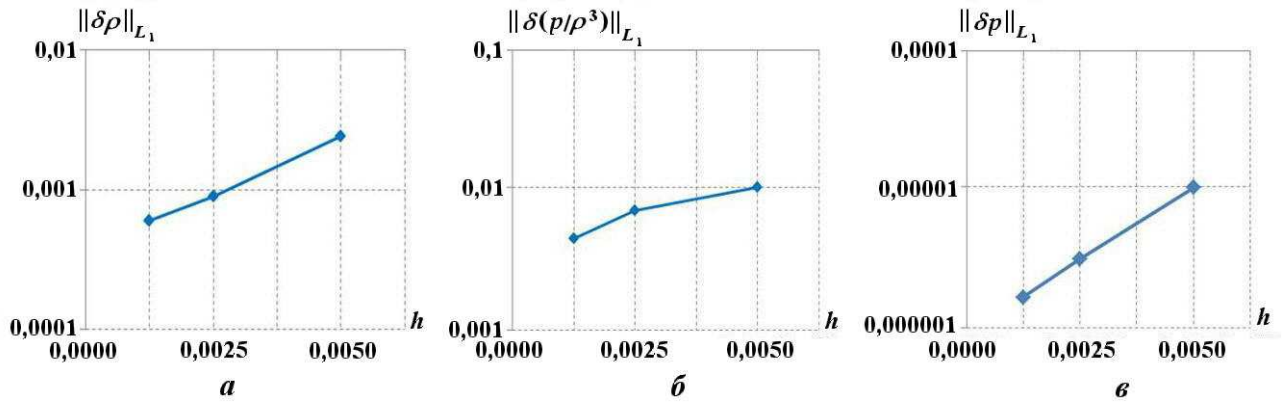


Рис. 10. Зависимости относительных интегральных погрешностей плотности (а), функции энтропии газа (б) и давления (в) от размеров счетной сетки на момент времени  $t = 1$

### Заключение

Предложен способ конструирования точных решений уравнений одномерной газовой динамики, описывающих изэнтропический разлет в вакуум идеального газа и обладающих рядом специфических свойств. Проведено подробное исследование решений найденного класса. В качестве примера детально описано решение частной задачи, которое может быть использовано как тестовое. Приведены результаты расчетов данной задачи по методике ЭГАК, которые хорошо согласуются с аналитическим решением.

При использовании описанного частного решения для тестирования численного метода можно проверить следующие его особенности: сохранение симметрии течений, степень сохранения энтропии в изэнтропических течениях, качество описания течений в окрестностях слабых и сильных разрывов и на границах с вакуумом. Дополнительную информацию о точности численного метода может дать проверка выполнения в численном решении основных качественных свойств точного решения: неподвижность звуковых точек (точек слабого разрыва), неподвижность границ течения до момента времени  $t^* = 1/2$ , движение линий вакуума (кривых градиентных катастроф) согласно закону (39).

### Список литературы

1. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1968.
2. Овсянников Л. В. Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981.
3. Станюкович К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды. М.: Наука, 1971.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
5. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1979.
6. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
7. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М.: Наука, 1986.
8. Суетин П. К. Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, 1979.

9. Янилкин Ю. В., Беляев С. П., Бондаренко Ю. А. и др. Эйлеровы численные методики ЭГАК и ТРЭК для моделирования многомерных течений многокомпонентной среды // Труды РФЯЦ-ВНИИЭФ. 2008. Вып. 12. С. 54–65.

Статья поступила в редакцию 20.11.14.

ON A MODE OF IDEAL GAS PLANAR LAYER EXPANSION INTO VACUUM /  
V. E. Shemarulin, S. S. L'vova, Yu. V. Yanilkin (FSUE "RFNC-VNIIEF", Sarov, Nizhny  
Novgorod Region).

We have discovered and investigated in detail the class of exact solutions of the gas dynamic equations that describe the isentropic ideal gas expansion into vacuum, when the gas fills a finite-thickness plane layer, in the case of specifically preset initial distributions of gas-dynamic parameters at the adiabatic index of 3.

As an example, the particular case with the zero gas initial velocity, while the initial density velocity, in accordance with quadratic law, turns into zero on the gas-vacuum interface. The obtained particular solution can be used for testing the techniques and programs for numerical solving the gas dynamics problems.

*Keywords:* 1D gas dynamics equations, ideal gas, isentropic expansion into vacuum, exact solutions, numerical solution.

---