УДК 539.17

К ВОПРОСУ О ПРИМЕНИМОСТИ ДИФФУЗИОННОЙ ТЕОРИИ В СЛУЧАЕ СРЕДЫ С ВЫСОКОЙ АКТИВНОСТЬЮ

Н. Б. Бабичев

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Показано, что при постоянной оптической толщине системы увеличение активности приводит к повышению точности диффузионного приближения.

Ключевые слова: уравнение диффузии, односкоростное уравнение переноса нейтронов, оптическая толщина.

Введение

В работе Пайерлса [1] на основе односкоростного уравнения переноса нейтронов в однородных шарах определен критический радиус R_* для случая бесконечной активности (мультипликации) $h = \infty$.

В. Г. Заграфов в статье [2], отвлекшись от вопроса о применимости диффузионной теории, разложил в ряд Тейлора вытекающее из нее условие критичности однородного активного шара по параметру $\frac{1}{h} << 1$ и таким образом тоже нашел предельное (при $h \to \infty$) значение критического радиуса. Оно с точностью до одного процента совпало с решением Пайерлса [1]. Поэтому в статье [2] утверждается, что, несмотря на применимость диффузионного приближения в противоположном случае $(h-1<<1)$, диффузионное критическое условие для шара справедливо при любых $h > 1$, в том числе и при $h = \infty$. Это обстоятельство В. Г. Заграфов назвал парадоксальным фактом.

Цель данной статьи заключается в объяснении феномена, обнаруженного В. Г. Заграфовым.

1. Исследование вопроса о справедливости теории диффузии нейтронов в предельном случае $h \to \infty$ и при $h >> 1$

В рамках асимптотической теории Ю. А. Романова [3] в случае однородных шаров из делящихся материалов справедливо уравнение диффузии

$$\nabla^2 n_D(r) + \left(\frac{\lambda_D}{V} + \alpha\right)^2 (\mathrm{tg}\varphi)^2 n_D(r) = 0, \qquad (1)$$

которое надо решать совместно с трансцендентным уравнением

$$h\alpha\varphi = \left(\frac{\lambda_D}{V} + \alpha\right)\mathrm{tg}\varphi. \qquad (2)$$

Выше использованы следующие обозначения: V – скорость нейтронов; $\alpha = n_я\left(\sigma_s + \sigma_f + \sigma_c\right)$ – обратный полный пробег нейтронов в среде с плотностью ядер $n_я$; $\beta = h\alpha$, $h = \dfrac{\nu\sigma_f + \sigma_s}{\sigma_s + \sigma_f + \sigma_c}$ – активность вещества; $\sigma_s, \sigma_f, \sigma_c$ – элементарные (микроскопические) сечения рассеяния, деления и поглощения нейтронов; ν – среднее число вторичных нейтронов, испускаемых в одном акте деления ядра.

Из соотношения (2) следует, что решение диффузионной задачи на главные собственные значения λ_D в случае шара с радиусом R выглядит следующим образом:

$$\lambda_D = \alpha V\left(\frac{h\varphi}{\mathrm{tg}\varphi} - 1\right), \qquad (3)$$

$$\varphi = \frac{\pi}{h\alpha R + 0{,}71}, \qquad (4)$$

где αR – оптическая толщина однородного шара.

Если $h\alpha R >> 1$, то $\varphi << 1$ и

$$\mathrm{tg}\varphi \approx \varphi\left(1+\frac{\varphi^2}{3}\right), \quad (5)$$

$$\lambda_D \approx \alpha V\left[\frac{h}{\left(1+\frac{\varphi^2}{3}\right)}-1\right]. \quad (6)$$

С учетом (6) вместо (3) имеем:

$$\lambda_D \approx \alpha V\left(h-1-\frac{h\varphi^2}{3}\right)=\lambda_\infty-\frac{\alpha Vh}{3}\left(\frac{\pi}{h\alpha R+0,71}\right)^2. \quad (7)$$

При $h \to \infty$

$$\lambda_D = \lambda_\infty. \quad (8)$$

Таким образом, парадокс В. Г. Заграфова не существует. Иначе говоря, диффузионная теория в предельном случае $h \to \infty$ применима и выполняется равенство (8).

Из формулы (8) видно, что при некотором ограничении на оптическую толщину αR в случае $h >> 1$ результаты аналитических вычислений должны обладать высокой точностью.

2. Результаты аналитических вычислений и численного расчета, выполненного по одной из математических методик [4]

В качестве примера рассмотрим однородный активный шар с оптической толщиной αR = 0,455 (α = 0,86742 1/см, $V = 10^9$ см/с) при конечном, но очень большом значении $h = 10^4$.

Вычисления по формуле (3) дали следующий результат:

$$\lambda_D = 867337{,}4 \cdot 10^7 \text{ 1/с}. \quad (9)$$

Численное решение кинетического уравнения привело к значению

$$\lambda_{\text{расч}} = 867422{,}4 \cdot 10^7 \text{ 1/с}. \quad (10)$$

В итоге оказалось, что отличия величин λ_D и λ_∞ пренебрежимо малы:

$$\frac{\lambda_\infty-\lambda_D}{\lambda_D} \approx 0{,}0005\ \%, \quad (11)$$

т. е. в рассмотренном случае диффузионное приближение характеризуется чрезвычайно высокой точностью.

Заключение

Из представленных в статье теоретических материалов следует, что при увеличении активности $h > 1$ возрастает точность диффузионных соотношений.

Данное обстоятельство связано с тем, что рост интенсивности делений приводит к уменьшению относительной вероятности вылета нейтронов из системы в единицу времени.

Аналогичная ситуация имеет место и в том хорошо известном случае, когда при фиксированном значении активности h увеличивается оптическая толщина и благодаря этому за счет упругих рассеяний нейтроны забалтываются внутри системы, тем самым уменьшая утечку.

Список литературы

1. Peierls R. Critical conditions in neutron multiplication // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1939. Vol. 35. Part. 4. P. 610–615.

2. Заграфов В. Г. Секторный метод расчета критических параметров тел произвольной формы из делящегося материала // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 1993. Вып. 3. С. 11–14.

3. Романов Ю. А. Критические параметры реакторных систем. Точные решения односкоростного кинетического уравнения и их использование для решения диффузионных задач (усовершенствованный диффузионный метод). М.: Госатомиздат, 1960. С. 3–26.

4. Шагалиев Р. М., Гребенников А. Н., Артемьев А. Ю., Будников В. И. Развитие основных методик и программ ИТМФ // Журнал Атом, 2011, № 50–51.

5. Ахиезер А., Померанчук И. Я. Некоторые вопросы теории ядра. Л.: Оборонгиз, 1950.

Приложение

Уравнение переноса нейтронов в активных однородных шарах и его предельные решения

В работе [1] Пайерлс за основу взял односкоростное интегральное уравнение

$$n(x,y,z,t)=\frac{\beta}{4\pi}\int\frac{dx'dy'dz'}{r^2}n(x',y',z')\exp\left[-\left(\alpha+\frac{\lambda}{V}\right)r\right], \quad (\text{П}.1)$$

где $r=\sqrt{(x'^2+y'^2+z'^2)}$.

В критическом состоянии $\lambda = 0$ и уравнение (П.1) превращается в

$$n(x, y, z) = \frac{\beta}{4\pi} \int \frac{dx' dy' dz'}{r^2} n(x', y', z') e^{-\alpha r}. \qquad (\text{П.2})$$

При выполнении условия $h >> 1$, т. е. $\beta >> \alpha$, можно пренебречь показателем в экспоненте, входящей в правую часть (П.2), так как радиус шара значительно меньше длины свободного пробега нейтрона. В этом случае после интегрирования по углам уравнение (П.2) перешло в

$$\frac{2}{\beta_* R_*} f(x) = \int_0^1 dx' f(x') \ln \frac{x + x'}{|x - x'|}. \qquad (\text{П.3})$$

Здесь $f(x) = xn(x)$ и R_* – критический радиус шара.

В работе [1] найдено следующее приближенное решение уравнения (П.3):

$$R_* \approx \frac{2}{1{,}57\beta_*} = \frac{1}{0{,}78\beta_*}. \qquad (\text{П.4})$$

Этот результат справедлив в предположении равенства нулю параметра α.

В книге [5] решение Пайерлса (П.4) уточнено за счет замены экспоненты $e^{\alpha r}$ в (П.2) на ее разложение $(1 - \alpha R)$, учитывающее конечность α, и в результате этого получено следующее предельное условие критичности однородного шара:

$$\frac{1}{\beta_* R_*} = 0{,}78 - 0{,}39\alpha_* R_*. \qquad (\text{П.5})$$

Статья поступила в редакцию 15.01.2015