

НЕЙТРОННЫЕ ПОЛЯ ВНУТРИ И ЗА ПРЕДЕЛАМИ ОДНОРОДНЫХ ГЛУБОКОПОДКРИТИЧНЫХ ШАРОВ

Н. Б. Бабичев, А. А. Севастьянов

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Получены приближенные аналитические решения интегрального уравнения переноса нейтронов в однородных шарах из произвольных делящихся материалов.

Выявлены интересные с методической точки зрения особенности формирования функции распределения нейтронов внутри шаров, находящихся в состояниях глубокой подкритики.

Ключевые слова: уравнение переноса нейтронов, собственные функции, собственные значения, особая область (О.О) изменения физических параметров.

Введение

В статье исследуются нейтронно-кинетические процессы, протекающие в активных однородных шарах.

Ниже за основу принято односкоростное интегральное уравнение переноса нейтронов и предполагается, что эволюция плотности нейтронов во времени подчиняется экспоненциальному закону

$$n(t, r) = n(r) \exp(\lambda t), \quad (1)$$

$0 \leq r \leq R$, R – радиус шара,

$$\lambda(t \geq t_0) = \left[\frac{1}{N(t)} \frac{\partial N(t)}{\partial t} \right]_{t=t_0} = \text{const.} \quad (2)$$

Это значение логарифмической производной от полного числа нейтронов в системе, полученное к моменту t_0 выхода решения нестационарного кинетического уравнения на равновесный стационарный режим.

Основная цель статьи заключается в нахождении приближенных аналитических решений интегрального уравнения для радиальной зависимости нейтронной плотности $n(r)$ и для угловых распределений нейтронов в произвольной точке наблюдения $0 \leq r \leq R$.

Кроме того, ниже из уравнения баланса числа нейтронов в системе, в которое входят $n(r)$ и векторный поток, определены величины λ и $K_{эф}$.

Отметим, что в работе [1] получены приближенные формулы для λ и представлены зависимости $n(r)$, имеющие место в некоторых простых частных случаях.

В данной статье решается существенно более общая, чем в работе [1], задача по нейтронной кинетике. При этом в ней наряду с теоретическими материалами содержатся результаты аналитических вычислений и численных расчетов.

Для нахождения численных решений односкоростного кинетического уравнения применяются методика «Монте-Карло» [2] и одна из математических программ [3].

1. Метод нахождения аналитических решений

В основу используемого ниже метода заложена следующая логика:

1) Узел, связанный с параметрической зависимостью нейтронной плотности от λ , развязывается очень просто.

Дело в том, что имеется в распоряжении формула В. П. Незнамова (см. [1])

$$\lambda = \frac{V}{R} (\beta R)^{0,83} \left[1,57 - \frac{2}{\beta R} - \frac{1}{h} (\beta R)^{0,17} \right], \quad (3)$$

R – радиус шара; V – скорость нейтронов; $\alpha = n_{\text{я}} (\sigma_s + \sigma_f + \sigma_c)$ – обратный полный пробег нейтрона в среде с плотностью ядер $n_{\text{я}}$, которая в случае рассматриваемых здесь однородных шаров постоянна;

$\beta = h\alpha$, $h = \frac{\nu\sigma_f + \sigma_s}{\sigma_s + \sigma_f + \sigma_c}$ – активность вещества; σ_s , σ_f , σ_c – элементарные (микроскопические) сече-

ния рассеяния, деления и поглощения нейтронов; ν – среднее число вторичных нейтронов, испускаемых в одном акте деления ядра.

Формула (3) уникальна с точки зрения ширины диапазона своей применимости. Ее можно использовать в случае надкритических шаров, если $\beta R \leq 3,5$.

При значениях $\lambda \approx -\alpha V$ погрешность результатов аналитических вычислений λ по формуле (3) меньше одного процента.

В предельном случае стремления оптической толщины шара αR к нулю погрешность формулы (3) не оценивалась, но она приводит к результату ($\lambda \rightarrow 0$), который соответствует физическому смыслу (количество нейтронов в пустом пространстве от времени не зависит).

2) Ниже учитывается, что для определения всех характеристик (например, векторный поток), в том числе и при $r > R$, достаточно найти нейтронную плотность внутри шара $n_{in}(r)$.

3) Поставленная задача решается от обратного. Временно предполагается, что функция $n_{in}(r)$ известна. Ответим на вопрос о том, как по функции $n_{in}(r)$ найти остальные решения.

Для нейтронной плотности за пределами шара ($r > R$) справедлива формула

$$n_{ex}(r) = \frac{\beta}{2} \int_{\mu_0}^1 d\mu \Omega_{ex}(\mu), \quad (4)$$

Ω_{ex} – определенным образом нормированное угловое распределение скалярного потока нейтронов:

$$\Omega_{ex}(\mu) = \theta(\mu - \mu_0) \exp(\alpha S_-) \int_{S_-}^{S_+} dS n_{in}[r'(S)] e^{-\gamma \frac{S}{R}}. \quad (5)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\gamma = \left(1 + \frac{\lambda}{\alpha V} \right) \alpha R; \quad (6)$$

$\theta(\mu - \mu_0)$ – ступенчатая функция, равная единице при $\mu \geq \mu_0$ и нулю при $\mu < \mu_0$;

$$\mu_0 = \sqrt{1 - \left(\frac{R}{r} \right)^2}; \quad (7)$$

$\vartheta_0 = \arccos \mu_0$ – угол, под которым половина шара видна из произвольной точки наблюдения $r > R$.

$$S_{\pm}(\mu) = r \left(\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \mu_0^2} \right). \quad (8)$$

$$r'(S) = \sqrt{r^2 + S^2 - 2Sr\mu}, \quad (9)$$

$$\mu = \frac{\vec{r}\vec{V}}{rV} \quad (10)$$

– это косинус угла между векторами \vec{r} и \vec{V} .

Скалярный поток нейтронов $nV = \omega(r)$ складывается из односторонних составляющих ω_{\pm} . Так как шар помещен в пустоту, то отраженные нейтроны отсутствуют и $\omega_{-ex} = 0$, $\omega_{ex} = \omega_{-ex} + \omega_{+ex} = \omega_{+ex}$, где

$$\omega_{+ex}(r) = \frac{\beta V}{2} \int_{\mu_0}^1 d\mu \Omega_{ex}(\mu). \quad (11)$$

Определим векторные потоки нейтронов вне шара:

$$j_{ex}(r) = j_{+ex}(r) = \frac{\beta V}{2} \int_{\mu_0}^1 d\mu F_{ex}(\mu), \quad (12)$$

$$F_{ex}(\mu) = \mu \Omega_{ex}(\mu), \quad (13)$$

F_{ex} – угловое распределение векторных потоков нейтронов, которые иногда называют числом пересечений сферических поверхностей с радиусами r .

Теперь приведем формулы, по которым вычисляются физические характеристики внутри шара:

$$\Omega_{in}(\mu) = \int_0^{S_{\max}} dS n_{in}[r'(S)] \exp\left[-\gamma \frac{S}{R}\right], \quad (14)$$

$$F_{in}(\mu) = |\mu| \Omega_{in}(\mu), \quad (15)$$

$$S_{\max}(r, \mu) = r\mu + \sqrt{R^2 - r^2(1 - \mu^2)}, \quad (16)$$

$S_{\max}(R, \mu \leq 0) = 0$ и $S_{\max}(R, \mu > 0) = 2\mu R$, т. е. на поверхности шара все нейтроны летят в сторону от его центра.

$$\omega_{+in}(r) = \frac{\beta V}{2} \int_0^1 d\mu \Omega_{in}(\mu); \quad \omega_{-in}(r) = \frac{\beta V}{2} \int_{-1}^0 d\mu \Omega_{in}(\mu), \quad (17)$$

$$\omega_{-in}(R) = j_{-}(R) = 0,$$

$$j_{+in}(r) = \frac{\beta V}{2} \int_0^1 d\mu F_{in}(\mu); \quad j_{-in}(r) = \frac{\beta V}{2} \int_{-1}^0 d\mu F_{in}(\mu). \quad (18)$$

2. Аналитические решения в случае вырожденного ядра интегрального уравнения переноса нейтронов

Пусть $\lambda = -\alpha V$.

2.1. Решения, справедливые внутри активных шаров

2.1.1. Нейтронные поля в шарах из произвольных делящихся материалов

При поиске нейтронной плотности $n_{in}(r)$ ниже используется метод последовательных приближений.

Можно показать (см. например, [4]), что в случае однородных шаров интегральное уравнение переноса нейтронов, записанное в безразмерном виде для функции

$$f(x) = x n_{in}(x), \quad x = \frac{r}{R}, \quad (19)$$

выглядит следующим образом:

$$f(x) = \frac{\beta R}{2} \int_0^1 dz f(z) K(z, x), \quad (20)$$

$$K(z, x) = Ei[-\gamma(z+x)] - Ei[-\gamma|z-x|]. \quad (21)$$

После разложения интегральных экспонент в ряд Тейлора функцию двух переменных $K(z, x)$ представим в виде следующей суперпозиции:

$$K(z, x) = K_0(z, x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot n!} \left\{ [\gamma(z+x)]^n - [\gamma|z-x|]^n \right\}, \quad (22)$$

$$K_0(z, x) = \ell n \left| \frac{z+x}{z-x} \right|. \quad (23)$$

K_0 – это вырожденное ядро.

Если найдено нулевое приближение $f^{[0]}(x)$, то решение в i -м приближении можно определить, применив итерационное соотношение

$$f^{[i]}(x) = \frac{\beta R}{2} \int_0^1 dz f^{[i-1]}(z) K(z, x). \quad (24)$$

В качестве нулевого приближения возьмем функцию

$$n_{in}^{[0]}(r) = 1 - B \left(\frac{r}{R} \right)^2. \quad (25)$$

Постоянную B определим двумя способами.

Во-первых, потребуем, чтобы функция (25) удовлетворяла интегральному уравнению хотя бы в двух точках ($r = 0$ и $r = R$):

$$n_{in}(0) = \frac{\beta}{2} \int_{-1}^{+1} d\mu \int_0^R dS \left[1 - B \left(\frac{S}{R} \right)^2 \right] = \frac{\beta R}{3} (3 - B), \quad (26)$$

$$n_{in}(R) = \frac{\beta}{2} \int_{-1}^{+1} d\mu \int_0^{2R\mu} dS \left[1 - B \frac{R^2 + S^2 - 2RS\mu}{R^2} \right] = \frac{\beta R}{6} (3 - 2B). \quad (27)$$

С другой стороны, из (25) имеем:

$$\xi = \frac{n_{in}(R)}{n_{in}(0)} = 1 - B. \quad (28)$$

Этих условий достаточно для нахождения B и ξ :

$$B = \frac{6 - \sqrt{12}}{4} \approx 0,634, \quad \xi = 1 - B \approx 0,366. \quad (29)$$

Во-вторых, обратимся к уравнению (20) с вырожденным ядром и воспользуемся приближенным соотношением

$$\int_0^1 dz f(z) \ell n \left| \frac{z+x}{z-x} \right| \approx (1,57 \pm 0,02) f(x), \quad (30)$$

вывод которого представлен в книге [5].

Тогда получаем

$$n_{in}^{[1]}(x) \approx \frac{1,57}{2} (\beta R) n_{in}^{[0]}(x). \quad (31)$$

Положив $x = 1$ и применив в левой и правой частях (31) формулы (25) и (27), приходим к условию

$$\frac{\beta R}{6}(3-2B) = \frac{1,57}{2}(1-B)(\beta R). \quad (32)$$

Отсюда следует, что $B \approx 0,631$.

Окончательно положим:

$$B = 0,63; \quad \xi = 0,37. \quad (33)$$

Первое приближение после взятия интеграла в

$$f^{[1]}(x) = \frac{\beta R}{2} \int_0^1 dz (1-Bz^2) \ln \left| \frac{z+x}{z-1} \right|, \quad x \leq 1, \quad (34)$$

приводит к искомому ответу

$$n_{in}(x) = n_{in}^{[1]}(x) = \frac{\beta R}{2} \left\{ 1 - \frac{(1-x^2)}{2x} \left[1 - \frac{B}{2}(1+x^2) \right] \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) - \frac{B}{6}(1+3x^2) \right\}. \quad (35)$$

Введя функцию $y(x)$ (главная часть решения)

$$y(x) = 1 + \frac{x^2-1}{2x} \left[1 - \frac{B}{2}(1+x^2) \right] \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|, \quad (36)$$

полученные зависимости можно записать в следующей обобщенной форме:

$$n_{in}(x \leq 1) = \frac{1}{1,58} \left[y(x) - \frac{B}{6}(3x^2+1) \right], \quad B = 0,63. \quad (37)$$

Здесь принята нормировка плотности нейтронов на единицу в центре шара.

Отметим, что результаты вычислений $n(r)$ по формуле (37) и соответствующих численных расчетов

$n_{расч}(r)$ совпадают с точностью $\left| \frac{\Delta n}{n} \right| \leq 0,4\%$ (см. таблицу).

Зависимость $n(r)$ при $r \leq R = 6,359$ см для шара со значением $\lambda = -\alpha V$

r , см	0	3,4179	4,5644	5,6704	6,359
n	1	0,8076	0,6653	0,4983	0,3671
$n_{расч}$	1	0,804	0,663	0,499	0,368
$\frac{n}{n_{расч}}$	1	1,004	1,0032	0,9993	0,9977

Решение (37) справедливо для шара из произвольного активного вещества, если, конечно, ядро интегрального уравнения вырождено.

$$n_{in}(0) = 1, \quad n_{in}(R) = \xi = \frac{1}{1,58} \left(1 - \frac{2B}{3} \right) = 0,3671. \quad (38)$$

К этому граничному значению функция $n(r)$ стремится по закону

$$n(r \rightarrow R) = 0,3671 \left[1 + (1-B) \frac{(r-R)}{R} \ln \left| \frac{r-R}{2R} \right| \right]. \quad (39)$$

При $r \ll R$ справедлива параболическая зависимость

$$n(r \ll R) = \frac{2}{1,58} \left[1 - \frac{B}{3} - \frac{1+B}{3} \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right], \quad (40)$$

а вблизи границы шара в случае $r \rightarrow R$ логарифмическая производная характеризуется логарифмической расходимостью:

$$\left(\frac{1}{n} \frac{dn}{dr} \right)_{r \rightarrow R} = \frac{1-B}{\xi R} \ln \left| \frac{r-R}{2R} \right| \rightarrow -\infty. \quad (41)$$

Можно показать, что на границе шара расходятся все высшие производные:

$$\left[\frac{d^m}{dr^m} \left(\frac{1}{n} \frac{dn}{dr} \right) \right]_{r \rightarrow R} = (-1)^m \frac{1-B}{\xi R} \frac{(m-1)!}{[r-R]^m}, \quad m \geq 1. \quad (42)$$

Опустив выкладки, приведем формулу для угловых распределений скалярных потоков:

$$\Omega_{in}(r, \mu) = AH(\zeta, x), \quad x = \frac{r}{R} \leq 1, \quad (43)$$

A – нормировочная постоянная,

$$H(\zeta, x) = \zeta \left[1 - Bx^2 + B\zeta \left(\mu x - \frac{\zeta}{3} \right) \right], \quad (44)$$

$$\zeta = \zeta(x, \mu) = \mu x + \sqrt{1 - x^2 (1 - \mu^2)}. \quad (45)$$

При $r \rightarrow 0$ угловое распределение Ω_{in} превращается в константу.

На границе шара

$$\Omega_{in}(R, \mu) = a_1 \mu + b_1 \mu^3. \quad (46)$$

Определим односторонние векторные потоки нейтронов внутри шара ($r \leq R$).

$$j_{in\pm}(r) = \pm \frac{\beta R}{2} \int_0^{\pm 1} d\mu \int_0^{S_{\max}} dS n_{in}^{[0]} \left(\sqrt{S^2 + r^2 - 2Sr\mu} \right). \quad (47)$$

Функция двух переменных $S_{\max}(r, \mu)$ определена формулой (16).

При нахождении векторных потоков сложные выкладки привели тоже к непростым по своему виду следующим решениям:

$$j_{in\pm}(x) = \frac{\beta RV}{6} \left\{ (1 - Bx^2) [T(x) \pm x] + BT_{\pm}(x) \right\}, \quad (48)$$

$$j_{in-}(x) + j_{in+}(x) = j_{in}(x) = \frac{\beta RV}{6} \left\{ 2(1 - Bx^2) + B[T_+(x) + T_-(x)] \right\}, \quad (49)$$

$$T_{\pm}(x) = \frac{(1 \pm x)^2}{20x^2} \left\{ (1 \mp x)^2 \left[12\sqrt{1-x^2} - 5(2 \mp x) \right] + (1-x)^2 (3x \mp 2) \right\}, \quad (50)$$

$$T(x) = \frac{1}{x^2} \left[1 - (1-x^2)\sqrt{1-x^2} \right]. \quad (51)$$

2.1.2. Формулы, предназначенные для вычислений λ и $K_{эф}$

Величины λ и $K_{эф}$ определяются из уравнения баланса полного количества нейтронов в системе

$$\lambda = \lambda_{\infty} - WV = [\alpha(h-1) - W]V, \quad (52)$$

$$W = \frac{J_{in}(R)}{N_{in}(R)}, \quad (53)$$

$$J_{in}(R) = 4\pi R^2 j_{in}(R); \quad N_{in}(R) = 4\pi \int_0^R dr' r'^2 n_{in}(r'). \quad (54)$$

С одной стороны, $K_{\text{эф}}$ это число, на которое надо поделить ν , чтобы подкритическая система стала критической (т. е. $\nu_* = \frac{\nu}{K_{\text{эф}}}$), с другой –

$$K_{\text{эф}} = \frac{\nu\alpha_f}{\alpha_f + \alpha_C + W_*}, \quad (55)$$

W_* – эффективное макроскопическое сечение поглощения нейтронов, связанное с их утечкой из шара.

Для интегральных характеристик (54) справедливы следующие соотношения:

$$J_{in}(R) = 4\pi R^2 \left(\frac{\beta R V}{3} \right) \left(1 - \frac{3}{5} B \right), \quad (56)$$

$$N_{in}(R) = 2\pi R^3 \left(\frac{\beta R}{2} \right) \left(1 - \frac{5}{9} B \right). \quad (57)$$

После подстановки (56) и (57) в балансное уравнение (52) имеем:

$$\lambda = -\frac{C_0}{h} \left(\frac{V}{R} \right), \quad (58)$$

где константа

$$C_0 = \frac{12(5-3B)}{5(9-5B)} = 1,276, \text{ так как } B = 0,63. \quad (59)$$

Чтобы узнать точность полученных выше формул, в качестве примера рассмотрим шар с активностью $h = 1,68$ и с радиусом $R = 6,359$ см.

Приняв $V = 10^9$ см/с, из формулы (58) при значении $\alpha = 0,1192$ 1/см получаем $\lambda = -\alpha V = -11,922 \cdot 10^7 \frac{1}{c}$, что с точностью до $\left| \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \right| = 0,1\%$ совпадает с результатом соответствующего численного расчета $\lambda_{\text{расч}} = -11,934 \cdot 10^7$ 1/с.

Вычисления по формуле (55) привели практически к такому же значению параметра $K_{\text{эф}} = 0,6006$, что и расчет «Монте-Карло»: $K_{\text{эф}} = 0,6000$.

При этом коэффициент размножения нейтронов в системе $\frac{1}{1-K_{\text{эф}}} = 2,5$.

2.2. Поле нейтронов, вылетевших из шара

Теперь с помощью формул, приведенных в разделах 1 и 2, определим плотность нейтронов для случая $r > R$.

$$n_{ex}(r) = \frac{\beta R}{2} \int_{\mu_0}^1 d\mu e^{-\alpha \cdot S_-(\mu)} \int_{S_-(\mu)}^{S_+(\mu)} dS \left[1 - B \frac{S^2 + r^2 - 2rS\mu}{R^2} \right]. \quad (60)$$

Данное выражение можно преобразовать так:

$$n_{ex} \left(x = \frac{r}{R} \right) = \beta R x \int_{\mu_0(x)}^1 d\mu \sqrt{\mu^2 - \mu_0^2} \left[\Psi_1(x) + \mu^2 \Psi_2(x) \right] \exp \left[\alpha R x \left(\mu - \sqrt{\mu^2 - \mu_0^2} \right) \right], \quad (61)$$

$$\Psi_1(x) = 1 - Bx^2 \left[1 - \frac{\mu_0^2}{3} \right]; \quad \Psi_2(x) = \frac{2B}{3} x^2; \quad \mu_0(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}. \quad (62)$$

Интеграл по $d\mu$ берется, но имеет очень сложную аналитическую структуру из комбинации степенных функций, экспонент и интегральных экспонент. Поэтому укажем лишь решение, справедливое в ближней к шару зоне внешнего пространства $\left(x-1 \ll 1, \frac{R}{r}-1 \ll 1\right)$:

$$n_{ex}(x) = \frac{\beta R}{2} \left\{ 1 - \frac{B}{6}(5x^2 - 1) - \left[1 - \frac{B}{2}(1+x^2) \right] \frac{x^2-1}{2x} \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right) \right\} \quad (63)$$

или

$$n_{ex}(x \geq 1) = \frac{1}{1,58} \left[y(x) - \frac{B}{6}(5x^2 - 1) \right], \quad x-1 \ll 1, \quad (64)$$

функция $y(x)$ определена формулой (36).

В случае скалярных потоков получены следующие выражения:

$$\Omega_{ex}(r, \mu) = A_1 \exp(\alpha R \zeta_2) [H(\zeta_2) - H(\zeta_3)] \theta(\mu - \mu_0), \quad x \geq 1, \quad (65)$$

$$\zeta_2 = \zeta_2(x, \mu) = x \left(\mu + \sqrt{\mu^2 - \mu_0^2} \right), \quad (66)$$

$$\zeta_3 = \zeta_3(x, \mu) = x \left(\mu - \sqrt{\mu^2 - \mu_0^2} \right). \quad (67)$$

Приведем формулы, по которым определяется угловое распределение векторных потоков нейтронов за пределами шара:

$$F_{ex}(x, \mu) = \frac{\beta R V \mu}{2 j_{ex}(x)} \exp \left[\alpha R V \left(\mu - \sqrt{\mu^2 - \mu_0^2} \right) \right] \Delta H_{ex} \theta(\mu - \mu_0); \quad (68)$$

$$x \geq 1; \quad \mu_0(x) = \frac{1}{x} \sqrt{x^2 - 1}; \quad \theta(\mu - \mu_0) = \begin{cases} 1, & \mu \geq \mu_0; \\ 0, & \mu < \mu_0; \end{cases}$$

$$\Delta H_{ex} = H \left[x \left(\mu + \sqrt{\mu^2 - \mu_0^2} \right) \right] - H \left[x \left(\mu - \sqrt{\mu^2 - \mu_0^2} \right) \right]. \quad (69)$$

В окружающем шар внешнем пространстве нейтроны находятся внутри конуса, сужающегося по мере удаления точки наблюдения r от центра.

В пределе $r \rightarrow \infty$ функция $F_{ex}(r, \mu) \rightarrow \delta(1 - \mu) = \delta \left(1 - \frac{\vec{r} \vec{V}}{rV} \right)$, т. е. все нейтроны летят вдоль радиуса.

3. Аналитические решения внутри глубокоподкритических шаров

3.1. Поле нейтронов внутри шара

Ниже используются теоретические материалы раздела 2, в частности формулы, определяющие нейтронную плотность $n_m(r)$.

Далее для упрощения знак «in» не пишется.

Параметр α_0 , для которого выполняется условие $\lambda_0 = -\alpha_0 V$, уменьшим на величину $|\Delta \alpha_0 = \alpha - \alpha_0| \ll \alpha_0$, и решения будем искать в первых двух порядках теории возмущений, приведя интегральное уравнение к следующему виду:

$$f(x) = \frac{\beta R}{2} \left\{ \int_0^1 dz f(z) \ln \left| \frac{z+x}{z-x} \right| - 2\gamma \left[\int_0^x dz z f(z) + x \int_x^1 dz f(z) \right] + x\gamma^2 \int_0^1 dz z f(z) \right\}. \quad (70)$$

Здесь, как и раньше, $f(x) = xn(x)$, $x = \frac{r}{R} \leq 1$, $\gamma = \left(\alpha + \frac{\lambda}{V} \right) R$.

Величина $\Delta\alpha_0$ подчиняется условию

$$\left(\alpha_0 + \frac{\lambda}{V} \right) R = \Delta\alpha_0 R, \quad (71)$$

R – радиус шара.

Интегральное уравнение запишем, введя операторы:

$$\frac{2}{\beta R} f = \hat{U} f, \quad (72)$$

$$\hat{U} = \hat{U}_0 + \hat{U}_1 + \hat{U}_2, \quad (73)$$

$$\hat{U}_0 = \hat{U}(\gamma = 0), \quad \hat{U}_0 f = \int_0^1 dz f(z) \ln \left| \frac{z+x}{z-x} \right|. \quad (74)$$

Линейные интегральные операторы \hat{U}_1 и \hat{U}_2 определены так:

$$\hat{U}_1 = \hat{U}_{11} + \hat{U}_{12}, \quad (75)$$

$$\hat{U}_{11} f = -2\gamma \int_0^x dz z f(z), \quad (76)$$

$$\hat{U}_{12} f = -2\gamma \int_x^1 dz f(z), \quad (77)$$

$$\hat{U}_2 f = x\gamma^2 \int_0^1 dz z f(z). \quad (78)$$

Решение при $\gamma = 0$, удовлетворяющее интегральному уравнению

$$\frac{2}{\beta R} f^{[0]}(x) = \hat{U}_0 f^{[0]}(x), \quad (79)$$

которое ниже примем за нулевое приближение, уже получено в разделе 2.

Выражение (35) умножим на x :

$$f^{[0]}(x) = \frac{\beta R x}{2} \left\{ 1 + \left[1 - \frac{B}{2}(1+x^2) \right] \Phi_0(x) - \frac{B}{6}(1+3x^2) \right\}, \quad (80)$$

$$\Phi_0(x) = \frac{1-x^2}{2x} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right). \quad (81)$$

Решения уравнения (81) первого ($f^{[1]}$) и второго ($f^{[2]}$) порядков определяются по следующим формулам:

$$f^{[1]}(x) = \frac{\beta R}{2} (\hat{U}_0 + \hat{U}_1 + \hat{U}_2) f^{[0]} = f_0^{[1]}(x) + f_1^{[1]} + f_2^{[1]}. \quad (82)$$

Индексы у функций те же, что и у операторов. Они обозначают соответствующие порядки малости по величине γ .

$$f^{[2]}(x) = \frac{\beta R}{2} \left[\hat{U}_0 (f_0^{[1]} + f_1^{[1]} + f_2^{[1]}) + \hat{U}_1 (f_0^{[1]} + f_1^{[1]}) + \hat{U}_2 f_0^{[1]} \right]. \quad (83)$$

Опустим громоздкие выкладки и сразу дадим искомый ответ, в котором выделены порядки малости по γ :

$$n^{[2]}(x) = n_0(x) + \gamma n_1(x) + \gamma^2 n_2(x). \quad (84)$$

Главная часть решения $n_0(x)$ получается делением $f^{[0]}(x)$ (80) на x :

$$n_1(x) = \frac{\beta R}{2} \left\{ a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \left[\frac{B}{2} - 1 + \frac{(5-B)(1+x^2) - Bx^4}{30} \right] \phi_0(x) \right\}, \quad (85)$$

$$n_2(x) = \frac{\beta R}{2} \left\{ b_0 + b_2 x^2 + b_4 x^4 + b_6 x^6 + \frac{5-3B}{30} [1 + \phi_0(x)] \right\}, \quad (86)$$

$B = 0,63$.

Для $\phi_0(x)$ справедлива формула (81).

Введя параметр $q_0 = 1,57$, приведем следующие соотношения:

$$a_0 = \frac{1-18(1+q_0)}{18q_0} + \frac{75(1+q_0)-1}{150q_0} = 0,895, \quad (87)$$

$$a_2 = \frac{15+30q_0-B}{90q_0} = 0,435, \quad (88)$$

$$a_4 = -\frac{(1+3q_0)B}{30q_0} = -0,0764, \quad (89)$$

$$b_0 = \frac{5(5+2q_0)-2(7+3q_0)B}{30q_0} = 0,6825, \quad (90)$$

$$b_2 = -\frac{2-B}{6q_0} = -0,1454, \quad (91)$$

$$b_4 = -\frac{1}{30q_0} = 0,0212, \quad (92)$$

$$b_6 = -\frac{B}{210q_0} = -0,0019. \quad (93)$$

Сравнительные численные расчеты показали, что точность формулы (84) при условии $|\Delta\alpha_0 R| \leq 0,1$ лучше одного процента для любого расположения точки наблюдения $r \leq R$.

Например, в случае, вообще говоря, довольно сильного отклонения $|\Delta\alpha_0 R| = 0,2$ от оптической толщины вырожденного шара $\alpha_0 R$ погрешность полученного по формуле (84) результата меньше полтора процентов.

Приведем некоторые дополнительные результаты.

В центре шара справедлив Ламбертовский закон $F(r=0, \alpha \neq \alpha_0, \mu) \sim |\mu|$.

На поверхности шара угловое распределение хорошо описывается следующей суперпозицией:

$$F(R, \alpha \neq \alpha_0, \mu) = \theta(\mu) \sum_{k=2}^7 C_k \mu^k. \quad (94)$$

Коэффициенты C_k зависят от γ . При этом главные части C_2 и C_4 совпадают с соответствующими амплитудами углового распределения, представленного в разделе 2.

Анализ полученных результатов показал, что при уменьшении оптической толщины шара угловое распределение обостряется.

3.2. Формулы для логарифмической производной λ

Не останавливаясь на формулах для интегральных величин $J(R)$, $N(R)$ и $W(R)$, сразу приведем результат их подстановки в уравнение (52) баланса числа частиц:

$$C_0(1 - S_1\gamma + S_2\gamma^2) + \gamma(1 - P_1\gamma) = (\beta R)(1 - P_1\gamma + P_2\gamma^2), \quad (95)$$

$C_0 = 1,2759$ – константа,

$$S_1 = 1,3081; S_2 = 1,026; P_1 = 1,0382; P_2 = 0,6873. \quad (96)$$

Запишем решение квадратного алгебраического уравнения (95):

$$\gamma = \frac{-(1 - S_1K_0 + P_1\beta R) + \sqrt{(1 - S_1K_0 + P_1\beta R)^2 - 4(S_2K_0 - P_1 - P_2\beta R)(K_0 - \beta R)}}{2(S_2K_0 - P_1 - P_2\beta R)}. \quad (97)$$

Определив γ , находим

$$\lambda = \left(\frac{\gamma}{R} - \alpha \right) V. \quad (98)$$

Формула (98) в области ее применимости чрезвычайно точна. Действительно, из сравнения результатов выполненных вычислений и численных расчетов «на сходимость» следует, что при $\left| \frac{\Delta\alpha_0}{\alpha_0} \right| = 0,1$ ее погрешность меньше 0,1 % в λ .

4. Некоторые результаты аналитических вычислений

Ниже в аналитических вычислениях используется формула (3) первого раздела для логарифмической производной $\lambda = \frac{V}{R}(\beta R)^{0,83} \left[1,57 - \frac{2}{\beta R} - \frac{1}{h}(\beta R)^{0,17} \right]$ и принято следующее обозначение оптической толщины однородного шара:

$$p = \alpha R. \quad (99)$$

4.1. Поведение нейтронной плотности $n(r)$ в особой области

Особой областью будем называть диапазон изменения параметров, внутри которого происходит изменение характера радиальной зависимости плотности нейтронов с возникновением максимума функции $n(r)$ в зоне $0 \leq r \leq R$ (см. рис. 1).

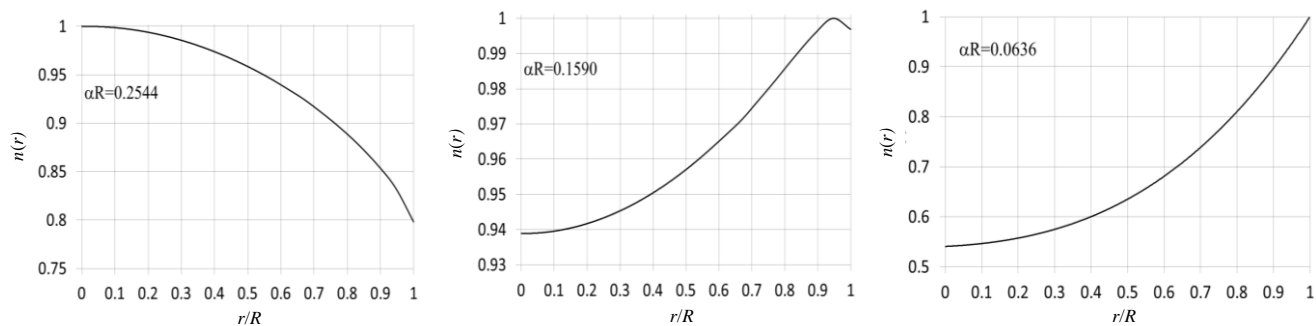


Рис. 1. Графики функции двух переменных $n(r, p = \alpha R)$, полученные для шаров с массами 3,213, 2,008, 0,803 кг при фиксированных $R = 6,359$ см и $h = 1,68$

Поскольку точность формулы (84) высока, то результаты аналитических вычислений и численных расчетов слились в единые графики, изображенные толстыми (жирными) кривыми. При $p = 0,1590$ функция $n(r)$ кроме точки минимума в центре шара имеет точку максимума с координатами $r_{\max} = 0,94R$, $n(r_{\max}) = 1$. Вариация оптической толщины с некоторыми отклонениями от значения $p = 0,1590$ приводит к смещению абсциссы точки максимума в ту или другую стороны. В результате этого происходит перестройка $n(r)$ из убывающей функции в возрастающую, что следует из графиков с $p = 0,2544$ и $p = 0,0636$ (в данных случаях шары находятся в состояниях за пределами особой области). При малой оптической толщине шара $p = 0,0636$ и $\lambda = -43,1 \cdot 10^7$ 1/с получена, вообще говоря, необычная зависимость $n(r)$ с точкой минимума в центре шара.

4.2. Общая зависимость λ от βR и h

В статьях [6] и [7] из односкоростного кинетического уравнения с постоянными параметрами α и β получена следующая формула для дискретных собственных значений с произвольным номером m :

$$\lambda_m = h\alpha V \left[\Lambda_m(\beta R) - \frac{1}{h} \right], \quad (100)$$

$\Lambda_m(\beta R)$ – универсальная функция, явный вид которой можно найти, зная геометрию системы с характерным размером R . В случае шара с радиусом R это сделать просто. Дискретные собственные значения в случае однородных шаров существуют только при значениях $\beta R > 1$, а иначе величины λ принадлежат непрерывному спектру (см. работу [8]). В предположении справедливости формулы типа (100) путем проведения аналитических вычислений по формуле (3) и с помощью численных расчетов была найдена следующая зависимость Λ от βR (рис. 2).

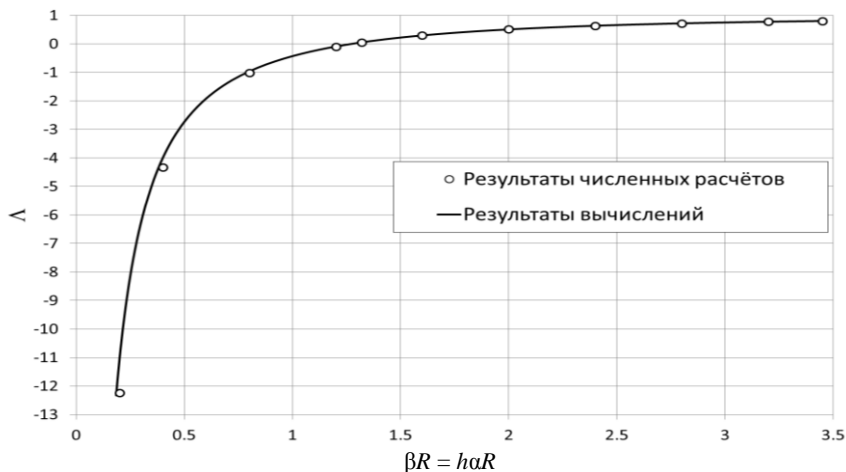


Рис. 2. График функции $\Lambda(\beta R)$, полученный при $h = 1,68$

4.3. Зависимости λ от оптической толщины шара и его активности

Характерные особенности функции $\lambda(p)$ (рис. 3) заключаются в том, что при любых h она имеет точку минимума и в случае $p \rightarrow 0$ обращается в ноль.

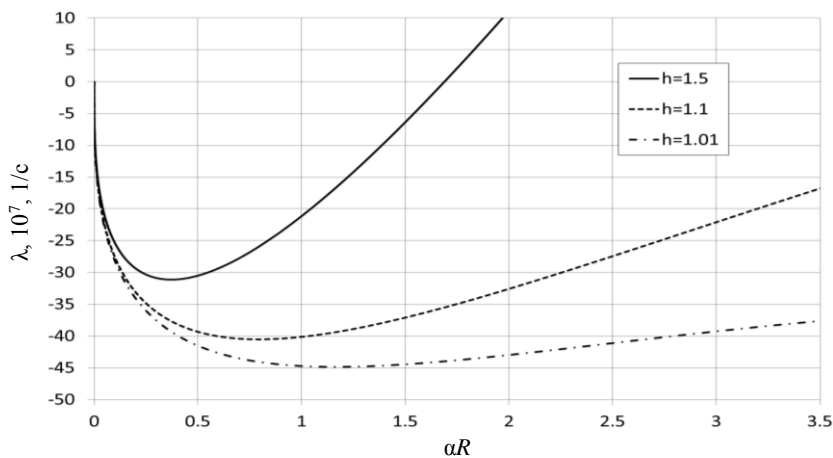


Рис 3. Зависимости $\lambda(p)$ при различных значениях активности среды h , полученные для шаров с одинаковыми массами $M = 3,142$ кг и величинами $\alpha = 0,2088$ 1/см

Интересными представляются графические результаты аналитических вычислений, показанные на рис. 4.

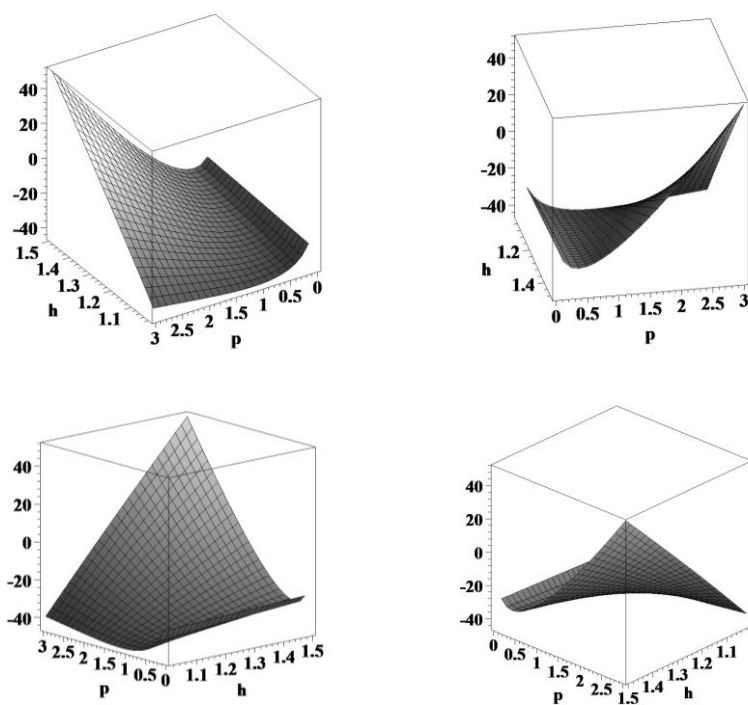


Рис.4. Зависимость $\lambda(p = \alpha R, h)$ в 3D-изображении под разными углами

Заключение

В статье получены приближенные аналитические решения односкоростного интегрального уравнения переноса нейтронов в однородных шарах из произвольных делящихся материалов.

С помощью метода последовательных приближений найдены радиальные зависимости нейтронной плотности $n(r)$ и угловые распределения при $r \leq R$ и $r > R$.

Таким образом, поставленная во введении основная задача о нахождении нейтронных полей внутри и за пределами однородных глубокоподкритичных шаров решена.

Решение задачи о пространственном распределении нейтронов, полученное во втором порядке теории возмущений (см. раздел 3), характеризуются очень высокой точностью, но оно имеет место только

внутри шара. Выше рассматривались шары, находящиеся в состояниях глубокой подкритики. Тем не менее, оказалось, что полученные в разделе 3 формулы можно применять и в случае надкритических систем. Это не должно вызывать удивление, поскольку вывод (см. [1]) формулы (3), справедливой даже при значениях $\beta R = 3,5$ и $\lambda = + 11,7 \cdot 10^7$ 1/с, тоже был проведен из близкого к вырожденному уравнения переноса нейтронов [5] в однородных критических шарах с предельно высокой активностью.

В статье показано, что в случае глубокоподкритических шаров существует особая область изменения физических параметров, внутри которой нейтронная плотность $n(r)$ претерпевает сильное изменение и при уменьшении оптической толщины из убывающей функции превращается в возрастающую.

Авторы благодарны В. П. Незнамову, который, ознакомившись с содержанием статьи, высказал свои критические замечания. Они не только были учтены при подготовке данной статьи в печать, но также повлияли на выбор направления дальнейших исследований, реализованных в работе [9].

Список литературы

1. Бабичев Н. Б., Лутиков И. В., Незнамов В. П. Некоторые решения вырожденного и близкого к вырожденному уравнений переноса нейтронов // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2009. Вып. 1. С. 3–10.
2. Донской Е. Н., Ельцов В. А., Житник А. К. и другие. Метод Монте-Карло во ВНИИЭФ // ВАНТ. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1993. Вып. 2. С. 61–64.
3. Шагалиев Р. М., Гребенников А. Н., Артемьев А. Ю., Будников В. И. Развитие основных методик и программ ИТМФ // Журнал Атом, 2011. № 50–51.
4. Бабичев Н. Б., Севастьянов А. А. Особенности пространственного распределения нейтронов вблизи границ // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2008. Вып. 2. С. 32–37.
5. Некоторые вопросы теории ядра. А. Ахиезер, И. Померанчук, Оборонгиз, М. 1950.
6. Бабичев Н. Б., Беженцев Б. В., Бондарев П. В., Забусов П. В. Собственные значения односкоростного уравнения переноса нейтронов в однородных системах // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2009. Вып. 3. С. 68–70.
7. Бабичев Н. Б., Лутиков И. В. Решение односкоростной задачи по нейтронной кинетике на собственные значения и собственные функции, справедливое в классе однородных односвязных объектов с невогнутыми внешними поверхностями // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2011. Вып. 1–2. С. 61–69.
8. Yamagishi T. Solutions of Monoenergetic Time Dependent Neutron Transport Equation in Slab Geometry // Journal of Nuclear Science and Technology, 10 (5), p. 284-291 (1973).
9. Бабичев Н. Б., Севастьянов А. А. Оценка ширины особой области в пространственном распределении нейтронов внутри однородных активных шаров // См. настоящий выпуск. С. 20–24.

Статья поступила в редакцию 20.01.2015