

## ОЦЕНКА ШИРИНЫ ОСОБОЙ ОБЛАСТИ В ПРОСТРАНСТВЕННОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ НЕЙТРОНОВ ВНУТРИ ОДНОРОДНЫХ АКТИВНЫХ ШАРОВ

Н. Б. Бабичев, А. А. Севастьянов

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Исследовано поведение нейтронной плотности  $n(r)$  в особой области.

*Ключевые слова:* уравнение переноса нейтронов, оптическая толщина, особая область (ОО).

### Введение

Особой областью (ОО) будем называть диапазон изменения физических параметров, в котором происходит перестройка нейтронной плотности из убывающей функции  $n(r)$  в возрастающую. Существование ОО было обнаружено в работе [1]. Цель данной статьи заключается в определении границ ОО. При поиске нейтронной плотности ниже используется метод последовательных приближений.

### 1. Приближенное решение задачи на главные собственные функции

Предположим, что нейтронная плотность и векторный поток нейтронов подчиняются экспоненциальному закону

$$n(t, r) = n(r) \exp(\lambda t), \quad (1)$$

$$\vec{j}(t, r) = \vec{j}(r) \exp(\lambda t) \quad (2)$$

с постоянной величиной  $\lambda$ .

В таком случае односкоростное интегральное уравнение переноса нейтронов в однородных шарах из делящихся материалов имеет следующий вид:

$$n(r, t) = \frac{\beta}{4\pi} \int \frac{d\vec{r}' n(r')}{|\vec{r}' - \vec{r}|^2} \exp[-\xi \alpha |\vec{r}' - \vec{r}|] \dots \quad (3)$$

Здесь  $\alpha = n_{\text{я}} (\sigma_s + \sigma_f + \sigma_c)$  – обратный полный пробег нейтрона в среде с плотностью ядер  $n_{\text{я}}$ , которая в случае рассматриваемых ниже однород-

ных систем постоянна;  $\beta = h\alpha$ ,  $h = \frac{v\sigma_f + \sigma_s}{\sigma_s + \sigma_f + \sigma_c}$  – активность среды;  $\sigma_s, \sigma_f, \sigma_c$  – элементарные (микроскопические) сечения рассеяния, деления и поглощения нейтронов;  $v$  – среднее число вторичных нейтронов, испускаемых в одном акте деления ядра;  $\xi = \left(1 + \frac{\lambda}{\alpha V}\right)$ ;  $V$  – скорость нейтронов.

Введя функцию

$$f(x) = xn(x), \quad x = \frac{r}{R}, \quad (4)$$

уравнение (3) упростим, как это сделано в книге [2], следующим образом:

$$f(x) = \frac{\beta R}{2} \int_0^1 dz f(z) K(z, x). \quad (5)$$

Ядро интегрального уравнения (4) представляет собой суперпозицию интегральных экспонент

$$K(z, x) = Ei[-\gamma(z+x)] - Ei[-\gamma|z-x|], \quad (6)$$

где  $\gamma = \left(1 + \frac{\lambda}{\alpha V}\right) \alpha R$ .

Задачу будем решать методом последовательных приближений по формуле

$$f^{[i]}(x) = \frac{\beta R}{2} \int_0^1 dz f^{[i-1]}(z) K(z, x); \quad i = 1, 2, 3, \dots, \quad (7)$$

взяв в качестве нулевого приближения постоянную величину  $n^{[0]} = \text{const}$  и оборвав итерационный процесс на первом приближении.

Опустим выкладки и приведем искомый ответ.

$$n(x) = n^{[1]}(x) = \frac{A}{2\gamma} \left\{ P_+(x) + P_-(x) + \frac{T_+(x) - T_-(x)}{2\gamma x} \right\}, \quad (8)$$

$A$  – нормировочная постоянная,  $x = \frac{r}{R} \leq 1$ .

$$P_{\pm}(x) = P[\gamma(1 \pm x)]; \quad T_{\pm}(x) = T[\gamma(1 \pm x)], \quad (9)$$

$$P(z) = 1 - e^{-z} - zE(-z), \quad (10)$$

$$T(z) = (1+z)e^{-z} + z^2E(-z). \quad (11)$$

Функция  $E(-z)$  в зависимости от знака аргумента равна одной из двух модификаций интегральной экспоненты:

$$E(-z) = Ei(-z) \text{ при } z > 0 \quad (12)$$

$$\text{и } E(-z) = Ei^*(|z|) \text{ при } z < 0.$$

Из решения (8) получаются следующие значения собственных функций в центре и на внешней поверхности шара:

$$\begin{aligned} n(r=0) &= \frac{A}{\gamma} (1 - e^{-\gamma}); \\ n(R) &= \frac{A}{4\gamma^2} [2\gamma + e^{-2\gamma} - 1]; \\ \frac{n(R)}{n(0)} &= \frac{2\gamma + e^{-2\gamma} - 1}{4\gamma(1 - e^{-\gamma})}. \end{aligned} \quad (13)$$

## 2. Уравнение баланса полного числа нейтронов в системе

Балансное уравнение записывается так:

$$\frac{\lambda}{V} - (\beta - \alpha - W) = 0; \quad W = \frac{1}{V} \int \vec{j} d\vec{S} \quad \frac{J}{\int d\vec{r} n(\vec{r})} = \frac{J}{VN}. \quad (14)$$

В числителе выражения (14) интегрирование ведется по внешней поверхности объекта, а в знаменателе – по его объему.  $N$  и  $J$  – соответственно полное количество нейтронов в системе и интегральный поток нейтронов (число пересечений) во внешнее пустое пространство. Величина  $W$ , связанная с вероятностью вылета нейтронов из системы в единицу времени, часто именуется эффективным макроскопическим сечением поглощения нейтронов, вызванного их утечкой наружу.

Рабочие формулы приведем без вывода.

$$\lambda = \lambda_{\infty} - WV = [\alpha(h-1) - W]V, \quad (15)$$

$$W(\gamma) = \frac{J(\gamma)}{N(\gamma)}, \quad (16)$$

$$J(\gamma) = \frac{A\pi R^2}{2\gamma^2} F_0(\gamma), \quad (17)$$

$$F_0(\gamma) = (1+2\gamma)\exp(-2\gamma) - 1 + 2\gamma^2, \quad (18)$$

$$N(\gamma) = \frac{A\pi R^3}{2\gamma^4} \left[ \frac{8}{3}\gamma^3 - F_0(\gamma) \right], \quad (19)$$

$$W(\gamma) = \frac{3\gamma}{R} \frac{F_0(\gamma)}{8\gamma^3 - 3F_0(\gamma)}. \quad (20)$$

После подстановки (20) в (15) уравнение баланса принимает следующий вид:

$$\frac{8}{3}\gamma^4 + h\alpha R \left[ F_0(\gamma) - \frac{8}{3}\gamma^3 \right] = 0. \quad (21)$$

Найдя корень  $\gamma_0$  данного трансцендентного уравнения, величину  $\lambda$  можно определить по формуле

$$\lambda = \lambda(\gamma_0) = (\gamma_0 - \alpha R) \frac{V}{R}. \quad (22)$$

## 3. Некоторые результаты аналитических вычислений и численных решений односкоростного кинетического уравнения

Здесь и далее аналитические вычисления  $\lambda$  и численные расчеты по одной из математических программ [3] проводились для шара с радиусом  $R = 6,359$  см и активностью  $h = 1,68$  при значении скорости нейтронов  $V = 10^9$  1/с (табл. 1).

Таблица 1

Сравнение результатов вычислений по формуле (22) и расчетов, выполненных при вариации оптической толщины шара с постоянным радиусом  $R = 6,359$  см

$\alpha$ , 1/см	0,07	0,06	0,04	0,02	0,01	0,001
$\alpha R$	0,4451	0,3815	0,2544	0,1272	0,0636	0,0064
$\gamma_0$	-0,937	-1,15	-1,66	-2,40	-3,04	-4,83
$\lambda$ , $10^7$ 1/с	-21,73	-24,07	-30,04	-39,74	-48,8	-76,0
$\lambda_{\text{расч}}$ , $10^7$ 1/с	-21,3	-23,8	-30,00	-39,70	-48,5	-74,6
$\delta = \left  \frac{\lambda - \lambda_{\text{расч}}}{\lambda} \right $	0,0198	0,0112	0,0013	0,0010	0,0061	0,0184

#### 4. Ширина особой области (ОО)

Для нахождения ширины ОО функцию (8) разложим в ряд Тейлора вблизи нуля ( $r \rightarrow 0$ ):

$$n(r) \approx A \left[ \frac{1 - e^{-\gamma}}{\gamma} - \frac{\gamma + 2}{6} e^{-\gamma} \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right], \quad (23)$$

затем возьмем производные от соотношения (23) и подставим в них параметр  $\gamma_0$ .

$$\frac{dn}{dr} = -A(\gamma_0 + 2)e^{-\gamma_0} \frac{r}{3R}, \quad (24)$$

$$\frac{d^2n}{dr^2} = -\frac{A}{3R}(\gamma_0 + 2)e^{-\gamma_0}. \quad (25)$$

Первая производная показывает, что точка  $r = 0$ ,  $n(0) = A \frac{1 - e^{-\gamma_0}}{\gamma_0}$  является экстремальной.

Из равенства (25) видно, что при  $\gamma_0 + 2 > 0$  и  $\gamma_0 + 2 < 0$  в центре шара наблюдаются соответственно максимум и минимум функции  $n(r)$ .

В работе [1] использовалась общая зависимость  $\lambda$  от  $\beta R$  и  $h$

$$\lambda = \beta V \left[ \Lambda(\beta R) - \frac{1}{h} \right], \quad (26)$$

полученная в статьях [4, 5] из односкоростного кинетического уравнения с постоянными параметрами  $\alpha$  и  $\beta$ .

Формула (26) содержит в себе универсальную функцию  $\Lambda(\beta R)$ , явный вид которой в диапазоне  $0,2 \leq \beta R \leq 3,5$  найден в [1] для однородного активного шара.

Приравняв величины  $\lambda$ , взятые из выражений (22) и (26), получаем следующее простое соотношение:

$$\gamma_0 = \beta R \Lambda(\beta R). \quad (27)$$

Из (27) следует, что корень  $\gamma_0$  трансцендентного уравнения (21) зависит только от произведения  $\beta R$ , т. е.  $\gamma_0(\beta R)$  это новая универсальная функция, которая в отличие от  $\Lambda(\beta R)$  является приближенной.

Подстановка (27) в (22) приводит к формуле для  $\lambda$

$$\lambda = \alpha V \left[ \frac{\gamma_0(\beta R)}{\alpha R} - 1 \right], \quad (28)$$

которая дает возможность, зная оптическую толщину  $\alpha R$  и произведение  $\beta R$ , аналитически определить верхнюю с точки зрения оптической тол-

щины границу ОО, когда, как показано выше,  $\gamma_0 = -2$  и максимум функции  $n(r)$  расположен в центре шара. Для границы ОО с максимальной оптической толщиной  $\alpha_{\max} R = 0,1908$  имеем следующие характеристики:  $\alpha_{\max} = 0,03$  1/см,  $\beta_{\max} = 0,0504$  1/см и согласно формуле (28)  $\lambda = -34,1 \cdot 10^7$  1/с.

Нижняя граница ОО найдена с помощью вычислений и расчетов, результаты которых представлены в табл. 2.

Таблица 2  
Результаты, полученные при вариации параметров  $\alpha R$  и  $\beta R$

$\alpha R$	$\beta R$	Результаты	$x = 0$	$x = 0,5$	$x = 0,7$	$x = 0,85$	$x = 0,945$	$x = 1$
0,1908	0,3211	Расчета	1	0,962	0,941	0,915	0,971	0,871
		Вычисления	1	0,998	0,995	0,988	0,975	0,960
0,1844	0,3104	Расчета	0,998	0,9996	1	0,9970	0,989	0,9753
		Вычисления	0,998	0,9994	1	0,9977	0,988	0,9762
0,1780	0,2997	Расчета	0,986	0,992	0,998	1	0,994	0,985
		Вычисления	0,988	0,993	0,998	1	0,994	0,985
0,1590	0,2675	Расчета	0,931	0,952	0,972	0,991	1	0,997
		Вычисления	0,940	0,957	0,976	0,990	1	0,997
0,1463	0,2461	Расчета	0,887	0,918	0,950	0,980	0,995	1
		Вычисления	0,900	0,926	0,953	0,979	0,991	1

Видно, что нижняя граница ОО характеризуется следующими величинами:  $\alpha_{\min} R = 0,1463$ ,  $\alpha_{\min} = 0,023$  1/см,  $\beta_{\min} = 0,0387$  1/см,  $\lambda = -37,8 \cdot 10^7$  1/с.

#### Заключение

В статье получено приближенное аналитическое решение уравнения переноса нейтронов, позволившее определить границы ОО  $\alpha_{\min} R$  и  $\alpha_{\max} R$  в шкале оптических толщин активного шара  $\alpha R$ .

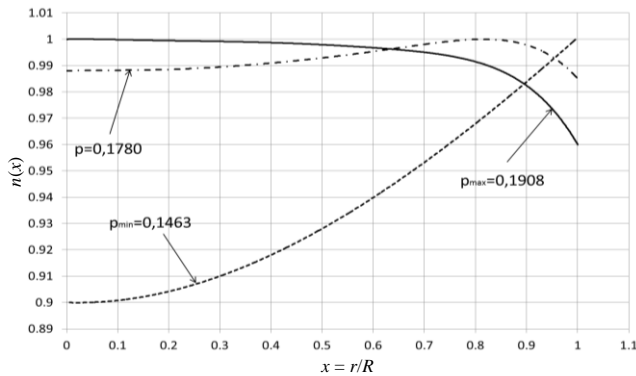
В случаях  $\alpha_{\min} R < \alpha R < \alpha_{\max} R$  у функции  $n(r)$  при  $0 < r < R$  появляется точка максимума и величина  $\lambda$  заключена в интервале

$$\lambda \in (-37,8, -34,1) \cdot 10^7 \text{ 1/с}, \quad (29)$$

внутри которого, что следует из табл. 1, погрешность в значениях  $\lambda$ , вычисленных по формуле (22), мала:

$$0,10 \% \leq \delta = \left| \frac{\lambda - \lambda_{\text{расч}}}{\lambda} \right| \leq 0,13 \%. \quad (30)$$

Графики функции  $n(r)$  показаны на следующем рисунке.



Поведение нейтронной плотности  $n(x = r/R)$  в особой области изменения оптической толщины шара  $0,1463 < p = \alpha R < 0,1908$

Сплошной и пунктирной линиями на рисунке обозначены предельные зависимости  $n(r)$  на двух границах особой области, а штрих-пунктирная кривая относится к случаю функции  $n(r)$  с двумя экстремальными точками. При увеличении оптической толщины максимум сдвигается в сторону центра шара (см. табл. 2).

В [1] показано, что в случае вырожденного ядра интегрального уравнения переноса нейтронов  $\lambda = -\alpha_0 V = -11,922 \cdot 10^7$  1/миг,  $\alpha_0 = 0,11922$  1/см,

$$\alpha_0 R = 0,7581, \quad (31)$$

т. е.,  $\alpha_0 R > \alpha_{\max} R = 0,1908$ .

Кроме (22), для  $\lambda$  имеется также и формула

$$\lambda = \frac{V}{R} (\beta R)^{0,83} \left[ 1,57 - \frac{2}{\beta R} - \frac{1}{h} (\beta R)^{0,17} \right], \quad (32)$$

полученная в работе [6].

Вопрос об областях применимости формул (22) и (32) исследован в приложении.

### Список литературы

1. Бабичев Н. Б., Севастьянов А. А. Нейтронные поля внутри и за пределами однородных глубокоподкритических шаров // См. настоящий выпуск. С. 6–19.
2. Ахиезер А., Померанчук И. Некоторые вопросы теории ядра. Л.: Оборонгиз, 1950.
3. Шагалиев Р. М., Гребенников А. Н., Артемьев А. Ю., Будников В. И. Развитие основных методик и программ ИТМФ // Журнал Атом. 2011, № 50–51.

4. Бабичев Н. Б., Беженцев Б. В., Бондарев П. В., Забусов П. В. Собственные значения односкоростного уравнения переноса нейтронов в однородных системах // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2009. Вып. 3. С. 68–70.

5. Бабичев Н. Б., Лутиков И. В. Решение односкоростной задачи по нейтронной кинетике на собственные значения и собственные функции, справедливое в классе однородных односвязных объектов с невогнутыми внешними поверхностями // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2011. Вып. 1–2. С. 61–69.

6. Бабичев Н. Б., Лутиков И. В., Незнамов В. П. Некоторые решения вырожденного и близкого к вырожденному уравнений переноса нейтронов // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2009. Вып. 1. С. 3–10.

### Приложение

#### Сравнение результатов аналитических вычислений и расчетов $\lambda$ в широком диапазоне изменения оптической толщины шара

Рассмотрим в качестве примера однородный шар с массой  $M = 4,3$  кг и активностью  $h = 1,68$ .

Зависимости  $\lambda$  от оптической толщины шара  $\alpha R$ , определенные по формулам (22) и (32), а также результаты соответствующих численных расчетов представлены на следующих рисунках.

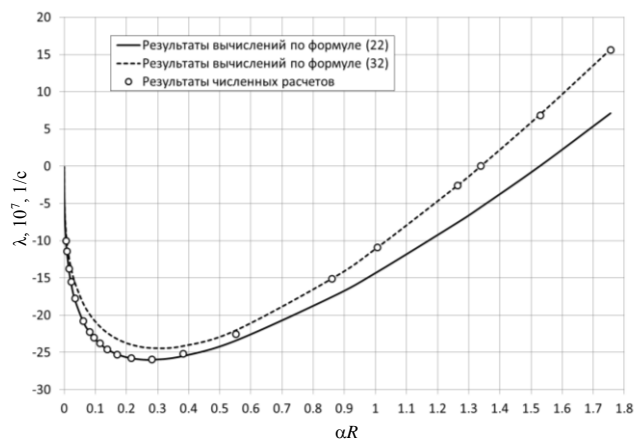


Рис. П.1. Зависимости  $\lambda(\alpha R)$ , полученные в аналитических вычислениях и в численных расчетах (обзорный рисунок)

Абсцисса точек минимума функции  $\lambda(\alpha R)$  составляет  $(\alpha R)_{\min} \approx 0,29$ .

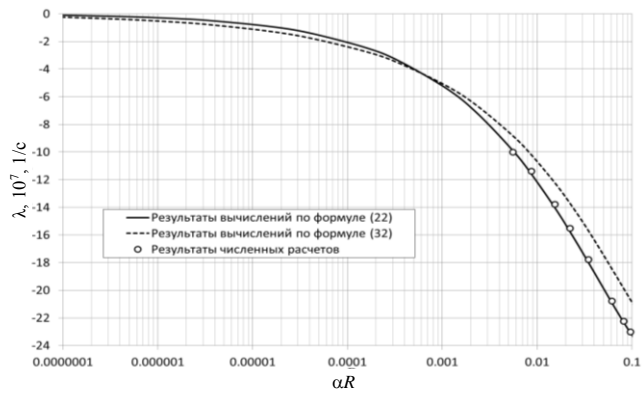


Рис. П.2. Зависимости  $\lambda(\alpha R)$  в области малых оптических толщин

Из рис. П.1 и П.2 можно сделать следующие выводы:

- для глубокоподкритичных шаров с оптическими толщинами  $\alpha R \leq 0,48$  формула (32) по точности уступает формуле (22), которая становится неприменимой в случаях слабоподкритичных и, тем более, надкритичных объектов; при изменении оптической толщины в диапазоне  $0,6 \leq \alpha R \leq 1,8$  результаты расчетов и вычислений по формуле (32) почти не отличаются друг от друга, т. е. этой формулой можно пользоваться в случаях подкритичных, критических и надкритических шаров.

Приведем также график входящей в соотношение (26) универсальной функции  $\Lambda(\beta R)$  (рис. П.3), которая в диапазоне изменения  $0,2 \leq \beta R \leq 3,5$  исследована в работе [1].

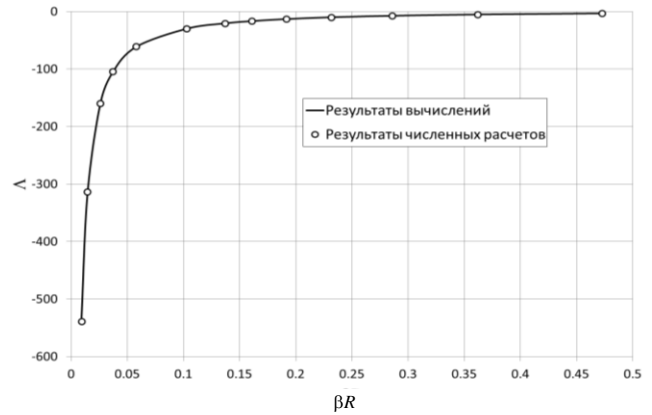


Рис. П.3. Полученная с помощью вычислений по формуле (22) и расчетов зависимость  $\Lambda(\beta R)$  при сравнительно малых величинах  $\beta R$

Статья поступила в редакцию 03.02.2015