УДК 539.17

НЕЙТРОННЫЕ ПОЛЯ ВНУТРИ ПРОСТЫХ ПО ГЕОМЕТРИИ СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНЫХ СИСТЕМ, СОЗДАВАЕМЫЕ НЕЙТРОНАМИ СПОНТАННЫХ ДЕЛЕНИЙ ИЗОТОПА ^{238}Pu

Н. Б. Бабичев, А. А. Севастьянов

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Получено пространственное распределение нейтронов в оптически тонких сферически-симметричных системах из плутония-238.

Ключевые слова: интегральное уравнение переноса нейтронов, метод последовательных приближений, нейтронная плотность, источник нейтронов.

Введение

Изотоп ^{238}Pu характеризуется не только очень высокой скоростью реакций α-распада, но и большим выходом нейтронов при спонтанных делениях ядер. Удельная интенсивность нейтронов у этого изотопа составляет $q_n = 2{,}59 \cdot 10^3$ нейтр./(г · с), что на пять порядков больше, чем у ^{239}Pu (см. [1]). Тем не менее, удельная интенсивность энерговыделения ^{238}Pu за счет спонтанных делений ядер составляет всего лишь $5{,}7 \cdot 10^{-6}$ % от тепловыделения при α-распаде (см. [2]).

Цель статьи заключается в определении полей нейтронов внутри однородных шаров и оболочек из ^{238}Pu.

В работе [3] изучен эффект саморазогрева ^{238}Pu за счет реакций α-распада и показано, что только миниатюрные объекты не подвержены плавлению. Ниже рассматриваются малые по массе ядра и оболочки из ^{238}Pu, размеры которых найдены в работе [3].

Поставленная задача решается с помощью аналитических вычислений по формулам первого раздела и численных расчетов, выполненных с помощью одной из математических методик [4].

1. Приближенные аналитические решения интегрального уравнения переноса нейтронов в шарах и оболочках из ^{238}Pu

1.1. Вывод формул, справедливых в случае шара

Коэффициент размножения нейтронов в миниатюрных шарах (см. введение) мал. Поэтому за основу примем стационарное односкоростное уравнение

$$n(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{d\vec{r}'}{S^2}\left[\beta(\vec{r}')n(\vec{r}') + Q(\vec{r}')\right]\exp(-\alpha S), \quad (1)$$

$n(\vec{r})$ – нейтронная плотность, $Q(\vec{r}') = \rho q_n(\vec{r}') = Q_n(\vec{r}')$ – количество нейтронов, выделяемых источником за единицу времени в единичном объеме, ρ – плотность плутония, $\alpha = n_я(\sigma_s + \sigma_f + \sigma_c)$ – обратный полный пробег нейтронов, $\beta = h\alpha$, $h = \dfrac{\nu\sigma_f + \sigma_s}{\sigma_s + \sigma_f + \sigma_c}$ – активность среды, $n_я$ – плотность ядер, σ_s, σ_f, σ_c – элементарные сечения рассеяния, деления и поглощения нейтронов, ν – среднее число вторичных нейтронов, испускаемых в одном акте деления ядра, вектор $\vec{S}=\vec{r}-\vec{r}'$ направлен вдоль вектора $\vec{V}$ скорости нейтрона.

Уравнение (1) можно свести к следующему безразмерному виду (см. [5]):

$$f(x)=\int_0^1 dz\,K(z,x)\left[\beta Rf(z)+S_0 z\right], \tag{2}$$

$$x=\frac{r}{R}\le 1, \tag{3}$$

$$K(z,x)=\frac{1}{2}\left\{Ei\left[-p(z+x)\right]-Ei\left[-p(z-x)\right]\right\}, \tag{4}$$

$$p=\alpha R<<1. \tag{5}$$

В соотношение (4) входит интегральная экспонента Ei:

$$Ei(-ax)=-\int_{x>0}^{\infty}\frac{dt}{t}e^{-at}. \tag{6}$$

Нейтронная плотность

$$n(x)=\frac{1}{x}f(x), \tag{7}$$

$$S_0=Q_0\Delta t, \tag{8}$$

$$\Delta t=\frac{R}{V}, \tag{9}$$

Q_0 – постоянный источник, Δt – характерное время, равное времени пролета нейтроном пути в один радиус шара.

Интегральную экспоненту можно разложить в ряд вблизи точки $x = 0$:

$$Ei(-x)=c+\ln x+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{x^m}{mm!}, \tag{10}$$

c – постоянная Эйлера–Маскерони.
Если в (10) оставить лишь главный член $(c+\ln x)$, то (4) перейдет в

$$K_0=\lim_{p\to 0}K(z,x)=\frac{1}{2}ln\left|\frac{z+x}{z-x}\right|. \tag{11}$$

Ядро интегрального уравнения (2) будем называть вырожденным.

Условие (5) приводит к следующему упрощению ядра (4):

$$K\approx K_m=K_0+\Delta K, \tag{12}$$

$$|\Delta K|<<|K_0|, \tag{13}$$

$$\Delta K=\sum_{m=1}^{\infty}\Delta K_m. \tag{14}$$

$$\Delta K_m\sim p^m. \tag{15}$$

Решение уравнения (2) будем искать методом последовательных приближений. Выпишем явный вид ядра $K_m(z,x)$ для значений $m = 1, 2$ ($K = K_0$ при $m = 0$):

$$K_1(z,x)=K_0(z,x)-\frac{p}{2}\left(z+x-|z-x|\right), \tag{16}$$

$$K_2(z,x)=K_1(z,x)+\frac{p^2}{2}xz. \tag{17}$$

Введем следующие интегральные операторы:

$$\hat{U}_0F=\int_0^1 dz\,K_0(z,x)F(z), \tag{18}$$

$$\hat{U}_1=\hat{U}_{11}+\hat{U}_{12}, \tag{19}$$

$$\hat{U}_{11}F=-p\int_0^1 dz\,z\,F(z);\quad \hat{U}_{12}=-px\int_x^1 dz\,F(z). \tag{20}$$

В нулевом приближении

$$f^{[0]}(x)=S_0\varphi(x), \tag{21}$$

где

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}\left[1+\frac{x^2-1}{2x}\,ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right]. \tag{22}$$

Для первого и второго приближений имеем:

$$f^{[1]}(x)=\hat{U}_0\left(hpf^{[0]}+S_0z\right)+\hat{U}_1(S_0z), \tag{23}$$

$$f^{[2]}(x)=f^{[1]}(x)+\Delta f_2^{[1]}(x), \tag{24}$$

$$\Delta f_2^{[1]}(x)=\Delta f_{21}^{[1]}+\Delta f_{22}^{[1]}(x), \tag{25}$$

$$\Delta f_{21}^{[1]}(x)=hp\hat{U}_0\Delta f_1^{[0]}(x), \tag{26}$$

$$\Delta f_1^{[0]}(x)=\hat{U}_0\left(hp\,f^{[0]}\right)+\hat{U}_1(S_0z), \tag{27}$$

$$\Delta f_{22}^{[1]}(x)=\hat{U}_1\left(hp\,f^{[0]}\right)+\hat{U}_2(S_0z). \tag{28}$$

Последний оператор определен так:

$$\hat{U}_2F=\frac{p^2}{2}x\int_0^1 dz\,zF(z). \tag{29}$$

Определим решение в первом приближении:

$$f^{[1]}(x)=f_0^{[0]}(x)+\Delta f_{11}^{[0]}(x)+\Delta f_{12}^{[0]}(x). \tag{30}$$

Одна из поправок к нулевому приближению находится очень просто:

$$\Delta f_{11}^{[0]}(x)=S_0\hat{U}_1z=-\frac{pS_0}{6}x\left(3-x^2\right). \tag{31}$$

Вторая поправка содержит в себе интеграл $I(x)$, который не берется аналитически:

$$\Delta f_{12}^{[0]}(x)=hpS_0I(x), \tag{32}$$

$$I(x)=\frac{1}{4}\left[1+\int_0^x dz\left(1-z^2\right)\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)\ln\left|\frac{z+x}{z-x}\right|\right]. \quad (33)$$

В то же время зависимость $I(x)$ подчиняется приближенной, но достаточно точной следующей формуле, погрешность которой составляет менее одного процента при любом $x \le 1$:

$$I(x)=\frac{3-2B}{6}x\left[\varphi(x)+2\left(1-Bx^2\right)\right],\ B=0{,}63. \quad (34)$$

Эта формула получена нестандартным способом. Кратко изложим его суть. Было рассмотрено некоторое вспомогательное интегральное уравнение типа Фредгольма второго рода относительно функции $H(x)$ и исследован процесс сходимости при его решении методом последовательных приближений с числом итераций i = 1, 2, 3 и $i \to \infty$. Можно показать, что $I(x)\approx xH_2(x)$ и имеется приближенная связь между функциями $H_2(x), H_1(x)$ и $H_\infty(x)$.

В итоге получено следующее решение первого приближения:

$$n^{[1]}(x)=n_0(x)+(\alpha R)n_1(x), \quad (35)$$

$$n_0(x)=S_0\varphi(x), \quad (36)$$

$$n_1(x)=\frac{S_0}{6}\left\{(3-2B)h\left[\varphi(x)+2\left(1-Bx^2\right)\right]+x^2-3\right\}. \quad (37)$$

Решение во втором приближении приведем, опустив громоздкие выкладки:

$$n^{[2]}(x)=n^{[1]}(x)+(\alpha R)^2 n_2(x), \quad (38)$$

$$n_2=n_{21}+n_{22}+n_{23}+n_{24}+n_{25}, \quad (39)$$

$$n_{21}(x)=-\frac{S_0h}{24}\left[1+8\ln 2+11x^2-4\ln\left(1-x^2\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{3+6x^2-x^4}{2x}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right], \quad (40)$$

$$n_{22}(x)=S_0\left[\frac{h(3-2B)}{6}\right]^2\left[\varphi(x)+2\left(1-Bx^2\right)\right], \quad (41)$$

$$n_{23}(x)=\frac{hS_0}{6}\left[2(3-2B)h-3\right]\varphi(x), \quad (42)$$

$$n_{24}(x)=$$
$$=\frac{hS_0}{24}\left[1-2B(3-2B)h\right]\left[\frac{1}{3}+x^2+\frac{1-x^4}{2x}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right], \quad (43)$$

$$n_{25}(x)=\frac{S_0}{6}=\text{const}. \quad (44)$$

1.2. Формула для нейтронной плотности внутри оболочки

В этом случае $Q(\vec{r})=Q_0=\text{const}$ внутри слоя $\left(R_1\le r\le R_2\right)$ и $Q(\vec{r})=0$ за его пределами.

В статье [6] показано, что в нулевом приближении искомое решение интегрального уравнения имеет следующий вид:

$$n_0(x)=\frac{Q_0}{V}\left[R_2\varphi(x_2)-R_1\varphi(x_1)\right], \quad (45)$$

$$x_i=\frac{r}{R_i},\ i=1,2.$$

2. Результаты аналитических вычислений и численных расчетов

Интенсивность нейтронного источника составляет $Q_0=2590\rho$ нейтр./(см^3·с). Если плотность ^{238}Pu ρ = 16,5 г/см^3, то Q_0 = 42735 нейтр./(см^3·с), $S_0 = \ = Q_0\dfrac{R}{V}\approx 4{,}3\cdot10^{-5}R$, где скорость нейтронов V = = 10^9 1/с, R измеряется в сантиметрах, S_0 – в сантиметрах в минус третьей степени.

В вычислениях и расчетах приняты следующие одногрупповые нейтронные константы ^{238}Pu: $\alpha\left(\rho=16{,}5\ \text{г/см}^3\right)=0{,}2238\ 1/\text{см}$, активность h = 1,71 (см. [7]).

2.1. Характеристики шаров из ^{238}Pu с радиусами R = 0,07; 0,1; 0,13 см

Приведем результаты аналитических вычислений и численных расчетов (рис. 1).

Результаты вычислений по формулам первого и второго приближений слились в единые сплошные линии и характеризуются погрешностью

$$\delta=\frac{\left|n^{[1]}-n_{\text{расч}}\right|}{n^{[1]}}\approx\frac{\left|n^{[2]}-n_{\text{расч}}\right|}{n^{[2]}}=(0{,}6\div0{,}7)\ \%.$$

Использование нулевого приближения приводит к погрешности $\delta=(1\div3)\%$ в зависимости от радиуса шара.

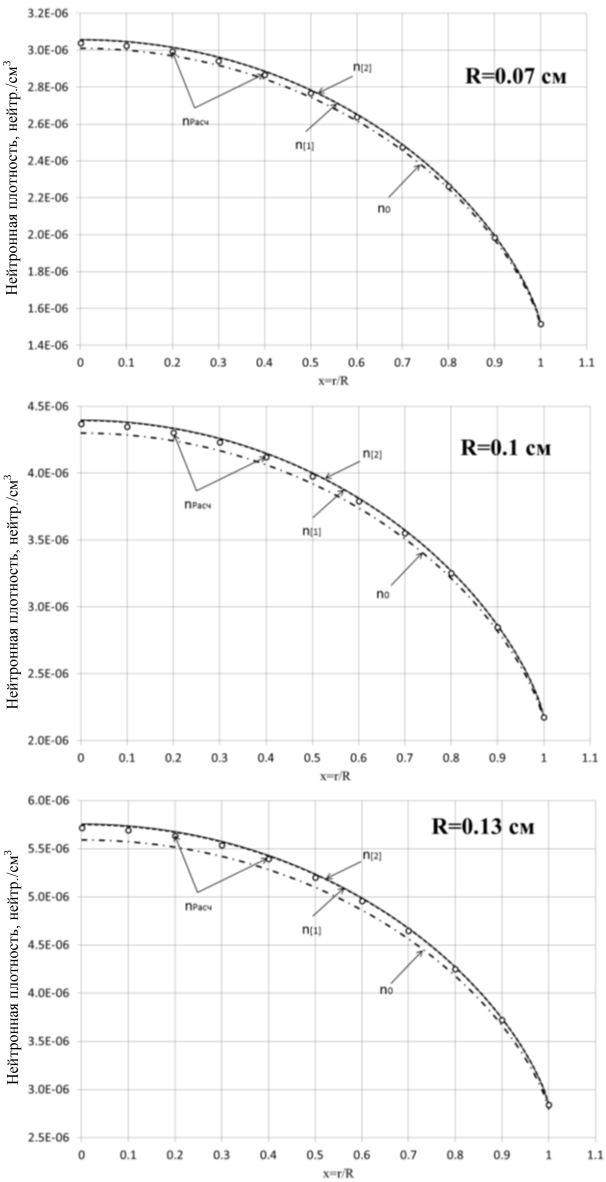

Рис. 1. Зависимости $n_0(x)$ (результаты вычисления в нулевом приближении по формуле (36) – штрих-пунктирная линия), $n^{[1]}(x)$ (результаты вычисления в первом приближении по формуле (35) – пунктирная линия), $n^{[2]}(x)$ (результаты вычисления во втором приближении по формуле (38) – сплошная линия), $n_{расч}(x)$ (результаты численных расчетов – маркеры)

2.2. Результаты, полученные для оболочки из ^{238}Pu

Геометрия системы показана на рис. 2.

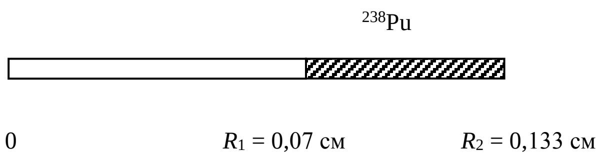

Рис. 2. Радиальный разрез сферически-симметричного слоя

Результаты аналитических вычислений и численного расчета нейтронной плотности представлены на рис. 3.

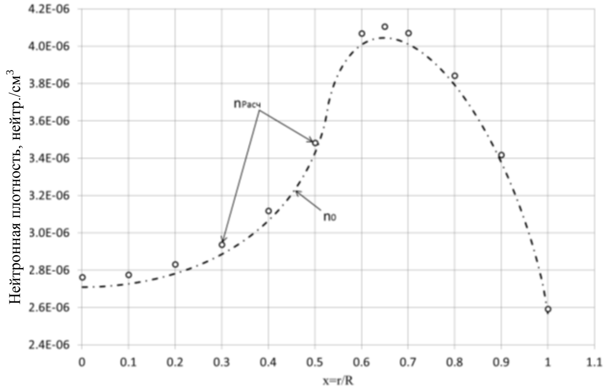

Рис. 3. Функции n0(x) (результаты вычисления в нулевом приближении по формуле (45) – штрих-пунктирная линия) и $n_{расч}(x)$ (результаты численного расчета – маркеры)

Наибольшая погрешность $n_0(x)$ (в точке максимума плотности нейтронов) оказалась равной 1,5 %.

Заключение

В статье получены приближенные формулы для нейтронных плотностей внутри шара и оболочки из ^{238}Pu.

Из сравнения результатов аналитических вычислений и численных расчетов вытекают следующие оценки погрешностей (см. таблицу).

Максимальные погрешности $\delta = \dfrac{|n - n_{расч}|}{n}$
полученных аналитических решений

Геометрия системы	Погрешность в нулевом приближении, %	Погрешности первого и второго приближений, %
Шар с радиусом $R \in [0{,}07;\ 0{,}13]$ см	1–3	0,6–0,7
Оболочка, расположенная между радиусами 0,07–0,133 см	1,5	–

Список литературы

1. Perry R. T. and Wilson W. B. Neutron production from (α, *n*) reactions and spontaneous fission in ThO_2, UO_2, and $(U,Pu)O_2$ Fuels. Los Alamos National Laboratory report LA-8869-MS (June 1981).

2. Lederer C. M. and Shirley V. S., Eds., Table of Isotopes, 7th ed. (John Wiley&Sons, Inc., New York, 1978).

3. Бабичев Н. Б., Севастьянов А. А. Об эффекте саморазогрева плутония-238 в простых по геометрии сферически-симметричных системах // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2014. Вып. 3. С. 85-88.

4. Шагалиев Р. М., Гребенников А. Н., Артемьев А. Ю., Будников В. И. Развитие основных методик и программ ИТМФ // Журнал Атом, 2011. № 50–51.

5. Ахиезер А., Померанчук И. Некоторые вопросы теории ядра. Л.: Оборонгиз, 1950.

6. Бабичев Н. Б., Севастьянов А. А. Особенности пространственного распределения нейтронов вблизи границ // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2008. Вып. 2. С. 32–37.

7. Бабичев Н. Б., Севастьянов А. А. Критические параметры однородных шаров, состоящих из плутония-238 и плутония-239 // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2014. Вып. 3. С. 28–35.

Статья поступила в редакцию 29.01.2015