

НЕЙТРОННАЯ КИНЕТИКА ДВУМЕРНЫХ И ТРЕХМЕРНЫХ СИСТЕМ ИЗ ПЛУТОНИЯ-239 И ПЛУТОНИЯ-238

Н. Б. Бабичев, И. В. Лутиков, А. А. Севастьянов

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

С помощью численных расчетов и аналитических вычислений по формулам подобия исследованы нейтронные характеристики двумерных и трехмерных тел, выполненных из чистых (без примесей) изотопов ^{239}Pu и ^{238}Pu .

Ключевые слова: кинетическое уравнение, инвариантность, собственные значения и собственные функции, формулы подобия.

Введение

В работе [1] изучена нейтронная кинетика 1D-систем в виде однородных шаров, выполненных из ^{238}Pu и ^{239}Pu . В [1] показано, что с помощью формул подобия можно проводить оценки погрешности результатов, полученных при численном решении кинетического уравнения.

Цель данной статьи заключается в решении аналогичной задачи на главные собственные значения и главные собственные функции для случая двумерных и трехмерных объектов.

В качестве 2D-систем и 3D-систем рассмотрены однородный вытянутый эллипсоид вращения и куб (однородный и с профилем плотности).

Исследования проводятся с помощью численных расчетов по методике «Монте-Карло» [2] и аналитических вычислений по формулам подобия.

Ниже принят следующий алгоритм последовательных действий.

1) Для некоторой исходной системы 1 по результатам численного расчета определяются главное собственное значение $\lambda_{1\text{расч}}$ и главная собственная функция (нейтронная плотность) $n_{1\text{расч}}(\vec{r})$.

2) Затем, отталкиваясь от уже известных $\lambda_{1\text{расч}}$ и $n_{1\text{расч}}(\vec{r})$, по формулам подобия вычисляются величина λ_2 и функция $n_2(\vec{r})$ для подобной системы 2.

3) Для системы 2 находятся расчетные характеристики ($\lambda_{2\text{расч}}$ и $n_{2\text{расч}}(\vec{r})$).

4) Путем сравнения результатов аналитических вычислений и численных расчетов проводятся оценки погрешности $\lambda_{2\text{расч}}$ и $n_{2\text{расч}}(\vec{r})$.

1. Нейтронные характеристики однородного вытянутого эллипсоида вращения из ^{239}Pu

В качестве системы 1 был взят эллипсоид вращения с плотностью $\rho_1 = 30 \text{ г/см}^3$, массой $M_1 = 10 \text{ кг}$ и полуосями $a_1 = 6,828 \text{ см}$, $b_1 = c_1 = 3,414 \text{ см}$.

Расчет «Монте-Карло» на спектральных нейтронных константах ENDF В-6 [3] привел к следующему результату (время счета этой задачи составило 140 ч):

$$\lambda_{1\text{расч}} = 12,0683 \cdot 10^7 \text{ 1/с.} \quad (1)$$

Для главного собственного значения подобной системы 2 применима формула подобия (см. работу [4])

$$\lambda_2(\rho_2) = \frac{\rho_2}{\rho_1} \lambda_1(\rho_1), \quad (2)$$

справедливая при выполнении следующего инвариантного соотношения между плотностями и характерными размерами двух рассматриваемых эллипсоидов:

$$\rho_2 R_2 = \rho_1 R_1. \quad (3)$$

В качестве характерных размеров можно принять длины любых из полуосей геометрически подобных эллипсоидов, к примеру, $R_1 = a_1$ и $R_2 = a_2$.

Подчеркнем, что формула (2) столь же точна, как и общее (не включающее в себя ядерно-физические свойства среды) линеаризованное спектральное уравнение Больцмана, из которого она получена в [4].

Пусть система 2 характеризуется следующими параметрами: $\rho_2 = 60 \text{ г/см}^3$, $M_2 = 2,5 \text{ кг}$, $a_2 = 3,414 \text{ см}$, $b_2 = c_2 = 1,707 \text{ см}$. Для системы 2 в аналитических вычислениях по формуле (2) со значениями $\lambda_1 = \lambda_{1\text{расч}} = 12,0683 \cdot 10^7 \text{ 1/с}$ и $\rho_1 = 30 \text{ г/см}^3$, (см. (1)) получена величина

$$\lambda_2 = 24,1366 \cdot 10^7 \text{ 1/с.} \quad (4)$$

Приведем результаты численных расчетов (с константами ENDF В-6) $\lambda_{2\text{расч}}$ и погрешности величин $\lambda_{2\text{расч}}$ для подобной системы 2 в зависимости от затрат времени при счете задач «Монте-Карло» (табл. 1).

Таблица 1

Результаты численных расчетов $\lambda_{2\text{расч}}$ и погрешности δ величин $\lambda_{2\text{расч}}$

Время счета задачи «Монте-Карло», ч	$\lambda_{2\text{расч}}, \text{ 1/с}$	$\delta = \frac{ \lambda_{2\text{расч}} - \lambda_2 }{\lambda_{2\text{расч}}}$
1	$23,8818 \cdot 10^7$	1,1 %
140	$24,1375 \cdot 10^7$	0,0037 %

Следует отметить, что величина $\lambda_{1\text{расч}}$ (см. (1)) была получена в задаче, которая считалась 140 ч.

Далее все задачи «Монте-Карло» на главные собственные значения и главные собственные функции решались при затратах машинного времени 140 ч.

2. Результаты аналитических вычислений и численных расчетов, полученные для 3D-систем из изотопов ^{239}Pu и ^{238}Pu

2.1. Однородный куб из ^{239}Pu

При нахождении характеристик однородного куба использовались нейтронные константы ENDF В-6.

Расчет «Монте-Карло» в случае исходного куба 1 с плотностью $\rho_1 = 30 \text{ г/см}^3$, массой $M_1 = 10 \text{ кг}$ и длиной ребра $a_1 = 6,9336 \text{ см}$ привел к следующему результату:

$$\lambda_{1\text{расч}} = 10,5351 \cdot 10^7 \text{ 1/с.} \quad (5)$$

Подобный куб 2 с $\rho_2 = 60 \text{ г/см}^3$, $M_2 = 2,5 \text{ кг}$ и $a_2 = 3,4668 \text{ см}$ характеризуется величинами

$$\lambda_2 = 21,0702 \cdot 10^7 \text{ 1/с,} \quad (6)$$

$$\lambda_{2\text{расч}} = 21,0705 \cdot 10^7 \text{ 1/с.} \quad (7)$$

Погрешность оказалась ничтожной $\left(\delta = \frac{|\lambda_{2\text{расч}} - \lambda_2|}{\lambda_{2\text{расч}}} = 0,0014 \% \right)$ по двум причинам – при вычислении λ_2 применялась точная формула подобия (2) и задача «Монте-Карло» решалась 140 ч (об этом говорилось выше).

2.2. Значения λ для профильных кубов из ^{239}Pu , полученные с помощью точной формулы подобия и расчетов на спектральных константах ENDF В-6

Здесь рассматриваются двухобластные кубы, в которых объем центральной области в 3 раза меньше полного объема, и применяются следующие точные соотношения подобия.

У исходного куба 1 и куба 2 длины ребер в пределах внутренней и внешней областей связаны следующим образом:

$$a_{11} = \frac{a_{12}}{\sqrt[3]{3}}, \quad a_{21} = \frac{a_{22}}{\sqrt[3]{3}}, \quad (8)$$

a_{i1} и a_{i2} – длины ребер первого и второго кубов во внутренней и внешней зонах.

2.2.1. Случай $\rho_{11} > \rho_{12}$

Пусть, например, плотность плутония во внутренней области в 2 раза выше, чем во внешней, т. е. $\frac{\rho_{11}}{\rho_{12}} = \frac{\rho_{21}}{\rho_{22}} = 2$.

Приведем выбранную геометрию двух подобных систем.

Куб 1: средняя по объему плотность $\bar{\rho}_1 = 30 \text{ г/см}^3$, $\rho_{11} = 45 \text{ г/см}^3$, $\rho_{12} = 22,5 \text{ г/см}^3$, $M_{11} = M_{12} = 5 \text{ кг}$, $a_{11} = 4,8075 \text{ см}$, $a_{12} = 6,9336 \text{ см}$.

Куб 2: $\bar{\rho}_2 = 60 \text{ г/см}^3$, $\rho_{21} = 90 \text{ г/см}^3$, $\rho_{22} = 45 \text{ г/см}^3$, $M_{21} = M_{22} = 1,25 \text{ кг}$, $a_{21} = 2,40375 \text{ см}$, $a_{22} = 3,4668 \text{ см}$.

$$\lambda_{1\text{расч}} = 22,3089 \cdot 10^7 \text{ 1/с,} \quad (9)$$

Для главного собственного значения подобной системы 2 применимы формулы подобия (их вывод представлен в работе [4])

$$\lambda_2(\bar{\rho}_2) = \frac{\bar{\rho}_2}{\bar{\rho}_1} \lambda_1(\bar{\rho}_1), \quad (10)$$

$$\bar{\rho}_2 R_2 = \bar{\rho}_1 R_1. \quad (11)$$

Куб 2 характеризуется следующими параметрами: $\bar{\rho}_2 = 60 \text{ г/см}^3$, $\rho_{21} = 90 \text{ г/см}^3$, $\rho_{22} = 45 \text{ г/см}^3$, $M_{21} = M_{22} = 1,25 \text{ кг}$, $a_{21} = 2,40375 \text{ см}$, $a_{22} = 3,4668 \text{ см}$.

В аналитических вычислениях с $\lambda_1 = \lambda_{1\text{расч}}$, $R_i = a_{i2}$ и расчетах получены следующие результаты:

$$\lambda_2 = 44,6178 \cdot 10^7 \text{ 1/с}, \quad (12)$$

$$\lambda_{2\text{расч}} = 44,6129 \cdot 10^7 \text{ 1/с}. \quad (13)$$

Погрешность величины составила

$$\delta = \frac{|\lambda_{2\text{расч}} - \lambda_2|}{\lambda_{2\text{расч}}} = 0,011 \%. \quad (14)$$

2.2.2. Случай $\rho_{11} < \rho_{12}$

Рассматриваемому здесь условию $\frac{\rho_{11}}{\rho_{12}} = \frac{\rho_{21}}{\rho_{22}} = \frac{1}{2}$

удовлетворяют следующие 3D-системы:

куб 1 ($\bar{\rho}_1 = 30 \text{ г/см}^3$, $\rho_{11} = 18 \text{ г/см}^3$, $\rho_{12} = 36 \text{ г/см}^3$, $M_{11} = 2 \text{ кг}$, $M_{12} = 8 \text{ кг}$, $a_{11} = 4,8075 \text{ см}$, $a_{12} = 6,9336 \text{ см}$);
куб 2 ($\bar{\rho}_2 = 60 \text{ г/см}^3$, $\rho_{21} = 36 \text{ г/см}^3$, $\rho_{22} = 72 \text{ г/см}^3$, $M_{21} = 0,5 \text{ кг}$, $M_{22} = 2 \text{ кг}$, $a_{21} = 2,40375 \text{ см}$, $a_{22} = 3,4668 \text{ см}$).

Результаты аналитических вычислений и численных расчетов приведем без излишних комментариев:

$$\lambda_{1\text{расч}} = 5,4047 \cdot 10^7 \text{ 1/с}, \quad (15)$$

$$\lambda_2 = 10,8094 \cdot 10^7 \text{ 1/с}, \quad (16)$$

$$\lambda_{2\text{расч}} = 10,8097 \cdot 10^7 \text{ 1/с}, \quad (17)$$

$$\delta = \frac{|\lambda_{2\text{расч}} - \lambda_2|}{\lambda_{2\text{расч}}} = 0,0028 \%. \quad (18)$$

2.3. Двухобластные кубы из ^{239}Pu и ^{238}Pu с профилем плотности (решение односкоростных задач на собственные значения и собственные функции)

Ниже исследуются нейтронные характеристики следующих трехмерных систем: исходный куб 1 из ^{239}Pu и куб 2 из ^{238}Pu .

Задачу о переходе между системами из разных материалов с помощью точных соотношений подобия (10), (11) в общем случае решить нельзя, поскольку при выводе данных соотношений предпо-

лагалась неизменность ядерно-физических свойств среды (см. [4]).

Если вместо точного спектрального кинетического уравнения [4] за основу принять односкоростное кинетическое уравнение, то поставленную задачу можно решить с использованием более общих, но менее точных формул подобия. Действительно, при переходе к односкоростному приближению расширяется класс подобных систем и это дает возможность отыскания большего, нежели в статье [4] количества соотношений подобия.

В односкоростное кинетическое уравнение входят следующие величины: $\alpha(\vec{r}) = n_{\text{я}}(\vec{r})(\sigma_s + \sigma_f + \sigma_c)$ – обратный полный пробег нейтронов в среде с плотностью ядер $n_{\text{я}}(\vec{r}) = \frac{N_{\text{Авогадро}} \rho(\vec{r})}{A}$, $\rho(\vec{r})$ – плотность вещества,

$\beta(\vec{r}) = h(\vec{r})\alpha(\vec{r}, \rho)$, $h = \frac{v\sigma_f + \sigma_s}{\sigma_s + \sigma_f + \sigma_c}$ – активность

вещества, v – среднее число вторичных нейтронов, испускаемых в одном акте деления ядра и σ_s , σ_f , σ_c – элементарные сечения рассеяния, деления и поглощения нейтронов.

Далее использовано односкоростное приближение. При этом в аналитических вычислениях, а также в расчетах по методике «Монте-Карло» приняты скорость нейтронов $V = 10^9 \text{ 1/с}$ и взятые из работы [5] следующие одnogрупповые нейтронные константы (1-ENDF B-6) (табл. 2).

Т а б л и ц а 2

Значения активности и параметров $\alpha(\rho_0)$, $\beta(\rho_0)$

Изотоп плутония	^{239}Pu	^{238}Pu
Активность среды h	1,6578	1,7101
Кристаллическая плотность плутония ρ_0 , г/см ³	19,851	19,840
$\alpha_0 = \alpha(\rho_0)$, 1/см	0,2779	0,2691
$\beta_0 = \beta(\rho_0)$, 1/см	0,4607	0,4602

2.3.1. Решение задачи на главные собственные значения λ

В статье [6] получена формула для двух произвольных подобных профильных систем:

$$\lambda_2 = \left[\frac{\bar{\alpha}_1 \bar{\beta}_2}{\bar{\alpha}_2 \bar{\beta}_1} \left(1 + \frac{\lambda_1}{\bar{\alpha}_1 V_1} \right) - 1 \right] \bar{\alpha}_2 V_2, \quad (19)$$

которой можно пользоваться, если выполняется условие

$$\bar{\beta}_2 R_2 = \bar{\beta}_1 R_1. \quad (20)$$

R_i – характерные размеры подобных систем, $\bar{\alpha}_i = \bar{\alpha}_{0i} \frac{\bar{\rho}_i}{\bar{\rho}_{0i}}$, $\bar{\beta}_i = \bar{\beta}_{0i} \frac{\bar{\rho}_i}{\bar{\rho}_{0i}}$ – средние по объему величины параметров.

При решении поставленной здесь задачи с не зависящей от координат активностью и $V_2 = V_1 = 10^9$ л/с соотношения (19), (20) несколько упрощаются:

$$\lambda_2 = \left[\frac{h_2}{h_1} \left(1 + \frac{\lambda_1}{\bar{\alpha}_1 V} \right) - 1 \right] \bar{\alpha}_2 V, \quad (21)$$

$$h_2 \bar{\alpha}_2 R_2 = h_1 \bar{\alpha}_1 R_1. \quad (22)$$

Рассмотрим случай, когда

$$\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}} = \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{22}} = 2 \text{ и } \bar{\alpha}_1 > \bar{\alpha}_2. \quad (23)$$

Пусть куб 1 из ^{239}Pu характеризуется следующими параметрами: $\bar{\alpha}_1 = 0,42$ л/см, $\alpha_{11} = 0,63$ л/см, $\alpha_{12} = 0,315$ л/см, $M_{11} = M_{12} = 5$ кг, $a_{11} = 4,8075$ см, $a_{12} = 6,9336$ см.

Из выражения (22) вытекают следующие формулы для определения длин a_{21} и a_{22} в подобном кубе:

$$a_{21} = \frac{h_1}{h_2} \left\{ \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{21}} \frac{a_{11}^3}{a_{12}^2} \left[\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{22}} a_{12} + \left(\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{21}} - \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{22}} \right) \frac{a_{11}^3}{a_{12}^2} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{3}}, \quad (24)$$

$$a_{22} = \frac{h_1}{h_2} \left[\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{22}} a_{12} + \left(\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{21}} - \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{22}} \right) \frac{a_{11}^3}{a_{12}^2} \right]. \quad (25)$$

Таким образом для куба 2 из ^{238}Pu имеем $\bar{\alpha}_2 = 0,8136$ л/см, $\alpha_{21} = 1,2204$ л/см, $\alpha_{22} = 0,6102$ л/см, $M_{21} = M_{22} = 1,25$ кг; рассчитанные по формулам (23) и (24) длины ребер равны $a_{21} = 2,40375$ см, $a_{22} = 3,4668$ см.

Приведем результаты численных расчетов λ , вычисления по формуле подобия (21) и погрешность.

$$\lambda_{1\text{расч}} = 20,1539 \cdot 10^7 \text{ л/с}, \quad (26)$$

$$\lambda_2 = 42,8525 \cdot 10^7 \text{ л/с}, \quad (27)$$

$$\lambda_{2\text{расч}} = 43,8466 \cdot 10^7 \text{ л/с}, \quad (28)$$

$$\delta = \frac{|\lambda_{2\text{расч}} - \lambda_2|}{\lambda_{2\text{расч}}} = 2,27 \%. \quad (29)$$

2.3.2. Решение задачи на главные собственные функции

Перепишем соотношение (20) в следующем виде:

$$\frac{\beta_{20}}{\rho_{20}} \bar{\rho}_2 R_2 = \frac{\beta_{10}}{\rho_{10}} \bar{\rho}_1 R_1. \quad (30)$$

Если обратиться к данным табл. 2, то можно заметить, что отношения $\frac{\beta_{10}}{\rho_{10}} = 0,023208 \frac{\text{см}^2}{\text{г}}$ и

$\frac{\beta_{20}}{\rho_{20}} = 0,023196 \frac{\text{см}^2}{\text{г}}$ для изотопов ^{239}Pu и ^{238}Pu из-за свойственных им сечений взаимодействия нейтронов с веществом совпадают с точностью до 0,05 %.

Поэтому в данном конкретном случае вместо условия (30) возникает приближенный критерий

$$\bar{\rho}_2 R_2 \approx \bar{\rho}_1 R_1, \quad (31)$$

при соблюдении которого становится справедливой полученная в работе [4] формула подобия для нейтронной плотности

$$n_2(\bar{r}_2) = n_1 \left(\frac{R_2}{R_1} \bar{r}_1 \right). \quad (32)$$

Нейтронная плотность (32) определялась в направлении оси ОХ, перпендикулярной грани куба.

Результаты аналитических вычислений и численного расчета для случая (23) показаны на рис. 1.

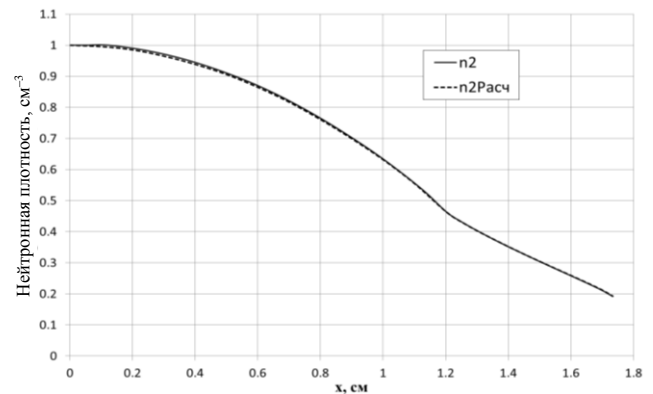


Рис. 1. Функция $n_2(x)$, вычисленная по формуле (32) (сплошная линия), и $n_{2\text{расч}}(x)$, полученная в расчете «Монте-Карло» (пунктирная линия)

Плотности нейтронов $n_2(x)$ и $n_{2\text{расч}}(x)$ нормированы на единицу в центре куба.

Максимальная погрешность численного расчета нейтронной плотности составляет 1,6 %.

Теперь рассмотрим случай $\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}} = \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{22}} = \frac{1}{5}$ для

следующих двух систем:

куб 1: $\bar{\alpha}_1 = 0,42$ 1/см, $\alpha_{11} = 0,1145$ 1/см, $\alpha_{12} = 0,5727$ 1/см, $M_{11} = 0,9$ кг, $M_{12} = 9,1$ кг, $a_{11} = 4,8075$ см, $a_{12} = 6,9336$ см;

куб 2: $\bar{\alpha}_2 = 0,8136$ 1/см, $\alpha_{21} = 0,2219$ 1/см, $\alpha_{22} = 1,1079$ 1/см, $M_{21} = 0,225$ кг, $M_{22} = 2,275$ кг, $a_{21} = 2,40375$ см, $a_{22} = 3,4668$ см.

Зависимость $n_2(x)$ проиллюстрирована на рис. 2.

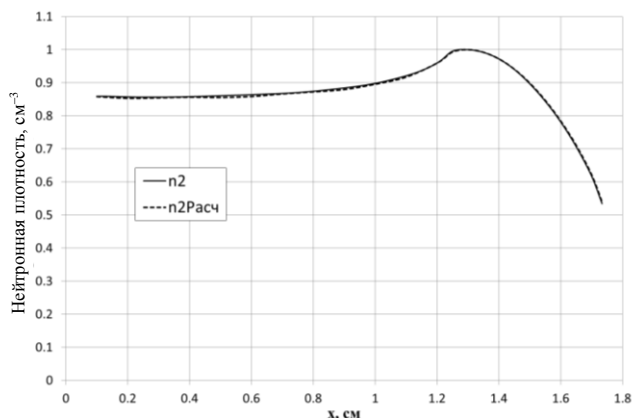


Рис. 2. Зависимость $n_2(x)$, вычисленная по формуле (32), (сплошная линия) и $n_{2расч}(x)$, полученная в расчете (пунктирная линия).

В случае $k = \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}} = \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{22}} = \frac{1}{5}$ максимум

нейтронной плотности находится в периферийной области куба.

Следует отметить, что при стремлении k к нулю рассмотренный выше тип 3D-системы с профилем плотности плутония вырождается в куб с пустой центральной полостью, т. е. в однородный кубический слой.

Заключение

В статье изучена нейтронная кинетика двумерных и трехмерных систем, выполненных из ^{239}Pu и ^{238}Pu .

В качестве 2D-объектов рассмотрены однородные вытянутые эллипсоиды вращения, а в качестве 3D-систем – кубы, как однородные, так и с профилем плотности плутония.

На некоторых примерах с помощью соотношений подобия определены погрешности расчетов главных собственных значений и главных собственных функций.

Список литературы

1. Бабичев Н. Б., Лутиков И. В., Севастьянов А. А. Нейтронная кинетика однородных шаров из плутония-238 и плутония-239, находящихся в произвольных состояниях // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2014. Вып. 3. С. 46–60.
2. Донской Е. Н., Ельцов В. А., Житник А. К. и др. Метод Монте-Карло во ВНИИЭФ // ВАНТ. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1993. Вып.2. С. 61–64.
3. Herman M., Trkov A. ENDF-6 Format Manual, Data Formats and Procedures for the Evaluated Nuclear Data Files ENDF/B-VI and ENDF/B-VII. BNL-90365. National Nuclear Data Center, Brookhaven National Laboratory, Upton, New York 11973-5000, July 2010.
4. Бабичев Н. Б., Бондарев П. С., Лутиков И. В., Незнамов В. П. Инвариантность общего уравнения переноса нейтронов в некоторых профильных системах и вытекающие из этого следствия // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2011. Вып. 1–2. С. 61–64.
5. Бабичев Н. Б., Севастьянов А. А. Критические параметры однородных шаров, состоящих из плутония-238 и плутония-239 // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2014. Вып. 3. С. 28–35.
6. Бабичев Н. Б., Лутиков И. В., Незнамов В. П. Теория подобия в рамках односкоростной нейтронной кинетики квазистационарных систем // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2008. Вып. 1. С. 56–64.

Статья поступила в редакцию 29.01.2015.