

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ НЕЙТРОННОЙ КИНЕТИКИ

Н. Б. Бабичев

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Найдены новые общие аналитические решения кинетического уравнения, и теория подобия нейтронно-кинетических процессов получила дальнейшее развитие.

Ключевые слова: уравнение переноса нейтронов, формулы подобия, инвариантность, собственные функции и собственные значения.

Введение

Цели данной статьи заключаются в усовершенствовании теории подобия процессов нейтронной кинетики, в исследовании характеристик нестационарных профильных систем и в определении общих зависимостей главных собственных значений и главных собственных функций от различных параметров.

Для контроля точности новых результатов ниже проводится их сравнение с соответствующими результатами численных решений кинетического уравнения по одной из математических программ [1].

1. Односкоростное нестационарное кинетическое уравнение и результаты, полученные из него

1.1. Вид кинетического уравнения

В односкоростном приближении считается, что все нейтроны имеют одинаковую по величине скорость V , индикатриса упругого рассеяния нейтронов на ядрах изотропна и поэтому не учитываются неупругие процессы, сечения взаимодействия которых с веществом характеризуются сильной анизотропией, но они малы по причине отсутствия в рассматриваемых ниже системах нейтронов с энергией более 8 МэВ. При выполнении данных упрощающих предположений зависящая от времени t функция распределения нейтронов $\psi(t, \vec{r}, \vec{\Omega})$ в фазовом пространстве векторов \vec{r} ,

$\vec{\Omega} = \frac{\vec{V}}{V}$ подчиняется кинетическому уравнению (см., например, [2])

$$\frac{1}{V} \frac{\partial \psi(t, \vec{r}, \vec{\Omega})}{\partial t} + \left(\vec{\Omega} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \right) \psi(t, \vec{r}, \vec{\Omega}) + \alpha(\vec{r}) \psi(t, \vec{r}, \vec{\Omega}) = \frac{\beta(\vec{r})}{4\pi} \int d\vec{\omega} \psi(t, \vec{r}, \vec{\omega}), \quad (1)$$

которое надо решать при соответствующих начальном и граничном условиях.

В соотношении (1) использованы следующие обозначения: $\alpha(\vec{r}) = n_{\text{я}}(\vec{r}) \sum_i \mu_i (\sigma_{si} + \sigma_{fi} + \sigma_{ci}) =$

$$= \frac{N_{\text{Авогадро}} \rho(\vec{r})}{\sum_i \mu_i A_i} \sum_i \mu_i (\sigma_{si} + \sigma_{fi} + \sigma_{ci}) - \text{обратный пол-}$$

ный пробег нейтронов в среде с плотностью ядер $n_{\text{я}}(\vec{r})$, состоящей из смеси компонентов с

массовыми числами A_i и концентрациями по частицам μ_i ; $\rho(\vec{r})$ – плотность вещества;

$\beta(\vec{r}) = n_{\text{я}}(\vec{r}) \sum_i \mu_i (\sigma_{si} + \nu_i \sigma_{fi})$; σ_{si} , σ_{fi} , σ_{ci} – элементарные сечения рассеяния, деления и захвата

нейтронов на ядрах i -го сорта; ν_i – среднее число вторичных нейтронов, испускаемых в одном акте

деления i -го ядра; отношение $h(\vec{r}) = \frac{\beta(\vec{r})}{\alpha(\vec{r})}$ – актив-

ность (мультипликация) среды.

1.2. Баланс полного числа нейтронов в системе

После интегрирования (1) по углам $\vec{\Omega}$ для нейтронной плотности

$$n(t, \vec{r}) = \int d\vec{\Omega} \psi(t, \vec{r}, \vec{\Omega}) \quad (2)$$

и векторного потока нейтронов

$$\vec{j}(t, \vec{r}) = V \int d\vec{\Omega} \vec{\Omega} \psi(t, \vec{r}, \vec{\Omega}) \quad (3)$$

имеем:

$$\frac{\partial n(t, \vec{r})}{\partial t} + \text{div} \vec{j}(t, \vec{r}) + \alpha(\vec{r}) V n(t, \vec{r}) = \beta(\vec{r}) V n(t, \vec{r}). \quad (4)$$

Проинтегрировав (4) по объему, получаем уравнение баланса полного числа нейтронов $N(t) = \int d\vec{r} n(t, \vec{r})$ в системе

$$L(t) = \frac{1}{N(t)} \frac{dN(t)}{dt} = \frac{\int d\vec{r} [\beta(\vec{r}) - \alpha(\vec{r})] V n(t, \vec{r})}{\int d\vec{r} n(t, \vec{r})} - W(t). \quad (5)$$

Функция $\Pi(t) = \int d\vec{S} \vec{j}(t, \vec{r})$ (интегрирование ведется по внешней поверхности объекта) представляет собой скорость утечки нейтронов.

Величина $W(t) = \frac{\Pi(t)}{N(t)}$ это эффективное мак-

роскопическое сечение поглощения нейтронов, связанное с вероятностью их вылета из системы в единицу времени.

Если параметры α и β постоянны, то уравнение баланса полного количества нейтронов в системе выглядит следующим образом:

$$\lambda_{\infty} - W = 0, \quad (6)$$

где

$$\lambda_{\infty} = (\beta - \alpha) V = \alpha(h - 1) V \quad (7)$$

это значение λ в бесконечной однородной среде.

Можно ввести понятие λ_{∞} для бесконечной профильной системы. В случае такой системы $W = 0$ и величина

$$\lambda_{\infty} = \frac{\int d\vec{r} [\beta(\vec{r}) - \alpha(\vec{r})] V n(\vec{r})}{\int d\vec{r} n(\vec{r})}, \quad (8)$$

являясь характеристикой среды, не зависит от времени, а $n(\vec{r})$ это равновесное распределение плотности нейтронов в бесконечном пространстве, заполненном неоднородным веществом.

1.3. Развитие процессов нейтронной кинетики во времени

В случае произвольного начального условия

$$\psi_0(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \psi(t=0, \vec{r}, \vec{\Omega}), \quad N_0 = N(t=0) \quad (9)$$

через некоторое время $t \geq t_0$ решение уравнения (1) выйдет на главную собственную функцию $\psi(t, \vec{r}, \vec{\Omega})$ и логарифмическая производная (5) превратится в постоянное главное собственное значение $\lambda = L(t \geq t_0) = \text{const}$. При этом справедливы экспоненциальный закон

$$\psi(t, \vec{r}, \vec{\Omega}) = e^{\lambda t} \psi(\vec{r}, \vec{\Omega}) \quad (10)$$

и уравнение переноса нейтронов

$$\left(\vec{\Omega} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \right) \psi(\vec{r}, \vec{\Omega}) + \left[\frac{\lambda}{V} + \alpha(\vec{r}) \right] \psi(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \frac{\beta(\vec{r})}{4\pi} \int d\vec{\omega} \psi(\vec{r}, \vec{\omega}). \quad (11)$$

Если задано отличающееся от распределения по собственной функции произвольное начальное условие $\psi(t=0, \vec{r}, \vec{\Omega})$, то можно считать, что в начальный момент времени в кинетическом уравнении включается дельта-функционный источник нейтронов $Q(t, \vec{\xi}) = q(\vec{\xi}) \delta(t)$, приводящий к расходимости логарифмической производной:

$$\frac{1}{N(t=0)} \frac{dN(t=0)}{dt} = \infty.$$

1.4. Исследования, выполненные с использованием свойства инвариантности кинетического уравнения по отношению к преобразованиям подобия

1.4.1. Класс подобных профильных систем, найденный из нестационарного уравнения переноса нейтронов

Рассмотрим функцию распределения нейтронов в фазовом пространстве векторов $\vec{\Omega}$, $\vec{\xi} = \frac{\vec{r}}{R}$ (R – характерный размер произвольного по геометрии объекта).

Учитывая, что $\frac{\partial}{\partial \vec{r}} = \frac{\partial}{\partial \vec{\xi}} \frac{d\vec{\xi}}{d\vec{r}} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \vec{\xi}}$, для функ-

ции $\psi(t, \vec{\xi}, \vec{\Omega})$ из кинетического уравнения (1) получаем следующее уравнение нейтронов в профильных системах:

$$\frac{R}{V} \frac{\partial \psi(t, \vec{\xi}, \vec{\Omega})}{\partial t} + \left(\vec{\Omega} \frac{\partial}{\partial \vec{\xi}} \right) \psi(t, \vec{\xi}, \vec{\Omega}) + \alpha(\vec{\xi}) R \psi(t, \vec{\xi}, \vec{\Omega}) = \frac{\beta(\vec{\xi}) R}{4\pi} \int d\vec{\omega} \psi(t, \vec{\xi}, \vec{\omega}). \quad (12)$$

Зависимости параметров α и β от координаты точки наблюдения представим в виде

$$\alpha(\vec{\xi}) = \bar{\alpha}A(\vec{\xi}), \beta(\vec{\xi}) = \bar{\beta}B(\vec{\xi}). \quad (13)$$

Здесь $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$ – средние по безразмерному объему системы величины, $A\left(\vec{\xi} = \frac{\vec{r}}{R}\right)$ и $B\left(\vec{\xi} = \frac{\vec{r}}{R}\right)$ – профильные функции, нормированные условиями

$$\frac{\int d\vec{\xi}A(\vec{\xi})}{\int d\vec{\xi}} = \frac{\int d\vec{\xi}B(\vec{\xi})}{\int d\vec{\xi}} = 1, \int d\vec{\xi} = C = \text{const.} \quad (14)$$

Приняв (13), вместо (12) имеем:

$$\begin{aligned} \frac{R}{V} \frac{\partial \Psi(t, \vec{\xi}, \vec{\Omega})}{\partial t} + \left(\vec{\Omega} \frac{\partial}{\partial \vec{\xi}} \right) \Psi(t, \vec{\xi}, \vec{\Omega}) + A(\vec{\xi}) \bar{\alpha} R \Psi(t, \vec{\xi}, \vec{\Omega}) = \\ = \frac{B(\vec{\xi}) \bar{\beta} R}{4\pi} \int d\vec{\omega} \Psi(t, \vec{\xi}, \vec{\omega}). \end{aligned} \quad (15)$$

Теперь уравнение (15) запишем для некоей системы 1

$$\begin{aligned} \frac{R_1}{V} \frac{\partial \Psi_1(t_1, \vec{\xi}_1, \vec{\omega})}{\partial t_1} + \left(\vec{\Omega} \frac{\partial}{\partial \vec{\xi}_1} \right) \Psi_1 + A_1(\vec{\xi}_1) \bar{\alpha}_1 R_1 \Psi_1 = \\ = \frac{\bar{\beta}_1 R_1 B_1(\vec{\xi}_1)}{4\pi} \int d\vec{\omega} \Psi_1(t_1, \vec{\xi}_1, \vec{\omega}) \end{aligned} \quad (16)$$

и из него получим кинетическое уравнение для другой произвольной системы 2 с помощью следующих соотношений:

$$t_2 = \frac{R_2}{R_1} t_1, \quad (17)$$

$$\vec{\xi}_2 = \frac{\bar{\beta}_1 R_1}{\bar{\beta}_2 R_2} \vec{\xi}_1, \quad (18)$$

$$\frac{\partial}{\partial t_1} = \frac{\partial}{\partial t_2} \frac{dt_2}{dt_1} = \frac{R_2}{R_1} \frac{\partial}{\partial t_2}, \quad (19)$$

$$\frac{\partial}{\partial \vec{\xi}_1} = \frac{\partial}{\partial \vec{\xi}_2} \frac{d\vec{\xi}_2}{d\vec{\xi}_1} = \frac{\bar{\beta}_1 R_1}{\bar{\beta}_2 R_2} \frac{\partial}{\partial \vec{\xi}_2}. \quad (20)$$

Воспользовавшись уравнением (16) и связями (17)–(20), приведем уравнение, которому подчиняется функция распределения нейтронов $\Psi_2(t_2, \vec{\xi}_2, \vec{\Omega})$.

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\beta}_2 R_2}{\bar{\beta}_1 R_1} \frac{R_2}{V} \frac{\partial \Psi_2}{\partial t_2} + \left(\vec{\Omega} \frac{\partial}{\partial \vec{\xi}_2} \right) \Psi_2 + \frac{\bar{\beta}_2 R_2}{\bar{\beta}_1 R_1} \bar{\alpha}_1 R_1 A_1(\vec{\xi}_1) \Psi_2 = \\ = \frac{\bar{\beta}_2 R_2 B_2(\vec{\xi}_2)}{4\pi} \int d\vec{\omega} \Psi_2(t_2, \vec{\xi}_2, \vec{\omega}_2). \end{aligned} \quad (21)$$

Для выполнения свойства инвариантности кинетического уравнения (1) по отношению к преобразованиям (17), (18) необходимо, чтобы уравнения (16) и (21) по своему виду совпали друг с другом, т. е. в случае системы 2 уравнение должно выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{R_2}{V} \frac{\partial \Psi_2(t_2, \vec{\xi}_2, \vec{\Omega})}{\partial t_2} + \left(\vec{\Omega} \frac{\partial}{\partial \vec{\xi}_2} \right) \Psi_2 + A_2(\vec{\xi}_2) \bar{\alpha}_2 R_2 \Psi_2 = \\ = \frac{\bar{\beta}_2 R_2 B_2(\vec{\xi}_2)}{4\pi} \int d\vec{\omega} \Psi_2(t_2, \vec{\xi}_2, \vec{\omega}). \end{aligned} \quad (22)$$

Отталкиваясь от (16) и (21), определим класс подобных систем путем нахождения соответствующих инвариантных соотношений.

Уравнение (16) превратится в (22) при соблюдении следующих необходимых и достаточных условий.

1) Для подобных систем профильные функции $B_2(\vec{\xi}_2)$ и $B_1(\vec{\xi}_1)$ обязаны быть одинаковыми, т. е.

$$B_2(\vec{\xi}_2) = B_1(\vec{\xi}_1) = B(\vec{\xi}). \quad (23)$$

2) Должны выполняться следующие соотношения подобия

$$\bar{\beta}_2 R_2 = \bar{\beta}_1 R_1, \quad (24)$$

$$\bar{\beta}_2 \vec{\xi}_2 = \bar{\beta}_1 \vec{\xi}_1, \quad \bar{\beta}_2 \vec{r}_2 = \bar{\beta}_1 \vec{r}_1, \quad (25)$$

$$t_2 R_1 = t_1 R_2. \quad (26)$$

3) Возможной является следующая связь профильных функций $A_2(\vec{\xi}_2) = A_2(\vec{\xi})$ и $A_1(\vec{\xi}_1) = A_1(\vec{\xi})$:

$$A_2(\vec{\xi}) = \frac{\bar{\alpha}_1 R_1}{\bar{\alpha}_2 R_2} A_1(\vec{\xi}). \quad (27)$$

4) Если учесть нормировку (14), то интегрирование левой и правой частей (27) по $\vec{\xi}$ приводит к соотношению подобия

$$\bar{\alpha}_2 R_2 = \bar{\alpha}_1 R_1. \quad (28)$$

Одновременно удовлетворить условиям (24) и (28) можно только в следующих двух случаях, которым соответствуют определенные классы подобных профильных систем.

Первый случай: от координат зависит только свободный пробег нейтронов. В этом случае имеем

$$h_2 = h_1, \quad \bar{\alpha}_2 R_2 = \bar{\alpha}_1 R_1, \quad (29)$$

$$\Psi_2(t, \vec{r}, \vec{\Omega}) = C_{1,2} \Psi_1\left(\frac{R_2}{R_1} t, \frac{R_2}{R_1} \vec{r}, \vec{\Omega}\right). \quad (30)$$

Из-за линейности кинетического уравнения нормировочную константу $C_{1,2}$ можно выбрать

произвольной. Например, если каждую функцию распределения нормировать на одну условную единицу в точке ее максимума, то $C_{1,2} = 1$. Далее нормировочная постоянная всюду принимается равной единице.

Второй случай: от координат зависит активность веществ, а параметры $\alpha_1 = \bar{\alpha}_1$ и $\alpha_2 = \bar{\alpha}_2$ постоянны. При этом справедливы критерий подобия

$$\bar{h}_2 \alpha_2 R_2 = \bar{h}_1 \alpha_1 R_1 \quad (31)$$

и формула для функций распределения нейтронов в рассмотренных подобных объектах

$$\psi_2(t, \vec{r}, \vec{\Omega}) = \psi_1\left(\frac{R_2}{R_1}t, \frac{R_2}{R_1}\vec{r}, \vec{\Omega}\right). \quad (32)$$

1.4.2. Главные собственные значения и собственные функции подобных профильных систем

После выхода $\psi(t, \vec{\xi}, \vec{\Omega})$ на главные собственные функции $\psi(t \geq t_0, \vec{\xi}, \vec{\Omega})$ и логарифмических производных на главные собственные значения $L(t \geq t_0) = \lambda$ вступает в силу экспоненциальный закон (10) и нестационарное кинетическое уравнение (15) переходит в следующее стационарное:

$$\begin{aligned} \left(\bar{\Omega} \frac{\partial}{\partial \vec{\xi}}\right) \psi(\vec{\xi}, \vec{\Omega}) + \left[A(\vec{\xi}) + \frac{\lambda}{\bar{\alpha}V}\right] \bar{\alpha}R\psi(\vec{\xi}, \vec{\Omega}) = \\ = \frac{\bar{\beta}RB(\vec{\xi})}{4\pi} \int d\vec{\omega} \psi(\vec{\xi}, \vec{\omega}). \end{aligned} \quad (33)$$

Выполнив преобразования подобия (24) и (25), получаем следующие необходимые для инвариантности кинетического уравнения (35) соотношения:

$$B_2(\vec{\xi}_2) = B_1(\vec{\xi}_1) = B(\vec{\xi}), \quad (34)$$

$$A_2(\vec{\xi}) = \left[A_1(\vec{\xi}) + \frac{\lambda_1}{\bar{\alpha}_1 V} \right] \frac{\bar{\alpha}_1 R_1}{\bar{\alpha}_2 R_2} - \frac{\lambda_2}{\bar{\alpha}_2 V}, \quad (35)$$

$$\frac{dA_2(\vec{\xi})}{d\vec{\xi}} = \frac{\bar{\alpha}_1 R_1}{\bar{\alpha}_2 R_2} \frac{dA_1(\vec{\xi})}{d\vec{\xi}} = \frac{dA_1(\vec{\xi})}{d\vec{\xi}}. \quad (36)$$

Интегрирование левой и правой частей равенства (35) по объему с учетом нормировки

$$\int d\vec{\xi} A_2(\vec{\xi}) = \int d\vec{\xi} A_1(\vec{\xi}) = \int d\vec{\xi} = \text{const} = 1 \quad (37)$$

приводит к следующей формуле подобия главных собственных значений:

$$\lambda_2 = \left[\frac{\bar{\alpha}_1 \bar{\beta}_2}{\bar{\alpha}_2 \bar{\beta}_1} \left(1 + \frac{\lambda_1}{\bar{\alpha}_1 V} \right) - 1 \right] \bar{\alpha}_2 V. \quad (38)$$

Очевидно, что главные функции распределения нейтронов в подобных системах выражаются друг через друга следующим образом:

$$\psi_2(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \psi_1\left(\frac{R_2}{R_1}\vec{r}, \vec{\Omega}\right). \quad (39)$$

Отметим, что выражение (38) ранее было получено в работе [3] с помощью анализа односкоростного кинетического уравнения (33) без использования свойства инвариантности, как это сделано выше, а формула (39) в [3] не выводилась.

1.5. Упрощение нестационарного кинетического уравнения и формул подобия

С целью упрощения будем считать, что параметр α не зависит от координат, и рассмотрим случай $t > t_0$, в котором $L(t) = \lambda$. Тогда уравнение (15) превратится в

$$\begin{aligned} \frac{R}{V} \frac{\partial \psi(t, \vec{\xi}, \vec{\Omega})}{\partial t} + \left(\bar{\Omega} \frac{\partial}{\partial \vec{\xi}}\right) \psi + \alpha R \psi = \\ = \frac{\bar{h}\alpha RB(\vec{\xi})}{4\pi} \int d\vec{\omega} \psi(t, \vec{\xi}, \vec{\omega}). \end{aligned} \quad (40)$$

Решение уравнения переноса (40) будем искать в виде

$$\Psi(t, \vec{\xi}, \vec{\Omega}) = f(t, \vec{\xi}, \vec{\Omega}) \exp\left[-\left(1 + \frac{\lambda}{\alpha V}\right)\alpha R V t\right], \quad (41)$$

где $f(t, \vec{\xi}, \vec{\Omega})$ – новая функция распределения нейтронов, которая определяется из существенно более простого, чем (40), кинетического уравнения

$$\begin{aligned} \frac{R}{V} \frac{\partial f(t, \vec{\xi}, \vec{\Omega})}{\partial t} + \left(\bar{\Omega} \frac{\partial}{\partial \vec{\xi}}\right) f(t, \vec{\xi}, \vec{\Omega}) = \\ = \frac{\bar{h}\alpha RB(\vec{\xi})}{4\pi} \int d\vec{\omega} f(t, \vec{\xi}, \vec{\omega}). \end{aligned} \quad (42)$$

Интегрирование (42) по углам дает следующее уравнение:

$$\frac{\partial m(t, \vec{\xi})}{\partial t} + \frac{1}{R} \text{div} \vec{i}(t, \vec{\xi}) = \bar{h}\alpha V B(\vec{\xi}) m(t, \vec{\xi}), \quad (43)$$

в котором присутствуют новые нейтронная плотность

$$m(t, \vec{\xi}) = \int d\vec{\omega} f(t, \vec{\xi}, \vec{\omega}) \quad (44)$$

и векторный поток частиц

$$\vec{i}(t, \vec{\xi}) = V \int d\vec{\omega} \vec{\omega} f(t, \vec{\xi}, \vec{\omega}). \quad (45)$$

После интегрирования (43) по объему и деления полученного так результата на полное количество нейтронов в системе

$$M(t) = \int d\vec{\xi} m(t, \vec{\xi}) \quad (46)$$

было найдено балансное уравнение

$$\frac{1}{M(t)} \frac{dM(t)}{dt} = \frac{\bar{h}\alpha V \int d\vec{\xi} B(\vec{\xi}) m(t, \vec{\xi})}{\int d\vec{\xi} m(t, \vec{\xi})} - w(t), \quad (47)$$

$$w(t) = \frac{1}{M(t)} \int d\vec{s} \bar{i}(t, \vec{\xi}). \quad (48)$$

Из (40) получается формула

$$M(t) = M_0 \exp \left[\frac{\bar{h}\alpha V \int d\vec{\xi} B(\vec{\xi}) m(t, \vec{\xi})}{\int d\vec{\xi} m(t, \vec{\xi})} - w(t) \right],$$

$$M_0 = M(t=0), \quad (49)$$

которая описывает развитие нестационарного процесса изменения полного количества нейтронов в системе, включая начальный момент времени, когда $m_0(\vec{\xi}) = m(t=0, \vec{\xi})$ и $M_0 = \int d\vec{\xi} m_0(\vec{\xi})$.

Приведем новые формулы подобия:

$$f_2(t_2, \vec{\xi}_2, \vec{\Omega}) = f_1 \left(t_1 = \frac{R_1}{R_2} t_2, \vec{\xi}_1 = \vec{\xi}_2, \vec{\Omega} \right), \quad (50)$$

$$\Psi_2(t_2, \vec{\xi}_2, \vec{\Omega}) = f_2(t_2, \vec{\xi}_2, \vec{\Omega}) \times \exp \left[\left(1 + \frac{\lambda_2}{\alpha_2 V} \right) \alpha_2 R_2 V t_2 - \left(1 + \frac{\lambda_1}{\alpha_1 V} \right) \alpha_1 R_1 V t_1 \right], \quad (51)$$

$$\lambda_2 = \left[\frac{\bar{h}_2}{\bar{h}_1} \left(1 + \frac{\lambda_1}{\alpha_1 V} \right) - 1 \right] \alpha_1 V. \quad (52)$$

2. Исследования, выполненные на основе безразмерного односкоростного уравнения переноса нейтронов в профильных и однородных нестационарных системах

Исходное кинетическое уравнение (1) представим в виде

$$\frac{1}{V} \frac{\partial \psi(t, \vec{r}, \vec{\Omega})}{\partial t} + \left(\vec{\Omega} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \right) \psi + \bar{\alpha} A \left(\vec{\xi} = \frac{\vec{r}}{R} \right) \psi = \frac{1}{4\pi} \bar{\beta} B \left(\vec{\xi} = \frac{\vec{r}}{R} \right) \int d\vec{\omega} \psi(t, \vec{r}, \vec{\omega}) \quad (53)$$

и затем перейдем к безразмерным аргументам

$$\tau = \bar{\beta} V t, \quad (54)$$

$$\vec{z} = \bar{\beta} \vec{r} \quad (55)$$

с учетом следующих связей между производными:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \bar{\beta} V \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad (56)$$

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}} = \bar{\beta} \frac{\partial}{\partial \vec{z}}. \quad (57)$$

В итоге для функции распределения нейтронов в фазовом пространстве векторов $\vec{z}, \vec{\Omega}$ получается кинетическое уравнение

$$\left[\frac{\partial}{\partial \tau} + \left(\vec{\Omega} \frac{\partial}{\partial \vec{z}} \right) \right] \psi(\tau, \vec{z}, \vec{\Omega}) + \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}} A(\vec{\xi}) \psi(\tau, \vec{z}, \vec{\Omega}) = \frac{B(\vec{\xi})}{4\pi} \int d\vec{\omega} \psi(\tau, \vec{z}, \vec{\omega}), \quad (58)$$

$\vec{\xi} = \frac{\vec{z}}{\bar{\beta} R} = \frac{\vec{z}}{Z}$, $Z = \bar{\beta} R$ – характерный размер произвольной по геометрии системы в \vec{z} -пространстве,

$$\int d\vec{\zeta} A(\vec{\zeta}) = \int d\vec{\zeta} B(\vec{\zeta}) = \int d\vec{\zeta} = 1. \quad (59)$$

2.1. Вид общих аналитических решений задачи на главные собственные функции и главные собственные значения

Пусть $h = h(\vec{z})$, а параметр α является постоянным, т. е. $\alpha = \bar{\alpha}$.

Тогда (58) превращается в кинетическое уравнение

$$\left[\frac{\partial}{\partial \tau} + \left(\vec{\Omega} \frac{\partial}{\partial \vec{z}} \right) \right] \psi(\tau, \vec{z}, \vec{\Omega}) + \frac{1}{h} \psi(\tau, \vec{z}, \vec{\Omega}) = \frac{H(\vec{\xi})}{4\pi} \int d\vec{\omega} \psi(\tau, \vec{z}, \vec{\omega}), \quad (60)$$

В результате подстановки в (60) функции распределения $\psi(\tau, \vec{z}, \vec{\Omega})$ следующего вида

$$\psi(\tau, \vec{z}, \vec{\Omega}) = f(\tau, \vec{z}, \vec{\Omega}) \exp \left(-\frac{\tau}{h} \right) \quad (61)$$

для $f(\tau, \vec{z}, \vec{\Omega})$ получаем уравнение

$$\left[\frac{\partial}{\partial \tau} + \left(\vec{\Omega} \frac{\partial}{\partial \vec{z}} \right) \right] f(\tau, \vec{z}, \vec{\Omega}) = \frac{H(\vec{\xi})}{4\pi} \int d\vec{\omega} f(\tau, \vec{z}, \vec{\omega}), \quad (62)$$

которое не содержит ядерно-физических свойств среды, что имеет существенное значение.

Решение задачи на главные собственные значения Λ и главные собственные функции выражаются формулами

$$f(\tau, \bar{z}, \bar{\Omega}) = e^{\Lambda\tau} f(\bar{z}, \bar{\Omega}), \quad (63)$$

$$f(\tau, \bar{z}, \bar{\Omega}) = \psi(\tau, \bar{z}, \bar{\Omega}) \exp\left(\frac{\tau}{h}\right). \quad (64)$$

Подстановка (63) в (62) после дифференцирования по $d\tau$ приводит к кинетическому уравнению

$$\left(\bar{\Omega} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) f(\bar{z}, \bar{\Omega}) + \Lambda f(\bar{z}, \bar{\Omega}) = \frac{H(\bar{\xi})}{4\pi} \int d\bar{\omega} f(\bar{z}, \bar{\omega}). \quad (65)$$

Из-за того, что $\bar{\xi} = \frac{\bar{z}}{Z}$, входящее в (65) главное собственное значение Λ зависит только от $Z = \bar{h}\alpha R$, т. е.,

$$\Lambda = \Lambda(\bar{h}\alpha R). \quad (66)$$

Найдем теперь главные собственные значения λ .

Воспользовавшись формулами (10), (63) и (64), получим:

$$\psi(\bar{r}, \bar{\Omega}) e^{\lambda t} = f\left[\bar{z}(\bar{r}), \bar{\Omega}\right] \exp\left[\left(\Lambda - \frac{1}{h}\right)\tau(t)\right],$$

$$\tau(t) = \bar{h}\alpha V t. \quad (67)$$

Приравняв показатели экспонент в левой и правой частях равенства (68), получаем искомое общее решение

$$\lambda = \bar{h}\alpha R \frac{V}{R} \left[\Lambda(\bar{h}\alpha R) - \frac{1}{h} \right], \quad (68)$$

$\Lambda(\bar{h}\alpha R)$ это универсальная функция, явный вид которой можно определить, зная геометрию системы.

2.2. Явный вид универсальных функций в случае однородных шаров

Для однородных шаров, когда справедлива формула

$$\lambda = \beta R \frac{V}{R} \left[\Lambda(\beta R) - \frac{1}{h} \right], \quad (69)$$

при помощи численных расчетов по одной из математических методик [1] универсальная функция $\Lambda(\beta R)$ в работах [4, 5] была затабулирована в широком диапазоне $\beta R \in (0,2 \div 8)$ с точностью

$$\delta(\beta R = 0,2) = \frac{|\Delta\lambda|}{\lambda} = 0,5 \%, \quad \delta(\beta R = 8) = 0,001 \%.$$

Из работы [6] следует, что величины $\Lambda(\beta R)$ являются дискретными главными собственными значениями, если $\beta R > 1$, а иначе они принадлежат непрерывному спектру.

Вместо табличных зависимостей всегда желательно располагать соответствующими аналитическими решениями. Это оказалось выполнимым, поскольку для главных собственных значений λ существуют следующие весьма точные формулы:

полуинтерполяционная (см. [3, 7])

$$\lambda = \beta R \frac{V}{R} \left[\frac{1}{(\beta R)^{0,17}} \left(1,57 - \frac{2}{\beta R} \right) - \frac{1}{h} \right], \quad (70)$$

известная диффузионная

$$\lambda = \alpha V \left(\frac{h\varphi}{\text{tg}\varphi} - 1 \right) = \beta R \frac{V}{R} \left(\frac{\varphi}{\text{tg}\varphi} - \frac{1}{h} \right),$$

$$\varphi = \frac{\pi}{\beta R + 0,71}. \quad (71)$$

В [7] показано, что при значении $\beta R = 3,451$ обе формулы характеризуются одинаковой погрешностью 0,2 % в величине λ . С ростом параметра $\beta R > 3,451$ точность формулы (70) уменьшается, а диффузионной – увеличивается, но ее нельзя использовать в случае очень малых βR .

По мере уменьшения $\beta R < 3,451$ точность формулы (70) возрастает, достигая минимальной величины 0,4 % при значениях $\frac{h\varphi}{\text{tg}\varphi} = 1$ и $\lambda = -\alpha V =$

$= -\frac{\beta R V}{h R}$, что в случае шара из делящегося материала соответствует его глубокоподкритическому состоянию.

При значениях $\beta R \gg 1$ формула (70), приводя к абсурдному результату $\lambda < 0$, совершенно неприменима, а точность формулы (71), наоборот, возрастает, когда параметр βR увеличивается. Это на примере однородного шара показано в статье [8]. В ней на основе аналитических решений диффузионной задачи на главные собственные функции и главные собственные значения сделан вывод о том, что рост интенсивности делений за счет увеличения активности $h > 1$ в случае постоянной оптической толщины αR приводит к уменьшению относительной вероятности вылета нейтронов из системы в единицу времени.

В дополнение к [8] приведем объяснение данного вывода с точки зрения физического смысла. При увеличении βR возрастает резкость растущего в сторону центра профиля собственной функции. Поэтому именно в центральной зоне происходит наработка вторичных делительных нейтронов, а их утечка в пустоту сравнительно мала, так как она осуществляется из периферийной области.

Формулы (69), (70), (71) выражают зависимость λ от разных величин и поэтому они пригодны для проведения аналитических исследований.

В критических системах $\lambda = 0$ и поэтому из формулы (69) следует, что $\Lambda(\beta R) = \frac{1}{h}$.

Если βR устремить к бесконечности, то $\Lambda \rightarrow \Lambda_\infty$ и

$$\lambda \rightarrow \lambda_\infty = (\beta - \alpha)V. \quad (72)$$

В формуле (69) при $\beta R \rightarrow 0$ возникает неопределенность, раскрыть которую невозможно.

Из формулы (70) следует, что в случае $\beta R \rightarrow 0$ значение $\lambda \rightarrow 0$ и это понятно с точки зрения физического смысла. Действительно, при конечной величине β характерный размер системы $R \rightarrow \infty$, а в пустом пространстве количество нейтронов неизменно, т. е. $\lambda = 0$.

Выразив Λ через λ по формуле

$$\Lambda = \frac{1}{\beta R V} \lambda + \frac{1}{h} = \frac{\lambda}{\beta V} + \frac{1}{h}, \quad (73)$$

имеем:

$$\Lambda(\beta R) = \frac{1}{(\beta R)^{0,17}} \left(1,57 - \frac{2}{\beta R} \right), \quad (74)$$

$$\Lambda(\beta R) = \frac{\Phi}{\text{tg}\Phi}. \quad (75)$$

Зависимости $\Lambda(\beta R)$ (74), (75), как и формулы (70), (71) для главных собственных значений, являются приближенными.

Покажем, что кроме формулы (70) можно пользоваться другой формулой.

Можно показать, что масса шара $M = K\rho R^3$, R , ρ и K это соответственно характерный размер, плотность вещества и безразмерная константа, определяемая геометрией объекта.

Тогда с учетом того, что $\alpha = \frac{\beta}{h} = \frac{N_{\text{Авогадро}} \rho}{\sum_i \mu_i A_i} \sum_i \mu_i (\sigma_{si} + \sigma_{fi} + \sigma_{ci})$, получаем сле-

дующее выражение R через массу M : $R = \frac{MQh}{K\beta}$,

где зависящая от свойств среды величина

$$Q = \frac{N_{\text{Авогадро}}}{\sum_i \mu_i A_i} \sum_i \mu_i (\sigma_{si} + \sigma_{fi} + \sigma_{ci}).$$

Введя обозначение $Y = \frac{1}{V} \sqrt{\frac{MQh}{R}}$, приходим к окончательному ответу

$$\lambda = \frac{(\beta R)^{\frac{3}{2}}}{Y} \left[\Lambda(\beta R) - \frac{1}{h} \right]. \quad (76)$$

Из формулы (76) следует, что для подобных систем ($\beta_2 R_2 = \beta_1 R_1$) из одинаковых веществ выполняется закон

$$\lambda \sqrt{M} = \text{const}. \quad (77)$$

Иначе говоря, (77) это линии уровня главных собственных значений λ .

На основе выполненных исследований можно сделать следующие утверждения.

Если в \vec{r} -пространстве инвариантное условие $\beta R = \text{const}$ определяет множество подобных систем, то в \vec{z} -пространстве для них характерный размер Z одинаков (все подобные в \vec{r} -пространстве системы при переходе в \vec{z} -пространстве вырождаются в один-единственный объект).

3. Эволюция нейтронных характеристик во времени

Если уравнение баланса числа нейтронов в системе (5), полученное из кинетического уравнения (1), использовать при рассмотрении подобных систем, то разные системы будут отличаться временами t_0 (см. подраздел 1.3) выхода решений на главные собственные значения и функции.

Покажем, что в пространстве векторов \vec{r} уравнения (1) времена τ_0 одинаковы.

3.1. Уравнение баланса полного количества нейтронов в системе

Из уравнения (60) получаются следующие результаты:

$$n(\tau, \vec{z}) = \int d\vec{\Omega} \psi(\tau, \vec{z}, \vec{\Omega}), \quad (78)$$

$$\vec{j}(\tau, \vec{z}) = V \int d\vec{\Omega} \vec{\Omega} \psi(\tau, \vec{z}, \vec{\Omega}), \quad (79)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial n(\tau, \vec{z})}{\partial \tau} + \text{div} \vec{j}(\tau, \vec{z}) + \alpha A(\vec{z}) V n(\tau, \vec{z}) = \\ = \bar{h} \alpha B(\vec{z}) V n(\tau, \vec{z}). \end{aligned} \quad (80)$$

После интегрирования (81) по объему, приходим к уравнению баланса полного числа нейтронов $N(\tau) = \int d\vec{z} n(\tau, \vec{z})$ в системе

$$L(\tau) = \frac{1}{N(\tau)} \frac{dN(\tau)}{d\tau} = \frac{\int d\vec{z} [\bar{h}\alpha B(\vec{\zeta}) - \alpha A(\vec{\zeta})] Vn(\tau, \vec{z})}{\int d\vec{z} n(\tau, \vec{z})} - W(\tau), \quad (81)$$

$$W(\tau) = \frac{\Pi(\tau)}{N(\tau)}, \quad \Pi(\tau) = \int d\vec{S} \vec{j}(\tau, \vec{z}).$$

3.2. О синхронности выхода решений безразмерного нестационарного кинетического уравнения на главные собственные функции и главные собственные значения

Логарифмические производные $L(t)$ и $L(\tau)$ связаны между собой следующей формулой:

$$L(t) = \frac{1}{N(t)} \frac{dN(t)}{dt} = \bar{h}\alpha V \frac{1}{N(\tau)} \frac{dN(\tau)}{d\tau} = \bar{h}\alpha VL(\tau). \quad (82)$$

Приняв для $\tau = \bar{h}\alpha Vt$ эквивалентную запись

$$\tau = \bar{h}\alpha R \frac{t}{R}, \quad (83)$$

учтем, что в случае подобных объектов выполняется соотношение (17), которое представим в виде

$$\frac{t_2}{R_2} = \frac{t_1}{R_1} = \text{const}. \quad (84)$$

Принимая во внимание формулы (83) и (84), видим, что из-за исчезновения масштабного фактора $\frac{t}{R}$ время τ в подобных системах течет одинаково. Значит, выполняется равенство $\tau_{10} = \tau_{20}$, что и требовалось доказать.

3.3. Приближенная формула подобия для логарифмических производных и область ее применимости

Ограничившись классом пространственно однородных систем, вместо формулы (82) имеем:

$$L(\tau) = 1 - \frac{1}{h} - W(\tau) = \frac{\lambda_\infty}{\beta V} - W(\tau). \quad (85)$$

В случае $\lambda_\infty - \beta VW(\tau) \ll \lambda_\infty$ (второе ограничение) логарифмическая производная слабо зависит от времени.

Тогда в кинетическом уравнении (65), в которое входит главное собственное значение Λ , при-

дем $H(\vec{\zeta}) = 1$ и $L(\tau) = \text{const}$. Это даст следующее приближенное уравнение с постоянной логарифмической производной:

$$\left(\bar{\Omega} \frac{\partial}{\partial \vec{z}} \right) f(\vec{z}, \bar{\Omega}) + Lf(\vec{z}, \bar{\Omega}) \approx \frac{1}{4\pi} \int d\vec{\omega} f(\vec{z}, \vec{\omega}). \quad (86)$$

Осуществив такие же, как в подразделе 2.1 действия, на основе (86) получаем следующие результаты:

$$L(\tau) \approx \Lambda(\beta R) - \frac{1}{h}, \quad (87)$$

$$L_2(\tau) \approx L_1(\tau) + \frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}. \quad (88)$$

Численный расчет показал, что при значении параметра $\beta R = 3,6$ погрешность $\delta = \frac{|L_2 - L_{2\text{расч}}|}{L_2}$

в логарифмической производной L , определенной по формуле (88), составила 0,7 %.

Очевидно, что в случаях $\beta R > 3,6$ точность формулы (88) увеличивается.

4. Приближенные решения упрощенного спектрального уравнения переноса нейтронов в содержащих делящиеся материалы профильных системах, результаты аналитических и численных оценок

В работе [9] на основе точного спектрального уравнения Больцмана получены следующие тоже точные формулы подобия для главных собственных значений и главных собственных функций:

$$\lambda(\bar{\rho}_2) = \frac{\bar{\rho}_2}{\bar{\rho}_1} \lambda(\bar{\rho}_1), \quad (89)$$

$$\psi'(t_2, \vec{r}_2, \bar{\Omega}) = \left(\frac{\bar{\rho}_2}{\bar{\rho}_1} \right)^3 \psi(t_1, \vec{r}_1, \bar{\Omega}), \quad (90)$$

$\bar{\Omega} = \frac{\vec{V}}{V}$, $\bar{\rho}_2$ и $\bar{\rho}_1$ – средние значения плотностей для двух произвольных подобных профильных систем из одинаковых веществ.

Точность формул (89), (90) является несомненным их преимуществом, но они не приспособлены для переходов между объектами из разных материалов. Одна из целей данного раздела состоит в устранении отмеченного недостатка формул подобия (89), (90) ценой потери точности. Другие цели заключаются в нахождении общих решений

с универсальными функциями $\Lambda(\bar{h}\alpha R)$ и в выводе формул подобия.

4.1. Общий вид спектрального кинетического уравнения

За основу возьмем следующее нестационарное кинетическое уравнение общего вида (см., например, [10]).

$$\frac{\partial \psi(t, \vec{r}, \vec{V})}{\partial t} + \left(\vec{V} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \right) \psi(t, \vec{r}, \vec{V}) + \eta(\vec{r}, \vec{V}) \psi(t, \vec{r}, \vec{V}) = \int d\vec{V}' \Gamma(\vec{r}, \vec{V}', \vec{V}) \psi(t, \vec{r}, \vec{V}'). \quad (91)$$

Здесь $\psi(t, \vec{r}, \vec{V})$ – функция распределения нейтронов в момент времени t в фазовом пространстве векторов \vec{r} и \vec{V} , $\psi(t, \vec{r}, \vec{V}) d\vec{r} d\vec{V}$ – число частиц в окрестности точки с радиус-вектором \vec{r} внутри элементарного объема $d\vec{r}$, имеющих скорость \vec{V} с точностью до $d\vec{V}$; $\Gamma(\vec{r}, \vec{V}', \vec{V}) d\vec{V} dt$ выражает вероятность того, что за время dt нейтрон скорости \vec{V}' столкнется с каким-либо ядром, и в результате этого получится нейтрон, имеющий скорость \vec{V} с точностью до $d\vec{V}$; $\eta(\vec{r}, \vec{V}) dt$ – вероятность нейтрона, обладающего скоростью \vec{V} , провзаимодействовать с веществом за время dt .

Возможны четыре канала взаимодействий нейтронов с ядрами: упругое (s) и неупругое (in) рассеяние, деление (f) активных ядер, поглощение (c).

Им соответствуют элементарные (микроскопические) сечения $\sigma_1 = \sigma_s$, $\sigma_2 = \sigma_{in}$, $\sigma_3 = \sigma_f$, $\sigma_4 = \sigma_c$ и при этом

$$\Gamma(\vec{r}, \vec{V}', \vec{V}) = \sum_{k=1}^3 \Gamma_k(\vec{r}, \vec{V}', \vec{V}), \quad (92)$$

$$\eta(\vec{r}, \vec{V}) = \sum_{k=1}^4 \eta_k(\vec{r}, \vec{V}). \quad (93)$$

В статье В. Н. Климова [10] подробно рассматривались только процессы упругого рассеяния нейтронов. При этом был найден явный вид интеграла столкновений $\Gamma_s = \Gamma_1(\vec{r}, \vec{V}', \vec{V})$ и функции $\eta_s = \eta_1(\vec{r}, \vec{V})$ для всевозможных распределений ядер по скоростям (покоящиеся ядра, мононаправленные пучки ядер, максвелловское и анизотропное распределения).

Общий вид входящих в правую часть уравнения (106) функций, ответственных за скорости деления активных ядер, неупругого рассеяния и поглощения нейтронов, приведен в [11].

Функция $\eta(\vec{r}, \vec{V})$ зависит от макроскопического сечения $\alpha(\vec{r})$, т. е. от обратного полного пробега нейтронов, в $\Gamma(\vec{r}, \vec{V}', \vec{V})$ наряду этим входит активность среды $h(\vec{r})$.

Раскроем, например, структуру функций $\Gamma_s = \Gamma_1$ и $\eta_s = \eta_1$:

$$\Gamma_1(\vec{r}, \vec{V}', \vec{V}) = n_a(\vec{r}) \sum_j \int d\vec{W}_j \mu_j |\vec{V}' - \vec{W}_j| \sigma_1(|\vec{V}' - \vec{W}_j|) \eta_1(\vec{V}', \vec{W}_j, \vec{V}) \gamma(\vec{r}, \vec{W}_j); \quad (94)$$

$$\Gamma_1(\vec{r}, \vec{V}) = \int d\vec{V}' \Gamma_1(\vec{r}, \vec{V}, \vec{V}')^*; \quad (95)$$

\vec{W}_j – скорость ядер j -го сорта; $\eta_1(\vec{V}', \vec{W}_j, \vec{V}) d\vec{V}$ – вероятность нейтрона, имевшего до столкновения с j -м ядром скорость \vec{V}' , после упругого рассеяния приобрести скорость \vec{V} с точностью до $d\vec{V}$; $\gamma(\vec{r}, \vec{W}_j)$ – скоростное распределение ядер j -го сорта в точке \vec{r} , нормированное равенством

$$\int d\vec{W}_j \gamma(\vec{r}, \vec{W}_j) = 1. \quad (96)$$

4.2. Решение поставленной задачи

Далее будем считать, что ядра неподвижны, значит $\gamma = 1$ и функция $\Gamma(\vec{r}, \vec{V}', \vec{V})$ теряет зависимость от \vec{V}' . При этом в $\Gamma(\vec{r}, \vec{V})$ и $\eta(\vec{r}, \vec{V})$ входят параметры

$$\alpha(\vec{V}), \quad (97)$$

$$\beta(\vec{r}, \vec{V}) = \alpha(\vec{V}) \bar{h}(\vec{V}) H(\vec{\xi}), \quad (98)$$

\bar{h} – величина, усредненная по объему системы с характерным размером R , $H(\vec{\xi})$ – профильная функция, $\int d\vec{\xi} H(\vec{\xi}) = \int d\vec{\xi} = 1$.

Известно, что в случае систем, кинетика которых определяется делящимися материалами, в области энергий нейтронов $E_n \approx (1 \div 2)$ МэВ сечения взаимодействия нейтронов с веществом слабо за-

* Отметим, что $\Gamma_1(\vec{r}, \vec{V}, \vec{V}') \neq \Gamma_1(\vec{r}, \vec{V}', \vec{V})$.

висят от E_n . Поэтому в нулевом приближении можно использовать соотношения

$$\eta^{[0]}(\vec{r}, \vec{V}) = \alpha^{[0]} \eta_0^{[0]}(\vec{r}, \vec{V}), \quad (99)$$

$$\Gamma^{[0]}(\vec{r}, \vec{V}) = \alpha^{[0]} \bar{h} H(\vec{\xi}) \Gamma_0^{[0]}(\vec{r}, \vec{V}), \quad (100)$$

$\Gamma_0^{[0]}(\vec{r}, \vec{V})$, $\eta_0^{[0]}(\vec{r}, \vec{V})$ – некие другие функции двух переменных.

Поставленную так задачу можно решить только в рамках узкого класса профильных систем. Чтобы этим не ограничиться и охватить достаточно широкий класс объектов, выбрав известный характерный для них спектр $F(E_n)$, усредним по нему параметры α и β . Тогда вместо (99) и (100) получим

$$\eta(\vec{r}, \vec{V}) = \langle \alpha \rangle \eta_0(\vec{r}, \vec{V}), \quad (101)$$

$$\Gamma(\vec{r}, \vec{V}) = \langle \alpha \rangle \langle \bar{h} \rangle H(\vec{\xi}) \Gamma_0(\vec{r}, \vec{V}), \quad (102)$$

Скобками $\langle \rangle$ обозначено усреднение по спектру нейтронов $F(E_n)$.

Вместо исходного уравнения (91) теперь справедливо приближенное спектральное кинетическое уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{1}{V} \frac{\partial \psi(t, \vec{r}, \vec{V})}{\partial t} + \left(\bar{\Omega} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \right) \psi + \langle \alpha \rangle \eta_0(\vec{r}, \vec{V}) \psi = \\ & = \frac{\langle \bar{h} \rangle \langle \alpha \rangle B(\vec{\xi})}{4\pi} \int d\bar{\omega} dv v^2 \Gamma_0(\vec{r}, v, \bar{\omega}) \psi(t, \vec{r}, v, \bar{\omega}). \end{aligned} \quad (103)$$

Данное уравнение от односкоростного уравнения (1) отличается лишь тем, что оно спектральное.

После перехода к безразмерным переменным (см. раздел 2)

$$\tau = \bar{h} \alpha V t, \quad (104)$$

$$\vec{z} = \bar{h} \alpha \vec{r}, \quad (105)$$

$$\vec{\xi} = \frac{\vec{z}}{\bar{h} \alpha R} = \frac{\vec{z}}{Z} \quad (106)$$

(103) превращается в безразмерное кинетическое уравнение

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial}{\partial \tau} + \left(\bar{\Omega} \frac{\partial}{\partial \vec{z}} \right) \right] \psi(\tau, \vec{z}, \bar{\Omega}) + \frac{1}{\langle \bar{h} \rangle} \eta_0(\vec{z}, V) \psi = \\ & = \frac{H(\vec{\xi})}{4\pi} \int d\bar{\omega} dv v^2 \Gamma_0(\vec{z}, v) \psi(\tau, \vec{z}, v, \bar{\omega}). \end{aligned} \quad (107)$$

Это кинетическое уравнение является спектральным аналогом представленного во втором разделе односкоростного нестационарного уравнения (58).

Очевидно, что все полученные из уравнения (58) результаты остаются в силе и в спектральном случае.

Приведем новую формулу подобия для главных собственных значений

$$\lambda_2 = \left[\frac{\langle \bar{h}_2 \rangle \langle \alpha_2 \rangle}{\langle \bar{h}_1 \rangle \langle \alpha_1 \rangle} \left(1 + \frac{\lambda_1}{\langle \alpha_1 \rangle} \left\langle \frac{1}{V_1} \right\rangle \right) - 1 \right] \langle \alpha_2 \rangle \left\langle \frac{1}{V_2} \right\rangle, \quad (108)$$

которая справедлива при выполнении инвариантного соотношения

$$\langle \bar{h}_2 \rangle \langle \alpha_2 \rangle R_2 = \langle \bar{h}_1 \rangle \langle \alpha_1 \rangle R_1. \quad (109)$$

Напомним, что усреднение по заданному спектру нейтронов $F(E_n)$ проводится для обратной скорости $\frac{1}{V(E_n)}$. Имея это в виду, под величиной $\langle V \rangle$

далее будем подразумевать $\left\langle \frac{1}{V} \right\rangle$ и формула (108)

перепишется так:

$$\frac{\lambda_2}{\langle \alpha_2 \rangle \langle V_2 \rangle} = \frac{\langle \bar{h}_2 \rangle \langle \alpha_2 \rangle}{\langle \bar{h}_1 \rangle \langle \alpha_1 \rangle} \left(1 + \frac{\lambda_1}{\langle \alpha_1 \rangle \langle V_1 \rangle} \right) - 1, \quad (110)$$

Формула подобия для главных собственных функций имеет вид

$$\psi_2(\vec{r}, \bar{\Omega}) = \psi_1 \left(\left\langle \frac{\bar{h}_2 \langle \alpha_2 \rangle R_2}{\bar{h}_1 \langle \alpha_1 \rangle R_1} \vec{r}, \bar{\Omega} \right\rangle. \quad (111)$$

Общее решение задачи на главные собственные значения выглядит следующим образом:

$$\lambda = \langle \bar{h} \rangle \langle \alpha \rangle R \frac{V}{R} \left[\Lambda \left(\langle \bar{h} \rangle \langle \alpha \rangle R \right) - \frac{1}{\langle \bar{h} \rangle} \right]. \quad (112)$$

Явный вид универсальной функции $\Lambda \left(\langle \bar{h} \rangle \langle \alpha \rangle R \right)$ можно найти, если известна конкретная геометрия системы.

В случае однородных шаров явные зависимости $\Lambda(\beta R)$ определены выше в двух вариантах формулами (74), (75).

В спектральном случае вместо (74), (75) имеем

$$\Lambda(\langle \beta R \rangle) = \frac{1}{\langle \beta R \rangle^{0,17}} \left(1,57 - \frac{2}{\langle \beta R \rangle} \right), \quad (113)$$

$$\Lambda(\langle \beta R \rangle) = \frac{\varphi}{\text{tg} \varphi}, \quad \varphi = \frac{\pi}{\langle \beta R \rangle + 0,71} \quad (114)$$

и следующие также новые формулы для λ однородных шаров:

$$\lambda = \langle \beta R \rangle \frac{V}{R} \left[\frac{1}{\langle \beta R \rangle^{0,17}} \left(1,57 - \frac{2}{\langle \beta R \rangle} \right) - \frac{1}{\langle h \rangle} \right], \quad (115)$$

$$\lambda = \langle \beta R \rangle \frac{V}{R} \left(\frac{\varphi}{\operatorname{tg} \varphi} - \frac{1}{\langle h \rangle} \right), \quad \varphi = \frac{\pi}{\langle \beta R \rangle + 0,71}. \quad (116)$$

4.3. Некоторые результаты многогрупповых расчетов и аналитических вычислений нейтронных характеристик однородных шаров из чистых (без примесей) изотопов ^{239}Pu и ^{238}Pu

При постановке численных расчетов ниже используются 26-групповые нейтронные константы (см. [12]), полученные на основе библиотеки ENDF В-6 [13].

В качестве функции $F(E_n)$ были взяты различные нейтронные спектры.

Одногрупповые нейтронные константы, полученные с помощью ENDF В-6 представлены в следующей таблице.

Значения параметров, усредненных по спектру $F(E_n)$

Изотоп	Pu-238	Pu-239
ρ_0 , г/см ³	19,84	19,85
$\alpha(\rho_0)$, 1/см	0,269	0,278
h	1,710	1,658
V , 10 ⁹ , см/с	120,6	120,6

4.3.1. Результаты аналитических вычислений по формулам подобия и их сравнение с результатами расчетов

1) В качестве системы 1 был выбран шар из ^{239}Pu при следующих значениях параметров: масса $M_1 = 2,5$ кг, радиус $R_1 = 1,95398$ см, плотность $\rho_1 = 80$ г/см³. При этом усредненные по выбранному спектру нейтронов $F(E_n)$ величины составили $\alpha_1 = 1,11994$ 1/см, $\beta_1 = 1,85664$ 1/см, $\beta_1 R_1 = 3,628$. В случае данной системы численный расчет привел к следующему результату:

$$\lambda_{1\text{расч}} = 61,1180 \cdot 10^7 \text{ с}. \quad (117)$$

У подобного шара 2 из ^{238}Pu были приняты $\rho_2 = 80$ г/см³, $\alpha_2 = 1,08508$ 1/см, $\beta_2 = 1,85565$ 1/см, $M_2 = 2,504$ кг, $R_2 = 1,95502$ см, при этом из-за соотношения подобия $\beta_2 R_2 = 3,628$. В численном расчете для этого шара реализовалось значение

$$\lambda_{2\text{расч}} = 67,8922 \cdot 10^7 \text{ 1/с}. \quad (118)$$

Вычисления по формуле подобия (110) с $\langle \alpha \rangle \langle V \rangle = 1,95 \cdot 10^9$ 1/с привели к следующим результатам:

$$\lambda_2 = 67,2453 \cdot 10^7 \text{ 1/с}, \quad (119)$$

погрешность формулы (110) составила

$$\delta = \frac{|\lambda_2 - \lambda_{2\text{расч}}|}{\lambda_2} = 0,95 \%. \quad (120)$$

2) Случай, в котором исходный шар 1 из ^{239}Pu характеризовался следующими величинами: $\rho_1 = 60$ г/см³, $\alpha_1 = 0,83996$ 1/см, $\beta_1 = 1,39247$ 1/см, $M_1 = 1,875$ кг, $R_1 = 1,95398$ см, $\beta_1 R_1 = 2,721$. При этом численный расчет дал значение

$$\lambda_{1\text{расч}} = 19,8446 \cdot 10^7 \text{ с}. \quad (121)$$

Для подобного шара 2 из ^{238}Pu ($\rho_2 = 60$ г/см³, $\alpha_2 = 0,81381$ 1/см, $\beta_2 = 1,39173$ 1/см, $M_2 = 1,878$ кг и $R_2 = 1,95502$ см) с $\langle \alpha \rangle \langle V \rangle = 1,1 \cdot 10^9$ 1/с получились следующие результаты:

$$\lambda_2 = 23,2994 \cdot 10^7 \text{ 1/с}, \quad (122)$$

$$\lambda_{2\text{расч}} = 23,2944 \cdot 10^7 \text{ 1/с}, \quad (123)$$

$$\delta = \frac{|\lambda_2 - \lambda_{2\text{расч}}|}{\lambda_2} = 0,022 \%. \quad (124)$$

4.3.2. Сравнение результатов вычислений λ по формулам (115), (116) с результатами численных решений кинетического уравнения

Ниже рассматривается шар 2 пункта 1) с $\beta_2 R_2 = 3,628$ и $\langle \alpha \rangle \langle V \rangle = 1,69 \cdot 10^9$ 1/с.

3) Формула (115) привела к значению

$$\lambda_2 = 67,6029 \cdot 10^7 \text{ 1/с}, \quad (125)$$

Сравнив этот результат с результатом (118), получаем погрешность формулы

$$\delta = 0,43 \%. \quad (126)$$

4) Вычисления по диффузионной формуле (116) дали следующие результаты:

$$\lambda_2 = 67,7243 \cdot 10^7 \text{ 1/с}, \quad (127)$$

$$\delta = 0,25 \%. \quad (128)$$

Диффузионная формула оказалась более точной, чем (115), и это правильно. Действительно, в подразделе 2.2 при обсуждении вопроса о точности формул (70), (71) типа (115), (116) отмечалось, что в области $\beta R > 3,451$ преимущество с уверенностью следует отдать диффузионной формуле.

В аналитических вычислениях использовались разные типовые спектры нейтронов $F(E_n)$. Вопрос об их выборе здесь не обсуждается. Выработанный критерий нахождения $F(E_n)$ будет опубликован в ближайшее время.

Заключение

Результаты работ [14, 15, 16] по однородным системам, справедливые в односкоростном приближении, теперь обобщены на случай профильных объектов.

В [14, 15, 16] было принято граничное условие обращения в ноль потока нейтронов, влетающих в систему из пустоты

$$\psi|_S = 0, \text{ если } (\vec{\Omega}\vec{N}_S) < 0, \quad (130)$$

где \vec{N}_S – нормаль к поверхности S , направленная в сторону вакуума.

Вызванное условием (130) ограничение (односвязные системы с невогнутыми внешними поверхностями) снято, так как приведенные в данной статье соответствующие результаты были получены непосредственно из кинетических уравнений без привлечения граничных условий.

В работе [9] представлены точные формулы подобия, применимость которых ограничена классом профильных объектов из одинаковых веществ. Этот недостаток устранен в разделе 4 статьи, что позволило существенно расширить рамки теории подобия нейтронно-кинетических процессов, а также определить общие зависимости главных собственных значений и главных собственных функций от различных параметров, а также получить новые приближенные формулы явного вида для λ однородных шаров.

Список литературы

1. Шагалиев Р. М., Гребенников А. Н., Артемьев А. Ю., Будников В. И. Развитие основных методик и программ ИТМФ // Журнал Атом, 2011, № 50–51.

2. Дэвисон Б. Теория переноса нейтронов. М.: Изд-во Главного управления по использованию атомной энергии при Совете Министров СССР, 1960.

3. Бабичев Н. Б., Лутиков И. В., Незнамов В. П. Теория подобия в рамках односкоростной нейтронной кинетики квазистационарных систем // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2008. Вып. 1. С. 56–66.

4. Бабичев Н. Б., Севастьянов А. А. Нейтронные поля внутри и за пределами однородных глупокоподкритических шаров // См. настоящий выпуск. С. 6–19.

5. Бабичев Н. Б., Лутиков И. В., Севастьянов А. А. Аналитические решения задач по нейтронной кинетике однородных шаров, состоящих из произвольных материалов // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2014. Вып. 3. С. 76–84.

6. Yamagishi T. Solutions of monoenergetic time dependent neutron transport equation in slab geometry // Journal of Nuclear Science and Technology. 1973. Vol. 10 (5). P. 284–291/

7. Бабичев Н. Б., Лутиков И. В., Незнамов В. П. Некоторые решения вырожденного уравнения переноса нейтронов // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2009. Вып. 1. С. 14–17.

8. Бабичев Н. Б. К вопросу о применимости диффузионной теории в случае среды с высокой активностью // См. настоящий выпуск. С. 3–5.

9. Бабичев Н. Б., Бондарев П. С., Лутиков И. В., Незнамов В. П. Инвариантность общего уравнения переноса нейтронов в некоторых профильных системах и вытекающие из этого следствия // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2011. Вып. 1–2. С. 65–69.

10. Климов В. Н. Кинетическое уравнение для примесей // Теория вероятностей и ее применения. Том 2. Вып. 2. 1957.

11. Бабичев Н. Б., Бондарев П. С., Незнамов В. П. Уравнения переноса нейтронов (учебное пособие для студентов и молодых специалистов). РФЯЦ ВНИИЭФ, Институт теоретической и математической физики (ИТМФ). Саров, 2010.

12. Бабичев Н. Б., Севастьянов А. А. Критические параметры однородных шаров, состоящих из плутония-238 и плутония-239 // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2014. Вып. 3. С. 28–35.

13. Herman M., Trkov A. ENDF-6 Format Manual, Data Formats and Procedures for the Evaluated Nuclear Data Files ENDF/B-VI and ENDF/B-VII. BNL-90365. National Nuclear Data Center, Brookhaven National Laboratory, Upton, New York 11973-5000, July 2010.

14. Бабичев Н. Б., Лутиков И. В., Севастьянов А. А. Элементы теории подобия нестационарных однородных систем в односкоростной нейтронной кинетике // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2008. Вып. 2. С. 18–20.

15. Бабичев Н. Б., Беженцев Б. В., Бондарев П. С., Забусов П. В. Собственные значения односкоростного уравнения переноса нейтронов в однородных системах // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2009. Вып. 3. С. 68–70.

16. Бабичев Н. Б., Лутиков И. В. Решение односкоростной задачи по нейтронной кинетике на собственные значения и собственные функции, справедливое в классе однородных односвязных объектов с невогнутыми внешними поверхностями // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2011. Вып. 1–2. С. 65–69.

Статья поступила в редакцию 12.03.2015