

# ВОПРОСЫ АТОМНОЙ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ:

**Теоретическая и прикладная  
физика**

**ВЫПУСК 1**

**2015**

ФГУП

«РОССИЙСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ЯДЕРНЫЙ ЦЕНТР – ВНИИЭФ»

# ВОПРОСЫ АТОМНОЙ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ:

**Теоретическая и прикладная  
физика**

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СБОРНИК

ВЫПУСК 1

Издается с 1984 г.

Саров – 2015

## Уважаемые читатели!

Редакция н/т сборника «Вопросы атомной науки и техники» серии «Теоретическая и прикладная физика» информирует о том, что начиная со 2-го полугодия 2008 г. журнал распространяется согласно новым правилам подписки.

Теперь подписаться на сборник можно во всех отделениях связи России по каталогу Агентства «Роспечать», раздел «Периодические издания НТИ», подписной индекс 72246.

Цена одного журнала – 200 руб.

В год издается 3 выпуска.

По всем вопросам обращаться по адресу:

*607188 г. Саров Нижегородской обл., пр. Мира, 37, РФЯЦ-ВНИИЭФ, ИТМФ.*

*Редакция журнала ВАНТ, сер. «Теоретическая и прикладная физика».*

Тел. (83130)7-54-96; e-mail: kul@otd68.vniief.ru

Главный редактор Ю. А. Трутнев

Редакционная коллегия:

Е. Н. Аврорин – зам. главного редактора, М. В. Горбатенко, В. П. Копышев, Н. В. Лычагина –  
ответственный секретарь, Б. А. Надыкто – зам. главного редактора, А. В. Певницкий,  
В. А. Симоненко, В. П. Соловьев, С. А. Холин

## К ВОПРОСУ О ПРИМЕНИМОСТИ ДИФFUЗИОННОЙ ТЕОРИИ В СЛУЧАЕ СРЕДЫ С ВЫСОКОЙ АКТИВНОСТЬЮ

Н. Б. Бабичев

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Показано, что при постоянной оптической толщине системы увеличение активности приводит к повышению точности диффузионного приближения.

*Ключевые слова:* уравнение диффузии, односкоростное уравнение переноса нейтронов, оптическая толщина.

### Введение

В работе Пайерлса [1] на основе односкоростного уравнения переноса нейтронов в однородных шарах определен критический радиус  $R^*$  для случая бесконечной активности (мультипликации)  $h = \infty$ .

В. Г. Заграфов в статье [2], отвлекшись от вопроса о применимости диффузионной теории, разложил в ряд Тейлора вытекающее из нее условие критичности однородного активного шара по параметру  $\frac{1}{h} \ll 1$  и таким образом тоже нашел предельное (при  $h \rightarrow \infty$ ) значение критического радиуса. Оно с точностью до одного процента совпало с решением Пайерлса [1]. Поэтому в статье [2] утверждается, что, несмотря на применимость диффузионного приближения в противоположном случае ( $h - 1 \ll 1$ ), диффузионное критическое условие для шара справедливо при любых  $h > 1$ , в том числе и при  $h = \infty$ . Это обстоятельство В. Г. Заграфов назвал парадоксальным фактом.

Цель данной статьи заключается в объяснении феномена, обнаруженного В. Г. Заграфовым.

### 1. Исследование вопроса о справедливости теории диффузии нейтронов в предельном случае $h \rightarrow \infty$ и при $h \gg 1$

В рамках асимптотической теории Ю. А. Романова [3] в случае однородных шаров из делящихся материалов справедливо уравнение диффузии

$$\nabla^2 n_D(r) + \left( \frac{\lambda_D}{V} + \alpha \right)^2 (\text{tg}\varphi)^2 n_D(r) = 0, \quad (1)$$

которое надо решать совместно с трансцендентным уравнением

$$h\alpha\varphi = \left( \frac{\lambda_D}{V} + \alpha \right) \text{tg}\varphi. \quad (2)$$

Выше использованы следующие обозначения:  $V$  – скорость нейтронов;  $\alpha = n_{\text{я}}(\sigma_s + \sigma_f + \sigma_c)$  – обратный полный пробег нейтронов в среде с плотностью ядер  $n_{\text{я}}$ ;  $\beta = h\alpha$ ,  $h = \frac{v\sigma_f + \sigma_s}{\sigma_s + \sigma_f + \sigma_c}$  – активность вещества;  $\sigma_s, \sigma_f, \sigma_c$  – элементарные (микроскопические) сечения рассеяния, деления и поглощения нейтронов;  $v$  – среднее число вторичных нейтронов, испускаемых в одном акте деления ядра.

Из соотношения (2) следует, что решение диффузионной задачи на главные собственные значения  $\lambda_D$  в случае шара с радиусом  $R$  выглядит следующим образом:

$$\lambda_D = \alpha V \left( \frac{h\varphi}{\text{tg}\varphi} - 1 \right), \quad (3)$$

$$\varphi = \frac{\pi}{h\alpha R + 0,71}, \quad (4)$$

где  $\alpha R$  – оптическая толщина однородного шара.

Если  $h\alpha R \gg 1$ , то  $\varphi \ll 1$  и

$$\operatorname{tg}\varphi \approx \varphi \left( 1 + \frac{\varphi^2}{3} \right), \quad (5)$$

$$\lambda_D \approx \alpha V \left[ \frac{h}{\left( 1 + \frac{\varphi^2}{3} \right)} - 1 \right]. \quad (6)$$

С учетом (6) вместо (3) имеем:

$$\lambda_D \approx \alpha V \left( h - 1 - \frac{h\varphi^2}{3} \right) = \lambda_\infty - \frac{\alpha V h}{3} \left( \frac{\pi}{h\alpha R + 0,71} \right)^2. \quad (7)$$

При  $h \rightarrow \infty$

$$\lambda_D = \lambda_\infty. \quad (8)$$

Таким образом, парадокс В. Г. Заграфова не существует. Иначе говоря, диффузионная теория в предельном случае  $h \rightarrow \infty$  применима и выполняется равенство (8).

Из формулы (8) видно, что при некотором ограничении на оптическую толщину  $\alpha R$  в случае  $h \gg 1$  результаты аналитических вычислений должны обладать высокой точностью.

## 2. Результаты аналитических вычислений и численного расчета, выполненного по одной из математических методик [4]

В качестве примера рассмотрим однородный активный шар с оптической толщиной  $\alpha R = 0,455$  ( $\alpha = 0,86742$  1/см,  $V = 10^9$  см/с) при конечном, но очень большом значении  $h = 10^4$ .

Вычисления по формуле (3) дали следующий результат:

$$\lambda_D = 867337,4 \cdot 10^7 \text{ 1/с}. \quad (9)$$

Численное решение кинетического уравнения привело к значению

$$\lambda_{\text{расч}} = 867422,4 \cdot 10^7 \text{ 1/с}. \quad (10)$$

В итоге оказалось, что отличия величин  $\lambda_D$  и  $\lambda_\infty$  пренебрежимо малы:

$$\frac{\lambda_\infty - \lambda_D}{\lambda_D} \approx 0,0005 \%, \quad (11)$$

т. е. в рассмотренном случае диффузионное приближение характеризуется чрезвычайно высокой точностью.

## Заключение

Из представленных в статье теоретических материалов следует, что при увеличении активности  $h > 1$  возрастает точность диффузионных соотношений.

Данное обстоятельство связано с тем, что рост интенсивности делений приводит к уменьшению относительной вероятности вылета нейтронов из системы в единицу времени.

Аналогичная ситуация имеет место и в том хорошо известном случае, когда при фиксированном значении активности  $h$  увеличивается оптическая толщина и благодаря этому за счет упругих рассеяний нейтроны забалтываются внутри системы, тем самым уменьшая утечку.

## Список литературы

1. Peierls R. Critical conditions in neutron multiplication // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1939. Vol. 35. Part. 4. P. 610–615.
2. Заграфов В. Г. Секторный метод расчета критических параметров тел произвольной формы из делящегося материала // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 1993. Вып. 3. С. 11–14.
3. Романов Ю. А. Критические параметры реакторных систем. Точные решения односкоростного кинетического уравнения и их использование для решения диффузионных задач (усовершенствованный диффузионный метод). М.: Госатомиздат, 1960. С. 3–26.
4. Шагалиев Р. М., Гребенников А. Н., Артемьев А. Ю., Будников В. И. Развитие основных методик и программ ИТМФ // Журнал Атом, 2011, № 50–51.
5. Ахиезер А., Померанчук И. Я. Некоторые вопросы теории ядра. Л.: Оборонгиз, 1950.

Приложение

### Уравнение переноса нейтронов в активных однородных шарах и его предельные решения

В работе [1] Пайерлс за основу взял односкоростное интегральное уравнение

$$n(x, y, z, t) = \frac{\beta}{4\pi} \int \frac{dx' dy' dz'}{r^2} n(x', y', z') \exp \left[ - \left( \alpha + \frac{\lambda}{V} \right) r \right], \quad (П.1)$$

где  $r = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}$ .

В критическом состоянии  $\lambda = 0$  и уравнение (П.1) превращается в

$$n(x, y, z) = \frac{\beta}{4\pi} \int \frac{dx'dy'dz'}{r^2} n(x', y', z') e^{-\alpha r}. \quad (\text{П.2})$$

При выполнении условия  $h \gg 1$ , т. е.  $\beta \gg \alpha$ , можно пренебречь показателем в экспоненте, входящей в правую часть (П.2), так как радиус шара значительно меньше длины свободного пробега нейтрона. В этом случае после интегрирования по углам уравнение (П.2) перешло в

$$\frac{2}{\beta_* R_*} f(x) = \int_0^1 dx' f(x') \ln \frac{x+x'}{|x-x'|}. \quad (\text{П.3})$$

Здесь  $f(x) = xn(x)$  и  $R_*$  – критический радиус шара.

В работе [1] найдено следующее приближенное решение уравнения (П.3):

$$R_* \approx \frac{2}{1,57\beta_*} = \frac{1}{0,78\beta_*}. \quad (\text{П.4})$$

Этот результат справедлив в предположении равенства нулю параметра  $\alpha$ .

В книге [5] решение Пайерлса (П.4) уточнено за счет замены экспоненты  $e^{\alpha r}$  в (П.2) на ее разложение  $(1 - \alpha R)$ , учитывающее конечность  $\alpha$ , и в результате этого получено следующее предельное условие критичности однородного шара:

$$\frac{1}{\beta_* R_*} = 0,78 - 0,39\alpha_* R_*. \quad (\text{П.5})$$

Статья поступила в редакцию 15.01.2015

## НЕЙТРОННЫЕ ПОЛЯ ВНУТРИ И ЗА ПРЕДЕЛАМИ ОДНОРОДНЫХ ГЛУБОКОПОДКРИТИЧНЫХ ШАРОВ

**Н. Б. Бабичев, А. А. Севастьянов**

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Получены приближенные аналитические решения интегрального уравнения переноса нейтронов в однородных шарах из произвольных делящихся материалов.

Выявлены интересные с методической точки зрения особенности формирования функции распределения нейтронов внутри шаров, находящихся в состояниях глубокой подкритики.

*Ключевые слова:* уравнение переноса нейтронов, собственные функции, собственные значения, особая область (О.О) изменения физических параметров.

### Введение

В статье исследуются нейтронно-кинетические процессы, протекающие в активных однородных шарах.

Ниже за основу принято односкоростное интегральное уравнение переноса нейтронов и предполагается, что эволюция плотности нейтронов во времени подчиняется экспоненциальному закону

$$n(t, r) = n(r) \exp(\lambda t), \quad (1)$$

$0 \leq r \leq R$ ,  $R$  – радиус шара,

$$\lambda(t \geq t_0) = \left[ \frac{1}{N(t)} \frac{\partial N(t)}{\partial t} \right]_{t=t_0} = \text{const.} \quad (2)$$

Это значение логарифмической производной от полного числа нейтронов в системе, полученное к моменту  $t_0$  выхода решения нестационарного кинетического уравнения на равновесный стационарный режим.

Основная цель статьи заключается в нахождении приближенных аналитических решений интегрального уравнения для радиальной зависимости нейтронной плотности  $n(r)$  и для угловых распределений нейтронов в произвольной точке наблюдения  $0 \leq r \leq R$ .

Кроме того, ниже из уравнения баланса числа нейтронов в системе, в которое входят  $n(r)$  и векторный поток, определены величины  $\lambda$  и  $K_{эф}$ .

Отметим, что в работе [1] получены приближенные формулы для  $\lambda$  и представлены зависимости  $n(r)$ , имеющие место в некоторых простых частных случаях.

В данной статье решается существенно более общая, чем в работе [1], задача по нейтронной кинетике. При этом в ней наряду с теоретическими материалами содержатся результаты аналитических вычислений и численных расчетов.

Для нахождения численных решений односкоростного кинетического уравнения применяются методика «Монте-Карло» [2] и одна из математических программ [3].

### 1. Метод нахождения аналитических решений

В основу используемого ниже метода заложена следующая логика:

1) Узел, связанный с параметрической зависимостью нейтронной плотности от  $\lambda$ , развязывается очень просто.

Дело в том, что имеется в распоряжении формула В. П. Незнамова (см. [1])

$$\lambda = \frac{V}{R} (\beta R)^{0,83} \left[ 1,57 - \frac{2}{\beta R} - \frac{1}{h} (\beta R)^{0,17} \right], \quad (3)$$

$R$  – радиус шара;  $V$  – скорость нейтронов;  $\alpha = n_{\text{я}} (\sigma_s + \sigma_f + \sigma_c)$  – обратный полный пробег нейтрона в среде с плотностью ядер  $n_{\text{я}}$ , которая в случае рассматриваемых здесь однородных шаров постоянна;

$\beta = h\alpha$ ,  $h = \frac{v\sigma_f + \sigma_s}{\sigma_s + \sigma_f + \sigma_c}$  – активность вещества;  $\sigma_s$ ,  $\sigma_f$ ,  $\sigma_c$  – элементарные (микроскопические) сече-

ния рассеяния, деления и поглощения нейтронов;  $v$  – среднее число вторичных нейтронов, испускаемых в одном акте деления ядра.

Формула (3) уникальна с точки зрения ширины диапазона своей применимости. Ее можно использовать в случае надкритических шаров, если  $\beta R \leq 3,5$ .

При значениях  $\lambda \approx -\alpha V$  погрешность результатов аналитических вычислений  $\lambda$  по формуле (3) меньше одного процента.

В предельном случае стремления оптической толщины шара  $\alpha R$  к нулю погрешность формулы (3) не оценивалась, но она приводит к результату ( $\lambda \rightarrow 0$ ), который соответствует физическому смыслу (количество нейтронов в пустом пространстве от времени не зависит).

2) Ниже учитывается, что для определения всех характеристик (например, векторный поток), в том числе и при  $r > R$ , достаточно найти нейтронную плотность внутри шара  $n_{in}(r)$ .

3) Поставленная задача решается от обратного. Временно предполагается, что функция  $n_{in}(r)$  известна. Ответим на вопрос о том, как по функции  $n_{in}(r)$  найти остальные решения.

Для нейтронной плотности за пределами шара ( $r > R$ ) справедлива формула

$$n_{ex}(r) = \frac{\beta}{2} \int_{\mu_0}^1 d\mu \Omega_{ex}(\mu), \quad (4)$$

$\Omega_{ex}$  – определенным образом нормированное угловое распределение скалярного потока нейтронов:

$$\Omega_{ex}(\mu) = \theta(\mu - \mu_0) \exp(\alpha S_-) \int_{S_-}^{S_+} dS n_{in}[r'(S)] e^{-\gamma \frac{S}{R}}. \quad (5)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\gamma = \left( 1 + \frac{\lambda}{\alpha V} \right) \alpha R; \quad (6)$$

$\theta(\mu - \mu_0)$  – ступенчатая функция, равная единице при  $\mu \geq \mu_0$  и нулю при  $\mu < \mu_0$ ;

$$\mu_0 = \sqrt{1 - \left( \frac{R}{r} \right)^2}; \quad (7)$$

$\vartheta_0 = \arccos \mu_0$  – угол, под которым половина шара видна из произвольной точки наблюдения  $r > R$ .

$$S_{\pm}(\mu) = r \left( \mu \pm \sqrt{\mu^2 - \mu_0^2} \right). \quad (8)$$

$$r'(S) = \sqrt{r^2 + S^2 - 2Sr\mu}, \quad (9)$$

$$\mu = \frac{\vec{r}\vec{V}}{rV} \quad (10)$$

– это косинус угла между векторами  $\vec{r}$  и  $\vec{V}$ .

Скалярный поток нейтронов  $nV = \omega(r)$  складывается из односторонних составляющих  $\omega_{\pm}$ . Так как шар помещен в пустоту, то отраженные нейтроны отсутствуют и  $\omega_{-ex} = 0$ ,  $\omega_{ex} = \omega_{-ex} + \omega_{+ex} = \omega_{+ex}$ , где

$$\omega_{+ex}(r) = \frac{\beta V}{2} \int_{\mu_0}^1 d\mu \Omega_{ex}(\mu). \quad (11)$$

Определим векторные потоки нейтронов вне шара:

$$j_{ex}(r) = j_{+ex}(r) = \frac{\beta V}{2} \int_{\mu_0}^1 d\mu F_{ex}(\mu), \quad (12)$$

$$F_{ex}(\mu) = \mu \Omega_{ex}(\mu), \quad (13)$$

$F_{ex}$  – угловое распределение векторных потоков нейтронов, которые иногда называют числом пересечений сферических поверхностей с радиусами  $r$ .

Теперь приведем формулы, по которым вычисляются физические характеристики внутри шара:

$$\Omega_{in}(\mu) = \int_0^{S_{\max}} dS n_{in}[r'(S)] \exp\left[-\gamma \frac{S}{R}\right], \quad (14)$$

$$F_{in}(\mu) = |\mu| \Omega_{in}(\mu), \quad (15)$$

$$S_{\max}(r, \mu) = r\mu + \sqrt{R^2 - r^2(1 - \mu^2)}, \quad (16)$$

$S_{\max}(R, \mu \leq 0) = 0$  и  $S_{\max}(R, \mu > 0) = 2\mu R$ , т. е. на поверхности шара все нейтроны летят в сторону от его центра.

$$\omega_{+in}(r) = \frac{\beta V}{2} \int_0^1 d\mu \Omega_{in}(\mu); \quad \omega_{-in}(r) = \frac{\beta V}{2} \int_{-1}^0 d\mu \Omega_{in}(\mu), \quad (17)$$

$$\omega_{-in}(R) = j_{-}(R) = 0,$$

$$j_{+in}(r) = \frac{\beta V}{2} \int_0^1 d\mu F_{in}(\mu); \quad j_{-in}(r) = \frac{\beta V}{2} \int_{-1}^0 d\mu F_{in}(\mu). \quad (18)$$

## 2. Аналитические решения в случае вырожденного ядра интегрального уравнения переноса нейтронов

Пусть  $\lambda = -\alpha V$ .

### 2.1. Решения, справедливые внутри активных шаров

#### 2.1.1. Нейтронные поля в шарах из произвольных делящихся материалов

При поиске нейтронной плотности  $n_{in}(r)$  ниже используется метод последовательных приближений.

Можно показать (см. например, [4]), что в случае однородных шаров интегральное уравнение переноса нейтронов, записанное в безразмерном виде для функции

$$f(x) = x n_{in}(x), \quad x = \frac{r}{R}, \quad (19)$$

выглядит следующим образом:

$$f(x) = \frac{\beta R}{2} \int_0^1 dz f(z) K(z, x), \quad (20)$$

$$K(z, x) = Ei[-\gamma(z+x)] - Ei[-\gamma|z-x|]. \quad (21)$$

После разложения интегральных экспонент в ряд Тейлора функцию двух переменных  $K(z, x)$  представим в виде следующей суперпозиции:

$$K(z, x) = K_0(z, x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot n!} \left\{ [\gamma(z+x)]^n - [\gamma|z-x|]^n \right\}, \quad (22)$$

$$K_0(z, x) = \ell n \left| \frac{z+x}{z-x} \right|. \quad (23)$$

$K_0$  – это вырожденное ядро.

Если найдено нулевое приближение  $f^{[0]}(x)$ , то решение в  $i$ -м приближении можно определить, применив итерационное соотношение

$$f^{[i]}(x) = \frac{\beta R}{2} \int_0^1 dz f^{[i-1]}(z) K(z, x). \quad (24)$$

В качестве нулевого приближения возьмем функцию

$$n_{in}^{[0]}(r) = 1 - B \left( \frac{r}{R} \right)^2. \quad (25)$$

Постоянную  $B$  определим двумя способами.

Во-первых, потребуем, чтобы функция (25) удовлетворяла интегральному уравнению хотя бы в двух точках ( $r = 0$  и  $r = R$ ):

$$n_{in}(0) = \frac{\beta}{2} \int_{-1}^{+1} d\mu \int_0^R dS \left[ 1 - B \left( \frac{S}{R} \right)^2 \right] = \frac{\beta R}{3} (3 - B), \quad (26)$$

$$n_{in}(R) = \frac{\beta}{2} \int_{-1}^{+1} d\mu \int_0^{2R\mu} dS \left[ 1 - B \frac{R^2 + S^2 - 2RS\mu}{R^2} \right] = \frac{\beta R}{6} (3 - 2B). \quad (27)$$

С другой стороны, из (25) имеем:

$$\xi = \frac{n_{in}(R)}{n_{in}(0)} = 1 - B. \quad (28)$$

Этих условий достаточно для нахождения  $B$  и  $\xi$ :

$$B = \frac{6 - \sqrt{12}}{4} \approx 0,634, \quad \xi = 1 - B \approx 0,366. \quad (29)$$

Во-вторых, обратимся к уравнению (20) с вырожденным ядром и воспользуемся приближенным соотношением

$$\int_0^1 dz f(z) \ell n \left| \frac{z+x}{z-x} \right| \approx (1,57 \pm 0,02) f(x), \quad (30)$$

вывод которого представлен в книге [5].

Тогда получаем

$$n_{in}^{[1]}(x) \approx \frac{1,57}{2} (\beta R) n_{in}^{[0]}(x). \quad (31)$$

Положив  $x = 1$  и применив в левой и правой частях (31) формулы (25) и (27), приходим к условию

$$\frac{\beta R}{6}(3-2B) = \frac{1,57}{2}(1-B)(\beta R). \quad (32)$$

Отсюда следует, что  $B \approx 0,631$ .

Окончательно положим:

$$B = 0,63; \quad \xi = 0,37. \quad (33)$$

Первое приближение после взятия интеграла в

$$f^{[1]}(x) = \frac{\beta R}{2} \int_0^1 dz (1 - Bz^2) \ln \left| \frac{z+x}{z-1} \right|, \quad x \leq 1, \quad (34)$$

приводит к искомому ответу

$$n_{in}(x) = n_{in}^{[1]}(x) = \frac{\beta R}{2} \left\{ 1 - \frac{(1-x^2)}{2x} \left[ 1 - \frac{B}{2}(1+x^2) \right] \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right) - \frac{B}{6}(1+3x^2) \right\}. \quad (35)$$

Введя функцию  $y(x)$  (главная часть решения)

$$y(x) = 1 + \frac{x^2-1}{2x} \left[ 1 - \frac{B}{2}(1+x^2) \right] \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|, \quad (36)$$

полученные зависимости можно записать в следующей обобщенной форме:

$$n_{in}(x \leq 1) = \frac{1}{1,58} \left[ y(x) - \frac{B}{6}(3x^2+1) \right], \quad B = 0,63. \quad (37)$$

Здесь принята нормировка плотности нейтронов на единицу в центре шара.

Отметим, что результаты вычислений  $n(r)$  по формуле (37) и соответствующих численных расчетов

$n_{расч}(r)$  совпадают с точностью  $\left| \frac{\Delta n}{n} \right| \leq 0,4\%$  (см. таблицу).

Зависимость  $n(r)$  при  $r \leq R = 6,359$  см для шара со значением  $\lambda = -\alpha V$

$r$ , см	0	3,4179	4,5644	5,6704	6,359
$n$	1	0,8076	0,6653	0,4983	0,3671
$n_{расч}$	1	0,804	0,663	0,499	0,368
$\frac{n}{n_{расч}}$	1	1,004	1,0032	0,9993	0,9977

Решение (37) справедливо для шара из произвольного активного вещества, если, конечно, ядро интегрального уравнения вырождено.

$$n_{in}(0) = 1, \quad n_{in}(R) = \xi = \frac{1}{1,58} \left( 1 - \frac{2B}{3} \right) = 0,3671. \quad (38)$$

К этому граничному значению функция  $n(r)$  стремится по закону

$$n(r \rightarrow R) = 0,3671 \left[ 1 + (1-B) \frac{(r-R)}{R} \ln \left| \frac{r-R}{2R} \right| \right]. \quad (39)$$

При  $r \ll R$  справедлива параболическая зависимость

$$n(r \ll R) = \frac{2}{1,58} \left[ 1 - \frac{B}{3} - \frac{1+B}{3} \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right], \quad (40)$$

а вблизи границы шара в случае  $r \rightarrow R$  логарифмическая производная характеризуется логарифмической расходимостью:

$$\left( \frac{1}{n} \frac{dn}{dr} \right)_{r \rightarrow R} = \frac{1-B}{\xi R} \ln \left| \frac{r-R}{2R} \right| \rightarrow -\infty. \quad (41)$$

Можно показать, что на границе шара расходятся все высшие производные:

$$\left[ \frac{d^m}{dr^m} \left( \frac{1}{n} \frac{dn}{dr} \right) \right]_{r \rightarrow R} = (-1)^m \frac{1-B}{\xi R} \frac{(m-1)!}{[r-R]^m}, \quad m \geq 1. \quad (42)$$

Опустив выкладки, приведем формулу для угловых распределений скалярных потоков:

$$\Omega_{in}(r, \mu) = AH(\zeta, x), \quad x = \frac{r}{R} \leq 1, \quad (43)$$

$A$  – нормировочная постоянная,

$$H(\zeta, x) = \zeta \left[ 1 - Bx^2 + B\zeta \left( \mu x - \frac{\zeta}{3} \right) \right], \quad (44)$$

$$\zeta = \zeta(x, \mu) = \mu x + \sqrt{1-x^2(1-\mu^2)}. \quad (45)$$

При  $r \rightarrow 0$  угловое распределение  $\Omega_{in}$  превращается в константу.

На границе шара

$$\Omega_{in}(R, \mu) = a_1 \mu + b_1 \mu^3. \quad (46)$$

Определим односторонние векторные потоки нейтронов внутри шара ( $r \leq R$ ).

$$j_{in\pm}(r) = \pm \frac{\beta R}{2} \int_0^{\pm 1} d\mu \int_0^{S_{\max}} dS n_{in}^{[0]} \left( \sqrt{S^2 + r^2 - 2Sr\mu} \right). \quad (47)$$

Функция двух переменных  $S_{\max}(r, \mu)$  определена формулой (16).

При нахождении векторных потоков сложные выкладки привели тоже к непростым по своему виду следующим решениям:

$$j_{in\pm}(x) = \frac{\beta RV}{6} \left\{ (1-Bx^2) [T(x) \pm x] + BT_{\pm}(x) \right\}, \quad (48)$$

$$j_{in-}(x) + j_{in+}(x) = j_{in}(x) = \frac{\beta RV}{6} \left\{ 2(1-Bx^2) + B[T_+(x) + T_-(x)] \right\}, \quad (49)$$

$$T_{\pm}(x) = \frac{(1 \pm x)^2}{20x^2} \left\{ (1 \mp x)^2 \left[ 12\sqrt{1-x^2} - 5(2 \mp x) \right] + (1-x)^2 (3x \mp 2) \right\}, \quad (50)$$

$$T(x) = \frac{1}{x^2} \left[ 1 - (1-x^2)\sqrt{1-x^2} \right]. \quad (51)$$

### 2.1.2. Формулы, предназначенные для вычислений $\lambda$ и $K_{эф}$

Величины  $\lambda$  и  $K_{эф}$  определяются из уравнения баланса полного количества нейтронов в системе

$$\lambda = \lambda_{\infty} - WV = [\alpha(h-1) - W]V, \quad (52)$$

$$W = \frac{J_{in}(R)}{N_{in}(R)}, \quad (53)$$

$$J_{in}(R) = 4\pi R^2 j_{in}(R); \quad N_{in}(R) = 4\pi \int_0^R dr' r'^2 n_{in}(r'). \quad (54)$$

С одной стороны,  $K_{\text{эф}}$  это число, на которое надо поделить  $\nu$ , чтобы подкритическая система стала критической (т. е.  $\nu_* = \frac{\nu}{K_{\text{эф}}}$ ), с другой –

$$K_{\text{эф}} = \frac{\nu\alpha_f}{\alpha_f + \alpha_C + W_*}, \quad (55)$$

$W_*$  – эффективное макроскопическое сечение поглощения нейтронов, связанное с их утечкой из шара.

Для интегральных характеристик (54) справедливы следующие соотношения:

$$J_{in}(R) = 4\pi R^2 \left( \frac{\beta R V}{3} \right) \left( 1 - \frac{3}{5} B \right), \quad (56)$$

$$N_{in}(R) = 2\pi R^3 \left( \frac{\beta R}{2} \right) \left( 1 - \frac{5}{9} B \right). \quad (57)$$

После подстановки (56) и (57) в балансное уравнение (52) имеем:

$$\lambda = -\frac{C_0}{h} \left( \frac{V}{R} \right), \quad (58)$$

где константа

$$C_0 = \frac{12(5-3B)}{5(9-5B)} = 1,276, \text{ так как } B = 0,63. \quad (59)$$

Чтобы узнать точность полученных выше формул, в качестве примера рассмотрим шар с активностью  $h = 1,68$  и с радиусом  $R = 6,359$  см.

Приняв  $V = 10^9$  см/с, из формулы (58) при значении  $\alpha = 0,1192$  1/см получаем  $\lambda = -\alpha V = -11,922 \cdot 10^7 \frac{1}{c}$ , что с точностью до  $\left| \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \right| = 0,1\%$  совпадает с результатом соответствующего численного расчета  $\lambda_{\text{расч}} = -11,934 \cdot 10^7$  1/с.

Вычисления по формуле (55) привели практически к такому же значению параметра  $K_{\text{эф}} = 0,6006$ , что и расчет «Монте-Карло»:  $K_{\text{эф}} = 0,6000$ .

При этом коэффициент размножения нейтронов в системе  $\frac{1}{1 - K_{\text{эф}}} = 2,5$ .

## 2.2. Поле нейтронов, вылетевших из шара

Теперь с помощью формул, приведенных в разделах 1 и 2, определим плотность нейтронов для случая  $r > R$ .

$$n_{ex}(r) = \frac{\beta R}{2} \int_{\mu_0}^1 d\mu e^{-\alpha \cdot S_-(\mu)} \int_{S_-(\mu)}^{S_+(\mu)} dS \left[ 1 - B \frac{S^2 + r^2 - 2rS\mu}{R^2} \right]. \quad (60)$$

Данное выражение можно преобразовать так:

$$n_{ex} \left( x = \frac{r}{R} \right) = \beta R x \int_{\mu_0(x)}^1 d\mu \sqrt{\mu^2 - \mu_0^2} \left[ \Psi_1(x) + \mu^2 \Psi_2(x) \right] \exp \left[ \alpha R x \left( \mu - \sqrt{\mu^2 - \mu_0^2} \right) \right], \quad (61)$$

$$\Psi_1(x) = 1 - Bx^2 \left[ 1 - \frac{\mu_0^2}{3} \right]; \quad \Psi_2(x) = \frac{2B}{3} x^2; \quad \mu_0(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}. \quad (62)$$

Интеграл по  $d\mu$  берется, но имеет очень сложную аналитическую структуру из комбинации степенных функций, экспонент и интегральных экспонент. Поэтому укажем лишь решение, справедливое в ближней к шару зоне внешнего пространства  $\left(x-1 \ll 1, \frac{R}{r}-1 \ll 1\right)$ :

$$n_{ex}(x) = \frac{\beta R}{2} \left\{ 1 - \frac{B}{6}(5x^2 - 1) - \left[ 1 - \frac{B}{2}(1+x^2) \right] \frac{x^2-1}{2x} \ln \left( \frac{x+1}{x-1} \right) \right\} \quad (63)$$

или

$$n_{ex}(x \geq 1) = \frac{1}{1,58} \left[ y(x) - \frac{B}{6}(5x^2 - 1) \right], \quad x-1 \ll 1, \quad (64)$$

функция  $y(x)$  определена формулой (36).

В случае скалярных потоков получены следующие выражения:

$$\Omega_{ex}(r, \mu) = A_1 \exp(\alpha R \zeta_2) [H(\zeta_2) - H(\zeta_3)] \theta(\mu - \mu_0), \quad x \geq 1, \quad (65)$$

$$\zeta_2 = \zeta_2(x, \mu) = x \left( \mu + \sqrt{\mu^2 - \mu_0^2} \right), \quad (66)$$

$$\zeta_3 = \zeta_3(x, \mu) = x \left( \mu - \sqrt{\mu^2 - \mu_0^2} \right). \quad (67)$$

Приведем формулы, по которым определяется угловое распределение векторных потоков нейтронов за пределами шара:

$$F_{ex}(x, \mu) = \frac{\beta R V \mu}{2 j_{ex}(x)} \exp \left[ \alpha R V \left( \mu - \sqrt{\mu^2 - \mu_0^2} \right) \right] \Delta H_{ex} \theta(\mu - \mu_0); \quad (68)$$

$$x \geq 1; \quad \mu_0(x) = \frac{1}{x} \sqrt{x^2 - 1}; \quad \theta(\mu - \mu_0) = \begin{cases} 1, & \mu \geq \mu_0; \\ 0, & \mu < \mu_0; \end{cases}$$

$$\Delta H_{ex} = H \left[ x \left( \mu + \sqrt{\mu^2 - \mu_0^2} \right) \right] - H \left[ x \left( \mu - \sqrt{\mu^2 - \mu_0^2} \right) \right]. \quad (69)$$

В окружающем шар внешнем пространстве нейтроны находятся внутри конуса, сужающегося по мере удаления точки наблюдения  $r$  от центра.

В пределе  $r \rightarrow \infty$  функция  $F_{ex}(r, \mu) \rightarrow \delta(1 - \mu) = \delta \left( 1 - \frac{\vec{r} \vec{V}}{rV} \right)$ , т. е. все нейтроны летят вдоль радиуса.

### 3. Аналитические решения внутри глубокоподкритических шаров

#### 3.1. Поле нейтронов внутри шара

Ниже используются теоретические материалы раздела 2, в частности формулы, определяющие нейтронную плотность  $n_m(r)$ .

Далее для упрощения знак «in» не пишется.

Параметр  $\alpha_0$ , для которого выполняется условие  $\lambda_0 = -\alpha_0 V$ , уменьшим на величину  $|\Delta \alpha_0 = \alpha - \alpha_0| \ll \alpha_0$ , и решения будем искать в первых двух порядках теории возмущений, приведя интегральное уравнение к следующему виду:

$$f(x) = \frac{\beta R}{2} \left\{ \int_0^1 dz f(z) \ln \left| \frac{z+x}{z-x} \right| - 2\gamma \left[ \int_0^x dz z f(z) + x \int_x^1 dz f(z) \right] + x\gamma^2 \int_0^1 dz z f(z) \right\}. \quad (70)$$

Здесь, как и раньше,  $f(x) = xn(x)$ ,  $x = \frac{r}{R} \leq 1$ ,  $\gamma = \left( \alpha + \frac{\lambda}{V} \right) R$ .

Величина  $\Delta\alpha_0$  подчиняется условию

$$\left( \alpha_0 + \frac{\lambda}{V} \right) R = \Delta\alpha_0 R, \quad (71)$$

$R$  – радиус шара.

Интегральное уравнение запишем, введя операторы:

$$\frac{2}{\beta R} f = \hat{U} f, \quad (72)$$

$$\hat{U} = \hat{U}_0 + \hat{U}_1 + \hat{U}_2, \quad (73)$$

$$\hat{U}_0 = \hat{U}(\gamma = 0), \quad \hat{U}_0 f = \int_0^1 dz f(z) \ln \left| \frac{z+x}{z-x} \right|. \quad (74)$$

Линейные интегральные операторы  $\hat{U}_1$  и  $\hat{U}_2$  определены так:

$$\hat{U}_1 = \hat{U}_{11} + \hat{U}_{12}, \quad (75)$$

$$\hat{U}_{11} f = -2\gamma \int_0^x dz z f(z), \quad (76)$$

$$\hat{U}_{12} f = -2\gamma \int_x^1 dz f(z), \quad (77)$$

$$\hat{U}_2 f = x\gamma^2 \int_0^1 dz z f(z). \quad (78)$$

Решение при  $\gamma = 0$ , удовлетворяющее интегральному уравнению

$$\frac{2}{\beta R} f^{[0]}(x) = \hat{U}_0 f^{[0]}(x), \quad (79)$$

которое ниже примем за нулевое приближение, уже получено в разделе 2.

Выражение (35) умножим на  $x$ :

$$f^{[0]}(x) = \frac{\beta R x}{2} \left\{ 1 + \left[ 1 - \frac{B}{2}(1+x^2) \right] \Phi_0(x) - \frac{B}{6}(1+3x^2) \right\}, \quad (80)$$

$$\Phi_0(x) = \frac{1-x^2}{2x} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right). \quad (81)$$

Решения уравнения (81) первого ( $f^{[1]}$ ) и второго ( $f^{[2]}$ ) порядков определяются по следующим формулам:

$$f^{[1]}(x) = \frac{\beta R}{2} (\hat{U}_0 + \hat{U}_1 + \hat{U}_2) f^{[0]} = f_0^{[1]}(x) + f_1^{[1]} + f_2^{[1]}. \quad (82)$$

Индексы у функций те же, что и у операторов. Они обозначают соответствующие порядки малости по величине  $\gamma$ .

$$f^{[2]}(x) = \frac{\beta R}{2} \left[ \hat{U}_0 (f_0^{[1]} + f_1^{[1]} + f_2^{[1]}) + \hat{U}_1 (f_0^{[1]} + f_1^{[1]}) + \hat{U}_2 f_0^{[1]} \right]. \quad (83)$$

Опустим громоздкие выкладки и сразу дадим искомый ответ, в котором выделены порядки малости по  $\gamma$ :

$$n^{[2]}(x) = n_0(x) + \gamma n_1(x) + \gamma^2 n_2(x). \quad (84)$$

Главная часть решения  $n_0(x)$  получается делением  $f^{[0]}(x)$  (80) на  $x$ :

$$n_1(x) = \frac{\beta R}{2} \left\{ a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \left[ \frac{B}{2} - 1 + \frac{(5-B)(1+x^2) - Bx^4}{30} \right] \phi_0(x) \right\}, \quad (85)$$

$$n_2(x) = \frac{\beta R}{2} \left\{ b_0 + b_2 x^2 + b_4 x^4 + b_6 x^6 + \frac{5-3B}{30} [1 + \phi_0(x)] \right\}, \quad (86)$$

$B = 0,63$ .

Для  $\phi_0(x)$  справедлива формула (81).

Введя параметр  $q_0 = 1,57$ , приведем следующие соотношения:

$$a_0 = \frac{1-18(1+q_0)}{18q_0} + \frac{75(1+q_0)-1}{150q_0} = 0,895, \quad (87)$$

$$a_2 = \frac{15+30q_0-B}{90q_0} = 0,435, \quad (88)$$

$$a_4 = -\frac{(1+3q_0)B}{30q_0} = -0,0764, \quad (89)$$

$$b_0 = \frac{5(5+2q_0)-2(7+3q_0)B}{30q_0} = 0,6825, \quad (90)$$

$$b_2 = -\frac{2-B}{6q_0} = -0,1454, \quad (91)$$

$$b_4 = -\frac{1}{30q_0} = 0,0212, \quad (92)$$

$$b_6 = -\frac{B}{210q_0} = -0,0019. \quad (93)$$

Сравнительные численные расчеты показали, что точность формулы (84) при условии  $|\Delta\alpha_0 R| \leq 0,1$  лучше одного процента для любого расположения точки наблюдения  $r \leq R$ .

Например, в случае, вообще говоря, довольно сильного отклонения  $|\Delta\alpha_0 R| = 0,2$  от оптической толщины вырожденного шара  $\alpha_0 R$  погрешность полученного по формуле (84) результата меньше полтора процентов.

Приведем некоторые дополнительные результаты.

В центре шара справедлив Ламбертовский закон  $F(r=0, \alpha \neq \alpha_0, \mu) \sim |\mu|$ .

На поверхности шара угловое распределение хорошо описывается следующей суперпозицией:

$$F(R, \alpha \neq \alpha_0, \mu) = \theta(\mu) \sum_{k=2}^7 C_k \mu^k. \quad (94)$$

Коэффициенты  $C_k$  зависят от  $\gamma$ . При этом главные части  $C_2$  и  $C_4$  совпадают с соответствующими амплитудами углового распределения, представленного в разделе 2.

Анализ полученных результатов показал, что при уменьшении оптической толщины шара угловое распределение обостряется.

### 3.2. Формулы для логарифмической производной $\lambda$

Не останавливаясь на формулах для интегральных величин  $J(R)$ ,  $N(R)$  и  $W(R)$ , сразу приведем результат их подстановки в уравнение (52) баланса числа частиц:

$$C_0(1 - S_1\gamma + S_2\gamma^2) + \gamma(1 - P_1\gamma) = (\beta R)(1 - P_1\gamma + P_2\gamma^2), \quad (95)$$

$C_0 = 1,2759$  – константа,

$$S_1 = 1,3081; S_2 = 1,026; P_1 = 1,0382; P_2 = 0,6873. \quad (96)$$

Запишем решение квадратного алгебраического уравнения (95):

$$\gamma = \frac{-(1 - S_1K_0 + P_1\beta R) + \sqrt{(1 - S_1K_0 + P_1\beta R)^2 - 4(S_2K_0 - P_1 - P_2\beta R)(K_0 - \beta R)}}{2(S_2K_0 - P_1 - P_2\beta R)}. \quad (97)$$

Определив  $\gamma$ , находим

$$\lambda = \left( \frac{\gamma}{R} - \alpha \right) V. \quad (98)$$

Формула (98) в области ее применимости чрезвычайно точна. Действительно, из сравнения результатов выполненных вычислений и численных расчетов «на сходимость» следует, что при  $\left| \frac{\Delta\alpha_0}{\alpha_0} \right| = 0,1$  ее погрешность меньше 0,1 % в  $\lambda$ .

## 4. Некоторые результаты аналитических вычислений

Ниже в аналитических вычислениях используется формула (3) первого раздела для логарифмической производной  $\lambda = \frac{V}{R}(\beta R)^{0,83} \left[ 1,57 - \frac{2}{\beta R} - \frac{1}{h}(\beta R)^{0,17} \right]$  и принято следующее обозначение оптической толщины однородного шара:

$$p = \alpha R. \quad (99)$$

### 4.1. Поведение нейтронной плотности $n(r)$ в особой области

Особой областью будем называть диапазон изменения параметров, внутри которого происходит изменение характера радиальной зависимости плотности нейтронов с возникновением максимума функции  $n(r)$  в зоне  $0 \leq r \leq R$  (см. рис. 1).

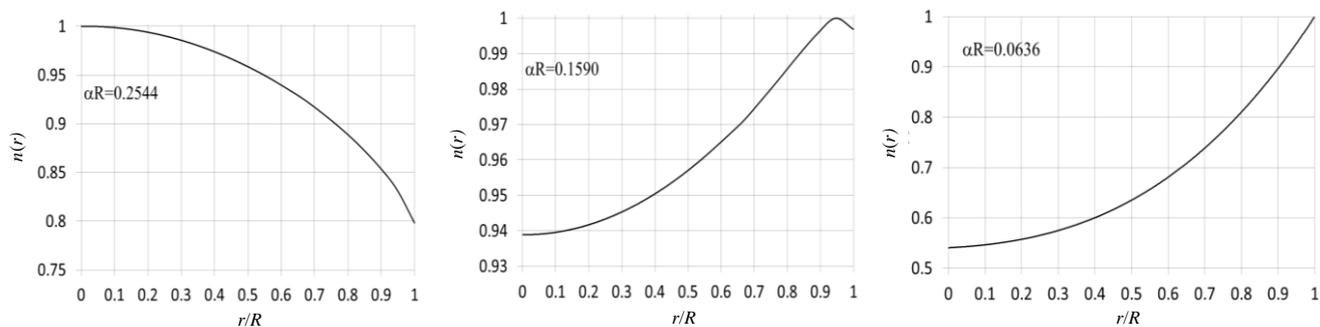


Рис. 1. Графики функции двух переменных  $n(r, p = \alpha R)$ , полученные для шаров с массами 3,213, 2,008, 0,803 кг при фиксированных  $R = 6,359$  см и  $h = 1,68$

Поскольку точность формулы (84) высока, то результаты аналитических вычислений и численных расчетов слились в единые графики, изображенные толстыми (жирными) кривыми. При  $p = 0,1590$  функция  $n(r)$  кроме точки минимума в центре шара имеет точку максимума с координатами  $r_{\max} = 0,94R$ ,  $n(r_{\max}) = 1$ . Вариация оптической толщины с некоторыми отклонениями от значения  $p = 0,1590$  приводит к смещению абсциссы точки максимума в ту или другую стороны. В результате этого происходит перестройка  $n(r)$  из убывающей функции в возрастающую, что следует из графиков с  $p = 0,2544$  и  $p = 0,0636$  (в данных случаях шары находятся в состояниях за пределами особой области). При малой оптической толщине шара  $p = 0,0636$  и  $\lambda = -43,1 \cdot 10^7$  1/с получена, вообще говоря, необычная зависимость  $n(r)$  с точкой минимума в центре шара.

#### 4.2. Общая зависимость $\lambda$ от $\beta R$ и $h$

В статьях [6] и [7] из односкоростного кинетического уравнения с постоянными параметрами  $\alpha$  и  $\beta$  получена следующая формула для дискретных собственных значений с произвольным номером  $m$ :

$$\lambda_m = h\alpha V \left[ \Lambda_m(\beta R) - \frac{1}{h} \right], \quad (100)$$

$\Lambda_m(\beta R)$  – универсальная функция, явный вид которой можно найти, зная геометрию системы с характерным размером  $R$ . В случае шара с радиусом  $R$  это сделать просто. Дискретные собственные значения в случае однородных шаров существуют только при значениях  $\beta R > 1$ , а иначе величины  $\lambda$  принадлежат непрерывному спектру (см. работу [8]). В предположении справедливости формулы типа (100) путем проведения аналитических вычислений по формуле (3) и с помощью численных расчетов была найдена следующая зависимость  $\Lambda$  от  $\beta R$  (рис. 2).

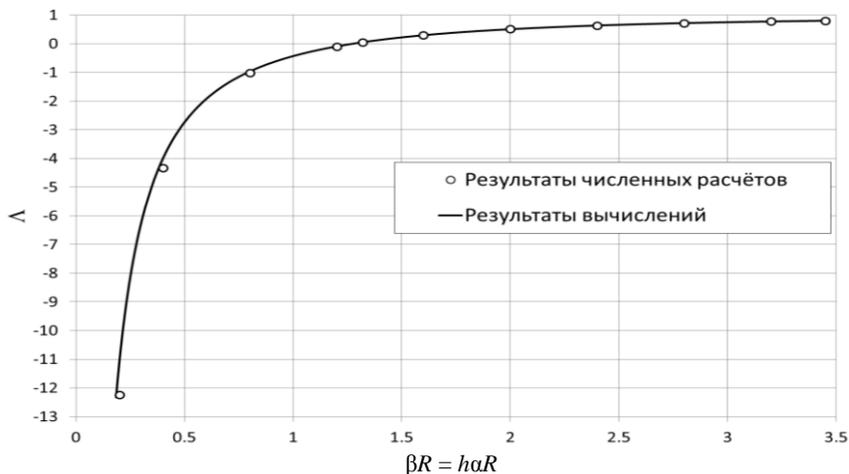


Рис. 2. График функции  $\Lambda(\beta R)$ , полученный при  $h = 1,68$

#### 4.3. Зависимости $\lambda$ от оптической толщины шара и его активности

Характерные особенности функции  $\lambda(p)$  (рис. 3) заключаются в том, что при любых  $h$  она имеет точку минимума и в случае  $p \rightarrow 0$  обращается в ноль.

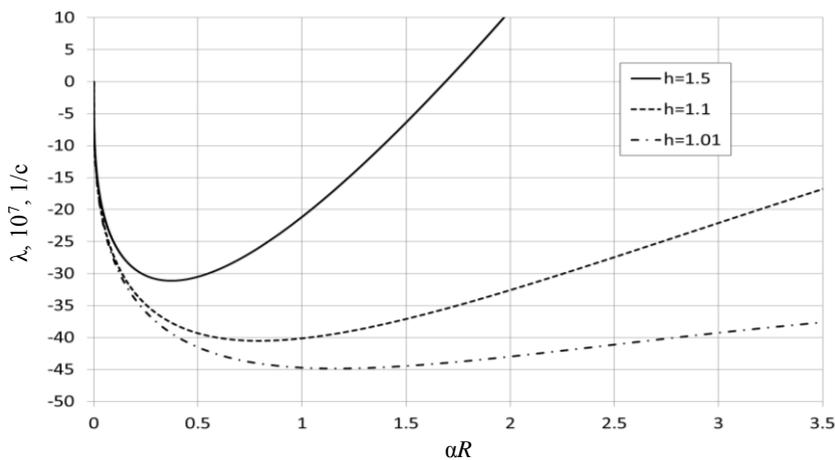


Рис 3. Зависимости  $\lambda(p)$  при различных значениях активности среды  $h$ , полученные для шаров с одинаковыми массами  $M = 3,142$  кг и величинами  $\alpha = 0,2088$  1/см

Интересными представляются графические результаты аналитических вычислений, показанные на рис. 4.

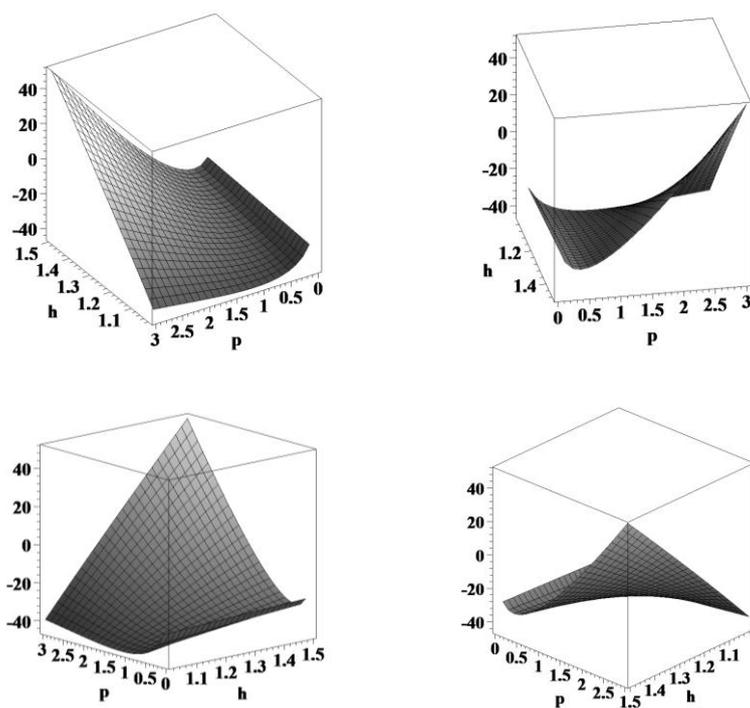


Рис.4. Зависимость  $\lambda(p = \alpha R, h)$  в 3D-изображении под разными углами

### Заключение

В статье получены приближенные аналитические решения односкоростного интегрального уравнения переноса нейтронов в однородных шарах из произвольных делящихся материалов.

С помощью метода последовательных приближений найдены радиальные зависимости нейтронной плотности  $n(r)$  и угловые распределения при  $r \leq R$  и  $r > R$ .

Таким образом, поставленная во введении основная задача о нахождении нейтронных полей внутри и за пределами однородных глубокоподкритичных шаров решена.

Решение задачи о пространственном распределении нейтронов, полученное во втором порядке теории возмущений (см. раздел 3), характеризуются очень высокой точностью, но оно имеет место только

внутри шара. Выше рассматривались шары, находящиеся в состояниях глубокой подкритики. Тем не менее, оказалось, что полученные в разделе 3 формулы можно применять и в случае надкритических систем. Это не должно вызывать удивление, поскольку вывод (см. [1]) формулы (3), справедливой даже при значениях  $\beta R = 3,5$  и  $\lambda = + 11,7 \cdot 10^7$  1/с, тоже был проведен из близкого к вырожденному уравнения переноса нейтронов [5] в однородных критических шарах с предельно высокой активностью.

В статье показано, что в случае глубокоподкритических шаров существует особая область изменения физических параметров, внутри которой нейтронная плотность  $n(r)$  претерпевает сильное изменение и при уменьшении оптической толщины из убывающей функции превращается в возрастающую.

Авторы благодарны В. П. Незнамову, который, ознакомившись с содержанием статьи, высказал свои критические замечания. Они не только были учтены при подготовке данной статьи в печать, но также повлияли на выбор направления дальнейших исследований, реализованных в работе [9].

### Список литературы

1. Бабичев Н. Б., Лутиков И. В., Незнамов В. П. Некоторые решения вырожденного и близкого к вырожденному уравнений переноса нейтронов // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2009. Вып. 1. С. 3–10.
2. Донской Е. Н., Ельцов В. А., Житник А. К. и другие. Метод Монте-Карло во ВНИИЭФ // ВАНТ. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1993. Вып. 2. С. 61–64.
3. Шагалиев Р. М., Гребенников А. Н., Артемьев А. Ю., Будников В. И. Развитие основных методик и программ ИТМФ // Журнал Атом, 2011. № 50–51.
4. Бабичев Н. Б., Севастьянов А. А. Особенности пространственного распределения нейтронов вблизи границ // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2008. Вып. 2. С. 32–37.
5. Некоторые вопросы теории ядра. А. Ахиезер, И. Померанчук, Оборонгиз, М. 1950.
6. Бабичев Н. Б., Беженцев Б. В., Бондарев П. В., Забусов П. В. Собственные значения односкоростного уравнения переноса нейтронов в однородных системах // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2009. Вып. 3. С. 68–70.
7. Бабичев Н. Б., Лутиков И. В. Решение односкоростной задачи по нейтронной кинетике на собственные значения и собственные функции, справедливое в классе однородных односвязных объектов с невогнутыми внешними поверхностями // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2011. Вып. 1–2. С. 61–69.
8. Yamagishi T. Solutions of Monoenergetic Time Dependent Neutron Transport Equation in Slab Geometry // Journal of Nuclear Science and Technology, 10 (5), p. 284-291 (1973).
9. Бабичев Н. Б., Севастьянов А. А. Оценка ширины особой области в пространственном распределении нейтронов внутри однородных активных шаров // См. настоящий выпуск. С. 20–24.

Статья поступила в редакцию 20.01.2015

## ОЦЕНКА ШИРИНЫ ОСОБОЙ ОБЛАСТИ В ПРОСТРАНСТВЕННОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ НЕЙТРОНОВ ВНУТРИ ОДНОРОДНЫХ АКТИВНЫХ ШАРОВ

Н. Б. Бабичев, А. А. Севастьянов

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Исследовано поведение нейтронной плотности  $n(r)$  в особой области.

*Ключевые слова:* уравнение переноса нейтронов, оптическая толщина, особая область (ОО).

### Введение

Особой областью (ОО) будем называть диапазон изменения физических параметров, в котором происходит перестройка нейтронной плотности из убывающей функции  $n(r)$  в возрастающую. Существование ОО было обнаружено в работе [1]. Цель данной статьи заключается в определении границ ОО. При поиске нейтронной плотности ниже используется метод последовательных приближений.

### 1. Приближенное решение задачи на главные собственные функции

Предположим, что нейтронная плотность и векторный поток нейтронов подчиняются экспоненциальному закону

$$n(t, r) = n(r) \exp(\lambda t), \quad (1)$$

$$\vec{j}(t, r) = \vec{j}(r) \exp(\lambda t) \quad (2)$$

с постоянной величиной  $\lambda$ .

В таком случае односкоростное интегральное уравнение переноса нейтронов в однородных шарах из делящихся материалов имеет следующий вид:

$$n(r, t) = \frac{\beta}{4\pi} \int \frac{d\vec{r}' n(r')}{|\vec{r}' - \vec{r}|^2} \exp[-\xi \alpha |\vec{r}' - \vec{r}|] \dots \quad (3)$$

Здесь  $\alpha = n_{\text{я}} (\sigma_s + \sigma_f + \sigma_c)$  – обратный полный пробег нейтрона в среде с плотностью ядер  $n_{\text{я}}$ , которая в случае рассматриваемых ниже однород-

ных систем постоянна;  $\beta = h\alpha$ ,  $h = \frac{v\sigma_f + \sigma_s}{\sigma_s + \sigma_f + \sigma_c}$  – активность среды;  $\sigma_s, \sigma_f, \sigma_c$  – элементарные (микроскопические) сечения рассеяния, деления и поглощения нейтронов;  $v$  – среднее число вторичных нейтронов, испускаемых в одном акте деления ядра;  $\xi = \left(1 + \frac{\lambda}{\alpha V}\right)$ ;  $V$  – скорость нейтронов.

Введя функцию

$$f(x) = xn(x), \quad x = \frac{r}{R}, \quad (4)$$

уравнение (3) упростим, как это сделано в книге [2], следующим образом:

$$f(x) = \frac{\beta R}{2} \int_0^1 dz f(z) K(z, x). \quad (5)$$

Ядро интегрального уравнения (4) представляет собой суперпозицию интегральных экспонент

$$K(z, x) = Ei[-\gamma(z+x)] - Ei[-\gamma|z-x|], \quad (6)$$

где  $\gamma = \left(1 + \frac{\lambda}{\alpha V}\right) \alpha R$ .

Задачу будем решать методом последовательных приближений по формуле

$$f^{[i]}(x) = \frac{\beta R}{2} \int_0^1 dz f^{[i-1]}(z) K(z, x); \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (7)$$

взяв в качестве нулевого приближения постоянную величину  $n^{[0]} = \text{const}$  и оборвав итерационный процесс на первом приближении.

Опустим выкладки и приведем искомый ответ.

$$n(x) = n^{[1]}(x) = \frac{A}{2\gamma} \left\{ P_+(x) + P_-(x) + \frac{T_+(x) - T_-(x)}{2\gamma x} \right\}, \quad (8)$$

A – нормировочная постоянная,  $x = \frac{r}{R} \leq 1$ .

$$P_{\pm}(x) = P[\gamma(1 \pm x)]; \quad T_{\pm}(x) = T[\gamma(1 \pm x)], \quad (9)$$

$$P(z) = 1 - e^{-z} - zE(-z), \quad (10)$$

$$T(z) = (1+z)e^{-z} + z^2E(-z). \quad (11)$$

Функция  $E(-z)$  в зависимости от знака аргумента равна одной из двух модификаций интегральной экспоненты:

$$E(-z) = Ei(-z) \text{ при } z > 0 \quad (12)$$

$$\text{и } E(-z) = Ei^*(|z|) \text{ при } z < 0.$$

Из решения (8) получаются следующие значения собственных функций в центре и на внешней поверхности шара:

$$\begin{aligned} n(r=0) &= \frac{A}{\gamma} (1 - e^{-\gamma}); \\ n(R) &= \frac{A}{4\gamma^2} [2\gamma + e^{-2\gamma} - 1]; \\ \frac{n(R)}{n(0)} &= \frac{2\gamma + e^{-2\gamma} - 1}{4\gamma(1 - e^{-\gamma})}. \end{aligned} \quad (13)$$

## 2. Уравнение баланса полного числа нейтронов в системе

Балансное уравнение записывается так:

$$\frac{\lambda}{V} - (\beta - \alpha - W) = 0; \quad W = \frac{1}{V} \int \vec{j} d\vec{S} \quad \frac{J}{\int d\vec{r} n(\vec{r})} = \frac{J}{VN}. \quad (14)$$

В числителе выражения (14) интегрирование ведется по внешней поверхности объекта, а в знаменателе – по его объему.  $N$  и  $J$  – соответственно полное количество нейтронов в системе и интегральный поток нейтронов (число пересечений) во внешнее пустое пространство. Величина  $W$ , связанная с вероятностью вылета нейтронов из системы в единицу времени, часто именуется эффективным макроскопическим сечением поглощения нейтронов, вызванного их утечкой наружу.

Рабочие формулы приведем без вывода.

$$\lambda = \lambda_{\infty} - WV = [\alpha(h-1) - W]V, \quad (15)$$

$$W(\gamma) = \frac{J(\gamma)}{N(\gamma)}, \quad (16)$$

$$J(\gamma) = \frac{A\pi R^2}{2\gamma^2} F_0(\gamma), \quad (17)$$

$$F_0(\gamma) = (1+2\gamma)\exp(-2\gamma) - 1 + 2\gamma^2, \quad (18)$$

$$N(\gamma) = \frac{A\pi R^3}{2\gamma^4} \left[ \frac{8}{3}\gamma^3 - F_0(\gamma) \right], \quad (19)$$

$$W(\gamma) = \frac{3\gamma}{R} \frac{F_0(\gamma)}{8\gamma^3 - 3F_0(\gamma)}. \quad (20)$$

После подстановки (20) в (15) уравнение баланса принимает следующий вид:

$$\frac{8}{3}\gamma^4 + h\alpha R \left[ F_0(\gamma) - \frac{8}{3}\gamma^3 \right] = 0. \quad (21)$$

Найдя корень  $\gamma_0$  данного трансцендентного уравнения, величину  $\lambda$  можно определить по формуле

$$\lambda = \lambda(\gamma_0) = (\gamma_0 - \alpha R) \frac{V}{R}. \quad (22)$$

## 3. Некоторые результаты аналитических вычислений и численных решений односкоростного кинетического уравнения

Здесь и далее аналитические вычисления  $\lambda$  и численные расчеты по одной из математических программ [3] проводились для шара с радиусом  $R = 6,359$  см и активностью  $h = 1,68$  при значении скорости нейтронов  $V = 10^9$  1/с (табл. 1).

Таблица 1

Сравнение результатов вычислений по формуле (22) и расчетов, выполненных при вариации оптической толщины шара с постоянным радиусом  $R = 6,359$  см

$\alpha$ , 1/см	0,07	0,06	0,04	0,02	0,01	0,001
$\alpha R$	0,4451	0,3815	0,2544	0,1272	0,0636	0,0064
$\gamma_0$	-0,937	-1,15	-1,66	-2,40	-3,04	-4,83
$\lambda$ , $10^7$ 1/с	-21,73	-24,07	-30,04	-39,74	-48,8	-76,0
$\lambda_{\text{расч}}$ , $10^7$ 1/с	-21,3	-23,8	-30,00	-39,70	-48,5	-74,6
$\delta = \left  \frac{\lambda - \lambda_{\text{расч}}}{\lambda} \right $	0,0198	0,0112	0,0013	0,0010	0,0061	0,0184

#### 4. Ширина особой области (ОО)

Для нахождения ширины ОО функцию (8) разложим в ряд Тейлора вблизи нуля ( $r \rightarrow 0$ ):

$$n(r) \approx A \left[ \frac{1 - e^{-\gamma}}{\gamma} - \frac{\gamma + 2}{6} e^{-\gamma} \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right], \quad (23)$$

затем возьмем производные от соотношения (23) и подставим в них параметр  $\gamma_0$ .

$$\frac{dn}{dr} = -A(\gamma_0 + 2)e^{-\gamma_0} \frac{r}{3R}, \quad (24)$$

$$\frac{d^2n}{dr^2} = -\frac{A}{3R}(\gamma_0 + 2)e^{-\gamma_0}. \quad (25)$$

Первая производная показывает, что точка  $r = 0$ ,  $n(0) = A \frac{1 - e^{-\gamma_0}}{\gamma_0}$  является экстремальной.

Из равенства (25) видно, что при  $\gamma_0 + 2 > 0$  и  $\gamma_0 + 2 < 0$  в центре шара наблюдаются соответственно максимум и минимум функции  $n(r)$ .

В работе [1] использовалась общая зависимость  $\lambda$  от  $\beta R$  и  $h$

$$\lambda = \beta V \left[ \Lambda(\beta R) - \frac{1}{h} \right], \quad (26)$$

полученная в статьях [4, 5] из односкоростного кинетического уравнения с постоянными параметрами  $\alpha$  и  $\beta$ .

Формула (26) содержит в себе универсальную функцию  $\Lambda(\beta R)$ , явный вид которой в диапазоне  $0,2 \leq \beta R \leq 3,5$  найден в [1] для однородного активного шара.

Приравняв величины  $\lambda$ , взятые из выражений (22) и (26), получаем следующее простое соотношение:

$$\gamma_0 = \beta R \Lambda(\beta R). \quad (27)$$

Из (27) следует, что корень  $\gamma_0$  трансцендентного уравнения (21) зависит только от произведения  $\beta R$ , т. е.  $\gamma_0(\beta R)$  это новая универсальная функция, которая в отличие от  $\Lambda(\beta R)$  является приближенной.

Подстановка (27) в (22) приводит к формуле для  $\lambda$

$$\lambda = \alpha V \left[ \frac{\gamma_0(\beta R)}{\alpha R} - 1 \right], \quad (28)$$

которая дает возможность, зная оптическую толщину  $\alpha R$  и произведение  $\beta R$ , аналитически определить верхнюю с точки зрения оптической тол-

щины границу ОО, когда, как показано выше,  $\gamma_0 = -2$  и максимум функции  $n(r)$  расположен в центре шара. Для границы ОО с максимальной оптической толщиной  $\alpha_{\max} R = 0,1908$  имеем следующие характеристики:  $\alpha_{\max} = 0,03$  1/см,  $\beta_{\max} = 0,0504$  1/см и согласно формуле (28)  $\lambda = -34,1 \cdot 10^7$  1/с.

Нижняя граница ОО найдена с помощью вычислений и расчетов, результаты которых представлены в табл. 2.

Таблица 2

Результаты, полученные при вариации параметров  $\alpha R$  и  $\beta R$

$\alpha R$	$\beta R$	Результаты	$x = 0$	$x = 0,5$	$x = 0,7$	$x = 0,85$	$x = 0,945$	$x = 1$
0,1908	0,3211	Расчета	1	0,962	0,941	0,915	0,971	0,871
		Вычисления	1	0,998	0,995	0,988	0,975	0,960
0,1844	0,3104	Расчета	0,998	0,9996	1	0,9970	0,989	0,9753
		Вычисления	0,998	0,9994	1	0,9977	0,988	0,9762
0,1780	0,2997	Расчета	0,986	0,992	0,998	1	0,994	0,985
		Вычисления	0,988	0,993	0,998	1	0,994	0,985
0,1590	0,2675	Расчета	0,931	0,952	0,972	0,991	1	0,997
		Вычисления	0,940	0,957	0,976	0,990	1	0,997
0,1463	0,2461	Расчета	0,887	0,918	0,950	0,980	0,995	1
		Вычисления	0,900	0,926	0,953	0,979	0,991	1

Видно, что нижняя граница ОО характеризуется следующими величинами:  $\alpha_{\min} R = 0,1463$ ,  $\alpha_{\min} = 0,023$  1/см,  $\beta_{\min} = 0,0387$  1/см,  $\lambda = -37,8 \cdot 10^7$  1/с.

#### Заключение

В статье получено приближенное аналитическое решение уравнения переноса нейтронов, позволившее определить границы ОО  $\alpha_{\min} R$  и  $\alpha_{\max} R$  в шкале оптических толщин активного шара  $\alpha R$ .

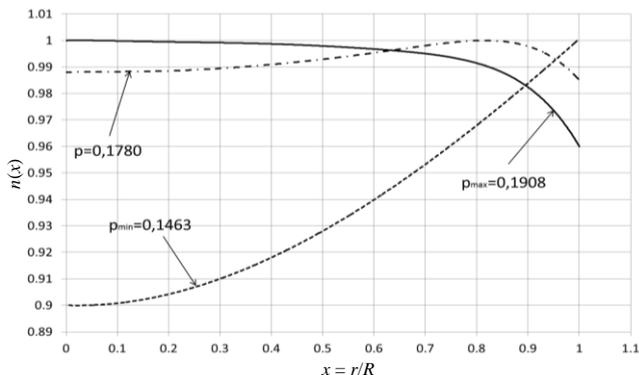
В случаях  $\alpha_{\min} R < \alpha R < \alpha_{\max} R$  у функции  $n(r)$  при  $0 < r < R$  появляется точка максимума и величина  $\lambda$  заключена в интервале

$$\lambda \in (-37,8, -34,1) \cdot 10^7 \text{ 1/с}, \quad (29)$$

внутри которого, что следует из табл. 1, погрешность в значениях  $\lambda$ , вычисленных по формуле (22), мала:

$$0,10 \% \leq \delta = \left| \frac{\lambda - \lambda_{\text{расч}}}{\lambda} \right| \leq 0,13 \%. \quad (30)$$

Графики функции  $n(r)$  показаны на следующем рисунке.



Поведение нейтронной плотности  $n(x = r/R)$  в особой области изменения оптической толщины шара  $0,1463 < p = \alpha R < 0,1908$

Сплошной и пунктирной линиями на рисунке обозначены предельные зависимости  $n(r)$  на двух границах особой области, а штрих-пунктирная кривая относится к случаю функции  $n(r)$  с двумя экстремальными точками. При увеличении оптической толщины максимум сдвигается в сторону центра шара (см. табл. 2).

В [1] показано, что в случае вырожденного ядра интегрального уравнения переноса нейтронов

$$\lambda = -\alpha_0 V = -11,922 \cdot 10^7 \text{ 1/миг}, \quad \alpha_0 = 0,11922 \text{ 1/см},$$

$$\alpha_0 R = 0,7581, \quad (31)$$

т. е.,  $\alpha_0 R > \alpha_{\max} R = 0,1908$ .

Кроме (22), для  $\lambda$  имеется также и формула

$$\lambda = \frac{V}{R} (\beta R)^{0,83} \left[ 1,57 - \frac{2}{\beta R} - \frac{1}{h} (\beta R)^{0,17} \right], \quad (32)$$

полученная в работе [6].

Вопрос об областях применимости формул (22) и (32) исследован в приложении.

### Список литературы

1. Бабичев Н. Б., Севастьянов А. А. Нейтронные поля внутри и за пределами однородных глубокоподкритических шаров // См. настоящий выпуск. С. 6–19.
2. Ахиезер А., Померанчук И. Некоторые вопросы теории ядра. Л.: Оборонгиз, 1950.
3. Шагалиев Р. М., Гребенников А. Н., Артемьев А. Ю., Будников В. И. Развитие основных методик и программ ИТМФ // Журнал Атом. 2011, № 50–51.

4. Бабичев Н. Б., Беженцев Б. В., Бондарев П. В., Забусов П. В. Собственные значения односкоростного уравнения переноса нейтронов в однородных системах // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2009. Вып. 3. С. 68–70.

5. Бабичев Н. Б., Лутиков И. В. Решение односкоростной задачи по нейтронной кинетике на собственные значения и собственные функции, справедливое в классе однородных односвязных объектов с невогнутыми внешними поверхностями // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2011. Вып. 1–2. С. 61–69.

6. Бабичев Н. Б., Лутиков И. В., Незнамов В. П. Некоторые решения вырожденного и близкого к вырожденному уравнений переноса нейтронов // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2009. Вып. 1. С. 3–10.

### Приложение

#### Сравнение результатов аналитических вычислений и расчетов $\lambda$ в широком диапазоне изменения оптической толщины шара

Рассмотрим в качестве примера однородный шар с массой  $M = 4,3$  кг и активностью  $h = 1,68$ .

Зависимости  $\lambda$  от оптической толщины шара  $\alpha R$ , определенные по формулам (22) и (32), а также результаты соответствующих численных расчетов представлены на следующих рисунках.

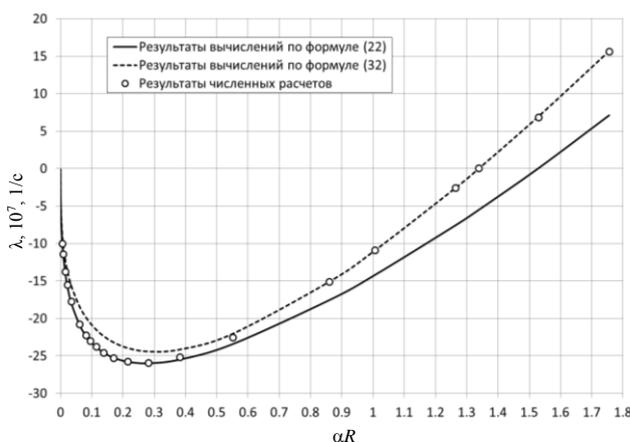


Рис. П.1. Зависимости  $\lambda(\alpha R)$ , полученные в аналитических вычислениях и в численных расчетах (обзорный рисунок)

Абсцисса точек минимума функции  $\lambda(\alpha R)$  составляет  $(\alpha R)_{\min} \approx 0,29$ .

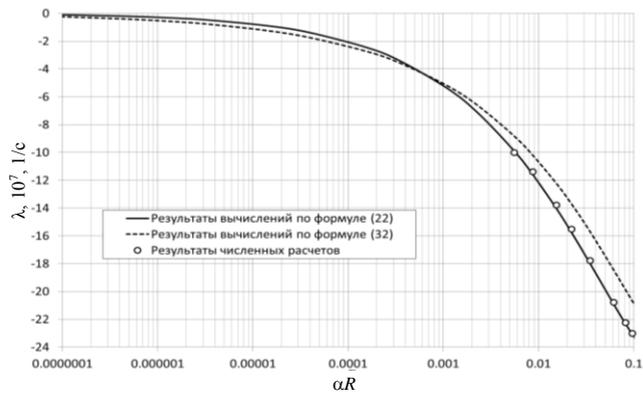


Рис. П.2. Зависимости  $\lambda(\alpha R)$  в области малых оптических толщин

Из рис. П.1 и П.2 можно сделать следующие выводы:

- для глубокоподкритичных шаров с оптическими толщинами  $\alpha R \leq 0,48$  формула (32) по точности уступает формуле (22), которая становится неприменимой в случаях слабоподкритичных и, тем более, надкритичных объектов; при изменении оптической толщины в диапазоне  $0,6 \leq \alpha R \leq 1,8$  результаты расчетов и вычислений по формуле (32) почти не отличаются друг от друга, т. е. этой формулой можно пользоваться в случаях подкритичных, критических и надкритических шаров.

Приведем также график входящей в соотношение (26) универсальной функции  $\Lambda(\beta R)$  (рис. П.3), которая в диапазоне изменения  $0,2 \leq \beta R \leq 3,5$  исследована в работе [1].

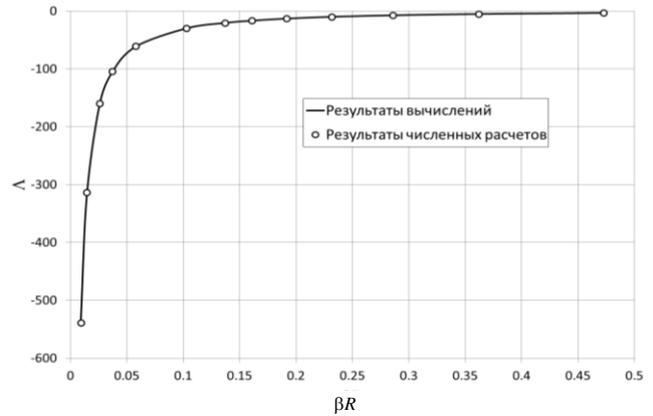


Рис. П.3. Полученная с помощью вычислений по формуле (22) и расчетов зависимость  $\Lambda(\beta R)$  при сравнительно малых величинах  $\beta R$

Статья поступила в редакцию 03.02.2015

## НЕЙТРОННЫЕ ПОЛЯ ВНУТРИ ПРОСТЫХ ПО ГЕОМЕТРИИ СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНЫХ СИСТЕМ, СОЗДАВАЕМЫЕ НЕЙТРОНАМИ СПОНТАННЫХ ДЕЛЕНИЙ ИЗОТОПА $^{238}\text{Pu}$

**Н. Б. Бабичев, А. А. Севастьянов**

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Получено пространственное распределение нейтронов в оптически тонких сферически-симметричных системах из плутония-238.

*Ключевые слова:* интегральное уравнение переноса нейтронов, метод последовательных приближений, нейтронная плотность, источник нейтронов.

### Введение

Изотоп  $^{238}\text{Pu}$  характеризуется не только очень высокой скоростью реакций  $\alpha$ -распада, но и большим выходом нейтронов при спонтанных делениях ядер. Удельная интенсивность нейтронов у этого изотопа составляет  $q_n = 2,59 \cdot 10^3$  нейтр./( $\text{г} \cdot \text{с}$ ), что на пять порядков больше, чем у  $^{239}\text{Pu}$  (см. [1]). Тем не менее, удельная интенсивность энерговыделения  $^{238}\text{Pu}$  за счет спонтанных делений ядер составляет всего лишь  $5,7 \cdot 10^{-6}\%$  от тепловыделения при  $\alpha$ -распаде (см. [2]).

Цель статьи заключается в определении полей нейтронов внутри однородных шаров и оболочек из  $^{238}\text{Pu}$ .

В работе [3] изучен эффект саморазогрева  $^{238}\text{Pu}$  за счет реакций  $\alpha$ -распада и показано, что только миниатюрные объекты не подвержены плавлению. Ниже рассматриваются малые по массе ядра и оболочки из  $^{238}\text{Pu}$ , размеры которых найдены в работе [3].

Поставленная задача решается с помощью аналитических вычислений по формулам первого разряда и численных расчетов, выполненных с помощью одной из математических методик [4].

### 1. Приближенные аналитические решения интегрального уравнения переноса нейтронов в шарах и оболочках из $^{238}\text{Pu}$

#### 1.1. Вывод формул, справедливых в случае шара

Коэффициент размножения нейтронов в миниатюрных шарах (см. введение) мал. Поэтому за основу примем стационарное односкоростное уравнение

$$n(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{d\vec{r}'}{S^2} [\beta(\vec{r}')n(\vec{r}') + Q(\vec{r}')] \exp(-\alpha S), \quad (1)$$

$n(\vec{r})$  – нейтронная плотность,  $Q(\vec{r}') = \rho q_n(\vec{r}') = Q_n(\vec{r}')$  – количество нейтронов, выделяемых источником за единицу времени в единичном объеме,  $\rho$  – плотность плутония,  $\alpha = n_\alpha(\sigma_s + \sigma_f + \sigma_c)$  – обратный полный пробег нейтронов,  $\beta = h\alpha$ ,  $h = \frac{\nu\sigma_f + \sigma_s}{\sigma_s + \sigma_f + \sigma_c}$  – активность среды,  $n_\alpha$  – плотность ядер,  $\sigma_s$ ,  $\sigma_f$ ,  $\sigma_c$  – элементарные сечения рассеяния, деления и поглощения нейтронов,  $\nu$  – среднее число вторичных нейтронов, испускаемых

в одном акте деления ядра, вектор  $\vec{S} = \vec{r} - \vec{r}'$  направлен вдоль вектора  $\vec{V}$  скорости нейтрона.

Уравнение (1) можно свести к следующему безразмерному виду (см. [5]):

$$f(x) = \int_0^1 dz K(z, x) [\beta R f(z) + S_0 z], \quad (2)$$

$$x = \frac{r}{R} \leq 1, \quad (3)$$

$$K(z, x) = \frac{1}{2} \{ Ei[-p(z+x)] - Ei[-p(z-x)] \}, \quad (4)$$

$$p = \alpha R \ll 1. \quad (5)$$

В соотношении (4) входит интегральная экспонента  $Ei$ :

$$Ei(-ax) = - \int_{x>0}^{\infty} \frac{dt}{t} e^{-at}. \quad (6)$$

Нейтронная плотность

$$n(x) = \frac{1}{x} f(x), \quad (7)$$

$$S_0 = Q_0 \Delta t, \quad (8)$$

$$\Delta t = \frac{R}{V}, \quad (9)$$

$Q_0$  – постоянный источник,  $\Delta t$  – характерное время, равное времени пролета нейтроном пути в один радиус шара.

Интегральную экспоненту можно разложить в ряд вблизи точки  $x = 0$ :

$$Ei(-x) = c + \ln x + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{x^m}{mm!}, \quad (10)$$

$c$  – постоянная Эйлера–Маскерони.

Если в (10) оставить лишь главный член ( $c + \ln x$ ), то (4) перейдет в

$$K_0 = \lim_{p \rightarrow 0} K(z, x) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{z+x}{z-x} \right|. \quad (11)$$

Ядро интегрального уравнения (2) будем называть вырожденным.

Условие (5) приводит к следующему упрощению ядра (4):

$$K \approx K_m = K_0 + \Delta K, \quad (12)$$

$$|\Delta K| \ll |K_0|, \quad (13)$$

$$\Delta K = \sum_{m=1}^{\infty} \Delta K_m. \quad (14)$$

$$\Delta K_m \sim p^m. \quad (15)$$

Решение уравнения (2) будем искать методом последовательных приближений. Выпишем явный вид ядра  $K_m(z, x)$  для значений  $m = 1, 2$  ( $K = K_0$  при  $m = 0$ ):

$$K_1(z, x) = K_0(z, x) - \frac{p}{2} (z+x - |z-x|), \quad (16)$$

$$K_2(z, x) = K_1(z, x) + \frac{p^2}{2} xz. \quad (17)$$

Введем следующие интегральные операторы:

$$\hat{U}_0 F = \int_0^1 dz K_0(z, x) F(z), \quad (18)$$

$$\hat{U}_1 = \hat{U}_{11} + \hat{U}_{12}, \quad (19)$$

$$\hat{U}_{11} F = -p \int_0^1 dz z F(z); \quad \hat{U}_{12} = -px \int_x^1 dz F(z). \quad (20)$$

В нулевом приближении

$$f^{[0]}(x) = S_0 \varphi(x), \quad (21)$$

где

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{x^2 - 1}{2x} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \right]. \quad (22)$$

Для первого и второго приближений имеем:

$$f^{[1]}(x) = \hat{U}_0 (h p f^{[0]} + S_0 z) + \hat{U}_1 (S_0 z), \quad (23)$$

$$f^{[2]}(x) = f^{[1]}(x) + \Delta f_2^{[1]}(x), \quad (24)$$

$$\Delta f_2^{[1]}(x) = \Delta f_{21}^{[1]} + \Delta f_{22}^{[1]}(x), \quad (25)$$

$$\Delta f_{21}^{[1]}(x) = h p \hat{U}_0 \Delta f_1^{[0]}(x), \quad (26)$$

$$\Delta f_1^{[0]}(x) = \hat{U}_0 (h p f^{[0]}) + \hat{U}_1 (S_0 z), \quad (27)$$

$$\Delta f_{22}^{[1]}(x) = \hat{U}_1 (h p f^{[0]}) + \hat{U}_2 (S_0 z). \quad (28)$$

Последний оператор определен так:

$$\hat{U}_2 F = \frac{p^2}{2} x \int_0^1 dz z F(z). \quad (29)$$

Определим решение в первом приближении:

$$f^{[1]}(x) = f_0^{[0]}(x) + \Delta f_{11}^{[0]}(x) + \Delta f_{12}^{[0]}(x). \quad (30)$$

Одна из поправок к нулевому приближению находится очень просто:

$$\Delta f_{11}^{[0]}(x) = S_0 \hat{U}_1 z = -\frac{p S_0}{6} x (3 - x^2). \quad (31)$$

Вторая поправка содержит в себе интеграл  $I(x)$ , который не берется аналитически:

$$\Delta f_{12}^{[0]}(x) = h p S_0 I(x), \quad (32)$$

$$I(x) = \frac{1}{4} \left[ 1 + \int_0^x dz (1-z^2) \ln \left( \frac{1+z}{1-z} \right) \ln \left| \frac{z+x}{z-x} \right| \right]. \quad (33)$$

В то же время зависимость  $I(x)$  подчиняется приближенной, но достаточно точной следующей формуле, погрешность которой составляет менее одного процента при любом  $x \leq 1$ :

$$I(x) = \frac{3-2B}{6} x \left[ \varphi(x) + 2(1-Bx^2) \right], \quad B = 0,63. \quad (34)$$

Эта формула получена нестандартным способом. Кратко изложим его суть. Было рассмотрено некоторое вспомогательное интегральное уравнение типа Фредгольма второго рода относительно функции  $H(x)$  и исследован процесс сходимости при его решении методом последовательных приближений с числом итераций  $i = 1, 2, 3$  и  $i \rightarrow \infty$ . Можно показать, что  $I(x) \approx xH_2(x)$  и имеется приближенная связь между функциями  $H_2(x), H_1(x)$  и  $H_\infty(x)$ .

В итоге получено следующее решение первого приближения:

$$n^{[1]}(x) = n_0(x) + (\alpha R) n_1(x), \quad (35)$$

$$n_0(x) = S_0 \varphi(x), \quad (36)$$

$$n_1(x) = \frac{S_0}{6} \left\{ (3-2B)h \left[ \varphi(x) + 2(1-Bx^2) \right] + x^2 - 3 \right\}. \quad (37)$$

Решение во втором приближении приведем, опустив громоздкие выкладки:

$$n^{[2]}(x) = n^{[1]}(x) + (\alpha R)^2 n_2(x), \quad (38)$$

$$n_2 = n_{21} + n_{22} + n_{23} + n_{24} + n_{25}, \quad (39)$$

$$n_{21}(x) = -\frac{S_0 h}{24} \left[ 1 + 8 \ln 2 + 11x^2 - 4 \ln(1-x^2) - \frac{3+6x^2-x^4}{2x} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right) \right], \quad (40)$$

$$n_{22}(x) = S_0 \left[ \frac{h(3-2B)}{6} \right]^2 \left[ \varphi(x) + 2(1-Bx^2) \right], \quad (41)$$

$$n_{23}(x) = \frac{hS_0}{6} \left[ 2(3-2B)h - 3 \right] \varphi(x), \quad (42)$$

$$n_{24}(x) = \frac{hS_0}{24} \left[ 1 - 2B(3-2B)h \right] \left[ \frac{1}{3} + x^2 + \frac{1-x^4}{2x} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right) \right], \quad (43)$$

$$n_{25}(x) = \frac{S_0}{6} = \text{const}. \quad (44)$$

## 1.2. Формула для нейтронной плотности внутри оболочки

В этом случае  $Q(\vec{r}) = Q_0 = \text{const}$  внутри слоя ( $R_1 \leq r \leq R_2$ ) и  $Q(\vec{r}) = 0$  за его пределами.

В статье [6] показано, что в нулевом приближении искомое решение интегрального уравнения имеет следующий вид:

$$n_0(x) = \frac{Q_0}{V} \left[ R_2 \varphi(x_2) - R_1 \varphi(x_1) \right], \quad (45)$$

$$x_i = \frac{r}{R_i}, \quad i = 1, 2.$$

## 2. Результаты аналитических вычислений и численных расчетов

Интенсивность нейтронного источника составляет  $Q_0 = 2590 \rho$  нейтр./ $(\text{см}^3 \cdot \text{с})$ . Если плотность  $^{238}\text{Pu}$   $\rho = 16,5 \text{ г/см}^3$ , то  $Q_0 = 42735$  нейтр./ $(\text{см}^3 \cdot \text{с})$ ,  $S_0 = Q_0 \frac{R}{V} \approx 4,3 \cdot 10^{-5} R$ , где скорость нейтронов  $V = 10^9$  1/с,  $R$  измеряется в сантиметрах,  $S_0$  – в сантиметрах в минус третьей степени.

В вычислениях и расчетах приняты следующие однопроводные нейтронные константы  $^{238}\text{Pu}$ :  $\alpha(\rho = 16,5 \text{ г/см}^3) = 0,2238$  1/см, активность  $h = 1,71$  (см. [7]).

### 2.1. Характеристики шаров из $^{238}\text{Pu}$ с радиусами $R = 0,07; 0,1; 0,13$ см

Приведем результаты аналитических вычислений и численных расчетов (рис. 1).

Результаты вычислений по формулам первого и второго приближений слились в единые сплошные линии и характеризуются погрешностью

$$\delta = \frac{|n^{[1]} - n_{\text{расч}}|}{n^{[1]}} \approx \frac{|n^{[2]} - n_{\text{расч}}|}{n^{[2]}} = (0,6 \div 0,7) \%$$

Использование нулевого приближения приводит к погрешности  $\delta = (1 \div 3)\%$  в зависимости от радиуса шара.

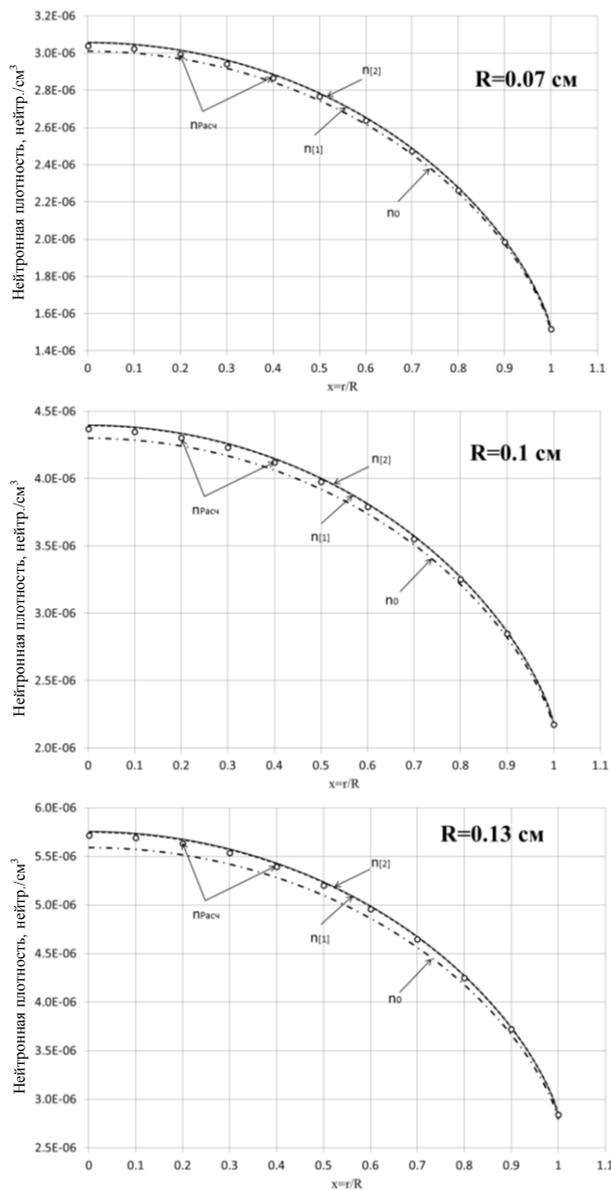


Рис. 1. Зависимости  $n_0(x)$  (результаты вычисления в нулевом приближении по формуле (36) – штрих-пунктирная линия),  $n^{[1]}(x)$  (результаты вычисления в первом приближении по формуле (35) – пунктирная линия),  $n^{[2]}(x)$  (результаты вычисления во втором приближении по формуле (38) – сплошная линия),  $n_{расч}(x)$  (результаты численных расчетов – маркеры)

## 2.2. Результаты, полученные для оболочки из $^{238}\text{Pu}$

Геометрия системы показана на рис. 2.

$^{238}\text{Pu}$

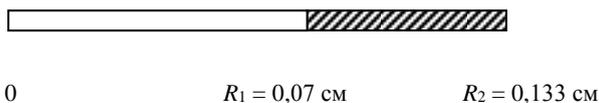


Рис. 2. Радиальный разрез сферически-симметричного слоя

Результаты аналитических вычислений и численного расчета нейтронной плотности представлены на рис. 3.

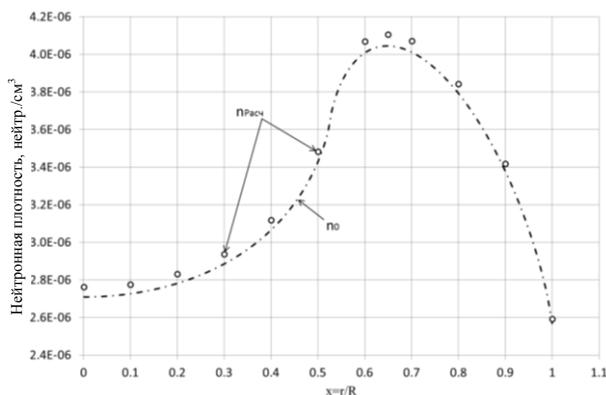


Рис. 3. Функции  $n_0(x)$  (результаты вычисления в нулевом приближении по формуле (45) – штрих-пунктирная линия) и  $n_{расч}(x)$  (результаты численного расчета – маркеры)

Наибольшая погрешность  $n_0(x)$  (в точке максимума плотности нейтронов) оказалась равной 1,5 %.

## Заключение

В статье получены приближенные формулы для нейтронных плотностей внутри шара и оболочки из  $^{238}\text{Pu}$ .

Из сравнения результатов аналитических вычислений и численных расчетов вытекают следующие оценки погрешностей (см. таблицу).

$$\text{Максимальные погрешности } \delta = \frac{|n - n_{расч}|}{n}$$

полученных аналитических решений

Геометрия системы	Погрешность в нулевом приближении, %	Погрешности первого и второго приближений, %
Шар с радиусом $R \in [0,07; 0,13]$ см	1–3	0,6–0,7
Оболочка, расположенная между радиусами 0,07–0,133 см	1,5	–

## Список литературы

1. Perry R. T. and Wilson W. B. Neutron production from  $(\alpha, n)$  reactions and spontaneous fission in  $\text{ThO}_2$ ,  $\text{UO}_2$ , and  $(\text{U,Pu})\text{O}_2$  Fuels. Los Alamos National Laboratory report LA-8869-MS (June 1981).

2. Lederer C. M. and Shirley V. S., Eds., Table of Isotopes, 7th ed. (John Wiley&Sons, Inc., New York, 1978).

3. Бабичев Н. Б., Севастьянов А. А. Об эффекте саморазогрева плутония-238 в простых по геометрии сферически-симметричных системах // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2014. Вып. 3. С. 85-88.

4. Шагалиев Р. М., Гребенников А. Н., Артемьев А. Ю., Будников В. И. Развитие основных методик и программ ИТМФ // Журнал Атом, 2011. № 50–51.

5. Ахиезер А., Померанчук И. Некоторые вопросы теории ядра. Л.: Оборонгиз, 1950.

6. Бабичев Н. Б., Севастьянов А. А. Особенности пространственного распределения нейтронов вблизи границ // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2008. Вып. 2. С. 32–37.

7. Бабичев Н. Б., Севастьянов А. А. Критические параметры однородных шаров, состоящих из плутония-238 и плутония-239 // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2014. Вып. 3. С. 28–35.

Статья поступила в редакцию 29.01.2015

## НЕЙТРОННАЯ КИНЕТИКА ДВУМЕРНЫХ И ТРЕХМЕРНЫХ СИСТЕМ ИЗ ПЛУТОНИЯ-239 И ПЛУТОНИЯ-238

Н. Б. Бабичев, И. В. Лутиков, А. А. Севастьянов

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

С помощью численных расчетов и аналитических вычислений по формулам подобия исследованы нейтронные характеристики двумерных и трехмерных тел, выполненных из чистых (без примесей) изотопов  $^{239}\text{Pu}$  и  $^{238}\text{Pu}$ .

*Ключевые слова:* кинетическое уравнение, инвариантность, собственные значения и собственные функции, формулы подобия.

### Введение

В работе [1] изучена нейтронная кинетика 1D-систем в виде однородных шаров, выполненных из  $^{238}\text{Pu}$  и  $^{239}\text{Pu}$ . В [1] показано, что с помощью формул подобия можно проводить оценки погрешности результатов, полученных при численном решении кинетического уравнения.

Цель данной статьи заключается в решении аналогичной задачи на главные собственные значения и главные собственные функции для случая двумерных и трехмерных объектов.

В качестве 2D-систем и 3D-систем рассмотрены однородный вытянутый эллипсоид вращения и куб (однородный и с профилем плотности).

Исследования проводятся с помощью численных расчетов по методике «Монте-Карло» [2] и аналитических вычислений по формулам подобия.

Ниже принят следующий алгоритм последовательных действий.

1) Для некоторой исходной системы 1 по результатам численного расчета определяются главное собственное значение  $\lambda_{1\text{расч}}$  и главная собственная функция (нейтронная плотность)  $n_{1\text{расч}}(\vec{r})$ .

2) Затем, отталкиваясь от уже известных  $\lambda_{1\text{расч}}$  и  $n_{1\text{расч}}(\vec{r})$ , по формулам подобия вычисляются величина  $\lambda_2$  и функция  $n_2(\vec{r})$  для подобной системы 2.

3) Для системы 2 находятся расчетные характеристики ( $\lambda_{2\text{расч}}$  и  $n_{2\text{расч}}(\vec{r})$ ).

4) Путем сравнения результатов аналитических вычислений и численных расчетов проводятся оценки погрешности  $\lambda_{2\text{расч}}$  и  $n_{2\text{расч}}(\vec{r})$ .

### 1. Нейтронные характеристики однородного вытянутого эллипсоида вращения из $^{239}\text{Pu}$

В качестве системы 1 был взят эллипсоид вращения с плотностью  $\rho_1 = 30 \text{ г/см}^3$ , массой  $M_1 = 10 \text{ кг}$  и полуосями  $a_1 = 6,828 \text{ см}$ ,  $b_1 = c_1 = 3,414 \text{ см}$ .

Расчет «Монте-Карло» на спектральных нейтронных константах ENDF В-6 [3] привел к следующему результату (время счета этой задачи составило 140 ч):

$$\lambda_{1\text{расч}} = 12,0683 \cdot 10^7 \text{ 1/с.} \quad (1)$$

Для главного собственного значения подобной системы 2 применима формула подобия (см. работу [4])

$$\lambda_2(\rho_2) = \frac{\rho_2}{\rho_1} \lambda_1(\rho_1), \quad (2)$$

справедливая при выполнении следующего инвариантного соотношения между плотностями и характерными размерами двух рассматриваемых эллипсоидов:

$$\rho_2 R_2 = \rho_1 R_1. \quad (3)$$

В качестве характерных размеров можно принять длины любых из полуосей геометрически подобных эллипсоидов, к примеру,  $R_1 = a_1$  и  $R_2 = a_2$ .

Подчеркнем, что формула (2) столь же точна, как и общее (не включающее в себя ядерно-физические свойства среды) линеаризованное спектральное уравнение Больцмана, из которого она получена в [4].

Пусть система 2 характеризуется следующими параметрами:  $\rho_2 = 60 \text{ г/см}^3$ ,  $M_2 = 2,5 \text{ кг}$ ,  $a_2 = 3,414 \text{ см}$ ,  $b_2 = c_2 = 1,707 \text{ см}$ . Для системы 2 в аналитических вычислениях по формуле (2) со значениями  $\lambda_1 = \lambda_{1\text{расч}} = 12,0683 \cdot 10^7 \text{ 1/с}$  и  $\rho_1 = 30 \text{ г/см}^3$ , (см. (1)) получена величина

$$\lambda_2 = 24,1366 \cdot 10^7 \text{ 1/с.} \quad (4)$$

Приведем результаты численных расчетов (с константами ENDF В-6)  $\lambda_{2\text{расч}}$  и погрешности величин  $\lambda_{2\text{расч}}$  для подобной системы 2 в зависимости от затрат времени при счете задач «Монте-Карло» (табл. 1).

Таблица 1

Результаты численных расчетов  $\lambda_{2\text{расч}}$  и погрешности  $\delta$  величин  $\lambda_{2\text{расч}}$

Время счета задачи «Монте-Карло», ч	$\lambda_{2\text{расч}}, \text{ 1/с}$	$\delta = \frac{ \lambda_{2\text{расч}} - \lambda_2 }{\lambda_{2\text{расч}}}$
1	$23,8818 \cdot 10^7$	1,1 %
140	$24,1375 \cdot 10^7$	0,0037 %

Следует отметить, что величина  $\lambda_{1\text{расч}}$  (см. (1)) была получена в задаче, которая считалась 140 ч.

Далее все задачи «Монте-Карло» на главные собственные значения и главные собственные функции решались при затратах машинного времени 140 ч.

## 2. Результаты аналитических вычислений и численных расчетов, полученные для 3D-систем из изотопов $^{239}\text{Pu}$ и $^{238}\text{Pu}$

### 2.1. Однородный куб из $^{239}\text{Pu}$

При нахождении характеристик однородного куба использовались нейтронные константы ENDF В-6.

Расчет «Монте-Карло» в случае исходного куба 1 с плотностью  $\rho_1 = 30 \text{ г/см}^3$ , массой  $M_1 = 10 \text{ кг}$  и длиной ребра  $a_1 = 6,9336 \text{ см}$  привел к следующему результату:

$$\lambda_{1\text{расч}} = 10,5351 \cdot 10^7 \text{ 1/с.} \quad (5)$$

Подобный куб 2 с  $\rho_2 = 60 \text{ г/см}^3$ ,  $M_2 = 2,5 \text{ кг}$  и  $a_2 = 3,4668 \text{ см}$  характеризуется величинами

$$\lambda_2 = 21,0702 \cdot 10^7 \text{ 1/с,} \quad (6)$$

$$\lambda_{2\text{расч}} = 21,0705 \cdot 10^7 \text{ 1/с.} \quad (7)$$

Погрешность оказалась ничтожной  $\left( \delta = \frac{|\lambda_{2\text{расч}} - \lambda_2|}{\lambda_{2\text{расч}}} = 0,0014 \% \right)$  по двум причинам – при вычислении  $\lambda_2$  применялась точная формула подобия (2) и задача «Монте-Карло» решалась 140 ч (об этом говорилось выше).

### 2.2. Значения $\lambda$ для профильных кубов из $^{239}\text{Pu}$ , полученные с помощью точной формулы подобия и расчетов на спектральных константах ENDF В-6

Здесь рассматриваются двухобластные кубы, в которых объем центральной области в 3 раза меньше полного объема, и применяются следующие точные соотношения подобия.

У исходного куба 1 и куба 2 длины ребер в пределах внутренней и внешней областей связаны следующим образом:

$$a_{11} = \frac{a_{12}}{\sqrt[3]{3}}, \quad a_{21} = \frac{a_{22}}{\sqrt[3]{3}}, \quad (8)$$

$a_{i1}$  и  $a_{i2}$  – длины ребер первого и второго кубов во внутренней и внешней зонах.

#### 2.2.1. Случай $\rho_{11} > \rho_{12}$

Пусть, например, плотность плутония во внутренней области в 2 раза выше, чем во внешней, т. е.  $\frac{\rho_{11}}{\rho_{12}} = \frac{\rho_{21}}{\rho_{22}} = 2$ .

Приведем выбранную геометрию двух подобных систем.

Куб 1: средняя по объему плотность  $\bar{\rho}_1 = 30 \text{ г/см}^3$ ,  $\rho_{11} = 45 \text{ г/см}^3$ ,  $\rho_{12} = 22,5 \text{ г/см}^3$ ,  $M_{11} = M_{12} = 5 \text{ кг}$ ,  $a_{11} = 4,8075 \text{ см}$ ,  $a_{12} = 6,9336 \text{ см}$ .

Куб 2:  $\bar{\rho}_2 = 60 \text{ г/см}^3$ ,  $\rho_{21} = 90 \text{ г/см}^3$ ,  $\rho_{22} = 45 \text{ г/см}^3$ ,  $M_{21} = M_{22} = 1,25 \text{ кг}$ ,  $a_{21} = 2,40375 \text{ см}$ ,  $a_{22} = 3,4668 \text{ см}$ .

$$\lambda_{1\text{расч}} = 22,3089 \cdot 10^7 \text{ 1/с,} \quad (9)$$

Для главного собственного значения подобной системы 2 применимы формулы подобия (их вывод представлен в работе [4])

$$\lambda_2(\bar{\rho}_2) = \frac{\bar{\rho}_2}{\bar{\rho}_1} \lambda_1(\bar{\rho}_1), \quad (10)$$

$$\bar{\rho}_2 R_2 = \bar{\rho}_1 R_1. \quad (11)$$

Куб 2 характеризуется следующими параметрами:  $\bar{\rho}_2 = 60 \text{ г/см}^3$ ,  $\rho_{21} = 90 \text{ г/см}^3$ ,  $\rho_{22} = 45 \text{ г/см}^3$ ,  $M_{21} = M_{22} = 1,25 \text{ кг}$ ,  $a_{21} = 2,40375 \text{ см}$ ,  $a_{22} = 3,4668 \text{ см}$ .

В аналитических вычислениях с  $\lambda_1 = \lambda_{1\text{расч}}$ ,  $R_i = a_{i2}$  и расчетах получены следующие результаты:

$$\lambda_2 = 44,6178 \cdot 10^7 \text{ 1/с}, \quad (12)$$

$$\lambda_{2\text{расч}} = 44,6129 \cdot 10^7 \text{ 1/с}. \quad (13)$$

Погрешность величины составила

$$\delta = \frac{|\lambda_{2\text{расч}} - \lambda_2|}{\lambda_{2\text{расч}}} = 0,011 \%. \quad (14)$$

### 2.2.2. Случай $\rho_{11} < \rho_{12}$

Рассматриваемому здесь условию  $\frac{\rho_{11}}{\rho_{12}} = \frac{\rho_{21}}{\rho_{22}} = \frac{1}{2}$

удовлетворяют следующие 3D-системы:

куб 1 ( $\bar{\rho}_1 = 30 \text{ г/см}^3$ ,  $\rho_{11} = 18 \text{ г/см}^3$ ,  $\rho_{12} = 36 \text{ г/см}^3$ ,  $M_{11} = 2 \text{ кг}$ ,  $M_{12} = 8 \text{ кг}$ ,  $a_{11} = 4,8075 \text{ см}$ ,  $a_{12} = 6,9336 \text{ см}$ );  
куб 2 ( $\bar{\rho}_2 = 60 \text{ г/см}^3$ ,  $\rho_{21} = 36 \text{ г/см}^3$ ,  $\rho_{22} = 72 \text{ г/см}^3$ ,  $M_{21} = 0,5 \text{ кг}$ ,  $M_{22} = 2 \text{ кг}$ ,  $a_{21} = 2,40375 \text{ см}$ ,  $a_{22} = 3,4668 \text{ см}$ ).

Результаты аналитических вычислений и численных расчетов приведем без излишних комментариев:

$$\lambda_{1\text{расч}} = 5,4047 \cdot 10^7 \text{ 1/с}, \quad (15)$$

$$\lambda_2 = 10,8094 \cdot 10^7 \text{ 1/с}, \quad (16)$$

$$\lambda_{2\text{расч}} = 10,8097 \cdot 10^7 \text{ 1/с}, \quad (17)$$

$$\delta = \frac{|\lambda_{2\text{расч}} - \lambda_2|}{\lambda_{2\text{расч}}} = 0,0028 \%. \quad (18)$$

### 2.3. Двухобластные кубы из $^{239}\text{Pu}$ и $^{238}\text{Pu}$ с профилем плотности (решение односкоростных задач на собственные значения и собственные функции)

Ниже исследуются нейтронные характеристики следующих трехмерных систем: исходный куб 1 из  $^{239}\text{Pu}$  и куб 2 из  $^{238}\text{Pu}$ .

Задачу о переходе между системами из разных материалов с помощью точных соотношений подобия (10), (11) в общем случае решить нельзя, поскольку при выводе данных соотношений предпо-

лагалась неизменность ядерно-физических свойств среды (см. [4]).

Если вместо точного спектрального кинетического уравнения [4] за основу принять односкоростное кинетическое уравнение, то поставленную задачу можно решить с использованием более общих, но менее точных формул подобия. Действительно, при переходе к односкоростному приближению расширяется класс подобных систем и это дает возможность отыскания большего, нежели в статье [4] количества соотношений подобия.

В односкоростное кинетическое уравнение входят следующие величины:  $\alpha(\vec{r}) = n_{\text{я}}(\vec{r})(\sigma_s + \sigma_f + \sigma_c)$  – обратный полный пробег нейтронов в среде с плотностью ядер  $n_{\text{я}}(\vec{r}) = \frac{N_{\text{Авогадро}} \rho(\vec{r})}{A}$ ,  $\rho(\vec{r})$  – плотность вещества,

$\beta(\vec{r}) = h(\vec{r})\alpha(\vec{r}, \rho)$ ,  $h = \frac{v\sigma_f + \sigma_s}{\sigma_s + \sigma_f + \sigma_c}$  – активность

вещества,  $v$  – среднее число вторичных нейтронов, испускаемых в одном акте деления ядра и  $\sigma_s$ ,  $\sigma_f$ ,  $\sigma_c$  – элементарные сечения рассеяния, деления и поглощения нейтронов.

Далее использовано односкоростное приближение. При этом в аналитических вычислениях, а также в расчетах по методике «Монте-Карло» приняты скорость нейтронов  $V = 10^9 \text{ 1/с}$  и взятые из работы [5] следующие одnogрупповые нейтронные константы (1-ENDF B-6) (табл. 2).

Т а б л и ц а 2

Значения активности и параметров  $\alpha(\rho_0)$ ,  $\beta(\rho_0)$

Изотоп плутония	$^{239}\text{Pu}$	$^{238}\text{Pu}$
Активность среды $h$	1,6578	1,7101
Кристаллическая плотность плутония $\rho_0$ , г/см <sup>3</sup>	19,851	19,840
$\alpha_0 = \alpha(\rho_0)$ , 1/см	0,2779	0,2691
$\beta_0 = \beta(\rho_0)$ , 1/см	0,4607	0,4602

#### 2.3.1. Решение задачи на главные собственные значения $\lambda$

В статье [6] получена формула для двух произвольных подобных профильных систем:

$$\lambda_2 = \left[ \frac{\bar{\alpha}_1 \bar{\beta}_2}{\bar{\alpha}_2 \bar{\beta}_1} \left( 1 + \frac{\lambda_1}{\bar{\alpha}_1 V_1} \right) - 1 \right] \bar{\alpha}_2 V_2, \quad (19)$$

которой можно пользоваться, если выполняется условие

$$\bar{\beta}_2 R_2 = \bar{\beta}_1 R_1. \quad (20)$$

$R_i$  – характерные размеры подобных систем,  $\bar{\alpha}_i = \bar{\alpha}_{0i} \frac{\bar{\rho}_i}{\bar{\rho}_{0i}}$ ,  $\bar{\beta}_i = \bar{\beta}_{0i} \frac{\bar{\rho}_i}{\bar{\rho}_{0i}}$  – средние по объему величины параметров.

При решении поставленной здесь задачи с не зависящей от координат активностью и  $V_2 = V_1 = 10^9$  л/с соотношения (19), (20) несколько упрощаются:

$$\lambda_2 = \left[ \frac{h_2}{h_1} \left( 1 + \frac{\lambda_1}{\bar{\alpha}_1 V} \right) - 1 \right] \bar{\alpha}_2 V, \quad (21)$$

$$h_2 \bar{\alpha}_2 R_2 = h_1 \bar{\alpha}_1 R_1. \quad (22)$$

Рассмотрим случай, когда

$$\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}} = \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{22}} = 2 \text{ и } \bar{\alpha}_1 > \bar{\alpha}_2. \quad (23)$$

Пусть куб 1 из  $^{239}\text{Pu}$  характеризуется следующими параметрами:  $\bar{\alpha}_1 = 0,42$  л/см,  $\alpha_{11} = 0,63$  л/см,  $\alpha_{12} = 0,315$  л/см,  $M_{11} = M_{12} = 5$  кг,  $a_{11} = 4,8075$  см,  $a_{12} = 6,9336$  см.

Из выражения (22) вытекают следующие формулы для определения длин  $a_{21}$  и  $a_{22}$  в подобном кубе:

$$a_{21} = \frac{h_1}{h_2} \left\{ \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{21}} \frac{a_{11}^3}{a_{12}^2} \left[ \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{22}} a_{12} + \left( \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{21}} - \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{22}} \right) \frac{a_{11}^3}{a_{12}^2} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{3}}, \quad (24)$$

$$a_{22} = \frac{h_1}{h_2} \left[ \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{22}} a_{12} + \left( \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{21}} - \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{22}} \right) \frac{a_{11}^3}{a_{12}^2} \right]. \quad (25)$$

Таким образом для куба 2 из  $^{238}\text{Pu}$  имеем  $\bar{\alpha}_2 = 0,8136$  л/см,  $\alpha_{21} = 1,2204$  л/см,  $\alpha_{22} = 0,6102$  л/см,  $M_{21} = M_{22} = 1,25$  кг; рассчитанные по формулам (23) и (24) длины ребер равны  $a_{21} = 2,40375$  см,  $a_{22} = 3,4668$  см.

Приведем результаты численных расчетов  $\lambda$ , вычисления по формуле подобия (21) и погрешность.

$$\lambda_{1\text{расч}} = 20,1539 \cdot 10^7 \text{ л/с}, \quad (26)$$

$$\lambda_2 = 42,8525 \cdot 10^7 \text{ л/с}, \quad (27)$$

$$\lambda_{2\text{расч}} = 43,8466 \cdot 10^7 \text{ л/с}, \quad (28)$$

$$\delta = \frac{|\lambda_{2\text{расч}} - \lambda_2|}{\lambda_{2\text{расч}}} = 2,27 \%. \quad (29)$$

### 2.3.2. Решение задачи на главные собственные функции

Перепишем соотношение (20) в следующем виде:

$$\frac{\beta_{20}}{\rho_{20}} \bar{\rho}_2 R_2 = \frac{\beta_{10}}{\rho_{10}} \bar{\rho}_1 R_1. \quad (30)$$

Если обратиться к данным табл. 2, то можно заметить, что отношения  $\frac{\beta_{10}}{\rho_{10}} = 0,023208 \frac{\text{см}^2}{\text{г}}$  и

$\frac{\beta_{20}}{\rho_{20}} = 0,023196 \frac{\text{см}^2}{\text{г}}$  для изотопов  $^{239}\text{Pu}$  и  $^{238}\text{Pu}$  из-за свойственных им сечений взаимодействия нейтронов с веществом совпадают с точностью до 0,05 %.

Поэтому в данном конкретном случае вместо условия (30) возникает приближенный критерий

$$\bar{\rho}_2 R_2 \approx \bar{\rho}_1 R_1, \quad (31)$$

при соблюдении которого становится справедливой полученная в работе [4] формула подобия для нейтронной плотности

$$n_2(\bar{r}_2) = n_1 \left( \frac{R_2}{R_1} \bar{r}_1 \right). \quad (32)$$

Нейтронная плотность (32) определялась в направлении оси ОХ, перпендикулярной грани куба.

Результаты аналитических вычислений и численного расчета для случая (23) показаны на рис. 1.

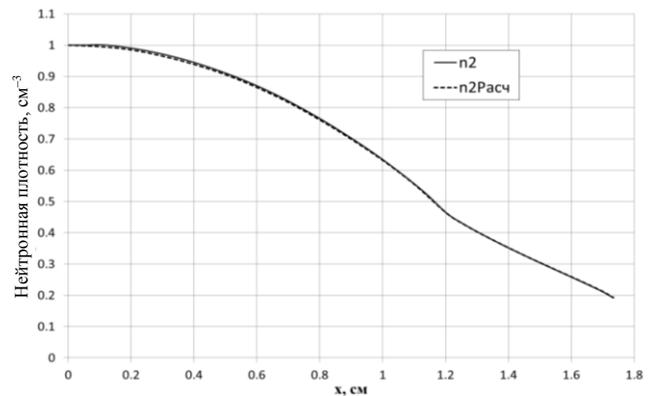


Рис. 1. Функция  $n_2(x)$ , вычисленная по формуле (32) (сплошная линия), и  $n_{2\text{расч}}(x)$ , полученная в расчете «Монте-Карло» (пунктирная линия)

Плотности нейтронов  $n_2(x)$  и  $n_{2\text{расч}}(x)$  нормированы на единицу в центре куба.

Максимальная погрешность численного расчета нейтронной плотности составляет 1,6 %.

Теперь рассмотрим случай  $\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}} = \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{22}} = \frac{1}{5}$  для

следующих двух систем:

куб 1:  $\bar{\alpha}_1 = 0,42$  1/см,  $\alpha_{11} = 0,1145$  1/см,  $\alpha_{12} = 0,5727$  1/см,  $M_{11} = 0,9$  кг,  $M_{12} = 9,1$  кг,  $a_{11} = 4,8075$  см,  $a_{12} = 6,9336$  см;

куб 2:  $\bar{\alpha}_2 = 0,8136$  1/см,  $\alpha_{21} = 0,2219$  1/см,  $\alpha_{22} = 1,1079$  1/см,  $M_{21} = 0,225$  кг,  $M_{22} = 2,275$  кг,  $a_{21} = 2,40375$  см,  $a_{22} = 3,4668$  см.

Зависимость  $n_2(x)$  проиллюстрирована на рис. 2.

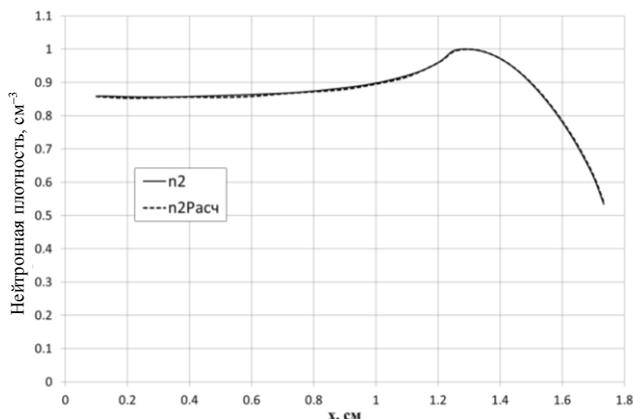


Рис. 2. Зависимость  $n_2(x)$ , вычисленная по формуле (32), (сплошная линия) и  $n_{2расч}(x)$ , полученная в расчете (пунктирная линия).

В случае  $k = \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}} = \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{22}} = \frac{1}{5}$  максимум

нейтронной плотности находится в периферийной области куба.

Следует отметить, что при стремлении  $k$  к нулю рассмотренный выше тип 3D-системы с профилем плотности плутония вырождается в куб с пустой центральной полостью, т. е. в однородный кубический слой.

### Заключение

В статье изучена нейтронная кинетика двумерных и трехмерных систем, выполненных из  $^{239}\text{Pu}$  и  $^{238}\text{Pu}$ .

В качестве 2D-объектов рассмотрены однородные вытянутые эллипсоиды вращения, а в качестве 3D-систем – кубы, как однородные, так и с профилем плотности плутония.

На некоторых примерах с помощью соотношений подобия определены погрешности расчетов главных собственных значений и главных собственных функций.

### Список литературы

1. Бабичев Н. Б., Лутиков И. В., Севастьянов А. А. Нейтронная кинетика однородных шаров из плутония-238 и плутония-239, находящихся в произвольных состояниях // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2014. Вып. 3. С. 46–60.
2. Донской Е. Н., Ельцов В. А., Житник А. К. и др. Метод Монте-Карло во ВНИИЭФ // ВАНТ. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1993. Вып.2. С. 61–64.
3. Herman M., Trkov A. ENDF-6 Format Manual, Data Formats and Procedures for the Evaluated Nuclear Data Files ENDF/B-VI and ENDF/B-VII. BNL-90365. National Nuclear Data Center, Brookhaven National Laboratory, Upton, New York 11973-5000, July 2010.
4. Бабичев Н. Б., Бондарев П. С., Лутиков И. В., Незнамов В. П. Инвариантность общего уравнения переноса нейтронов в некоторых профильных системах и вытекающие из этого следствия // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2011. Вып. 1–2. С. 61–64.
5. Бабичев Н. Б., Севастьянов А. А. Критические параметры однородных шаров, состоящих из плутония-238 и плутония-239 // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2014. Вып. 3. С. 28–35.
6. Бабичев Н. Б., Лутиков И. В., Незнамов В. П. Теория подобия в рамках односкоростной нейтронной кинетики квазистационарных систем // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2008. Вып. 1. С. 56–64.

Статья поступила в редакцию 29.01.2015.

## РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ МЕТОДИКИ РЕШЕНИЯ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА, ПРОВЕДЕННОГО НА ЗАДАЧЕ ОБ ОДНОРОДНОЙ РЕЛАКСАЦИИ В ПРОСТОМ ГАЗЕ С ПРОИЗВОЛЬНО ЗАДАНЫМИ НАЧАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ

В. С. Афанасьева, А. В. Харитонов

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Приведены результаты сравнительных расчетов с точным решением задачи об однородной релаксации в простом газе с произвольно заданными начальными данными.

*Ключевые слова:* кинетическое уравнение Больцмана, трехмерная геометрия, численные расчеты.

### Введение

Кинетическое уравнение Больцмана [1] составляет теоретическую основу динамики газов. Это нелинейное интегродифференциальное уравнение представляет в математическом отношении очень интересный объект для изучения и опробования различных идей и подходов, прежде всего численных. В связи с отсутствием общих аналитических подходов к решению нелинейных уравнений удастся только в частных случаях построить точное решение. Для общего случая решение кинетического уравнения Больцмана возможно только с помощью численных методов. Авторы статьи занимаются созданием методики для численного решения кинетического уравнения Больцмана, применяя проекционно-сеточный метод с полной аппроксимацией уравнения [2–4]. Разрабатываемая методика положена в основу программы расчета кинетического уравнения Больцмана для трехмерной геометрии в применении к газовой динамике. В работе [6] приведены результаты сравнительных расчетов с точным решением задачи об однородной релаксации в простом газе, в качестве начальных данных была использована функция Максвелла. В данной статье приведены результаты сравнительных расчетов с точным решением задачи об однородной релаксации в простом газе, в качестве начальных данных использовались произвольно выбранные значения. Расчеты проведены на модельной задаче с вакуумными и плот-

ными слоями на неподвижной геометрии в многогрупповом кинетическом приближении. В качестве модельной задачи взята сферическая одномерная задача, для которой рассчитана трехмерная пространственная сетка. Каждый расчет проводился до сходимости решения с заданной точностью. Полученная функция распределения использовалась для вычисления макровеличин. Значения этих макровеличин подставлялись в функцию Максвелла и проводились сравнения с полученными расчетными величинами. Анализ результатов проведенных расчетов позволяет сделать заключение о вполне удовлетворительной точности исследуемой методики при используемой постановке задачи.

### Постановка модельной задачи и результаты расчетов

В кинетической теории газов обычно рассматривают молекулярные модели, которые учитывают молекулярное взаимодействие более или менее точно. Одна из них – это модель твердых сфер. Другие модели представляются в виде материальных точек, взаимодействующих с центральными консервативными силами, и отличаются одна от другой лишь видом выражения для потенциала этих сил. Уравнение Больцмана для газа из твердых сфер имеет вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi \frac{\partial f}{\partial x} + X \frac{\partial f}{\partial \xi} =$$

$$= \frac{1}{m} \iiint (f' f'_* - f f_*) B(\theta, V, \sigma) d\theta d\varepsilon d\xi_*,$$

где:  $f_* = f(\xi_*)$ ,  $f'_* = f'(\xi'_*)$ ,  $f' = f(\xi')$ ,  
 $\xi' = \xi - n(nV)$ ,  $\xi'_* = \xi_* + n(nV)$ ,

$V = \xi - \xi_*$ ,  $B(\theta, V, \sigma) = V\sigma^2 \sin\theta \cos\theta$  – сечение рассеяния,  $X$  – внешняя сила,  $\xi, \xi_*$  – скорости молекул после столкновения,  $\xi', \xi'_*$  – скорости молекул перед столкновением,  $\sigma$  – диаметр молекулы,  $m$  – масса молекулы,  $n$  – единичный вектор, направленный вдоль линии, соединяющей центры молекул в момент столкновения,  $f$  – массовая плотность в шестимерном пространстве  $(x, \xi)$ ,

$\rho = \int f d\xi$  – плотность вещества,  $v = \frac{\int \xi f d\xi}{\int f d\xi}$  – массовая скорость,  $c = \xi - v$  – тепловая скорость.

Плотность энергии задается выражением:

$$E = \frac{1}{2} \int \xi^2 f d\xi.$$

Плотность внутренней энергии задается выражением:

$$E_{\text{вн}} = \frac{1}{2} \int c^2 f d\xi.$$

Другие обозначения взяты из работы [1].

Для численного решения кинетического уравнения Больцмана применен проекционно-сеточный метод с полной аппроксимацией уравнения. Методические численные расчеты уравнения Больцмана проведены без учета внешней силы и переносного члена, что является, по сути, решением задачи об однородной релаксации в простом газе. Расчеты проведены на модельной задаче с вакуумными и плотными слоями на неподвижной геометрии в многогрупповом кинетическом приближении. В качестве модельной задачи взята сферическая одномерная задача, для которой рассчитана трехмерная пространственная сетка. Расчеты проведены на системе, которая состоит из четырех математических областей. В каждой области определена своя пространственная сетка, общее количество ячеек в системе равно 14800. Пространственная сетка состоит из 20 листов, каждый лист содержит 20 секторов.

Геометрия одного листа приведена на рис. 1.

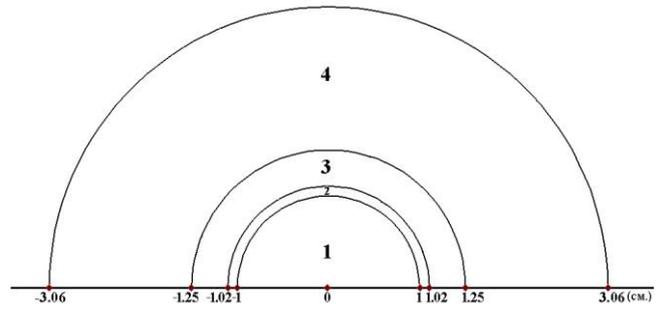


Рис. 1. Двумерная геометрия «листа»

На каждом листе построение пространственной сетки осуществлялось равномерно по радиусу: область 1 – 15 интервалов, область 2 – 2 интервала, область 3 – 5 интервалов, область 4 – 15 интервалов. Сетка по скоростной переменной выбиралась равномерной. Области 1, 2, 3 – вакуумные слои. В области 3 в начальный момент времени в качестве начальных данных задавались значения функции распределения в различных скоростных группах таким образом, чтобы плотность вещества соответствовала задаваемому значению. Каждый расчет проводился до сходимости решения с заданной точностью. Полученная функция распределения использовалась для вычисления макровеличин. Значения этих макровеличин подставлялись в функцию Максвелла и проводились сравнения с полученными расчетными величинами. Функция распределения Максвелла в численном и точном решении для задач 1–17 приведена на рис. 2–19. На рис. 10 показана эволюция функции распределения для задачи 8. На рисунках использованы следующие обозначения:  $A$  – атомная масса;  $V$  – скорость (см/с);  $K = \sigma^2/m$ ;  $DT$  – шаг по времени;  $DV$  – шаг по скорости;  $KG$  – количество групп.

Расчеты проведены с вариацией задания начальных данных, атомной массы  $A$ , количества групп, величины шага по скоростной переменной. В задаче 1 в качестве начальных данных взята функция Максвелла. В задачах 2–6 в начальный момент времени в качестве начальных данных задавались значения функции распределения в третьей скоростной группе таким образом, чтобы плотность вещества равнялась  $1 \text{ г/см}^3$ .

В задаче 7 в начальный момент времени в качестве начальных данных задавались значения функции распределения в третьей и в шестой скоростных группах таким образом, чтобы плотность вещества равнялась  $1 \text{ г/см}^3$ .

В задаче 8 в начальный момент времени в качестве начальных данных задавались значения функции распределения во второй, в пятой и

седьмой скоростных группах таким образом, чтобы плотность вещества равнялась  $1 \text{ г/см}^3$ .

В задаче 9 в начальный момент времени в качестве начальных данных задавались значения функции распределения в четвертой, пятой и шестой скоростных группах таким образом, чтобы плотность вещества равнялась  $1 \text{ г/см}^3$ .

Задача 10 аналогична задаче 9, но число групп равно одиннадцати. В задаче 11 – 5 групп, плотность вещества задавалась  $18,7 \text{ г/см}^3$ .

В задаче 12 – 5 групп, в начальный момент времени в качестве начальных данных задавались значения функции распределения во второй скоростной группе таким образом, чтобы плотность вещества равнялась  $1 \text{ г/см}^3$  для полярного угла  $120$  градусов.

Задача 13 аналогична задаче 12, но начальные данные задавались для полярного угла  $60$  градусов.

Задача 14 – 7 групп, в начальный момент времени в качестве начальных данных задавались значения функции распределения во второй скоростной группе таким образом, чтобы плотность вещества равнялась  $18,7 \text{ г/см}^3$ .

Задача 15 – 7 групп, в начальный момент времени в качестве начальных данных задавались значения функции распределения во второй скоростной группе таким образом, чтобы плотность вещества равнялась  $100 \text{ г/см}^3$ .

Задача 16 – 5 групп, в начальный момент времени в качестве начальных данных задавались значения функции распределения во второй скоростной группе таким образом, чтобы плотность вещества равнялась  $18,7 \text{ г/см}^3$ .

Задача 17 – 7 групп, в начальный момент времени в качестве начальных данных задавались значения функции распределения в третьей скоростной группе таким образом, чтобы плотность вещества равнялась  $100 \text{ г/см}^3$ .

Для каждой задачи перед рисунками приведены параметры расчета. Параметры расчета для задачи 1:  $A = 1, K = 10^8, DT = 0,0001, DV = 0,1, KG = 5$ .

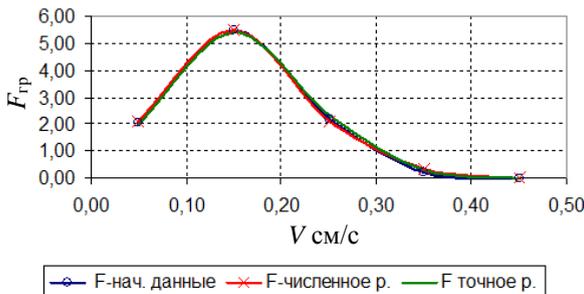


Рис. 2. Функция распределения в численном и точном решении для задачи 1

Параметры расчета для задачи 2:  $A = 1, K = 10^8, DT = 0,0001, DV = 0,1, KG = 5$ .

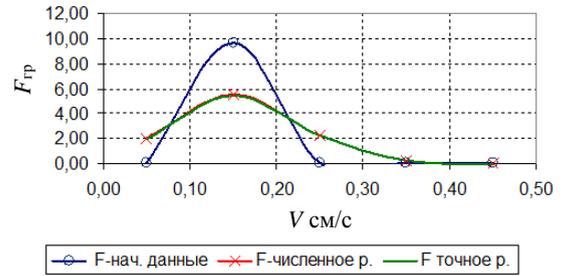


Рис. 3. Функция распределения в численном и точном решении для задачи 2

Параметры расчета для задачи 3:  $A = 1, K = 10^8, DT = 0,0001, DV = 0,1, KG = 5$ .

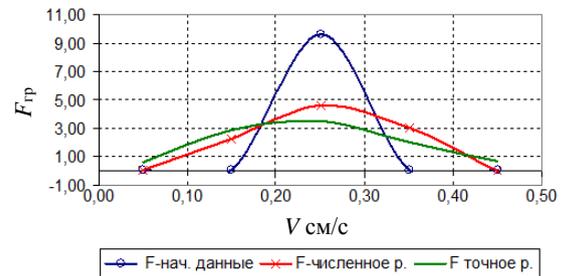


Рис. 4. Функция распределения в численном и точном решении для задачи 3

Параметры расчета для задачи 4:  $A = 1, K = 10^8, DT = 0,0001, DV = 0,1, KG = 10$ .

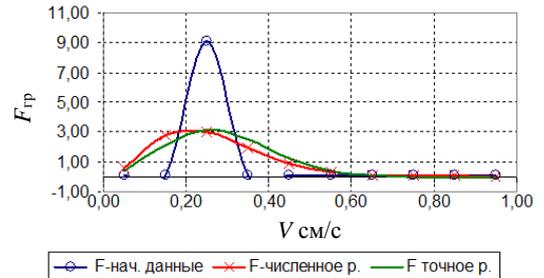


Рис. 5. Функция распределения в численном и точном решении для задачи 4

Параметры расчета для задачи 5:  $A = 1, K = 10^8, DT = 0,0001, DV = 0,1, KG = 7$ .

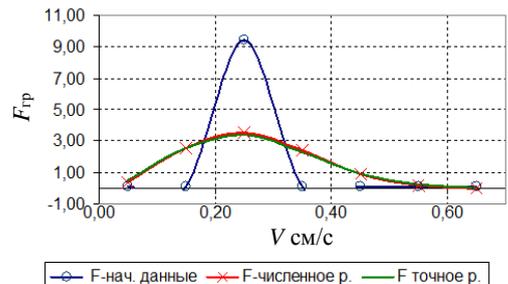


Рис. 6. Функция распределения в численном и точном решении для задачи 5

Параметры расчета для задачи 6:  $A = 1, K = 10^8, DT = 0,0001, DV = 0,05, KG = 10.$

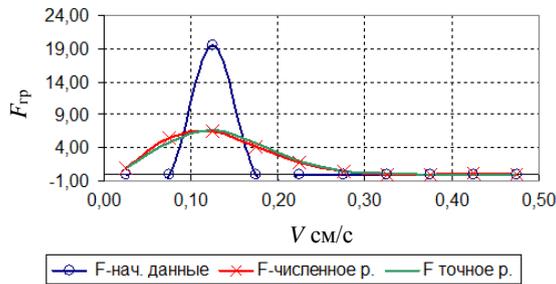


Рис. 7. Функция распределения в численном и точном решении для задачи 6

Параметры расчета для задачи 9:  $A = 1, K = 10^8, DT = 0,0001, DV = 0,1, KG = 9.$

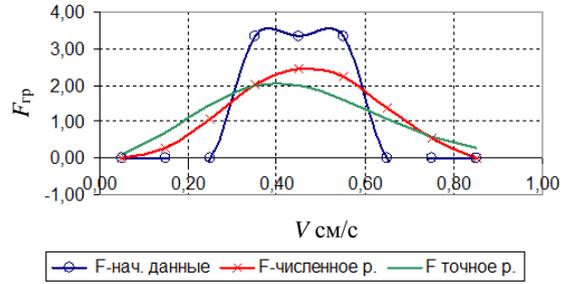


Рис. 11. Функция распределения в численном и точном решении для задачи 9

Параметры расчета для задачи 7:  $A = 1, K = 10^8, DT = 0,0001, DV = 0,1, KG = 10.$

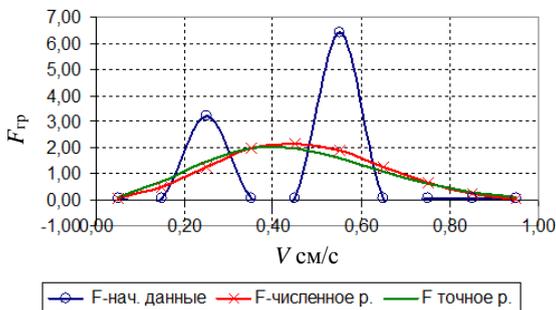


Рис. 8. Функция распределения в численном и точном решении для задачи 7

Параметры расчета для задачи 10:  $A = 1, K = 10^8, DT = 0,0001, DV = 0,1, KG = 11.$

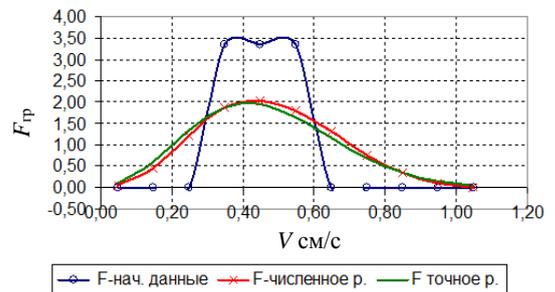


Рис. 12. Функция распределения в численном и точном решении для задачи 10

Параметры расчета для задачи 8:  $A = 1, K = 10^8, DT = 0,0001, DV = 0,1, KG = 10.$

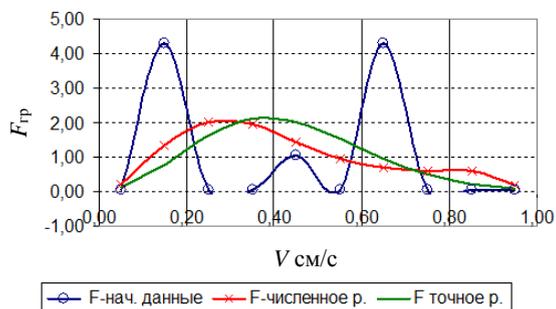


Рис. 9. Функция распределения в численном и точном решении для задачи 8

Параметры расчета для задачи 11:  $A = 238, K = 10^6, DT = 0,0001, DV = 0,1, KG = 5.$

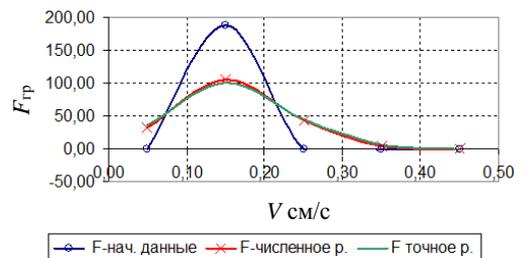


Рис. 13. Функция распределения в численном и точном решении для задачи 11

Параметры расчета для задачи 12:  $A = 1, K = 10^8, DT = 0,0001, DV = 0,1, KG = 5.$

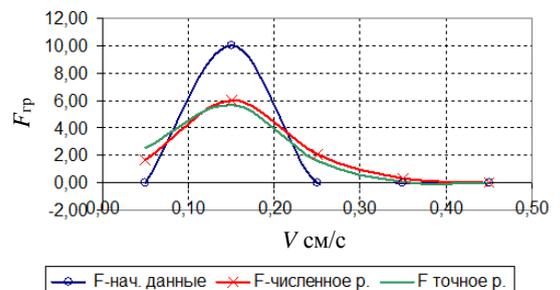


Рис. 14. Функция распределения в численном и точном решении для задачи 12

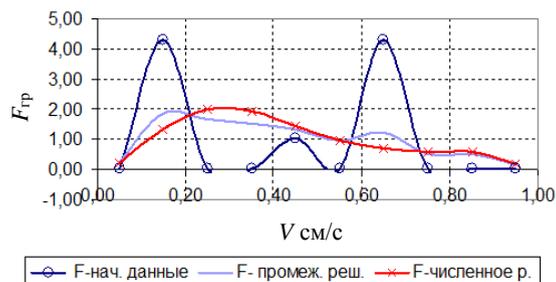


Рис. 10. Эволюция функции распределения в численном решении задачи 8

Параметры расчета для задачи 13:  $A = 1, K = 10^8, DT = 0,0001, DV = 0,1, KG = 5$ .

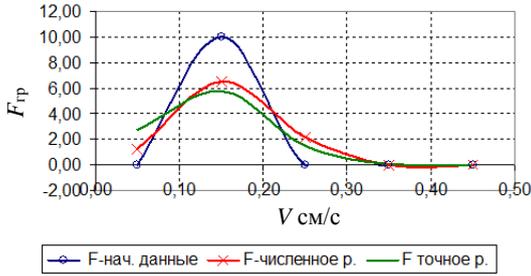


Рис. 15. Функция распределения в численном и точном решении для задачи 13

Параметры расчета для задачи 14:  $A = 1, K = 10^8, DT = 0,0001, DV = 0,1, KG = 7$ .

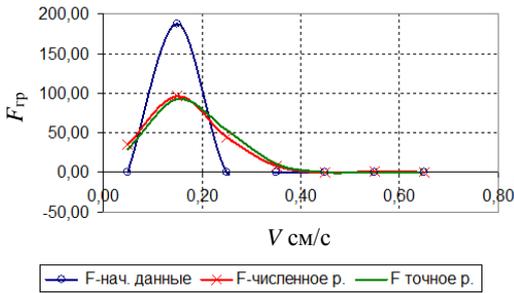


Рис. 16. Функция распределения в численном и точном решении для задачи 14

Параметры расчета для задачи 15:  $A = 238, K = 10^6, DT = 0,0001, DV = 0,1, KG = 7$

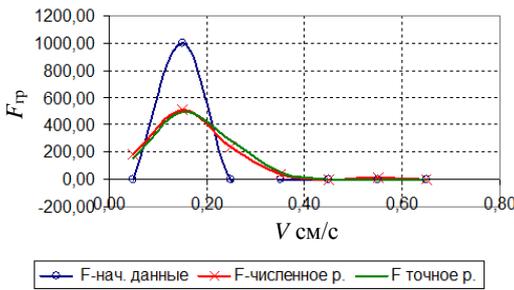


Рис. 17. Функция распределения в численном и точном решении для задачи 15

Параметры расчета для задачи 16:  $A = 1, K = 10^8, DT = 0,0001, DV = 0,2, KG = 5$ .

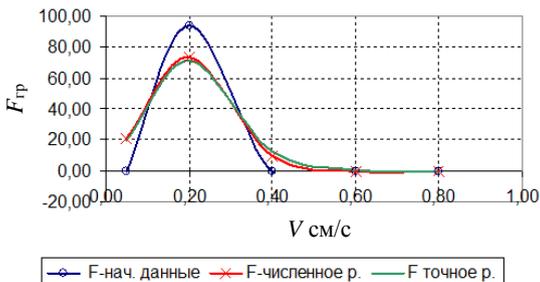


Рис. 18. Функция распределения в численном и точном решении для задачи 16

Параметры расчета для задачи 17:  $A = 238, K = 10^6, DT = 0,0001, DV = 0,1, KG = 7$

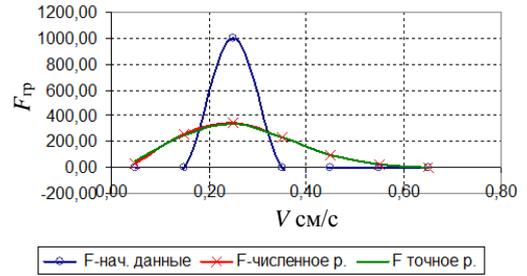


Рис. 19. Функция распределения в численном и точном решении для задачи 17

## Заключение

Авторы, занимаясь созданием методики и программы расчета кинетического уравнения Больцмана, проводят последовательное исследование и тестирование как самой методики, так и программы. В данной статье приведены результаты сравнительных расчетов с точным решением задачи об однородной релаксации в простом газе с произвольно заданными начальными данными. Расчеты проведены на модельной задаче с вакуумными и плотными слоями на неподвижной геометрии в многогрупповом кинетическом приближении. Расчеты проводились с вариацией начальных данных, атомной массы  $A$ , количества групп, величины шага по скоростной переменной. Каждый расчет проводился до сходимости решения с заданной точностью. Полученная функция распределения использовалась для вычисления макровеличин. Значения этих макровеличин подставлялись в функцию Максвелла и проводились сравнения с полученными расчетными величинами. Анализ результатов проведенных расчетов позволяет сделать заключение о вполне удовлетворительной точности исследуемой методики при используемой постановке задачи. Наиболее сильное влияние на точность оказывает сетка по скоростной переменной (задачи 3, 8, 9, 13). При разумно выбранной сетке по скоростной переменной максимальное отличие расчетных результатов от точного решения не более 2–4 % (задача 10). В следующих расчетах уменьшить константу для анализа сходимости.

Благодарим В. А. Карепова за ценные советы.

### Список литературы

1. Черчиньяни К. Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978.
2. Самарский А. А., Попов Ю. П. Разностные схемы газовой динамики. М.: Наука, 1975.
3. Марчук Г. И., Агошков В. И. Введение в проекционно-сеточные методы. М.: Наука, 1981.
4. Софронов И. Д., Урм В. Я., Харитонов А. В. О решении уравнения  $\frac{\partial U}{\partial t} + \bar{\Omega} \text{grad} U = 0$  методом конечных разностей на нерегулярных сетках //

Численные методы механики сплошной среды. 1974. Т. 5, № 2. С. 116–135.

5. Аристов В. В., Черемисин Ф. Г. Прямое численное решение кинетического уравнения Больцмана. М.: Вычислительный центр РАН, 1992.

6. Афанасьева В. С., Харитонов А. В. Результаты численного исследования методики решения кинетического уравнения Больцмана, проведенного на задаче об однородной релаксации в простом газе // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2014. Вып. 3. С. 36–45.

Статья поступила в редакцию 12.03.2015

## НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ НЕЙТРОННОЙ КИНЕТИКИ

Н. Б. Бабичев

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Найдены новые общие аналитические решения кинетического уравнения, и теория подобия нейтронно-кинетических процессов получила дальнейшее развитие.

*Ключевые слова:* уравнение переноса нейтронов, формулы подобия, инвариантность, собственные функции и собственные значения.

### Введение

Цели данной статьи заключаются в усовершенствовании теории подобия процессов нейтронной кинетики, в исследовании характеристик нестационарных профильных систем и в определении общих зависимостей главных собственных значений и главных собственных функций от различных параметров.

Для контроля точности новых результатов ниже проводится их сравнение с соответствующими результатами численных решений кинетического уравнения по одной из математических программ [1].

### 1. Односкоростное нестационарное кинетическое уравнение и результаты, полученные из него

#### 1.1. Вид кинетического уравнения

В односкоростном приближении считается, что все нейтроны имеют одинаковую по величине скорость  $V$ , индикатриса упругого рассеяния нейтронов на ядрах изотропна и поэтому не учитываются неупругие процессы, сечения взаимодействия которых с веществом характеризуются сильной анизотропией, но они малы по причине отсутствия в рассматриваемых ниже системах нейтронов с энергией более 8 МэВ. При выполнении данных упрощающих предположений зависящая от времени  $t$  функция распределения нейтронов  $\psi(t, \vec{r}, \vec{\Omega})$  в фазовом пространстве векторов  $\vec{r}$ ,

$\vec{\Omega} = \frac{\vec{V}}{V}$  подчиняется кинетическому уравнению (см., например, [2])

$$\frac{1}{V} \frac{\partial \psi(t, \vec{r}, \vec{\Omega})}{\partial t} + \left( \vec{\Omega} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \right) \psi(t, \vec{r}, \vec{\Omega}) + \alpha(\vec{r}) \psi(t, \vec{r}, \vec{\Omega}) = \frac{\beta(\vec{r})}{4\pi} \int d\vec{\omega} \psi(t, \vec{r}, \vec{\omega}), \quad (1)$$

которое надо решать при соответствующих начальном и граничном условиях.

В соотношении (1) использованы следующие обозначения:  $\alpha(\vec{r}) = n_{\text{я}}(\vec{r}) \sum_i \mu_i (\sigma_{si} + \sigma_{fi} + \sigma_{ci}) =$

$$= \frac{N_{\text{Авогадро}} \rho(\vec{r})}{\sum_i \mu_i A_i} \sum_i \mu_i (\sigma_{si} + \sigma_{fi} + \sigma_{ci}) - \text{обратный пол-}$$

ный пробег нейтронов в среде с плотностью ядер  $n_{\text{я}}(\vec{r})$ , состоящей из смеси компонентов с

массовыми числами  $A_i$  и концентрациями по частицам  $\mu_i$ ;  $\rho(\vec{r})$  – плотность вещества;

$\beta(\vec{r}) = n_{\text{я}}(\vec{r}) \sum_i \mu_i (\sigma_{si} + \nu_i \sigma_{fi})$ ;  $\sigma_{si}$ ,  $\sigma_{fi}$ ,  $\sigma_{ci}$  – элементарные сечения рассеяния, деления и захвата

нейтронов на ядрах  $i$ -го сорта;  $\nu_i$  – среднее число вторичных нейтронов, испускаемых в одном акте

деления  $i$ -го ядра; отношение  $h(\vec{r}) = \frac{\beta(\vec{r})}{\alpha(\vec{r})}$  – актив-

ность (мультипликация) среды.

## 1.2. Баланс полного числа нейтронов в системе

После интегрирования (1) по углам  $\vec{\Omega}$  для нейтронной плотности

$$n(t, \vec{r}) = \int d\vec{\Omega} \psi(t, \vec{r}, \vec{\Omega}) \quad (2)$$

и векторного потока нейтронов

$$\vec{j}(t, \vec{r}) = V \int d\vec{\Omega} \vec{\Omega} \psi(t, \vec{r}, \vec{\Omega}) \quad (3)$$

имеем:

$$\frac{\partial n(t, \vec{r})}{\partial t} + \text{div} \vec{j}(t, \vec{r}) + \alpha(\vec{r}) V n(t, \vec{r}) = \beta(\vec{r}) V n(t, \vec{r}). \quad (4)$$

Проинтегрировав (4) по объему, получаем уравнение баланса полного числа нейтронов  $N(t) = \int d\vec{r} n(t, \vec{r})$  в системе

$$L(t) = \frac{1}{N(t)} \frac{dN(t)}{dt} = \frac{\int d\vec{r} [\beta(\vec{r}) - \alpha(\vec{r})] V n(t, \vec{r})}{\int d\vec{r} n(t, \vec{r})} - W(t). \quad (5)$$

Функция  $\Pi(t) = \int d\vec{S} \vec{j}(t, \vec{r})$  (интегрирование ведется по внешней поверхности объекта) представляет собой скорость утечки нейтронов.

Величина  $W(t) = \frac{\Pi(t)}{N(t)}$  это эффективное мак-

роскопическое сечение поглощения нейтронов, связанное с вероятностью их вылета из системы в единицу времени.

Если параметры  $\alpha$  и  $\beta$  постоянны, то уравнение баланса полного количества нейтронов в системе выглядит следующим образом:

$$\lambda_{\infty} - W = 0, \quad (6)$$

где

$$\lambda_{\infty} = (\beta - \alpha) V = \alpha(h - 1) V \quad (7)$$

это значение  $\lambda$  в бесконечной однородной среде.

Можно ввести понятие  $\lambda_{\infty}$  для бесконечной профильной системы. В случае такой системы  $W = 0$  и величина

$$\lambda_{\infty} = \frac{\int d\vec{r} [\beta(\vec{r}) - \alpha(\vec{r})] V n(\vec{r})}{\int d\vec{r} n(\vec{r})}, \quad (8)$$

являясь характеристикой среды, не зависит от времени, а  $n(\vec{r})$  это равновесное распределение плотности нейтронов в бесконечном пространстве, заполненном неоднородным веществом.

## 1.3. Развитие процессов нейтронной кинетики во времени

В случае произвольного начального условия

$$\psi_0(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \psi(t=0, \vec{r}, \vec{\Omega}), \quad N_0 = N(t=0) \quad (9)$$

через некоторое время  $t \geq t_0$  решение уравнения (1) выйдет на главную собственную функцию  $\psi(t, \vec{r}, \vec{\Omega})$  и логарифмическая производная (5) превратится в постоянное главное собственное значение  $\lambda = L(t \geq t_0) = \text{const}$ . При этом справедливы экспоненциальный закон

$$\psi(t, \vec{r}, \vec{\Omega}) = e^{\lambda t} \psi(\vec{r}, \vec{\Omega}) \quad (10)$$

и уравнение переноса нейтронов

$$\left( \vec{\Omega} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \right) \psi(\vec{r}, \vec{\Omega}) + \left[ \frac{\lambda}{V} + \alpha(\vec{r}) \right] \psi(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \frac{\beta(\vec{r})}{4\pi} \int d\vec{\omega} \psi(\vec{r}, \vec{\omega}). \quad (11)$$

Если задано отличающееся от распределения по собственной функции произвольное начальное условие  $\psi(t=0, \vec{r}, \vec{\Omega})$ , то можно считать, что в начальный момент времени в кинетическом уравнении включается дельта-функционный источник нейтронов  $Q(t, \vec{\xi}) = q(\vec{\xi}) \delta(t)$ , приводящий к расходимости логарифмической производной:

$$\frac{1}{N(t=0)} \frac{dN(t=0)}{dt} = \infty.$$

## 1.4. Исследования, выполненные с использованием свойства инвариантности кинетического уравнения по отношению к преобразованиям подобия

### 1.4.1. Класс подобных профильных систем, найденный из нестационарного уравнения переноса нейтронов

Рассмотрим функцию распределения нейтронов в фазовом пространстве векторов  $\vec{\Omega}$ ,  $\vec{\xi} = \frac{\vec{r}}{R}$  ( $R$  – характерный размер произвольного по геометрии объекта).

Учитывая, что  $\frac{\partial}{\partial \vec{r}} = \frac{\partial}{\partial \vec{\xi}} \frac{d\vec{\xi}}{d\vec{r}} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \vec{\xi}}$ , для функ-

ции  $\psi(t, \vec{\xi}, \vec{\Omega})$  из кинетического уравнения (1) получаем следующее уравнение нейтронов в профильных системах:

$$\frac{R}{V} \frac{\partial \psi(t, \vec{\xi}, \vec{\Omega})}{\partial t} + \left( \vec{\Omega} \frac{\partial}{\partial \vec{\xi}} \right) \psi(t, \vec{\xi}, \vec{\Omega}) + \alpha(\vec{\xi}) R \psi(t, \vec{\xi}, \vec{\Omega}) = \frac{\beta(\vec{\xi}) R}{4\pi} \int d\vec{\omega} \psi(t, \vec{\xi}, \vec{\omega}). \quad (12)$$

Зависимости параметров  $\alpha$  и  $\beta$  от координаты точки наблюдения представим в виде

$$\alpha(\vec{\xi}) = \bar{\alpha}A(\vec{\xi}), \beta(\vec{\xi}) = \bar{\beta}B(\vec{\xi}). \quad (13)$$

Здесь  $\bar{\alpha}$  и  $\bar{\beta}$  – средние по безразмерному объему системы величины,  $A\left(\vec{\xi} = \frac{\vec{r}}{R}\right)$  и  $B\left(\vec{\xi} = \frac{\vec{r}}{R}\right)$  – профильные функции, нормированные условиями

$$\frac{\int d\vec{\xi}A(\vec{\xi})}{\int d\vec{\xi}} = \frac{\int d\vec{\xi}B(\vec{\xi})}{\int d\vec{\xi}} = 1, \int d\vec{\xi} = C = \text{const.} \quad (14)$$

Приняв (13), вместо (12) имеем:

$$\begin{aligned} \frac{R}{V} \frac{\partial \Psi(t, \vec{\xi}, \vec{\Omega})}{\partial t} + \left( \vec{\Omega} \frac{\partial}{\partial \vec{\xi}} \right) \Psi(t, \vec{\xi}, \vec{\Omega}) + A(\vec{\xi}) \bar{\alpha} R \Psi(t, \vec{\xi}, \vec{\Omega}) = \\ = \frac{B(\vec{\xi}) \bar{\beta} R}{4\pi} \int d\vec{\omega} \Psi(t, \vec{\xi}, \vec{\omega}). \end{aligned} \quad (15)$$

Теперь уравнение (15) запишем для некоей системы 1

$$\begin{aligned} \frac{R_1}{V} \frac{\partial \Psi_1(t_1, \vec{\xi}_1, \vec{\omega})}{\partial t_1} + \left( \vec{\Omega} \frac{\partial}{\partial \vec{\xi}_1} \right) \Psi_1 + A_1(\vec{\xi}_1) \bar{\alpha}_1 R_1 \Psi_1 = \\ = \frac{\bar{\beta}_1 R_1 B_1(\vec{\xi}_1)}{4\pi} \int d\vec{\omega} \Psi_1(t_1, \vec{\xi}_1, \vec{\omega}) \end{aligned} \quad (16)$$

и из него получим кинетическое уравнение для другой произвольной системы 2 с помощью следующих соотношений:

$$t_2 = \frac{R_2}{R_1} t_1, \quad (17)$$

$$\vec{\xi}_2 = \frac{\bar{\beta}_1 R_1}{\bar{\beta}_2 R_2} \vec{\xi}_1, \quad (18)$$

$$\frac{\partial}{\partial t_1} = \frac{\partial}{\partial t_2} \frac{dt_2}{dt_1} = \frac{R_2}{R_1} \frac{\partial}{\partial t_2}, \quad (19)$$

$$\frac{\partial}{\partial \vec{\xi}_1} = \frac{\partial}{\partial \vec{\xi}_2} \frac{d\vec{\xi}_2}{d\vec{\xi}_1} = \frac{\bar{\beta}_1 R_1}{\bar{\beta}_2 R_2} \frac{\partial}{\partial \vec{\xi}_2}. \quad (20)$$

Воспользовавшись уравнением (16) и связями (17)–(20), приведем уравнение, которому подчиняется функция распределения нейтронов  $\Psi_2(t_2, \vec{\xi}_2, \vec{\Omega})$ .

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\beta}_2 R_2}{\bar{\beta}_1 R_1} \frac{R_2}{V} \frac{\partial \Psi_2}{\partial t_2} + \left( \vec{\Omega} \frac{\partial}{\partial \vec{\xi}_2} \right) \Psi_2 + \frac{\bar{\beta}_2 R_2}{\bar{\beta}_1 R_1} \bar{\alpha}_1 R_1 A_1(\vec{\xi}_1) \Psi_2 = \\ = \frac{\bar{\beta}_2 R_2 B_2(\vec{\xi}_2)}{4\pi} \int d\vec{\omega} \Psi_2(t_2, \vec{\xi}_2, \vec{\omega}_2). \end{aligned} \quad (21)$$

Для выполнения свойства инвариантности кинетического уравнения (1) по отношению к преобразованиям (17), (18) необходимо, чтобы уравнения (16) и (21) по своему виду совпали друг с другом, т. е. в случае системы 2 уравнение должно выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{R_2}{V} \frac{\partial \Psi_2(t_2, \vec{\xi}_2, \vec{\Omega})}{\partial t_2} + \left( \vec{\Omega} \frac{\partial}{\partial \vec{\xi}_2} \right) \Psi_2 + A_2(\vec{\xi}_2) \bar{\alpha}_2 R_2 \Psi_2 = \\ = \frac{\bar{\beta}_2 R_2 B_2(\vec{\xi}_2)}{4\pi} \int d\vec{\omega} \Psi_2(t_2, \vec{\xi}_2, \vec{\omega}). \end{aligned} \quad (22)$$

Отталкиваясь от (16) и (21), определим класс подобных систем путем нахождения соответствующих инвариантных соотношений.

Уравнение (16) превратится в (22) при соблюдении следующих необходимых и достаточных условий.

1) Для подобных систем профильные функции  $B_2(\vec{\xi}_2)$  и  $B_1(\vec{\xi}_1)$  обязаны быть одинаковыми, т. е.

$$B_2(\vec{\xi}_2) = B_1(\vec{\xi}_1) = B(\vec{\xi}). \quad (23)$$

2) Должны выполняться следующие соотношения подобия

$$\bar{\beta}_2 R_2 = \bar{\beta}_1 R_1, \quad (24)$$

$$\bar{\beta}_2 \vec{\xi}_2 = \bar{\beta}_1 \vec{\xi}_1, \quad \bar{\beta}_2 \vec{r}_2 = \bar{\beta}_1 \vec{r}_1, \quad (25)$$

$$t_2 R_1 = t_1 R_2. \quad (26)$$

3) Возможной является следующая связь профильных функций  $A_2(\vec{\xi}_2) = A_2(\vec{\xi})$  и  $A_1(\vec{\xi}_1) = A_1(\vec{\xi})$ :

$$A_2(\vec{\xi}) = \frac{\bar{\alpha}_1 R_1}{\bar{\alpha}_2 R_2} A_1(\vec{\xi}). \quad (27)$$

4) Если учесть нормировку (14), то интегрирование левой и правой частей (27) по  $\vec{\xi}$  приводит к соотношению подобия

$$\bar{\alpha}_2 R_2 = \bar{\alpha}_1 R_1. \quad (28)$$

Одновременно удовлетворить условиям (24) и (28) можно только в следующих двух случаях, которым соответствуют определенные классы подобных профильных систем.

Первый случай: от координат зависит только свободный пробег нейтронов. В этом случае имеем

$$h_2 = h_1, \quad \bar{\alpha}_2 R_2 = \bar{\alpha}_1 R_1, \quad (29)$$

$$\Psi_2(t, \vec{r}, \vec{\Omega}) = C_{1,2} \Psi_1\left(\frac{R_2}{R_1} t, \frac{R_2}{R_1} \vec{r}, \vec{\Omega}\right). \quad (30)$$

Из-за линейности кинетического уравнения нормировочную константу  $C_{1,2}$  можно выбрать

произвольной. Например, если каждую функцию распределения нормировать на одну условную единицу в точке ее максимума, то  $C_{1,2} = 1$ . Далее нормировочная постоянная всюду принимается равной единице.

**Второй случай:** от координат зависит активность веществ, а параметры  $\alpha_1 = \bar{\alpha}_1$  и  $\alpha_2 = \bar{\alpha}_2$  постоянны. При этом справедливы критерий подобия

$$\bar{h}_2 \alpha_2 R_2 = \bar{h}_1 \alpha_1 R_1 \quad (31)$$

и формула для функций распределения нейтронов в рассмотренных подобных объектах

$$\psi_2(t, \vec{r}, \vec{\Omega}) = \psi_1\left(\frac{R_2}{R_1}t, \frac{R_2}{R_1}\vec{r}, \vec{\Omega}\right). \quad (32)$$

#### 1.4.2. Главные собственные значения и собственные функции подобных профильных систем

После выхода  $\psi(t, \vec{\xi}, \vec{\Omega})$  на главные собственные функции  $\psi(t \geq t_0, \vec{\xi}, \vec{\Omega})$  и логарифмических производных на главные собственные значения  $L(t \geq t_0) = \lambda$  вступает в силу экспоненциальный закон (10) и нестационарное кинетическое уравнение (15) переходит в следующее стационарное:

$$\begin{aligned} \left(\bar{\Omega} \frac{\partial}{\partial \vec{\xi}}\right) \psi(\vec{\xi}, \vec{\Omega}) + \left[A(\vec{\xi}) + \frac{\lambda}{\bar{\alpha}V}\right] \bar{\alpha}R\psi(\vec{\xi}, \vec{\Omega}) = \\ = \frac{\bar{\beta}RB(\vec{\xi})}{4\pi} \int d\bar{\omega} \psi(\vec{\xi}, \bar{\omega}). \end{aligned} \quad (33)$$

Выполнив преобразования подобия (24) и (25), получаем следующие необходимые для инвариантности кинетического уравнения (35) соотношения:

$$B_2(\vec{\xi}_2) = B_1(\vec{\xi}_1) = B(\vec{\xi}), \quad (34)$$

$$A_2(\vec{\xi}) = \left[ A_1(\vec{\xi}) + \frac{\lambda_1}{\bar{\alpha}_1 V} \right] \frac{\bar{\alpha}_1 R_1}{\bar{\alpha}_2 R_2} - \frac{\lambda_2}{\bar{\alpha}_2 V}, \quad (35)$$

$$\frac{dA_2(\vec{\xi})}{d\vec{\xi}} = \frac{\bar{\alpha}_1 R_1}{\bar{\alpha}_2 R_2} \frac{dA_1(\vec{\xi})}{d\vec{\xi}} = \frac{dA_1(\vec{\xi})}{d\vec{\xi}}. \quad (36)$$

Интегрирование левой и правой частей равенства (35) по объему с учетом нормировки

$$\int d\vec{\xi} A_2(\vec{\xi}) = \int d\vec{\xi} A_1(\vec{\xi}) = \int d\vec{\xi} = \text{const} = 1 \quad (37)$$

приводит к следующей формуле подобия главных собственных значений:

$$\lambda_2 = \left[ \frac{\bar{\alpha}_1 \bar{\beta}_2}{\bar{\alpha}_2 \bar{\beta}_1} \left( 1 + \frac{\lambda_1}{\bar{\alpha}_1 V} \right) - 1 \right] \bar{\alpha}_2 V. \quad (38)$$

Очевидно, что главные функции распределения нейтронов в подобных системах выражаются друг через друга следующим образом:

$$\psi_2(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \psi_1\left(\frac{R_2}{R_1}\vec{r}, \vec{\Omega}\right). \quad (39)$$

Отметим, что выражение (38) ранее было получено в работе [3] с помощью анализа односкоростного кинетического уравнения (33) без использования свойства инвариантности, как это сделано выше, а формула (39) в [3] не выводилась.

#### 1.5. Упрощение нестационарного кинетического уравнения и формул подобия

С целью упрощения будем считать, что параметр  $\alpha$  не зависит от координат, и рассмотрим случай  $t > t_0$ , в котором  $L(t) = \lambda$ . Тогда уравнение (15) превратится в

$$\begin{aligned} \frac{R}{V} \frac{\partial \psi(t, \vec{\xi}, \vec{\Omega})}{\partial t} + \left(\bar{\Omega} \frac{\partial}{\partial \vec{\xi}}\right) \psi + \alpha R \psi = \\ = \frac{\bar{h}\alpha RB(\vec{\xi})}{4\pi} \int d\bar{\omega} \psi(t, \vec{\xi}, \bar{\omega}). \end{aligned} \quad (40)$$

Решение уравнения переноса (40) будем искать в виде

$$\Psi(t, \vec{\xi}, \vec{\Omega}) = f(t, \vec{\xi}, \vec{\Omega}) \exp\left[-\left(1 + \frac{\lambda}{\alpha V}\right)\alpha R V t\right], \quad (41)$$

где  $f(t, \vec{\xi}, \vec{\Omega})$  – новая функция распределения нейтронов, которая определяется из существенно более простого, чем (40), кинетического уравнения

$$\begin{aligned} \frac{R}{V} \frac{\partial f(t, \vec{\xi}, \vec{\Omega})}{\partial t} + \left(\bar{\Omega} \frac{\partial}{\partial \vec{\xi}}\right) f(t, \vec{\xi}, \vec{\Omega}) = \\ = \frac{\bar{h}\alpha RB(\vec{\xi})}{4\pi} \int d\bar{\omega} f(t, \vec{\xi}, \bar{\omega}). \end{aligned} \quad (42)$$

Интегрирование (42) по углам дает следующее уравнение:

$$\frac{\partial m(t, \vec{\xi})}{\partial t} + \frac{1}{R} \text{div} \vec{i}(t, \vec{\xi}) = \bar{h}\alpha V B(\vec{\xi}) m(t, \vec{\xi}), \quad (43)$$

в котором присутствуют новые нейтронная плотность

$$m(t, \vec{\xi}) = \int d\bar{\omega} f(t, \vec{\xi}, \bar{\omega}) \quad (44)$$

и векторный поток частиц

$$\vec{i}(t, \vec{\xi}) = V \int d\bar{\omega} \bar{\omega} f(t, \vec{\xi}, \bar{\omega}). \quad (45)$$

После интегрирования (43) по объему и деления полученного так результата на полное количество нейтронов в системе

$$M(t) = \int d\vec{\xi} m(t, \vec{\xi}) \quad (46)$$

было найдено балансное уравнение

$$\frac{1}{M(t)} \frac{dM(t)}{dt} = \frac{\bar{h}\alpha V \int d\vec{\xi} B(\vec{\xi}) m(t, \vec{\xi})}{\int d\vec{\xi} m(t, \vec{\xi})} - w(t), \quad (47)$$

$$w(t) = \frac{1}{M(t)} \int d\vec{s} \bar{i}(t, \vec{\xi}). \quad (48)$$

Из (40) получается формула

$$M(t) = M_0 \exp \left[ \frac{\bar{h}\alpha V \int d\vec{\xi} B(\vec{\xi}) m(t, \vec{\xi})}{\int d\vec{\xi} m(t, \vec{\xi})} - w(t) \right],$$

$$M_0 = M(t=0), \quad (49)$$

которая описывает развитие нестационарного процесса изменения полного количества нейтронов в системе, включая начальный момент времени, когда  $m_0(\vec{\xi}) = m(t=0, \vec{\xi})$  и  $M_0 = \int d\vec{\xi} m_0(\vec{\xi})$ .

Приведем новые формулы подобия:

$$f_2(t_2, \vec{\xi}_2, \vec{\Omega}) = f_1 \left( t_1 = \frac{R_1}{R_2} t_2, \vec{\xi}_1 = \vec{\xi}_2, \vec{\Omega} \right), \quad (50)$$

$$\Psi_2(t_2, \vec{\xi}_2, \vec{\Omega}) = f_2(t_2, \vec{\xi}_2, \vec{\Omega}) \times \exp \left[ \left( 1 + \frac{\lambda_2}{\alpha_2 V} \right) \alpha_2 R_2 V t_2 - \left( 1 + \frac{\lambda_1}{\alpha_1 V} \right) \alpha_1 R_1 V t_1 \right], \quad (51)$$

$$\lambda_2 = \left[ \frac{\bar{h}_2}{\bar{h}_1} \left( 1 + \frac{\lambda_1}{\alpha_1 V} \right) - 1 \right] \alpha_1 V. \quad (52)$$

## 2. Исследования, выполненные на основе безразмерного односкоростного уравнения переноса нейтронов в профильных и однородных нестационарных системах

Исходное кинетическое уравнение (1) представим в виде

$$\frac{1}{V} \frac{\partial \psi(t, \vec{r}, \vec{\Omega})}{\partial t} + \left( \vec{\Omega} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \right) \psi + \bar{\alpha} A \left( \vec{\xi} = \frac{\vec{r}}{R} \right) \psi = \frac{1}{4\pi} \bar{\beta} B \left( \vec{\xi} = \frac{\vec{r}}{R} \right) \int d\vec{\omega} \psi(t, \vec{r}, \vec{\omega}) \quad (53)$$

и затем перейдем к безразмерным аргументам

$$\tau = \bar{\beta} V t, \quad (54)$$

$$\vec{z} = \bar{\beta} \vec{r} \quad (55)$$

с учетом следующих связей между производными:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \bar{\beta} V \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad (56)$$

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}} = \bar{\beta} \frac{\partial}{\partial \vec{z}}. \quad (57)$$

В итоге для функции распределения нейтронов в фазовом пространстве векторов  $\vec{z}, \vec{\Omega}$  получается кинетическое уравнение

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \tau} + \left( \vec{\Omega} \frac{\partial}{\partial \vec{z}} \right) \right] \psi(\tau, \vec{z}, \vec{\Omega}) + \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}} A(\vec{\xi}) \psi(\tau, \vec{z}, \vec{\Omega}) = \frac{B(\vec{\xi})}{4\pi} \int d\vec{\omega} \psi(\tau, \vec{z}, \vec{\omega}), \quad (58)$$

$\vec{\xi} = \frac{\vec{z}}{\bar{\beta} R} = \frac{\vec{z}}{Z}$ ,  $Z = \bar{\beta} R$  – характерный размер произвольной по геометрии системы в  $\vec{z}$ -пространстве,

$$\int d\vec{z} A(\vec{\xi}) = \int d\vec{z} B(\vec{\xi}) = \int d\vec{z} = 1. \quad (59)$$

### 2.1. Вид общих аналитических решений задачи на главные собственные функции и главные собственные значения

Пусть  $h = h(\vec{z})$ , а параметр  $\alpha$  является постоянным, т. е.  $\alpha = \bar{\alpha}$ .

Тогда (58) превращается в кинетическое уравнение

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \tau} + \left( \vec{\Omega} \frac{\partial}{\partial \vec{z}} \right) \right] \psi(\tau, \vec{z}, \vec{\Omega}) + \frac{1}{h} \psi(\tau, \vec{z}, \vec{\Omega}) = \frac{H(\vec{\xi})}{4\pi} \int d\vec{\omega} \psi(\tau, \vec{z}, \vec{\omega}), \quad (60)$$

В результате подстановки в (60) функции распределения  $\psi(\tau, \vec{z}, \vec{\Omega})$  следующего вида

$$\psi(\tau, \vec{z}, \vec{\Omega}) = f(\tau, \vec{z}, \vec{\Omega}) \exp \left( -\frac{\tau}{h} \right) \quad (61)$$

для  $f(\tau, \vec{z}, \vec{\Omega})$  получаем уравнение

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \tau} + \left( \vec{\Omega} \frac{\partial}{\partial \vec{z}} \right) \right] f(\tau, \vec{z}, \vec{\Omega}) = \frac{H(\vec{\xi})}{4\pi} \int d\vec{\omega} f(\tau, \vec{z}, \vec{\omega}), \quad (62)$$

которое не содержит ядерно-физических свойств среды, что имеет существенное значение.

Решение задачи на главные собственные значения  $\Lambda$  и главные собственные функции выражаются формулами

$$f(\tau, \bar{z}, \bar{\Omega}) = e^{\Lambda\tau} f(\bar{z}, \bar{\Omega}), \quad (63)$$

$$f(\tau, \bar{z}, \bar{\Omega}) = \psi(\tau, \bar{z}, \bar{\Omega}) \exp\left(\frac{\tau}{h}\right). \quad (64)$$

Подстановка (63) в (62) после дифференцирования по  $d\tau$  приводит к кинетическому уравнению

$$\left(\bar{\Omega} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) f(\bar{z}, \bar{\Omega}) + \Lambda f(\bar{z}, \bar{\Omega}) = \frac{H(\bar{\xi})}{4\pi} \int d\bar{\omega} f(\bar{z}, \bar{\omega}). \quad (65)$$

Из-за того, что  $\bar{\xi} = \frac{\bar{z}}{Z}$ , входящее в (65) главное собственное значение  $\Lambda$  зависит только от  $Z = \bar{h}\alpha R$ , т. е.,

$$\Lambda = \Lambda(\bar{h}\alpha R). \quad (66)$$

Найдем теперь главные собственные значения  $\lambda$ .

Воспользовавшись формулами (10), (63) и (64), получим:

$$\psi(\bar{r}, \bar{\Omega}) e^{\lambda t} = f\left[\bar{z}(\bar{r}), \bar{\Omega}\right] \exp\left[\left(\Lambda - \frac{1}{h}\right)\tau(t)\right],$$

$$\tau(t) = \bar{h}\alpha V t. \quad (67)$$

Приравняв показатели экспонент в левой и правой частях равенства (68), получаем искомое общее решение

$$\lambda = \bar{h}\alpha R \frac{V}{R} \left[ \Lambda(\bar{h}\alpha R) - \frac{1}{h} \right], \quad (68)$$

$\Lambda(\bar{h}\alpha R)$  это универсальная функция, явный вид которой можно определить, зная геометрию системы.

## 2.2. Явный вид универсальных функций в случае однородных шаров

Для однородных шаров, когда справедлива формула

$$\lambda = \beta R \frac{V}{R} \left[ \Lambda(\beta R) - \frac{1}{h} \right], \quad (69)$$

при помощи численных расчетов по одной из математических методик [1] универсальная функция  $\Lambda(\beta R)$  в работах [4, 5] была затабулирована в широком диапазоне  $\beta R \in (0,2 \div 8)$  с точностью

$$\delta(\beta R = 0,2) = \frac{|\Delta\lambda|}{\lambda} = 0,5 \%, \quad \delta(\beta R = 8) = 0,001 \%.$$

Из работы [6] следует, что величины  $\Lambda(\beta R)$  являются дискретными главными собственными значениями, если  $\beta R > 1$ , а иначе они принадлежат непрерывному спектру.

Вместо табличных зависимостей всегда желательно располагать соответствующими аналитическими решениями. Это оказалось выполнимым, поскольку для главных собственных значений  $\lambda$  существуют следующие весьма точные формулы:

полуинтерполяционная (см. [3, 7])

$$\lambda = \beta R \frac{V}{R} \left[ \frac{1}{(\beta R)^{0,17}} \left( 1,57 - \frac{2}{\beta R} \right) - \frac{1}{h} \right], \quad (70)$$

известная диффузионная

$$\lambda = \alpha V \left( \frac{h\varphi}{\text{tg}\varphi} - 1 \right) = \beta R \frac{V}{R} \left( \frac{\varphi}{\text{tg}\varphi} - \frac{1}{h} \right),$$

$$\varphi = \frac{\pi}{\beta R + 0,71}. \quad (71)$$

В [7] показано, что при значении  $\beta R = 3,451$  обе формулы характеризуются одинаковой погрешностью 0,2 % в величине  $\lambda$ . С ростом параметра  $\beta R > 3,451$  точность формулы (70) уменьшается, а диффузионной – увеличивается, но ее нельзя использовать в случае очень малых  $\beta R$ .

По мере уменьшения  $\beta R < 3,451$  точность формулы (70) возрастает, достигая минимальной величины 0,4 % при значениях  $\frac{h\varphi}{\text{tg}\varphi} = 1$  и  $\lambda = -\alpha V =$

$= -\frac{\beta R V}{h R}$ , что в случае шара из делящегося материала соответствует его глубокоподкритическому состоянию.

При значениях  $\beta R \gg 1$  формула (70), приводя к абсурдному результату  $\lambda < 0$ , совершенно неприменима, а точность формулы (71), наоборот, возрастает, когда параметр  $\beta R$  увеличивается. Это на примере однородного шара показано в статье [8]. В ней на основе аналитических решений диффузионной задачи на главные собственные функции и главные собственные значения сделан вывод о том, что рост интенсивности делений за счет увеличения активности  $h > 1$  в случае постоянной оптической толщины  $\alpha R$  приводит к уменьшению относительной вероятности вылета нейтронов из системы в единицу времени.

В дополнение к [8] приведем объяснение данного вывода с точки зрения физического смысла. При увеличении  $\beta R$  возрастает резкость растущего в сторону центра профиля собственной функции. Поэтому именно в центральной зоне происходит наработка вторичных делительных нейтронов, а их утечка в пустоту сравнительно мала, так как она осуществляется из периферийной области.

Формулы (69), (70), (71) выражают зависимость  $\lambda$  от разных величин и поэтому они пригодны для проведения аналитических исследований.

В критических системах  $\lambda = 0$  и поэтому из формулы (69) следует, что  $\Lambda(\beta R) = \frac{1}{h}$ .

Если  $\beta R$  устремить к бесконечности, то  $\Lambda \rightarrow \Lambda_\infty$  и

$$\lambda \rightarrow \lambda_\infty = (\beta - \alpha)V. \quad (72)$$

В формуле (69) при  $\beta R \rightarrow 0$  возникает неопределенность, раскрыть которую невозможно.

Из формулы (70) следует, что в случае  $\beta R \rightarrow 0$  значение  $\lambda \rightarrow 0$  и это понятно с точки зрения физического смысла. Действительно, при конечной величине  $\beta$  характерный размер системы  $R \rightarrow \infty$ , а в пустом пространстве количество нейтронов неизменно, т. е.  $\lambda = 0$ .

Выразив  $\Lambda$  через  $\lambda$  по формуле

$$\Lambda = \frac{1}{\beta R V} \lambda + \frac{1}{h} = \frac{\lambda}{\beta V} + \frac{1}{h}, \quad (73)$$

имеем:

$$\Lambda(\beta R) = \frac{1}{(\beta R)^{0,17}} \left( 1,57 - \frac{2}{\beta R} \right), \quad (74)$$

$$\Lambda(\beta R) = \frac{\Phi}{\text{tg}\Phi}. \quad (75)$$

Зависимости  $\Lambda(\beta R)$  (74), (75), как и формулы (70), (71) для главных собственных значений, являются приближенными.

Покажем, что кроме формулы (70) можно пользоваться другой формулой.

Можно показать, что масса шара  $M = K\rho R^3$ ,  $R$ ,  $\rho$  и  $K$  это соответственно характерный размер, плотность вещества и безразмерная константа, определяемая геометрией объекта.

Тогда с учетом того, что  $\alpha = \frac{\beta}{h} = \frac{N_{\text{Авогадро}} \rho}{\sum_i \mu_i A_i} \sum_i \mu_i (\sigma_{si} + \sigma_{fi} + \sigma_{ci})$ , получаем сле-

дующее выражение  $R$  через массу  $M$ :  $R = \frac{MQh}{K\beta}$ ,

где зависящая от свойств среды величина

$$Q = \frac{N_{\text{Авогадро}}}{\sum_i \mu_i A_i} \sum_i \mu_i (\sigma_{si} + \sigma_{fi} + \sigma_{ci}).$$

Введя обозначение  $Y = \frac{1}{V} \sqrt{\frac{MQh}{R}}$ , приходим к окончательному ответу

$$\lambda = \frac{(\beta R)^{\frac{3}{2}}}{Y} \left[ \Lambda(\beta R) - \frac{1}{h} \right]. \quad (76)$$

Из формулы (76) следует, что для подобных систем ( $\beta_2 R_2 = \beta_1 R_1$ ) из одинаковых веществ выполняется закон

$$\lambda \sqrt{M} = \text{const}. \quad (77)$$

Иначе говоря, (77) это линии уровня главных собственных значений  $\lambda$ .

На основе выполненных исследований можно сделать следующие утверждения.

Если в  $\vec{r}$ -пространстве инвариантное условие  $\beta R = \text{const}$  определяет множество подобных систем, то в  $\vec{z}$ -пространстве для них характерный размер  $Z$  одинаков (все подобные в  $\vec{r}$ -пространстве системы при переходе в  $\vec{z}$ -пространстве вырождаются в один-единственный объект).

### 3. Эволюция нейтронных характеристик во времени

Если уравнение баланса числа нейтронов в системе (5), полученное из кинетического уравнения (1), использовать при рассмотрении подобных систем, то разные системы будут отличаться временами  $t_0$  (см. подраздел 1.3) выхода решений на главные собственные значения и функции.

Покажем, что в пространстве векторов  $\vec{r}$  уравнения (1) времена  $\tau_0$  одинаковы.

#### 3.1. Уравнение баланса полного количества нейтронов в системе

Из уравнения (60) получаются следующие результаты:

$$n(\tau, \vec{z}) = \int d\vec{\Omega} \psi(\tau, \vec{z}, \vec{\Omega}), \quad (78)$$

$$\vec{j}(\tau, \vec{z}) = V \int d\vec{\Omega} \vec{\Omega} \psi(\tau, \vec{z}, \vec{\Omega}), \quad (79)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial n(\tau, \vec{z})}{\partial \tau} + \text{div} \vec{j}(\tau, \vec{z}) + \alpha A(\vec{z}) V n(\tau, \vec{z}) = \\ = \bar{h} \alpha B(\vec{z}) V n(\tau, \vec{z}). \end{aligned} \quad (80)$$

После интегрирования (81) по объему, приходим к уравнению баланса полного числа нейтронов  $N(\tau) = \int d\vec{z} n(\tau, \vec{z})$  в системе

$$L(\tau) = \frac{1}{N(\tau)} \frac{dN(\tau)}{d\tau} = \frac{\int d\vec{z} [\bar{h}\alpha B(\vec{\zeta}) - \alpha A(\vec{\zeta})] Vn(\tau, \vec{z})}{\int d\vec{z} n(\tau, \vec{z})} - W(\tau), \quad (81)$$

$$W(\tau) = \frac{\Pi(\tau)}{N(\tau)}, \quad \Pi(\tau) = \int d\vec{S} \vec{j}(\tau, \vec{z}).$$

### 3.2. О синхронности выхода решений безразмерного нестационарного кинетического уравнения на главные собственные функции и главные собственные значения

Логарифмические производные  $L(t)$  и  $L(\tau)$  связаны между собой следующей формулой:

$$L(t) = \frac{1}{N(t)} \frac{dN(t)}{dt} = \bar{h}\alpha V \frac{1}{N(\tau)} \frac{dN(\tau)}{d\tau} = \bar{h}\alpha VL(\tau). \quad (82)$$

Приняв для  $\tau = \bar{h}\alpha Vt$  эквивалентную запись

$$\tau = \bar{h}\alpha R \frac{t}{R}, \quad (83)$$

учтем, что в случае подобных объектов выполняется соотношение (17), которое представим в виде

$$\frac{t_2}{R_2} = \frac{t_1}{R_1} = \text{const}. \quad (84)$$

Принимая во внимание формулы (83) и (84), видим, что из-за исчезновения масштабного фактора  $\frac{t}{R}$  время  $\tau$  в подобных системах течет одинаково. Значит, выполняется равенство  $\tau_{10} = \tau_{20}$ , что и требовалось доказать.

### 3.3. Приближенная формула подобия для логарифмических производных и область ее применимости

Ограничившись классом пространственно однородных систем, вместо формулы (82) имеем:

$$L(\tau) = 1 - \frac{1}{h} - W(\tau) = \frac{\lambda_\infty}{\beta V} - W(\tau). \quad (85)$$

В случае  $\lambda_\infty - \beta VW(\tau) \ll \lambda_\infty$  (второе ограничение) логарифмическая производная слабо зависит от времени.

Тогда в кинетическом уравнении (65), в которое входит главное собственное значение  $\Lambda$ , при-

дем  $H(\vec{\zeta}) = 1$  и  $L(\tau) = \text{const}$ . Это даст следующее приближенное уравнение с постоянной логарифмической производной:

$$\left( \bar{\Omega} \frac{\partial}{\partial \vec{z}} \right) f(\vec{z}, \bar{\Omega}) + Lf(\vec{z}, \bar{\Omega}) \approx \frac{1}{4\pi} \int d\vec{\omega} f(\vec{z}, \vec{\omega}). \quad (86)$$

Осуществив такие же, как в подразделе 2.1 действия, на основе (86) получаем следующие результаты:

$$L(\tau) \approx \Lambda(\beta R) - \frac{1}{h}, \quad (87)$$

$$L_2(\tau) \approx L_1(\tau) + \frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}. \quad (88)$$

Численный расчет показал, что при значении параметра  $\beta R = 3,6$  погрешность  $\delta = \frac{|L_2 - L_{2\text{расч}}|}{L_2}$

в логарифмической производной  $L$ , определенной по формуле (88), составила 0,7 %.

Очевидно, что в случаях  $\beta R > 3,6$  точность формулы (88) увеличивается.

## 4. Приближенные решения упрощенного спектрального уравнения переноса нейтронов в содержащих делящиеся материалы профильных системах, результаты аналитических и численных оценок

В работе [9] на основе точного спектрального уравнения Больцмана получены следующие тоже точные формулы подобия для главных собственных значений и главных собственных функций:

$$\lambda(\bar{\rho}_2) = \frac{\bar{\rho}_2}{\bar{\rho}_1} \lambda(\bar{\rho}_1), \quad (89)$$

$$\psi'(t_2, \vec{r}_2, \bar{\Omega}) = \left( \frac{\bar{\rho}_2}{\bar{\rho}_1} \right)^3 \psi(t_1, \vec{r}_1, \bar{\Omega}), \quad (90)$$

$\bar{\Omega} = \frac{\vec{V}}{V}$ ,  $\bar{\rho}_2$  и  $\bar{\rho}_1$  – средние значения плотностей для двух произвольных подобных профильных систем из одинаковых веществ.

Точность формул (89), (90) является несомненным их преимуществом, но они не приспособлены для переходов между объектами из разных материалов. Одна из целей данного раздела состоит в устранении отмеченного недостатка формул подобия (89), (90) ценой потери точности. Другие цели заключаются в нахождении общих решений

с универсальными функциями  $\Lambda(\bar{h}\alpha R)$  и в выводе формул подобия.

#### 4.1. Общий вид спектрального кинетического уравнения

За основу возьмем следующее нестационарное кинетическое уравнение общего вида (см., например, [10]).

$$\frac{\partial \psi(t, \vec{r}, \vec{V})}{\partial t} + \left( \vec{V} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \right) \psi(t, \vec{r}, \vec{V}) + \eta(\vec{r}, \vec{V}) \psi(t, \vec{r}, \vec{V}) = \int d\vec{V}' \Gamma(\vec{r}, \vec{V}', \vec{V}) \psi(t, \vec{r}, \vec{V}'). \quad (91)$$

Здесь  $\psi(t, \vec{r}, \vec{V})$  – функция распределения нейтронов в момент времени  $t$  в фазовом пространстве векторов  $\vec{r}$  и  $\vec{V}$ ,  $\psi(t, \vec{r}, \vec{V}) d\vec{r} d\vec{V}$  – число частиц в окрестности точки с радиус-вектором  $\vec{r}$  внутри элементарного объема  $d\vec{r}$ , имеющих скорость  $\vec{V}$  с точностью до  $d\vec{V}$ ;  $\Gamma(\vec{r}, \vec{V}', \vec{V}) d\vec{V} dt$  выражает вероятность того, что за время  $dt$  нейтрон скорости  $\vec{V}'$  столкнется с каким-либо ядром, и в результате этого получится нейтрон, имеющий скорость  $\vec{V}$  с точностью до  $d\vec{V}$ ;  $\eta(\vec{r}, \vec{V}) dt$  – вероятность нейтрона, обладающего скоростью  $\vec{V}$ , провазаимодействовать с веществом за время  $dt$ .

Возможны четыре канала взаимодействий нейтронов с ядрами: упругое ( $s$ ) и неупругое ( $in$ ) рассеяние, деление ( $f$ ) активных ядер, поглощение ( $c$ ).

Им соответствуют элементарные (микроскопические) сечения  $\sigma_1 = \sigma_s$ ,  $\sigma_2 = \sigma_{in}$ ,  $\sigma_3 = \sigma_f$ ,  $\sigma_4 = \sigma_c$  и при этом

$$\Gamma(\vec{r}, \vec{V}', \vec{V}) = \sum_{k=1}^3 \Gamma_k(\vec{r}, \vec{V}', \vec{V}), \quad (92)$$

$$\eta(\vec{r}, \vec{V}) = \sum_{k=1}^4 \eta_k(\vec{r}, \vec{V}). \quad (93)$$

В статье В. Н. Климова [10] подробно рассматривались только процессы упругого рассеяния нейтронов. При этом был найден явный вид интеграла столкновений  $\Gamma_s = \Gamma_1(\vec{r}, \vec{V}', \vec{V})$  и функции  $\eta_s = \eta_1(\vec{r}, \vec{V})$  для всевозможных распределений ядер по скоростям (покоящиеся ядра, мононаправленные пучки ядер, максвелловское и анизотропное распределения).

Общий вид входящих в правую часть уравнения (106) функций, ответственных за скорости деления активных ядер, неупругого рассеяния и поглощения нейтронов, приведен в [11].

Функция  $\eta(\vec{r}, \vec{V})$  зависит от макроскопического сечения  $\alpha(\vec{r})$ , т. е. от обратного полного пробега нейтронов, в  $\Gamma(\vec{r}, \vec{V}', \vec{V})$  наряду этим входит активность среды  $h(\vec{r})$ .

Раскроем, например, структуру функций  $\Gamma_s = \Gamma_1$  и  $\eta_s = \eta_1$ :

$$\Gamma_1(\vec{r}, \vec{V}', \vec{V}) = n_a(\vec{r}) \sum_j \int d\vec{W}_j \mu_j |\vec{V}' - \vec{W}_j| \sigma_1(|\vec{V}' - \vec{W}_j|) \eta_1(\vec{V}', \vec{W}_j, \vec{V}) \gamma(\vec{r}, \vec{W}_j); \quad (94)$$

$$\eta_1(\vec{r}, \vec{V}) = \int d\vec{V}' \Gamma_1(\vec{r}, \vec{V}, \vec{V}')^*; \quad (95)$$

$\vec{W}_j$  – скорость ядер  $j$ -го сорта;  $\eta_1(\vec{V}', \vec{W}_j, \vec{V}) d\vec{V}$  – вероятность нейтрона, имевшего до столкновения с  $j$ -м ядром скорость  $\vec{V}'$ , после упругого рассеяния приобрести скорость  $\vec{V}$  с точностью до  $d\vec{V}$ ;  $\gamma(\vec{r}, \vec{W}_j)$  – скоростное распределение ядер  $j$ -го сорта в точке  $\vec{r}$ , нормированное равенством

$$\int d\vec{W}_j \gamma(\vec{r}, \vec{W}_j) = 1. \quad (96)$$

#### 4.2. Решение поставленной задачи

Далее будем считать, что ядра неподвижны, значит  $\gamma = 1$  и функция  $\Gamma(\vec{r}, \vec{V}', \vec{V})$  теряет зависимость от  $\vec{V}'$ . При этом в  $\Gamma(\vec{r}, \vec{V})$  и  $\eta(\vec{r}, \vec{V})$  входят параметры

$$\alpha(\vec{V}), \quad (97)$$

$$\beta(\vec{r}, \vec{V}) = \alpha(\vec{V}) \bar{h}(\vec{V}) H(\vec{\xi}), \quad (98)$$

$\bar{h}$  – величина, усредненная по объему системы с характерным размером  $R$ ,  $H(\vec{\xi})$  – профильная функция,  $\int d\vec{\xi} H(\vec{\xi}) = \int d\vec{\xi} = 1$ .

Известно, что в случае систем, кинетика которых определяется делящимися материалами, в области энергий нейтронов  $E_n \approx (1 \div 2)$  МэВ сечения взаимодействия нейтронов с веществом слабо за-

\* Отметим, что  $\Gamma_1(\vec{r}, \vec{V}, \vec{V}') \neq \Gamma_1(\vec{r}, \vec{V}', \vec{V})$ .

висят от  $E_n$ . Поэтому в нулевом приближении можно использовать соотношения

$$\eta^{[0]}(\vec{r}, \vec{V}) = \alpha^{[0]} \eta_0^{[0]}(\vec{r}, \vec{V}), \quad (99)$$

$$\Gamma^{[0]}(\vec{r}, \vec{V}) = \alpha^{[0]} \bar{h} H(\vec{\xi}) \Gamma_0^{[0]}(\vec{r}, \vec{V}), \quad (100)$$

$\Gamma_0^{[0]}(\vec{r}, \vec{V})$ ,  $\eta_0^{[0]}(\vec{r}, \vec{V})$  – некие другие функции двух переменных.

Поставленную так задачу можно решить только в рамках узкого класса профильных систем. Чтобы этим не ограничиться и охватить достаточно широкий класс объектов, выбрав известный характерный для них спектр  $F(E_n)$ , усредним по нему параметры  $\alpha$  и  $\beta$ . Тогда вместо (99) и (100) получим

$$\eta(\vec{r}, \vec{V}) = \langle \alpha \rangle \eta_0(\vec{r}, \vec{V}), \quad (101)$$

$$\Gamma(\vec{r}, \vec{V}) = \langle \alpha \rangle \langle \bar{h} \rangle H(\vec{\xi}) \Gamma_0(\vec{r}, \vec{V}), \quad (102)$$

Скобками  $\langle \rangle$  обозначено усреднение по спектру нейтронов  $F(E_n)$ .

Вместо исходного уравнения (91) теперь справедливо приближенное спектральное кинетическое уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{1}{V} \frac{\partial \psi(t, \vec{r}, \vec{V})}{\partial t} + \left( \bar{\Omega} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \right) \psi + \langle \alpha \rangle \eta_0(\vec{r}, \vec{V}) \psi = \\ & = \frac{\langle \bar{h} \rangle \langle \alpha \rangle B(\vec{\xi})}{4\pi} \int d\bar{\omega} dv v^2 \Gamma_0(\vec{r}, v, \bar{\omega}) \psi(t, \vec{r}, v, \bar{\omega}). \end{aligned} \quad (103)$$

Данное уравнение от односкоростного уравнения (1) отличается лишь тем, что оно спектральное.

После перехода к безразмерным переменным (см. раздел 2)

$$\tau = \bar{h} \alpha V t, \quad (104)$$

$$\vec{z} = \bar{h} \alpha \vec{r}, \quad (105)$$

$$\vec{\xi} = \frac{\vec{z}}{\bar{h} \alpha R} = \frac{\vec{z}}{Z} \quad (106)$$

(103) превращается в безразмерное кинетическое уравнение

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial}{\partial \tau} + \left( \bar{\Omega} \frac{\partial}{\partial \vec{z}} \right) \right] \psi(\tau, \vec{z}, \bar{\Omega}) + \frac{1}{\langle \bar{h} \rangle} \eta_0(\vec{z}, V) \psi = \\ & = \frac{H(\vec{\xi})}{4\pi} \int d\bar{\omega} dv v^2 \Gamma_0(\vec{z}, v) \psi(\tau, \vec{z}, v, \bar{\omega}). \end{aligned} \quad (107)$$

Это кинетическое уравнение является спектральным аналогом представленного во втором разделе односкоростного нестационарного уравнения (58).

Очевидно, что все полученные из уравнения (58) результаты остаются в силе и в спектральном случае.

Приведем новую формулу подобия для главных собственных значений

$$\lambda_2 = \left[ \frac{\langle \bar{h}_2 \rangle \langle \alpha_2 \rangle}{\langle \bar{h}_1 \rangle \langle \alpha_1 \rangle} \left( 1 + \frac{\lambda_1}{\langle \alpha_1 \rangle} \left\langle \frac{1}{V_1} \right\rangle \right) - 1 \right] \langle \alpha_2 \rangle \left\langle \frac{1}{V_2} \right\rangle, \quad (108)$$

которая справедлива при выполнении инвариантного соотношения

$$\langle \bar{h}_2 \rangle \langle \alpha_2 \rangle R_2 = \langle \bar{h}_1 \rangle \langle \alpha_1 \rangle R_1. \quad (109)$$

Напомним, что усреднение по заданному спектру нейтронов  $F(E_n)$  проводится для обратной скорости  $\frac{1}{V(E_n)}$ . Имея это в виду, под величиной  $\langle V \rangle$

далее будем подразумевать  $\left\langle \frac{1}{V} \right\rangle$  и формула (108)

перепишется так:

$$\frac{\lambda_2}{\langle \alpha_2 \rangle \langle V_2 \rangle} = \frac{\langle \bar{h}_2 \rangle \langle \alpha_2 \rangle}{\langle \bar{h}_1 \rangle \langle \alpha_1 \rangle} \left( 1 + \frac{\lambda_1}{\langle \alpha_1 \rangle \langle V_1 \rangle} \right) - 1, \quad (110)$$

Формула подобия для главных собственных функций имеет вид

$$\psi_2(\vec{r}, \bar{\Omega}) = \psi_1 \left( \left\langle \frac{\bar{h}_2 \langle \alpha_2 \rangle R_2}{\bar{h}_1 \langle \alpha_1 \rangle R_1} \vec{r}, \bar{\Omega} \right\rangle. \quad (111)$$

Общее решение задачи на главные собственные значения выглядит следующим образом:

$$\lambda = \langle \bar{h} \rangle \langle \alpha \rangle R \frac{V}{R} \left[ \Lambda \left( \langle \bar{h} \rangle \langle \alpha \rangle R \right) - \frac{1}{\langle \bar{h} \rangle} \right]. \quad (112)$$

Явный вид универсальной функции  $\Lambda \left( \langle \bar{h} \rangle \langle \alpha \rangle R \right)$  можно найти, если известна конкретная геометрия системы.

В случае однородных шаров явные зависимости  $\Lambda(\beta R)$  определены выше в двух вариантах формулами (74), (75).

В спектральном случае вместо (74), (75) имеем

$$\Lambda(\langle \beta R \rangle) = \frac{1}{\langle \beta R \rangle^{0,17}} \left( 1,57 - \frac{2}{\langle \beta R \rangle} \right), \quad (113)$$

$$\Lambda(\langle \beta R \rangle) = \frac{\varphi}{\text{tg} \varphi}, \quad \varphi = \frac{\pi}{\langle \beta R \rangle + 0,71} \quad (114)$$

и следующие также новые формулы для  $\lambda$  однородных шаров:

$$\lambda = \langle \beta R \rangle \frac{V}{R} \left[ \frac{1}{\langle \beta R \rangle^{0,17}} \left( 1,57 - \frac{2}{\langle \beta R \rangle} \right) - \frac{1}{\langle h \rangle} \right], \quad (115)$$

$$\lambda = \langle \beta R \rangle \frac{V}{R} \left( \frac{\varphi}{\operatorname{tg} \varphi} - \frac{1}{\langle h \rangle} \right), \quad \varphi = \frac{\pi}{\langle \beta R \rangle + 0,71}. \quad (116)$$

### 4.3. Некоторые результаты многогрупповых расчетов и аналитических вычислений нейтронных характеристик однородных шаров из чистых (без примесей) изотопов $^{239}\text{Pu}$ и $^{238}\text{Pu}$

При постановке численных расчетов ниже используются 26-групповые нейтронные константы (см. [12]), полученные на основе библиотеки ENDF B-6 [13].

В качестве функции  $F(E_n)$  были взяты различные нейтронные спектры.

Одногрупповые нейтронные константы, полученные с помощью ENDF B-6 представлены в следующей таблице.

Значения параметров, усредненных по спектру  $F(E_n)$

Изотоп	Pu-238	Pu-239
$\rho_0$ , г/см <sup>3</sup>	19,84	19,85
$\alpha(\rho_0)$ , 1/см	0,269	0,278
$h$	1,710	1,658
$V$ , 10 <sup>9</sup> , см/с	120,6	120,6

#### 4.3.1. Результаты аналитических вычислений по формулам подобия и их сравнение с результатами расчетов

1) В качестве системы 1 был выбран шар из  $^{239}\text{Pu}$  при следующих значениях параметров: масса  $M_1 = 2,5$  кг, радиус  $R_1 = 1,95398$  см, плотность  $\rho_1 = 80$  г/см<sup>3</sup>. При этом усредненные по выбранному спектру нейтронов  $F(E_n)$  величины составили  $\alpha_1 = 1,11994$  1/см,  $\beta_1 = 1,85664$  1/см,  $\beta_1 R_1 = 3,628$ . В случае данной системы численный расчет привел к следующему результату:

$$\lambda_{\text{расч}} = 61,1180 \cdot 10^7 \text{ с}. \quad (117)$$

У подобного шара 2 из  $^{238}\text{Pu}$  были приняты  $\rho_2 = 80$  г/см<sup>3</sup>,  $\alpha_2 = 1,08508$  1/см,  $\beta_2 = 1,85565$  1/см,  $M_2 = 2,504$  кг,  $R_2 = 1,95502$  см, при этом из-за соотношения подобия  $\beta_2 R_2 = 3,628$ . В численном расчете для этого шара реализовалось значение

$$\lambda_{\text{расч}} = 67,8922 \cdot 10^7 \text{ 1/с}. \quad (118)$$

Вычисления по формуле подобия (110) с  $\langle \alpha \rangle \langle V \rangle = 1,95 \cdot 10^9$  1/с привели к следующим результатам:

$$\lambda_2 = 67,2453 \cdot 10^7 \text{ 1/с}, \quad (119)$$

погрешность формулы (110) составила

$$\delta = \frac{|\lambda_2 - \lambda_{\text{расч}}|}{\lambda_2} = 0,95 \%. \quad (120)$$

2) Случай, в котором исходный шар 1 из  $^{239}\text{Pu}$  характеризовался следующими величинами:  $\rho_1 = 60$  г/см<sup>3</sup>,  $\alpha_1 = 0,83996$  1/см,  $\beta_1 = 1,39247$  1/см,  $M_1 = 1,875$  кг,  $R_1 = 1,95398$  см,  $\beta_1 R_1 = 2,721$ . При этом численный расчет дал значение

$$\lambda_{\text{расч}} = 19,8446 \cdot 10^7 \text{ с}. \quad (121)$$

Для подобного шара 2 из  $^{238}\text{Pu}$  ( $\rho_2 = 60$  г/см<sup>3</sup>,  $\alpha_2 = 0,81381$  1/см,  $\beta_2 = 1,39173$  1/см,  $M_2 = 1,878$  кг и  $R_2 = 1,95502$  см) с  $\langle \alpha \rangle \langle V \rangle = 1,1 \cdot 10^9$  1/с получились следующие результаты:

$$\lambda_2 = 23,2994 \cdot 10^7 \text{ 1/с}, \quad (122)$$

$$\lambda_{\text{расч}} = 23,2944 \cdot 10^7 \text{ 1/с}, \quad (123)$$

$$\delta = \frac{|\lambda_2 - \lambda_{\text{расч}}|}{\lambda_2} = 0,022 \%. \quad (124)$$

#### 4.3.2. Сравнение результатов вычислений $\lambda$ по формулам (115), (116) с результатами численных решений кинетического уравнения

Ниже рассматривается шар 2 пункта 1) с  $\beta_2 R_2 = 3,628$  и  $\langle \alpha \rangle \langle V \rangle = 1,69 \cdot 10^9$  1/с.

3) Формула (115) привела к значению

$$\lambda_2 = 67,6029 \cdot 10^7 \text{ 1/с}, \quad (125)$$

Сравнив этот результат с результатом (118), получаем погрешность формулы

$$\delta = 0,43 \%. \quad (126)$$

4) Вычисления по диффузионной формуле (116) дали следующие результаты:

$$\lambda_2 = 67,7243 \cdot 10^7 \text{ 1/с}, \quad (127)$$

$$\delta = 0,25 \%. \quad (128)$$

Диффузионная формула оказалась более точной, чем (115), и это правильно. Действительно, в подразделе 2.2 при обсуждении вопроса о точности формул (70), (71) типа (115), (116) отмечалось, что в области  $\beta R > 3,451$  преимущество с уверенностью следует отдать диффузионной формуле.

В аналитических вычислениях использовались разные типовые спектры нейтронов  $F(E_n)$ . Вопрос об их выборе здесь не обсуждается. Выработанный критерий нахождения  $F(E_n)$  будет опубликован в ближайшее время.

## Заключение

Результаты работ [14, 15, 16] по однородным системам, справедливые в односкоростном приближении, теперь обобщены на случай профильных объектов.

В [14, 15, 16] было принято граничное условие обращения в ноль потока нейтронов, влетающих в систему из пустоты

$$\psi|_S = 0, \text{ если } (\vec{\Omega}\vec{N}_S) < 0, \quad (130)$$

где  $\vec{N}_S$  – нормаль к поверхности  $S$ , направленная в сторону вакуума.

Вызванное условием (130) ограничение (односвязные системы с невогнутыми внешними поверхностями) снято, так как приведенные в данной статье соответствующие результаты были получены непосредственно из кинетических уравнений без привлечения граничных условий.

В работе [9] представлены точные формулы подобия, применимость которых ограничена классом профильных объектов из одинаковых веществ. Этот недостаток устранен в разделе 4 статьи, что позволило существенно расширить рамки теории подобия нейтронно-кинетических процессов, а также определить общие зависимости главных собственных значений и главных собственных функций от различных параметров, а также получить новые приближенные формулы явного вида для  $\lambda$  однородных шаров.

## Список литературы

1. Шагалиев Р. М., Гребенников А. Н., Артемьев А. Ю., Будников В. И. Развитие основных методик и программ ИТМФ // Журнал Атом, 2011, № 50–51.

2. Дэвисон Б. Теория переноса нейтронов. М.: Изд-во Главного управления по использованию атомной энергии при Совете Министров СССР, 1960.

3. Бабичев Н. Б., Лутиков И. В., Незнамов В. П. Теория подобия в рамках односкоростной нейтронной кинетики квазистационарных систем // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2008. Вып. 1. С. 56–66.

4. Бабичев Н. Б., Севастьянов А. А. Нейтронные поля внутри и за пределами однородных глукбокоподкритических шаров // См. настоящий выпуск. С. 6–19.

5. Бабичев Н. Б., Лутиков И. В., Севастьянов А. А. Аналитические решения задач по нейтронной кинетике однородных шаров, состоящих из произвольных материалов // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2014. Вып. 3. С. 76–84.

6. Yamagishi T. Solutions of monoenergetic time dependent neutron transport equation in slab geometry // Journal of Nuclear Science and Technology. 1973. Vol. 10 (5). P. 284–291/

7. Бабичев Н. Б., Лутиков И. В., Незнамов В. П. Некоторые решения вырожденного уравнения переноса нейтронов // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2009. Вып. 1. С. 14–17.

8. Бабичев Н. Б. К вопросу о применимости диффузионной теории в случае среды с высокой активностью // См. настоящий выпуск. С. 3–5.

9. Бабичев Н. Б., Бондарев П. С., Лутиков И. В., Незнамов В. П. Инвариантность общего уравнения переноса нейтронов в некоторых профильных системах и вытекающие из этого следствия // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2011. Вып. 1–2. С. 65–69.

10. Климов В. Н. Кинетическое уравнение для примесей // Теория вероятностей и ее применения. Том 2. Вып. 2. 1957.

11. Бабичев Н. Б., Бондарев П. С., Незнамов В. П. Уравнения переноса нейтронов (учебное пособие для студентов и молодых специалистов). РФЯЦ ВНИИЭФ, Институт теоретической и математической физики (ИТМФ). Саров, 2010.

12. Бабичев Н. Б., Севастьянов А. А. Критические параметры однородных шаров, состоящих из плутония-238 и плутония-239 // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2014. Вып. 3. С. 28–35.

13. Herman M., Trkov A. ENDF-6 Format Manual, Data Formats and Procedures for the Evaluated Nuclear Data Files ENDF/B-VI and ENDF/B-VII. BNL-90365. National Nuclear Data Center, Brookhaven National Laboratory, Upton, New York 11973-5000, July 2010.

14. Бабичев Н. Б., Лутиков И. В., Севастьянов А. А. Элементы теории подобия нестационарных однородных систем в односкоростной нейтронной кинетике // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2008. Вып. 2. С. 18–20.

15. Бабичев Н. Б., Беженцев Б. В., Бондарев П. С., Забусов П. В. Собственные значения односкоростного уравнения переноса нейтронов в однородных системах // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2009. Вып. 3. С. 68–70.

16. Бабичев Н. Б., Лутиков И. В. Решение односкоростной задачи по нейтронной кинетике на собственные значения и собственные функции, справедливое в классе однородных односвязных объектов с невогнутыми внешними поверхностями // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2011. Вып. 1–2. С. 65–69.

Статья поступила в редакцию 12.03.2015

<b>Бабичев Н. Б.</b> К вопросу о применимости диффузионной теории в случае среды с высокой активностью . . . . .	3	<b>Babichev N. B.</b> On the applicability of diffusion theory to high-activity media . . . . .	3
<b>Бабичев Н. Б., Севастьянов А. А.</b> Нейтронные поля внутри и за пределами однород- ных глубокоподкритических шаров . . . . .	6	<b>Babichev N. B., Sevastyanov A. A.</b> Neutron fields inside and outside homogeneous deeply subcritical spheres . . . . .	6
<b>Бабичев Н. Б., Севастьянов А. А.</b> Оценка ширины особой области в пространствен- ном распределении нейтронов внутри однород- ных активных шаров . . . . .	20	<b>Babichev N. B., Sevastyanov A. A.</b> Evaluation of singular region width in neutron spatial distribution in homogeneous active spheres . . . . .	20
<b>Бабичев Н. Б., Севастьянов А. А.</b> Нейтронные поля внутри простых по геометрии сферически-симметричных систем, создаваемые нейтронами спонтанных делений изотопа $^{238}\text{Pu}$ . .	25	<b>Babichev N. B., Sevastyanov A. A.</b> Neutron fields in spherically-symmetrical systems of simple geometry created by $^{238}\text{Pu}$ spontaneous fission neutrons . . . . .	25
<b>Бабичев Н. Б., Лутиков И. В., Севастьянов А. А.</b> Нейтронная кинетика двумерных и трехмерных систем из плутония-239 и плутония-238 . . . . .	30	<b>Babichev N. B., Lutikov I. V., Sevastyanov A. A.</b> Neutron kinetics of 2d and 3d systems of plutonium-239 and plutonium-238 . . . . .	30
<b>Афанасьева В. С., Харитонов А. В.</b> Результаты численного исследования методики решения кинетического уравнения Больцмана, проведенного на задаче об однородной релаксации в простом газе с произвольно заданными началь- ными данными . . . . .	35	<b>Afanasyeva V. S., Kharitonov A. V.</b> The results of numerical solutions of research meth- odology Boltzmann kinetic equation, conducted on the task of homogeneous relaxation in a simple gas arbitrarily specified initial data . . . . .	35
<b>Бабичев Н. Б.</b> Некоторые вопросы теоретической нейтронной кинетики . . . . .	41	<b>Babichev N. B.</b> Theoretical neutron kinetics issues . . . . .	41

Редактор *Н. П. Мишкина*

Компьютерная подготовка оригинала-макета *Н. В. Мишкина*

---

Подписано в печать 30.04.2015    Формат 60 × 84 1/8  
 Офсетн. печ.    Усл. печ. л. 6,6    Уч.-изд. л. 5,6  
 Тираж 1000 экз.    Зак. тип. 464-2015    7 статей    Индекс 3657

---

Отпечатано в ИПК ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ»  
 607188, г. Саров Нижегородской области

## РЕФЕРАТЫ

УДК 539.17

К ВОПРОСУ О ПРИМЕНИМОСТИ ДИФФУЗИОННОЙ ТЕОРИИ В СЛУЧАЕ СРЕДЫ С ВЫСОКОЙ АКТИВНОСТЬЮ / Н. Б. Бабичев // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2015. Вып. 1. С. 3–5.

Показано, что при постоянной оптической толщине системы увеличение активности приводит к повышению точности диффузионного приближения.

УДК 539.17

НЕЙТРОННЫЕ ПОЛЯ ВНУТРИ И ЗА ПРЕДЕЛАМИ ОДНОРОДНЫХ ГЛУБОКОПОДКРИТИЧНЫХ ШАРОВ / Н. Б. Бабичев, А. А. Севастьянов // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2015. Вып. 1. С. 6–19.

Получены приближенные аналитические решения интегрального уравнения переноса нейтронов в однородных шарах из произвольных делющихся материалов.

Выявлены интересные с методической точки зрения особенности формирования функции распределения нейтронов внутри шаров, находящихся в состояниях глубокой подкритики.

УДК 539.17

ОЦЕНКА ШИРИНЫ ОСОБОЙ ОБЛАСТИ В ПРОСТРАНСТВЕННОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ НЕЙТРОНОВ ВНУТРИ ОДНОРОДНЫХ АКТИВНЫХ ШАРОВ / Н. Б. Бабичев, А. А. Севастьянов // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2015. Вып. 1. С. 20–24.

Исследовано поведение нейтронной плотности  $n(r)$  в особой области.

УДК 539.17

НЕЙТРОННЫЕ ПОЛЯ ВНУТРИ ПРОСТЫХ ПО ГЕОМЕТРИИ СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНЫХ СИСТЕМ, СОЗДАВАЕМЫЕ НЕЙТРОНАМИ СПОНТАННЫХ ДЕЛЕНИЙ ИЗОТОПА  $^{238}\text{Pu}$  / Н. Б. Бабичев, А. А. Севастьянов // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2015. Вып. 1. С. 25–29.

Получено пространственное распределение нейтронов в оптически тонких сферически-симметричных системах из плутония-238.

УДК 539.17

НЕЙТРОННАЯ КИНЕТИКА ДВУМЕРНЫХ И ТРЕХМЕРНЫХ СИСТЕМ ИЗ ПЛУТОНИЯ-239 И ПЛУТОНИЯ-238 / Н. Б. Бабичев, И. В. Лутиков, А. А. Севастьянов // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2015. Вып. 1. С. 30–34.

С помощью численных расчетов и аналитических вычислений по формулам подобия исследованы нейтронные характеристики двумерных и трехмерных тел, выполненных из чистых (без примесей) изотопов  $^{239}\text{Pu}$  и  $^{238}\text{Pu}$ .

УДК 519.633

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ МЕТОДИКИ РЕШЕНИЯ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА, ПРОВЕДЕННОГО НА ЗАДАЧЕ ОБ ОДНОРОДНОЙ РЕЛАКСАЦИИ В ПРОСТОМ ГАЗЕ С ПРОИЗВОЛЬНО ЗАДАННЫМИ НАЧАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ / В. С. Афанасьева, А. В. Харитонов // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2015. Вып. 1. С. 35–40.

Авторы занимаются созданием методики для численного решения кинетического уравнения Больцмана в применении к газовой динамике для трёхмерной геометрии. В статье приведены результаты сравнительных расчётов с точным решением задачи об однородной релаксации в простом газе с произвольно заданными начальными данными.

УДК 539.17

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ НЕЙТРОННОЙ КИНЕТИКИ / Н. Б. Бабичев // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2015. Вып. 1. С. 41–52.

Найдены новые общие аналитические решения кинетического уравнения, и теория подобия нейтронно-кинетических процессов получила дальнейшее развитие.

## ABSTRACT

ON THE APPLICABILITY OF DIFFUSION THEORY TO HIGH-ACTIVITY MEDIA / N. B. Babichev // VANT. Ser.: Theoret. i prikl. fizika. 2015, N 1. P. 3–5.

The accuracy of diffusion approximation is shown to improve with increasing activity at constant optical thickness.

NEUTRON FIELDS INSIDE AND OUTSIDE HOMOGENEOUS DEEPLY SUBCRITICAL SPHERES / N. B. Babichev, A. A. Sevastyanov // VANT. Ser.: Theoret. i prikl. fizika. 2015, N 1. P. 6–19.

Approximate analytical solutions of integral neutron transport equation are derived for homogeneous spheres of arbitrary fissionable materials.

Neutron distribution function peculiarities of methodological interest are found in spheres in deeply subcritical state.

EVALUATION OF SINGULAR REGION WIDTH IN NEUTRON SPATIAL DISTRIBUTION IN HOMOGENEOUS ACTIVE SPHERES / N. B. Babichev, A. A. Sevastyanov // VANT. Ser.: Theoret. i prikl. fizika. 2015, N 1. P. 20–24.

Neutron density  $n(r)$  behavior in the singular region is studied.

NEUTRON FIELDS IN SPHERICALLY-SYMMETRICAL SYSTEMS OF SIMPLE GEOMETRY CREATED BY  $^{238}\text{Pu}$  SPONTANEOUS FISSION NEUTRONS / N. B. Babichev, A. A. Sevastyanov // VANT. Ser.: Theoret. i prikl. fizika. 2015, N 1. P. 25–29.

Spatial distribution of neutrons in optically thin spherically-symmetric systems of plutonium-238 is derived.

NEUTRON KINETICS OF 2D AND 3D SYSTEMS OF PLUTONIUM-239 AND PLUTONIUM-238 / N. B. Babichev, I. V. Lutikov, A. A. Sevastyanov // VANT. Ser.: Theoret. i prikl. fizika. 2015, N 1. P. 30–34.

Neutron-physical characteristics of 2D and 3D bodies made of pure (unblended)  $^{239}\text{Pu}$  and  $^{238}\text{Pu}$  are studied by numerical simulations and by analytical calculations with similarity formulae.

THE RESULTS OF NUMERICAL SOLUTIONS OF RESEARCH METHODOLOGY BOLTZMANN KINETIC EQUATION, CONDUCTED ON THE TASK OF HOMOGENEOUS RELAXATION IN A SIMPLE GAS ARBITRARILY SPECIFIED INITIAL DATA / V. S. Afanasyeva, A. V. Kharitonov // VANT. Ser.: Theoret. i prikl. fizika. 2015, N 1. P. 35–40.

The authors are building methods for the numerical solution Boltzmann kinetic equation is applied to the gas dynamics of three-dimensional geometry. The results of comparative calculations with the exact solution of the problem of uniform relaxation in a simple gas arbitrarily specified initial data.

THEORETICAL NEUTRON KINETICS ISSUES / N. B. Babichev // VANT. Ser.: Theoret. i prikl. fizika. 2015, N 1. P. 41–52.

New general analytical solutions of kinetic equation are derived, and the similarity theory is further advanced.

ISSN 0234-0763      **ВОПРОСЫ АТОМНОЙ НАУКИ И ТЕХНИКИ**

С е р и я :

**ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ ФИЗИКА**

2015. Вып. 1. 1–53

## ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ

К авторским оригиналам, передаваемым для издания, предъявляются следующие требования:

1. Экземпляр статьи должен быть отпечатан на одной стороне листа формата А4 шрифтом Times New Roman 12 пунктов через 2 интервала, левое поле 3 см. Статья сопровождается дискетой 3,5' (zip100, zip250, cd-r/rw, USB Flash Drive) с электронным вариантом текста (шрифт 11 пунктов через 1 интервал) в редакторе Word for Windows версии 97. Статья должна быть составлена в следующем порядке: УДК; название статьи; инициалы и фамилии авторов; аннотация (не более 10 строк); ключевые слова – все вышеперечисленное на русском и английском языках; текст; список литературы; пронумерованные рисунки и подписи (на отдельном листе); таблицы с нумерационным и тематическим заголовками, каждая таблица на отдельном листе, а в электронном виде представляется отдельным файлом. Кавычки в тексте ставятся при английской раскладке клавиатуры («...»). Название файла должно состоять из фамилии первого автора и краткого названия статьи.

2. Файлы иллюстраций должны быть представлены отдельно – в виде файлов, в формате TIFF (.TIF) или JPEG (.JPG) (максимальное качество) с разрешением не менее 250 точек на дюйм (dpi или inch). Название файла иллюстрации должно включать фамилию первого автора и порядковый номер рисунка в статье, например: Dzyuba\_03.tif. Не допускается представлять иллюстрации, созданные с использованием внутренних инструментов Word.

3. При написании статьи следует использовать общепринятые термины, единицы измерения и условные обозначения. Все употребляемые авторами обозначения должны быть определены при их первом появлении в тексте. Необходимо обращать внимание на написание прописных и строчных букв: латинские буквы (*A, I, d, h* и т. п.) набираются курсивом, греческие буквы ( $\alpha, \beta, \gamma$ ), названия функций ( $\sin, \cos, \exp$ ), химических элементов ( $H_2O, H_2C_5OH$ ) и единиц измерения (см, МВт/см<sup>2</sup>, с) – прямым (обычным) шрифтом. Символы ( $\Re, \varnothing, \otimes \in$  и т. п.) следует оговаривать на полях рукописи. Обозначения матриц и векторов набираются полужирным шрифтом прямо.

4. Формулы создаются в виде целых математических выражений в формульном редакторе Word или редакторе Math Type 5.2 и нумеруются в круглых скобках. Нумерация формул должна быть сплошной по статье (не по разделам), нумерация типа (2а), (2б) нежелательна. Нумеровать следует только те формулы и уравнения, на которые есть ссылка в последующем изложении.

5. Ссылки на литературу в тексте даются по порядку, арабскими цифрами в квадратных скобках. Список литературы составляется в той же последовательности, в которой приводятся ссылки на литературу в тексте. Библиографические ссылки оформляются по следующим правилам:

- для книг: фамилии и инициалы авторов, название книги, место издания, издательство (без кавычек), год (для трудов конференций – город, страна, год);
- для статей в журнале: фамилии и инициалы авторов, название статьи, название журнала (без кавычек), год, том, выпуск, страницы;
- для авторефератов диссертаций: фамилия и инициалы автора, название автореферата диссертации, степень, место защиты (город) и год;
- для препринтов: фамилии и инициалы авторов, название препринта, место издания, год и номер;
- для патентов: вид патентного документа (А.с. или Пат.), его номер, название страны, выдавшей документ, индекс международной классификации изобретения, название издания, в котором опубликована формула изобретения, год и номер издания;
- для электронных источников – полный электронный адрес (включая дату обращения к источнику), позволяющий обратиться к публикации.

При необходимости в заголовке библиографической ссылки на работу четырех и более авторов могут быть указаны имена всех авторов или первых трех с добавлением слов «и др.». В списке литературы инициалы должны стоять после фамилий.

6. В конце текста (перед списком литературы) указывается контактная информация обо всех авторах статьи: фамилия, имя, отчество (полностью), место работы, должность, телефон, e-mail и по желанию автора – домашний почтовый адрес.

Все материалы по статьям должны направляться по адресу:

607188, г. Саров Нижегородской обл., пр. Мира, 37, РФЯЦ-ВНИИЭФ, ИТМФ, в редакцию журнала ВАНТ, сер. «Теоретическая и прикладная физика». Тел. (83130) 2-77-01. E-mail: [Nadykto@vniief.ru](mailto:Nadykto@vniief.ru)