УДК 530.145.7; 514.764.2

НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦ В СТАТИЧЕСКИХ ЦЕНТРАЛЬНО – СИММЕТРИЧНЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ПОЛЯХ

М. В. Горбатенко[1], В. П. Незнамов[1,2*], Е. Ю. Попов[1]

[1]ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.
[2]Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва

Анализируются области определения волновых функций и эффективные потенциалы уравнений Дирака и Клейна–Гордона для квантово-механических частиц в статических центрально-симметричных гравитационных полях. Показано, что для всех рассмотренных метрик, допускающих существование горизонтов событий, реализуются условия «падения» частиц на соответствующие горизонты событий.

Анализ экстремального поля Райсснера–Нордстрема с единственным горизонтом событий при выполнении условия, найденного В. И. Докучаевым, Ю. Н. Ерошенко, также указывает на невозможность существования вне горизонта событий стационарных связанных состояний квантово-механических частиц с положительной энергией.

Ключевые слова: скалярные частицы, частицы со спином ½, статические гравитационные поля, квантово-механическое «падение» на горизонт, эффективные потенциалы, связанные состояния, голая сингулярность.

Введение

В квантовой механике движения частиц во внешних полях важное место занимает установление области определения волновой функции $\psi(\mathbf{r}, t)$.

В данной работе при анализе движения частиц во внешних центрально-симметричных гравитационных полях устанавливаются ограничения областей определения соответствующих волновых функций, вытекающие из принципа причинности Гильберта [1, 2].

Для статических метрик эти ограничения подтверждаются анализом эффективных потенциалов $U(r)$ в релятивистских одномерных уравнениях Шредингера, полученных из соответствующих систем уравнений Дирака для радиальных функций.

Принцип причинности Гильберта и анализ $U(r)$ применялись для метрик центрально-симметричных незаряженных полей Шварцшильда в сферических координатах [3], в изотропных координатах [4], в гармонических координатах [5]. Исторически все указанные метрики получены координатными преобразованиями метрики Шварцшильда в сферических координатах (r, θ, φ) [3].

Нашему анализу была подвергнута также метрика Райсснера–Нордстрема [6, 7] для центрально-симметричного заряженного поля. В результате анализа установлено, что квантово-механические частицы для всех рассматриваемых метрик не могут пересекать их горизонты событий и находятся в режиме «падения» на соответствующий горизонт. Исключение составляет одно из решений для экстремального поля Райсснера–Нордстрема с единственным горизонтом событий. Однако и в этом случае вне горизонта событий в работе показана невозможность существования стационарных связанных состояний дираковских частиц с положительной энергией при использовании решения с вещественными волновыми функциями.

* E-mail: neznamov@vniief.ru

В разделах 2, 3 данной работы обсуждается принцип причинности Гильберта и вызываемые им для различных метрик ограничения на области определения волновых функций.

В разделе 4 для рассмотренных статических метрик приводятся результаты анализа эффективных потенциалов $U(r)$ в одномерных релятивистских уравнениях Шредингера.

В Заключении обсуждаются результаты квантово-механического анализа.

В работе используется система единиц $\hbar = c = 1$; сигнатура пространства Минковского выбрана равной

$$\eta_{\underline{\alpha}\underline{\beta}} = \operatorname{diag}\left[1,-1,-1,-1\right]. \tag{1}$$

Ниже, как и в (1), будем подчеркивать индексы, соответствующие индексам пространства Минковского.

2. Принцип причинности Гильберта

Принцип причинности сформулирован Д. Гильбертом в 1924 г [1]:

«До сих пор мы считали эквивалентными все системы координат x_s, которые получаются из какой-нибудь системы под действием произвольного преобразования. Этот произвол следует ограничить, если мы хотим встать на ту точку зрения, согласно которой две находящиеся на одной и той же временной линии мировые точки находятся в причинно-следственном отношении и поэтому не могут перейти под действием преобразования в синхронные мировые точки. Выделим x_0 в качестве координаты ***собственного времени*** *и сформулируем следующее определение.* ***Собственной*** *системой пространственно-временных координат называется такая система, в которой помимо $g < 0$ всегда выполняются следующие четыре неравенства:*

$$g_{11} < 0; \quad \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} > 0; \quad \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} < 0; \quad g_{00} > 0 \tag{2}$$

и далее: *«Так как при любом преобразовании координат временная линия остается временной линией, две мировые точки любой временной линии при собственном преобразовании пространственно-временных координат никогда не переходят в точки с одним и тем же значением временной координаты, т. е. не могут стать синхронными»*.

Условия причинности (2) часто воспроизводятся авторами монографий и учебников исходя из несколько других соображений. Например, в учебнике [2] условие $g_{00} > 0$ получено из определения собственного времени

$$d\tau = \sqrt{g_{00}}\,dt. \tag{3}$$

Ниже при квантово-механическом анализе и при установлении областей определения волновых функций будем руководствоваться выполнением условий причинности (2). Особенно будем следить за выполнением последнего неравенства $g_{00} > 0$; все другие неравенства, как правило, выполняются для известных решений ОТО.

2.1 Инерциальная и вращающаяся системы координат в пространстве Минковского

Как пример необходимости выполнения условия $g_{00} > 0$ рассмотрим дираковские гамильтонианы в инерциальной и вращающейся системах отсчета пространства Минковского.

Для инерциальной системы отсчета $\left(x'^{\mu}\right) = \left(t', x', y', z'\right)$ гамильтониан дираковской частицы с массой m и с неограниченной областью определения волновых функций имеет вид

$$H' = \gamma^{\underline{0}} m - i\gamma^{\underline{0}}\gamma^{\underline{k}} \frac{\partial}{\partial x'^{k}}, \tag{4}$$

где $\gamma^{\underline{0}}, \gamma^{\underline{k}}$ – четырехмерные матрицы Дирака.

Введем вращающуюся систему отсчета [2]

$$t = t';\; x = x'\cos\omega t + y'\sin\omega t;$$
$$y = -x'\sin\omega t + y'\cos\omega t;\; z = z', \tag{5}$$

где скорость вращения ω – вещественное число. Метрика Минковского в этой системе отсчета стационарна и имеет вид

$$ds^2 = \left(1 - \omega^2\left(x^2 + y^2\right)\right)dt^2 + 2\omega\left(ydx - xdy\right)dt -$$
$$-dx^2 - dy^2 - dz^2. \tag{6}$$

Гамильтониан в новой системе отсчета имеет вид (см., например, [8])

$$H = \gamma^{\underline{0}} m - i\gamma^{\underline{0}}\gamma^{\underline{k}} \frac{\partial}{\partial x'^{k}} - i\omega\left(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\right). \tag{7}$$

Область определения волновых функций гамильтониана (7) ограничивается условием $g_{00} > 0$, что для метрики (6) сводится к условию

$\sqrt{x^2+y^2} < \frac{1}{\omega}$. Невыполнение этого условия приводит к тому, что для расстояний $\sqrt{x^2+y^2} > \frac{1}{\omega}$ скорость вращения дираковской частицы была бы больше скорости света. Таким образом, при $g_{00} < 0$ вращающаяся система отсчета не может быть осуществлена реальными телами [2].

3. Области определения волновых функций частиц со спином ½ в центрально-симметричных гравитационных полях

3.1. Метрика Шварцшильда в координатах (t, r, θ, φ)

Квадрат интервала

$$ds^2 = f_S dt^2 - \frac{dr^2}{f_S} - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right). \qquad (8)$$

В формуле (8) $f_S = 1 - \frac{r_0}{r}$; $r_0 = \frac{2GM}{c^2}$ – гравитационный радиус (горизонт событий), M – масса точечного сферически симметричного источника гравитационного поля, G – гравитационная постоянная, c – скорость света.

Самосопряженный дираковский гамильтониан в η-представлении с плоским скалярным произведением волновых функций и с тетрадами в калибровке Швингера [9] для частицы с массой m и спином ½ имеет вид [10, 11]

$$H_\eta = \sqrt{f_S} m\gamma^{\underline{0}} - i\sqrt{f_S}\gamma^{\underline{0}}\left\{\gamma^{\underline{1}}\sqrt{f_S}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right) + \right.$$
$$\left. + \gamma^{\underline{2}}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{2}\mathrm{ctg}\theta\right) + \gamma^{\underline{3}}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right\} - \frac{i}{2}\frac{\partial f_S}{\partial r}\gamma^{\underline{0}}\gamma^{\underline{1}}. \quad (9)$$

Область определения волновых функций уравнения Дирака с гамильтонианом (9) ограничивается условием причинности Гильберта

$$g_{00} > 0 \to f_S = 1 - \frac{r_0}{r} > 0 \to r > r_0. \qquad (10)$$

Из (10) следует

$$\sqrt{f_S} \text{ – положительное вещественное число.} \qquad (11)$$

3.2. Другие метрики центрально-симметричного незаряженного гравитационного поля

В работе [12] проведен анализ квантово-механической эквивалентности метрик центрально-симметричного незаряженного гравитационного поля. Рассмотрены статические метрики Шварцшильда в сферических, изотропных и гармонических координатах, стационарные метрики Эддингтона–Финкельштейна [13, 14] и Пенлеви–Гуллстранда [15, 16], нестационарные метрики Леметра–Финкельштейна [17] и Крускала [18].

Для каждой метрики дираковские гамильтонианы были получены как непосредственно с тетрадами в калибровке Швингера, так и с помощью координатных преобразований и преобразований Лоренца самосопряженного гамильтониана в поле Шварцшильда (9).

Анализу подвергались в том числе области определения волновых функций уравнения Дирака. В результате анализа установлено, что вытекающее из выполнения условия причинности Гильберта $g_{00} > 0$ ограничение на область определения волновых функций уравнения Дирака в поле Шварцшильда в сферических координатах $r > r_0$ (10) и $\sqrt{f_S} > 0$ (11) проявляется также в других координатах для всех рассмотренных метрик:

1) метрика Шварцшильда в сферических координатах (t, r, θ, φ)

$$r > r_0, \qquad (12)$$

2) метрика Шварцшильда в изотропных координатах

$$R_{is} > \frac{r_0}{4}, \qquad (13)$$

3) метрика Шварцшильда в гармонических координатах

$$R_{gr} > \frac{r_0}{2}, \qquad (14)$$

4) метрики Эддингтона–Финкельштейна и Пенлеви–Гуллстранда

$$r > r_0, \qquad (15)$$

5) метрика Леметра-Финкельштейна

$$R_{L-F} - T_{L-F} > \frac{2}{3}r_0, \qquad (16)$$

6) метрика Крускала

$$u > |v| > 0,\ u < -|v| < 0, \qquad (17)$$

Из неравенств (12) – (17) видно, что горизонт событий r_0 в базовой метрике Шварцшильда (8) проявляет себя в новых координатах во всех рассмотренных метриках. Области определения волновых функций для всех метрик не включают в себя сингулярность в начале координат.

3.3. Метрика Райсснера–Нордстрема

Статическая метрика Райсснера–Нордстрема характеризуется точечным сферически симметричным источником гравитационного поля с массой M и электрического поля с зарядом Q.

Квадрат интервала равен

$$ds^2 = f_{R-N}dt^2 - \frac{dr^2}{f_{R-N}} - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right), \quad (18)$$

где $f_{R-N} = \left(1 - \frac{r_0}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)$, $r_Q = \frac{\sqrt{G}Q}{c^2}$ – «зарядовый» радиус.

Условие Гильберта $g_{00} > 0$ приводит к необходимости рассмотрения лишь положительных значений $f_{R-N} > 0$.

1. Если $r_0 > 2r_Q$, то

$$f_{R-N} = \left(1 - \frac{r_+}{r}\right)\left(1 - \frac{r_-}{r}\right), \quad (19)$$

где $r_\pm$ – внешний и внутренний горизонты событий

$$r_\pm = \frac{r_0}{2} \pm \sqrt{\frac{r_0^2}{4} - r_Q^2}. \quad (20)$$

Областью определения волновых функций, где $f_{R-N} > 0$, являются области

$$r > r_+ \text{ и } r < r_-. \quad (21)$$

Случай $r_0 = 2r_Q$ соответствует экстремальному полю Райсснера–Нордстрема. В этом случае разрешенной областью определения является все пространство $r \in [0, \infty)$ за исключением радиуса единственного горизонта событий $r_\pm = \frac{r_0}{2}$.

Случай $r_0 < 2r_Q$ соответствует «голой» сингулярности. В этом случае всегда $f_{R-N} > 0$ и областью определения волновых функций является вся область $r \in [0, \infty)$.

4. Анализ эффективных потенциалов $U(\rho)$ в одномерных релятивистских уравнениях типа Шредингера

Уравнения Дирака для фермионов в центрально-симметричных гравитационных полях допускают разделение радиальных и угловых переменных.

Для центрально-симметричных гравитационных полей в качестве угловых функций используются сферические гармоники со спином ½ (см., например, [19]).

В результате система уравнений для радиальных волновых функций $F(\rho)$ и $G(\rho)$ в рассматриваемых внешних полях имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dF(\rho)}{d\rho} = A(\rho)F(\rho) + B(\rho)G(\rho), \\ \dfrac{dG(\rho)}{d\rho} = C(\rho)F(\rho) + D(\rho)G(\rho). \end{cases} \quad (22)$$

Уравнения (22) записаны в безразмерных переменных.

$$\rho = \frac{r}{l_c}; \varepsilon = \frac{E}{m}; 2\alpha = \frac{r_0}{l_c} = \frac{2GMm}{\hbar c}; \alpha_Q = \frac{r_Q}{l_c}; \alpha_{em} = \frac{eQ}{\hbar c};$$

$l_c = \frac{\hbar}{mc}$ – комптоновская длина волны дираковской частицы.

Уравнения (22) можно свести к уравнению второго порядка для функции $\psi(\rho)$, пропорциональной либо $F(\rho)$, либо $G(\rho)$.

В первом случае

$$\psi(\rho) = F(\rho)\exp\left(\frac{1}{2}\int A_1(\rho')d\rho'\right). \quad (23)$$

Уравнение для $\psi(\rho)$ имеет вид уравнения Шредингера

$$\frac{d^2\psi(\rho)}{d\rho^2} + 2\left(E_{schr} - U_{eff}(\rho)\right)\psi(\rho) = 0. \quad (24)$$

В уравнении (24)

$$\begin{aligned} E_{schr} &= \frac{1}{2}\left(\varepsilon^2 - 1\right), \\ U_{eff}(\rho) &= E_{schr} + \frac{1}{4}\frac{dA_1(\rho)}{d\rho} + \frac{1}{8}A_1^2(\rho) - \frac{1}{2}B_1(\rho). \end{aligned} \quad (25)$$

В выражениях (23), (25)

$$A_1(\rho) = -\frac{1}{B(\rho)}\frac{dB(\rho)}{d\rho} - A(\rho) - D(\rho),$$

$$B_1(\rho) = -B(\rho)\frac{d}{d\rho}\left(\frac{A(\rho)}{B(\rho)}\right) - C(\rho)B(\rho) + A(\rho)D(\rho). \qquad (26)$$

4.1. Эффективный потенциал в пространстве Минковского с кулоновским взаимодействием

Для последующего сравнения с внешними гравитационными полями рассмотрим уравнение (24) с кулоновским потенциалом в исходном уравнении Дирака.

$$U_D = \frac{Z\alpha_{ts}}{\rho}, \qquad (27)$$

где Z – заряд ядра, $\alpha_{ts} = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}$ – электромагнитная постоянная тонкой структуры.

В этом случае в уравнениях (22)

$$A(\rho) = -\frac{1+\kappa}{\rho};\ B(\rho) = \varepsilon + 1 - U_D;$$
$$C(\rho) = -(\varepsilon - 1 - U_D);\ D(\rho) = -\frac{1-\kappa}{\rho}, \qquad (28)$$

где $\kappa = \pm\left(j + \frac{1}{2}\right) = \begin{cases} -(l+1), & j = l + \frac{1}{2} \\ l\ , & j = l - \frac{1}{2} \end{cases}$; l, j – квантовые числа орбитального и полного момента дираковской частицы.

Асимптотика в начале координат для эффективного потенциала $U_C(\rho)$ имеет вид

$$U_C(\rho) = -\frac{(Z\alpha_{ts})^2 - 3/4 + (1-\kappa^2)}{2\rho^2} + O\left(\frac{1}{\rho}\right). \qquad (29)$$

Анализ нерелятивистский квантово-механической задачи с потенциалом вида $U(\rho) \sim -\frac{\beta}{\rho^2}$, $\beta > 0$ проведен в [20]. Опуская подробности, приведем основной результат: в квантово-механических задачах не происходит «падения» на центр, если потенциал при $\rho \to 0$ спадает не быстрее, чем $U(\rho) = -\frac{\beta}{\rho^2}$, причем максимальное значение β, при котором «падения» еще не происходит, равно $\beta_{\max} = 1/8$.

Вернемся к асимптотике (29). При $\kappa = -1$, т. е. в *s*-состоянии, значение $\beta_{\max} = 1/8$ достигается при $Z\alpha_{ts} = 1$, т. е. при $Z \approx 137$. Таким образом, исходя лишь из исследования эффективного потенциала взаимодействия $U_C(\rho \to 0)$, приходим к выводу, что при $Z > 137$ в релятивистской одночастичной задаче движения электрона в поле точечного ядра реализуется квантово-механический режим «падения» на центр.

Кроме того, легко заметить, что для заданного κ существуют такие Z_{scr} при которых числитель дроби в (29) меняет знак. Так для *s*, *p* и *d* состояний соответствующие заряды ядер равны $Z_s = 118{,}7$, $Z_p = 265{,}3$, $Z_d = 405{,}4$*. На рис. 1, 2 приведены эффективные потенциалы для *s*-состояний при значениях Z меньше и больше критического значения $Z_s = 118{,}7$.

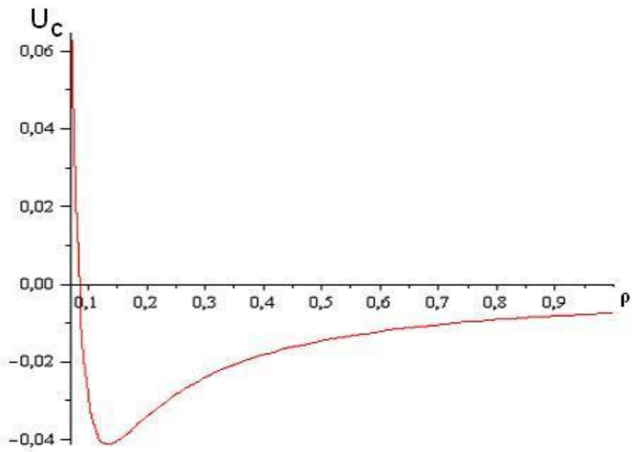

Рис. 1. Эффективный потенциал $U_C(\rho)$ при значении $Z < Z_{scr}$ $\kappa = -1$, $Z\alpha_{ts} = 1/137$, $\varepsilon \approx 1$. Значению $Z\alpha_{ts} = 1/137$ соответствует $Z \approx 1$

* Аналогичные значения Z_{scr} были получены из других соображений в работах [21, 22].

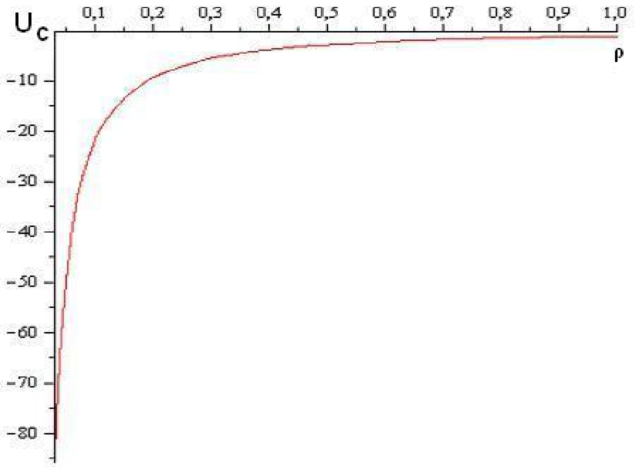

Рис. 2. Эффективный потенциал $U_C(\rho)$ при значении $Z > Z_{scr}$ $\kappa = -1$, $Z\alpha_{ts} = 0{,}87$, $\varepsilon = 0{,}49$. Значению $Z\alpha_{ts} = 0{,}87$ соответствует $Z \approx 119$

Анализ выражения (29) приводит к следующим выводам:

• Для любого заданного κ существует Z_{scr} такое, что при $Z < Z_{scr}$ асимптотика эффективного потенциала в начале координат положительна, а потенциальная яма имеет конечную глубину. При $Z > Z_{scr}$ асимптотика эффективного потенциала меняет знак, и глубина потенциальной ямы становится бесконечной. Асимптотика при этом имеет вид $U \sim -\frac{\beta}{\rho^2}$, однако при $\beta < \frac{1}{8}$ «падения» на центр не происходит.

• Для любого заданного κ существует Z_{cr}, начиная с которого величина β становится больше $\frac{1}{8}$, что соответствует условию «падения» на центр.

Графики 1 и 2 иллюстрируют, что при $Z < Z_{scr}$ электрон локализован в окрестностях минимума потенциальной ямы конечной глубины на значительном расстоянии от начала координат и отделен от точечного ядра бесконечным потенциальным барьером; при $Z \ge Z_{scr}$, во-первых, исчезает бесконечный потенциальный барьер, во-вторых, положение потенциальной ямы бесконечной глубины скачком перемещается в начало координат. Энергетический спектр электрона становится «чувствительным» к деталям поведения эффективного потенциала в окрестностях начала координат $(\rho = 0)$.

4.2. Эффективные потенциалы для стационарных центрально-симметричных незаряженных гравитационных полей

4.2.1. Поле Шварцшильда в координатах (r, θ, φ). Эффективный потенциал для поля Шварцшильда можно получить в соответствии с п.4 из системы уравнений для радиальных дираковских функций, полученной после разделения переменных в уравнении Дирака с гамильтонианом (9).

$$\begin{cases} f_S \dfrac{dF(\rho)}{d\rho} + \left(\dfrac{1+\kappa\sqrt{f_S}}{\rho} - \dfrac{\alpha}{\rho^2}\right) F(\rho) - \left(\varepsilon + \sqrt{f_S}\right) G(\rho) = 0; \\ f_S \dfrac{dG(\rho)}{d\rho} + \left(\dfrac{1-\kappa\sqrt{f_S}}{\rho} - \dfrac{\alpha}{\rho^2}\right) G(\rho) + \left(\varepsilon - \sqrt{f_S}\right) F(\rho) = 0. \end{cases} \tag{30}$$

Ведущая особенность эффективного потенциала вблизи горизонта событий имеет вид

$$U_S(\rho \to 2\alpha) = -\frac{\frac{1}{8} + 2\alpha^2\varepsilon^2}{(\rho - 2\alpha)^2}. \tag{31}$$

Числитель равенства (31) больше 1/8 и, в соответствии, с п.4.1 любая квантово-механическая частица будет двигаться в поле Шварцшильда в режиме «падения» на горизонт $\rho = 2\alpha$ при любых значениях α и ε.

4.2.2. Поле Шварцшильда в изотропных координатах. Координаты

$$(t, R, \theta, \varphi). \tag{32}$$

Квадрат интервала [23]

$$ds^2 = V^2(R)dt^2 - W^2(R)\left[dR^2 + R^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)\right]. \tag{33}$$

Здесь

$$V(R) = \frac{1 - \frac{r_0}{4R}}{1 + \frac{r_0}{4R}}, \quad W(R) = \left(1 + \frac{r_0}{4R}\right)^2,$$
$$F_{Ob} = \frac{V(R)}{W(R)} = \frac{1 - \frac{r_0}{4R}}{\left(1 + \frac{r_0}{4R}\right)^3}. \tag{34}$$

Область определения переменной R:

$$R > \frac{r_0}{4}. \qquad (35)$$

Самосопряженный дираковский гамильтониан имеет вид

$$H_\eta = V(R)\beta m + \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p}F_{Ob}(R) + F_{Ob}(R)\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p}\right). \qquad (36)$$

В (36) α^k, β – матрицы Дирака, $p^k = -i\dfrac{\partial}{\partial R^k}$ – операторы импульса дираковской частицы.

После разделения переменных система уравнений для радиальных функций $F_{is}(\rho)$ и $G_{is}(\rho)$ имеет вид

$$F_{Ob}\frac{dF_{is}(\rho)}{d\rho} + \left(F_{Ob}\frac{1+\kappa}{\rho} + \frac{1}{2}\frac{dF_{Ob}}{d\rho}\right)F_{is}(\rho) - \left(\varepsilon + V(\rho)\right)G_{is}(\rho) = 0,$$
$$F_{Ob}\frac{dG_{is}(\rho)}{d\rho} + \left(F_{Ob}\frac{1-\kappa}{\rho} + \frac{1}{2}\frac{dF_{Ob}}{d\rho}\right)G_{is}(\rho) + \left(\varepsilon - V(\rho)\right)F_{is}(\rho) = 0. \qquad (37)$$

Ведущая особенность эффективного потенциала вблизи горизонта событий $R = \dfrac{r_0}{4} = \dfrac{\alpha}{2}l_0$ имеет вид

$$U_{is}\left(\rho \to \frac{\alpha}{2}\right) = -\frac{\frac{1}{8} + 8\alpha^2\varepsilon^2}{\left(\rho - \frac{\alpha}{2}\right)^2}. \qquad (38)$$

Числитель (38) больше $\dfrac{1}{8}$ при любых значениях α и ε.

4.2.3. Поле Шварцшильда в сферических гармонических координатах. Координаты

$$(t, R, \theta, \varphi). \qquad (39)$$

Квадрат интервала

$$ds^2 = \frac{\left(R - \frac{r_0}{2}\right)}{\left(R + \frac{r_0}{2}\right)}dt^2 - \frac{\left(R + \frac{r_0}{2}\right)}{\left(R - \frac{r_0}{2}\right)}dR^2 - \left(R + \frac{r_0}{2}\right)^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right). \qquad (40)$$

Область определения переменной R:

$$R > \frac{r_0}{2}. \qquad (41)$$

Самосопряженный гамильтониан частиц со спином ½ имеет вид

$$H_\eta = \sqrt{F_g}\beta m - i\alpha^1\left[F_g\left(\frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R}\right) + \frac{r_0}{2R^2\left(1 + \frac{r_0}{2R}\right)^2}\right] - i\sqrt{F_g}\frac{1}{1 + \frac{r_0}{2R}}\left[\alpha^2\frac{1}{R}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{2}\mathrm{ctg}\theta\right) + \alpha^3\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]. \qquad (42)$$

В соотношении (42)

$$F_g(r) = \frac{1 - \frac{r_0}{2R}}{1 + \frac{r_0}{2R}}. \qquad (43)$$

Система уравнений для радиальных функций $F_{gr}(\rho), G_{gr}(\rho)$ имеет вид

$$F_g\frac{dF_{gr}(\rho)}{d\rho} + \left(F_g\frac{1}{\rho} + \frac{\sqrt{F_g}}{\left(1 + \frac{\alpha}{\rho}\right)}\frac{\kappa}{\rho} + \frac{1}{2}\frac{dF_g}{d\rho}\right)F_{gr}(\rho) - \left(\varepsilon + \sqrt{F_g}\right)G_{gr}(\rho) = 0,$$
$$F_g\frac{dG_{gr}(\rho)}{d\rho} + \left(F_g\frac{1}{\rho} - \frac{\sqrt{F_g}}{\left(1 + \frac{\alpha}{\rho}\right)}\frac{\kappa}{\rho} + \frac{1}{2}\frac{dF_g}{d\rho}\right)G_{gr}(\rho) + \left(\varepsilon - \sqrt{F_g}\right)F_{gr}(\rho) = 0. \qquad (44)$$

Ведущая особенность эффективного потенциала вблизи горизонта событий $R = \dfrac{r_0}{2} = \alpha l_0$ имеет вид

$$U_{gr}(\rho \to \alpha) = -\frac{\frac{1}{8} + 2\alpha^2\varepsilon^2}{(\rho - \alpha)^2}. \qquad (45)$$

Числители выражений (38) и (45) больше 1/8 при любых величинах α и ε.

Любая квантово-механическая частица со спином 1/2 в полях Шварцшильда в изотропных и гармонических координатах, как и в поле Шварцшильда в сферических координатах, будет двигаться в режиме «падения» на соответствующий горизонт событий.

Квантовая механика движения бесспиновых частиц должна подчиняться тем же закономерностям. Покажем это на примере движения бесспиновой частицы с массой m в поле Шварцшильда.

4.3. Эффективный потенциал уравнения Клейна–Гордона для поля Шварцшильда в сферических координатах (*r*, θ, φ)

Уравнение Клейна–Гордона для метрики Шварцшильда имеет вид

$$(-g)^{1/2}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left[(-g)^{1/2}g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\Phi\right]+m^2\Phi=0. \quad (46)$$

В формуле (46) $(-g)^{1/2}=r^2\sin\theta.$

После разделения переменных с использованием подстановки

$$\Phi(r,\theta,\varphi,t)=R(r)Y(\theta,\varphi)e^{-i\omega t}, \quad (47)$$

где $Y(\theta, \varphi)$ – сферические шаровые функции, получаем уравнение для радиальной волновой функции $R(r)$:

$$\frac{d^2R}{dr^2}+A(r)\frac{dR}{dr}+B(r)R=0, \quad (48)$$

где

$$A(r)=\frac{2r-r_0}{r^2}\frac{1}{f_s},\ B(r)=-\frac{1}{f_s r^2}\left(l(l+1)-\frac{\omega^2r^2}{f_s}+m^2r^2\right),$$

$f_s=1-\dfrac{r_0}{r},$ l – квантовое число орбитального момента скалярной частицы.

После подстановки $R(r)=ZU$, где $U(r)=$ $=\exp\left(-\dfrac{1}{2}\int A(r')dr'\right),$ получим уравнение типа Шредингера с эффективным потенциалом $U(r)$:

$$\frac{d^2Z}{dr^2}+\kappa^2(r)Z=0, \quad (49)$$

где $\kappa^2(r)=2\left(E_{Schr}-U(r)\right)=-\dfrac{1}{2}\dfrac{dA}{dr}-\dfrac{1}{4}A^2+B.$

В результате асимптотика эффективного потенциала на «горизонте событий» совпадает с аналогичной асимптотикой для дираковской частицы (31) и имеет вид

$$U(r\to r_0)=-\frac{\dfrac{1}{8}+2\left(\dfrac{r_0}{2}\right)^2\omega^2}{(r-r_0)^2};$$

в безразмерных переменных:

$$U(\rho\to 2\alpha)=-\frac{\dfrac{1}{8}+2\alpha^2\omega^2}{(\rho-2\alpha)^2}. \quad (50)$$

4.4. Эффективные потенциалы для центрально-симметричного заряженного поля Райсснера–Нордстрема

Метрика Райсснера–Нордстрема приведена в выражении (18).

Самосопряженный гамильтониан частицы со спином ½ массой m и зарядом $(+e)$ имеет вид [24]:

$$\begin{aligned}H_{\eta}=&\sqrt{f_{R-N}}\beta m-i\alpha^1\left(f_{R-N}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}-\frac{r_0}{2r^2}\right)-\\&-i\sqrt{f_{R-N}}\frac{1}{r}\left[\alpha^2\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{2}\mathrm{ctg}\theta\right)+\alpha^3\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]+\frac{eQ}{r}.\end{aligned} \quad (51)$$

В формуле (51) α^k,β – матрицы Дирака.

После разделения переменных система уравнений для радиальных функций $F_{R-N}(\rho), G_{R-N}(\rho)$ имеет вид

$$\begin{aligned}&f_{R-N}\frac{dF_{R-N}(\rho)}{d\rho}+\left(\frac{1+\kappa\sqrt{f_{R-N}}}{\rho}-\frac{\alpha}{\rho^2}\right)F_{R-N}(\rho)-\left(\varepsilon-\frac{\alpha_{em}}{\rho}+\sqrt{f_{R-N}}\right)G_{R-N}(\rho)=0,\\&f_{R-N}\frac{dG_{R-N}(\rho)}{d\rho}+\left(\frac{1-\kappa\sqrt{f_{R-N}}}{\rho}-\frac{\alpha}{\rho^2}\right)G_{R-N}(\rho)+\left(\varepsilon-\frac{\alpha_{em}}{\rho}-\sqrt{f_{R-N}}\right)F_{R-N}(\rho)=0,\end{aligned} \quad (52)$$

В выражении (52) введены безразмерные переменные: $\rho=\dfrac{r}{l_c};$ $\varepsilon=\dfrac{E}{m};$ $2\alpha=\dfrac{r_0}{l_c}=\dfrac{2GMm}{\hbar c};$ $\alpha_Q=\dfrac{r_Q}{l_c}=\dfrac{\sqrt{G}QM}{\hbar c};$ $\alpha_{em}=\dfrac{eQ}{\hbar c};$ $l_c=\dfrac{\hbar}{mc}$ – комптоновская длина волны дираковской частицы.

Величину f_{R-N} можно представить в виде

$$f_{R-N}=1-\frac{2\alpha}{\rho}+\frac{\alpha_Q^2}{\rho^2}=\left(1-\frac{\rho_+}{\rho}\right)\left(1-\frac{\rho_-}{\rho}\right), \quad (53)$$

где

$\rho_+=\alpha+\sqrt{\alpha^2-\alpha_Q^2}$ – радиус внешнего горизонта событий, (54)

$\rho_-=\alpha-\sqrt{\alpha^2-\alpha_Q^2}$ – радиус внутреннего горизонта событий. (55)

Рассмотрим три случая соотношения констант взаимодействия α и α_Q.

4.4.1. $\alpha^2>\alpha_Q^2.$ В этом случае область определения волновых функций гамильтониана (51) имеет вид

$$\rho\in\left[0,\rho_-\right) \text{ и } \rho\in(\rho_+,\infty). \quad (56)$$

Эффективные потенциалы в этом случае имеют следующие ведущие особенности при $\rho \to \rho_- \ (\rho < \rho_-)$ и $\rho \to \rho_+ \ (\rho > \rho_+)$

$$U_{R-N}(\rho \to \rho_-) = -\frac{1}{8}\frac{1}{(\rho_- - \rho)^2}\left[1 + \frac{(\varepsilon\rho_- - \alpha_{em})^2 \rho_-^2}{(\alpha - \rho_-)^2}\right], \tag{57}$$

$$U_{R-N}(\rho \to \rho_+) = -\frac{1}{8}\frac{1}{(\rho_+ - \rho)^2}\left[1 + \frac{(\varepsilon\rho_+ - \alpha_{em})^2 \rho_+^2}{(\rho_+ - \alpha)^2}\right]. \tag{58}$$

Числители в выражениях (57), (58) всегда $\geq \frac{1}{8}$ при любых значениях $\alpha, \alpha_Q, \alpha_{em}$ и ε.

Отсюда следует, что если движение частицы рассматривается в области $\rho \in [0, \rho_-)$, то такая частица будет находится в режиме «падения» на внутренний горизонт событий ρ_-. При рассмотрении движения частицы в области $\rho \in (\rho_+, \infty)$ квантово-механическая частиц α будет находится в режиме «падения» на внешний горизонт событий ρ_+.

4.4.2. $\alpha^2 = \alpha_Q^2$ *– экстремальное поле Райсснера–Нордстрема.* В этом случае существует единственный горизонт событий $\rho_+ = \rho_- = \alpha$.

Областью определения волновых функций является все пространство $\rho \in [0, \infty)$ за исключением горизонта событий $\rho_\pm = \alpha$, на котором $g_{00} = 0$.

Если $\varepsilon \neq \frac{\alpha_{em}}{\alpha}$, эффективный потенциал имеет ведущую особенность при $\rho \to \alpha$:

$$U_{R-N}^{extr}(\rho \to \alpha) = -\frac{1}{8}\frac{\left(\varepsilon - \frac{\alpha_{em}}{\alpha}\right)^2 \alpha^4}{(\rho - \alpha)^4}. \tag{59}$$

Для зависимости $U(\rho \to \alpha) \sim \frac{1}{(\rho - \alpha)^4}$ квантово-механическая частица, находящаяся выше или ниже горизонта событий, будет всегда двигаться в режиме «падения» на горизонт $\rho_\pm = \alpha$ [20].

При $\varepsilon = \frac{\alpha_{em}}{\alpha}$ эффективный потенциал имеет вид

$$\left(U_{R-N}^{extr}\right)_1(\rho) = \frac{1}{2}\left[\frac{\left(1 - \frac{\alpha_{em}^2}{\alpha^2}\right)\rho^4 + (\kappa^2 + \kappa)\rho^2 - \alpha(\kappa + 1)\rho + \frac{3}{4}\alpha^2}{\rho^2(\rho - \alpha)^2} - \left(1 - \frac{\alpha_{em}^2}{\alpha^2}\right)\right]. \tag{60}$$

Ведущая особенность потенциала (60) становится равной:

$$\left(U_{R-N}^{extr}\right)_1(\rho \to \alpha) = -\frac{\frac{1}{4} - \kappa^2 - \alpha^2 + \alpha_{em}^2}{2(\rho - \alpha)^2}. \tag{61}$$

Для существования решения $\varepsilon = \frac{\alpha_{em}}{\alpha}$ со сходящимся нормировочным интегралом для волновых функций необходимо выполнение условия

$$\kappa^2 + \alpha^2 - \alpha_{em}^2 > \frac{1}{4}. \tag{62}$$

Решение $\varepsilon = \frac{\alpha_{em}}{\alpha}$ с условием (62) ранее было получено в [25] непосредственным решением системы уравнений для радиальных функций уравнения Дирака.

Из вида решения $\varepsilon = \frac{\alpha_{em}}{\alpha}$ следует, что положительные значения энергии дираковской частицы осуществляются при одинаковых знаках зарядов Q и e, и, наоборот, отрицательные значения энергии ε реализуются при разноименных знаках зарядов Q и e.

Ограничиваясь решениями с положительными энергиями вне горизонта событий, значение $\varepsilon = \frac{\alpha_{em}}{\alpha}$ будет решением для связанных состояний дираковской частицы с массой m и зарядом ($+e$), если $\varepsilon < 1$, т. е.

$$\alpha_{em} < \alpha. \tag{63}$$

Для области определения волновых функций $\rho \in (\alpha, \infty)$ при $\alpha_{em} < \alpha$ эффективный потенциал (60) всюду положителен и по результатам численных расчетов не содержит экстремумов. Асимптотика потенциала (60) при $\rho \to \infty$

$$\left(U_{R-N}^{extr}\right)(\rho \to \infty) = 0. \tag{64}$$

Потенциальная яма для частицы отсутствует, и поэтому стационарных связанных состояний для дираковской частицы вне горизонта событий $\rho_{\pm} = \alpha$ не существует.

4.4.3. $\alpha^2 < \alpha_Q^2$ *– голая сингулярность*. В этом случае горизонты событий исчезают, величина $f_{R-N} = 1 - \frac{2\alpha}{\rho} + \frac{\alpha_Q^2}{\rho^2}$ всегда больше нуля.

Областью определения волновых функций является все пространство $\rho \in [0, \infty)$.

Эффективный потенциал при $\rho \to 0$ положителен и имеет вид

$$\left(U_{R-N}^{n-s}\right)(\rho \to 0) = \frac{3}{8}\frac{1}{r^2}. \qquad (65)$$

Полный вид $\left(U_{R-N}^{n-s}\right)(\rho)$ качественно совпадает с видом эффективного потенциала кулоновского поля $U_c(\rho)$ при $Z \le 119$ (см. рис. 1). Это свидетельствует о возможности существования стационарных связанных состояний квантово-механических частиц в поле голой сингулярности Райсснера–Нордстрема.

Этот вывод подтверждает вычисления В. Джунушалиева [26], проведенные для дираковских частиц, и выводы авторов [27], сделанные для движения бесспиновых частиц.

Заключение

Анализ эффективных потенциалов уравнения Дирака в статических центрально - симметричных гравитационных полях позволяет сделать следующие выводы:

1. Для всех рассмотренных метрик, допускающих горизонты событий, движение квантово-механических частиц осуществляется в режиме «падения» на соответствующие горизонты событий. В этом режиме частицы не могут пересекать горизонты событий рассматриваемых метрик, что полностью согласуется с ограничениями областей определения волновых функций, накладываемыми принципом причинности Гильберта.

2. Отсутствие режима «падения» частиц на горизонт событий осуществляется в единственном случае экстремального поля Райсснера–Нордстрема $\left(\alpha = \alpha_Q;\ \rho_+ = \rho_- = \alpha\right)$ для решения $\varepsilon = \frac{\alpha_{em}}{\alpha}$, найденного авторами [25]. В этом случае при выполнении условия (62) нормировочный интеграл является сходящимся, а волновые функции уравнения Дирака обращаются в нуль на единственном горизонте событий $\rho_+ = \rho_- = \alpha$. Последнее обстоятельство соответствует принципу причинности Гильберта, запрещающему материальному телу находиться в области с $g_{00} \le 0$.

Вне горизонта событий для связанных состояний частиц с положительной энергией должно выполняться условие $\alpha^{em} < \alpha$. В этом случае поведение эффективного потенциала (60) вне горизонта событий приводит к отсутствию существования стационарных связанных состояний дираковских частиц.

3. Для случая голой сингулярности поля Райсснера-Нордстрема $\left(\alpha^2 < \alpha_Q^2\right)$ внешний и внутренний горизонты событий отсутствуют, вид эффективного потенциала (65) показывает возможность существования стационарных связанных состояний квантово-механических частиц. Этот вывод согласуется с результатами вычислений авторов [26, 27].

В существующих монографиях и учебниках по релятивистской квантовой механике при реализации условий «падения» квантово-механических частиц на центр констатируется невозможность дальнейшего рассмотрения их поведения в рамках одночастичной теории из-за возникающего в этих условиях спонтанного рождения пар «частица – античастица» (см., например, [28]). Однако в работах [21, 22] применительно к движению электронов в кулоновском поле тяжелых ядер с $Z > 137$ показано, что и в этом случае, когда реализуется режим «падения на центр», можно математически корректно сформулировать решение квантово-механических проблем в рамках одночастичной релятивистской квантовой теории. В результате в [21, 22] для кулоновских потенциалов с любыми значениями Z были найдены параметрические семейства релятивистских самосопряженных гамильтонианов уравнений Дирака. Для выделения из этих семейств единственного гамильтониана необходимо дополнительное физическое условие. Таким условием для данной проблемы явился учет конечных радиусов ядер [29–31].

Очевидно, что подход работ [21, 22] можно применить к рассмотрению квантовой механики частиц в стационарных центрально-симметричных гравитационных полях. В последующей работе мы покажем как можно, применяя процедуру регуляризации решений в анализируемых метриках с горизонтами событий и выполняя принцип причинности Гильберта, подойти к решению проблемы существования стационарных связанных состояний квантово-механических частиц во внешних стационарных центрально-симметричных гравитационных полях.

Авторы благодарят профессора П. Физиева за стимулирующие обсуждения в начальной стадии нашей работы над статьей и А. Л. Новоселову за существенную техническую помощь в подготовке статьи.

Список литературы

1. Hilbert D. Math.Ann., Bd 92, S.1-32 (1924) [D.Hilbert, Collected Papers, v.2, 370-398, Factorial, Moscow, 1998 (in Russian)].

2. Landau L. D. and Lifshitz E. M. The Field Theory, Fizmatlit, Moscow (2006) (in Russian) [L. D. Landau and E. M. Lifshits. The Classical Theory of Fields, Pergamon Press, Oxford (1975)].

3. Schwarzschild K. Sitzber. Dent. Akad. Wiss. Berlin, 189 – 196 (1916).

4. Eddington A. S. The Mathematical Theory of Relativity (Cambridge University Press, 1924).

5. Logunov A. A., Mestvirishvili M. A. Relativistic gravitation theory. Moscow: Nauka (1989) (in Russian).

6. Reissner H. // Ann. Phys. 50, 106 (1916).

7. Nordstroem C. // Proc. K. Akad. Wet. Amsterdam. 20, 1238 (1918).

8. Arminjon A., arxiv: 1211.1855v1 [gr-qc].

9. Schwinger J. // Phys. Rev. 130, 800 (1963).

10. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. // Phys. Rev. **D**83, P.105002 (2011); arxiv: 1102.4067 [gr-qc], [hep-th].

11. Gorbatenko M.V., Neznamov V.P. // Journal of Modern Physics, 6, 303-326 (2015); arxiv: 1107.0844 [gr-qc].

12. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P., arxiv: 1404.2085 [gr-qc].

13. Eddington A. S. // Nature 113, 192 (1924).

14. Finkelstein D. // Phys. Rev. 110, 965 (1958).

15. Painleve P., Acad C. R. // Sci. (Paris) 173, 677 (1921).

16. Gullstrand A. Arkiv. Mat. Astron. Fys. 16, 1 (1922).

17. Lemaitre G. // Ann. Soc. Sci. Bruxelles, A53, 51 (1933).

18. Kruskal M. // Phys. Rev. 119, 1743 (1960).

19. Dolan S. R. Trinity Hall and Astrophysics Group, Cavendish Laboratory. Dissertation, 2006.

20. Landau L. D., Lifshitz E. M. Quantum Mechanics. Nonrelativistic Theory, Fizmatlit, Moscow (1963) (in Russian) [L.D.Landau and E.M.Lifshits. Quantum Mechanics. Nonrelativistic Theory, Pergamon Press, Oxford (1965)].

21. Воронов Б. Л., Гитман Д. М., Тютин И. В. // ТМФ 150, 41-84 (2007).

22. Gitman D. M., Levin A. D., Tyutin I. V., Voronov B. L., arxiv:1112.2648v4 [math-ph].

23. Obukhov, Yu.N. (2001) *Phys. Rev. Lett.* 86, 192; (2002) *Forschr. Phys.* 50, 711.

24. Gorbatenko M.V., Neznamov V.P., arxiv: 1302.2557 [gr-qc].

25. Докучаев В. И., Ерошенко Ю. Н. // ЖЭТФ. 2013. Т. 144. Вып. 1(7). С. 85–91.

26. Dzhunushaliev V., arxiv: 1205.5100v2 [gr-qc].

27. Gladush V. D., Kulikov D. A., arxiv: 1305.0661v1 [gr-qc].

28. Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Квантовая электродинамика. М.: Физматлит, 1989.

29. Pomeranchuk I., Smorodinsky Ya. // J. Phys. USSR 9, 97 (1945).

30. Зельдович Я. Б., Попов В. С. // УФН 105, 403 (1971). [Zeldovich Ya. B., Popov V.S., Sov. Phys. Usp. 14, 673 (1972)].

31. Pieper W., Greiner W. // Z.Phys. 218, 327 (1969).

Статья поступила в редакцию 07.04.2015