

ТЕРМОФЛУКТУАЦИОННАЯ КИНЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОТКОЛЬНОГО РАЗРУШЕНИЯ

С. В. Михайлов

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Предложена формулировка термофлуктуационной кинетической модели откольного разрушения с учетом в кинетическом уравнении вязкости, поверхностного натяжения и упругопластических свойств материала. Формулировка по возможности упрощена для облегчения введения модели в расчетные методики. В модель входят три эмпирических параметра, помимо параметров сплошного материала.

Ключевые слова: кинетическая модель, ударная волна, откол, разрушение, термофлуктуации, поврежденность.

Введение

В докладе [1] изложена формулировка и результаты применения кинетической интегро-экспоненциальной модели (ИЭМ) откольного разрушения металлов в высокоинтенсивных ударно-волновых процессах. Результаты расчетов, представленные в [1], выявили весьма малые значения эмпирических констант $\xi \sim 10^{-4} \div 10^{-9}$ для объемного варианта модели ИЭМ*. Принятая в расчетах величина скорости роста пор $v = \xi\sigma/(\rho c)$ при $\xi = 1$ соответствует массовой скорости вещества за ударной волной, возникающей в момент разрыва сплошности в материале. Ничтожно малые по сравнению с единицей эмпирические значения параметра ξ наводили на мысль о неполной адекватности представленного в [1] варианта модели. Данное обстоятельство требовало дополнительного рассмотрения и послужило отправной точкой проведенного в данной работе исследования.

В разделе 1 изложены основные положения опубликованного в [1] варианта модели ИЭМ. В разделе 2 рассмотрены этапы модернизации интегро-экспоненциальной модели. В разделе 3 в гидродинамическом приближении с учетом вязкости и поверхностного натяжения исследованы закономерности развития возникающих в ходе термофлуктуаций микропор в растягиваемом материале. Там же сформулирован способ учета в законе развития микропоры упругопластических свойств материала.

В разделе 4 приводятся итоговые результаты проведенного рассмотрения.

В Приложениях приведен ряд вспомогательных результатов:

в Приложении 1 – оценка взаимовлияния пор на скорость их расширения;

в Приложении 2 – условие минимума скорости расширения пор;

в Приложении 3 – соотношение для расчета размера микропор в точке минимума скорости расширения микропоры;

в Приложении 4 – решение уравнения расширения микропоры вблизи минимума скорости расширения для случая стационарных или квазистационарных параметров среды;

в Приложении 5 – оценка времени достижения минимума скорости расширения одиночной микропоры.

1. Основные положения модели ИЭМ

В основу модели ИЭМ [1] заложен термофлуктуационный механизм возникновения микропор под действием растягивающих напряжений. Уравнения для поврежденности материала выглядят следующим образом:

$$\omega(t) = 4\pi \int_0^t \frac{dN(t')}{dt} \left\{ \int_{t'}^t \nu(t'' - t') \left[\int_0^{t'' - t'} \nu(t''') dt''' \right]^2 dt'' \right\} dt' =$$

* Для алюминия $\xi \sim 10^{-6}$.

$$= 4\pi \int_0^t \frac{dN(t')}{dt} \left\{ \int_0^{t-t'} v(t'') \left[\int_0^{t''} v(t''') dt''' \right]^2 dt'' \right\} dt'. \quad (1)$$

Из уравнения (1) видно, что в модели учитывается последовательное вступление в процесс растяжения вновь возникающих пор. В то же время вклад в поврежденность начального объема возникающих пор в данной формулировке модели не учтен. Через $v(t)$ обозначена скорость роста радиуса микропоры. В рассматриваемом варианте модели $v(t) = \xi \sigma / (\rho_s c_s)$, где σ – нормальное напряжение в точке возникновения поры перед моментом ее возникновения, $\rho_s c_s$ – произведение текущих плотности и скорости звука в сплошном материале, ξ – эмпирическая константа. В фигурных скобках стоит объем одной микрополости (деленный на 4π), образовавшейся в момент t . Величина $\omega(t)$ – безразмерна и определяется как отношение суммарного объема пор к полному объему поврежденного материала. При достижении предельной величины поврежденности $\omega(t) = \omega_{кр}$ в рамках модели происходит макроразрушение (в этот момент в данной счетной ячейке зануляется продольное растягивающее напряжение, а также предел прочности на разрыв и предел текучести материала).

Входящая в уравнение (1) величина $\frac{dN(t)}{dt}$ представляет собой число термофлуктуационных микрополостей, возникающих в единице объема в единицу времени, и выражается следующим образом:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{n(t)}{\tau_0} \exp \frac{-W_{фл} A}{R_g T}, \quad (2)$$

где $n(t) = \rho_s(t)/m_a$ – объемная плотность атомов вещества, m_a – масса атома, $\rho_s(t)$ – текущая плотность сплошного материала, R_g – газовая постоянная, A – атомный (молекулярный) вес материала, T – температура. Параметр τ_0 – период собственных колебаний атома.

Мерой вероятности малых флуктуаций в макроскопической системе является работа $W_{фл}$, которую надо совершить для перевода ее в другое состояние. С другой стороны, мерой работы при термо-изобарическом процессе, каковым является

термофлуктуация, является термодинамический потенциал Гиббса [2]. Поэтому

$$W_{фл} = F_0 + E + PV - TS = F_0 + F + PV, \quad (3)$$

где E – удельная внутренняя энергия, P – давление, V – удельный объем, S – энтропия, F – свободная энергия системы, а F_0 – работа на разрыв связи между атомами при нулевых давлении и температуре. Величина F_0 является эмпирическим параметром модели. Здесь и далее все термодинамические характеристики относятся к *поврежденному* материалу, так как в модели введено влияние поврежденности на уравнение состояния материала.

Учет влияния развития поврежденности материала на его термодинамические свойства проводится следующим образом [12]:

$$P(\rho, E, \omega) = (1 - \omega) P_s(\rho_s, E_s) = (1 - \omega) P_s \left(\frac{\rho}{(1 - \omega)}, E \right),$$

где $P_s(\rho_s, E_s)$ – уравнение состояния сплошного материала, $\rho_s = \frac{\rho}{(1 - \omega)}$ и полагается $E_s = E$.

2. Модернизация модели ИЭМ

2.1. Учет вклада в поврежденность начального объема возникающих микропор

Формулу (1) для объемного варианта модели можно представить в виде

$$\omega(t) = \int_0^t \frac{dN(\tau)}{dt} V_n(\tau, t - \tau) d\tau, \quad (4)$$

где $V_n(\tau, t - \tau)$ – объем развивающейся сферической поры, которая начала развиваться в момент τ . Под входящей в (2) величиной $n(t)$ будем теперь подразумевать плотность атомов поврежденного вещества: $n(t) = n_s(t)[1 - \omega(t)]$, причем $n_s(t)$ – плотность атомов сплошного материала.

Дифференцируя (4) по времени, имеем:

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} &= \frac{dN(t)}{dt} V_n(t, 0) + \int_0^t \frac{dN(\tau)}{dt} \frac{dV_n(\tau, t - \tau)}{dt} d\tau = \\ &= \frac{dN(t)}{dt} V_n(t, 0) - \int_0^t \frac{dN(\tau)}{dt} \frac{\partial V_n(\tau, t - \tau)}{\partial(\tau - t)} d\tau. \end{aligned} \quad (5)$$

Подчеркнем во избежание путаницы, что $V_n(t, 0)$ – начальный объем полости, возникающей в момент t , а $V_n(0, t)$ – объем полости, возникшей в момент $t = 0$ и развивавшейся с момента $t = 0$ до момента t .

2.2. Учет ограничения на размеры возникающих микропор

Входящая в выражение (2) вероятность термофлуктуационного возникновения микрополости

за одно термическое колебание $\exp\frac{-W_{\text{фл}}(t)A}{R_{\Gamma}T(t)}$ со-

ответствует разрыву одной связи между атомами. При разрыве одной связи возникает микрополость такого малого размера, что поверхностное натяжение ее тут же схлопывает. Как показано в Приложении 2, радиус микрополости, которая не схлопывается, равен $R_{\min}(t) = 2\sigma_{\text{пов}}/P(t)$. Заметим, что для одиночной микрополости здесь под $P(t)$ понимается давление в сплошном материале. Однако чтобы в рассматриваемой модели учесть этап взаимовлияния пор, под $P(t)$ надо подразумевать давление в поврежденном веществе. При малых растягивающих давлениях $P(t)$ и/или больших поверхностных натяжениях минимальный размер $R_{\min}(t)$ может быть достаточно велик в том смысле, что он должен соответствовать достаточно большому числу порванных связей q между атомами. Тогда вероятность термофлуктуационного возникновения микрополости в единицу времени должна записываться

в виде $\frac{1}{\tau_0} \exp\frac{-q(t)W_{\text{фл}}A}{R_{\Gamma}T}$, а минимальное число

порванных связей $q_{\min}(t) = 4\pi R_{\min}^2(t)n_s^{2/3}(t)/2$. Например для алюминия $q_{\min}(0) \approx 20$. Поскольку минимальное число разорванных связей между атомами $\gg 1$, то считаем возможным воспользоваться в оценках развития возникающих термофлуктуационных микрополостей гидродинамическим приближением (см. раздел 3).

Таким образом, в (2) вместо $\frac{1}{\tau_0} \exp\frac{-W_{\text{фл}}A}{R_{\Gamma}T}$

нужно подставить вероятность разрыва минимально допустимого числа связей

$$\frac{1}{\tau_0} \exp\frac{-q_{\min}(\tau)W_{\text{фл}}A}{R_{\Gamma}T} = \frac{1}{\tau_0} \exp\frac{-8\pi\sigma_{\text{пов}}^2 n_s^{2/3}(\tau)W_{\text{фл}}A}{P^2(\tau)R_{\Gamma}T}.$$

В эту вероятность входит следующее отношение параметров повреждаемого материала, которое, вообще говоря, зависит от уровня набранной поврежденности:

$$\frac{n_s^{2/3}(\tau)}{P^2(\tau)} = \frac{n_s^{2/3}(\tau)}{[1-\omega(\tau)]^2 P_s^2(\tau)}. \quad (6)$$

Отношение параметров сплошной компоненты повреждаемого материала $\frac{n_s^{2/3}(\tau)}{P_s^2(\tau)}$ квазистационарно на фоне быстрого изменения поврежденности ω .

А с учетом того [3], что поврежденность меняется в ограниченных пределах $0 \leq \omega \leq \omega_{\text{кр}} \leq 0,3$, в (6)

$$1 \leq \frac{1}{[1-\omega(\tau)]^2} \leq \frac{1}{(1-\omega_{\text{кр}})^2} \leq 2.$$

2.3. Учет полного спектра размеров возникающих микропор

2.3.1. Уравнения для поврежденности

В реальности возможно возникновение полного спектра размеров пор с $R_0 \geq R_{\min}(t)$, соответствующих разрыву $q(t) = 4\pi R_0^2 n_s^{2/3}(t)/2$ связей. Только при достаточно больших показателях экспоненты $W_{\text{фл}}A/R_{\Gamma}T > 1$ действительно можно ограничиться лишь первым членом из этого спектра с $R_0 = R_{\min}(t)$.

В более общем случае вместо уравнения (4) надо записать

$$\begin{aligned} \omega(t) &= \int_0^t \sum_{q=q_0(\tau)}^{\infty} \frac{dN_q(\tau)}{dt} V_q(\tau, t-\tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{\tau_0} \int_0^t n(\tau) \sum_{q=q_0(\tau)}^{\infty} V_q(\tau, t-\tau) \exp\frac{-qW_{\text{фл}}A}{R_{\Gamma}T(\tau)} d\tau, \quad (7) \end{aligned}$$

где $\omega_q(\tau, t-\tau) \equiv n(t-\tau)V_q(\tau, t-\tau)$, а

$$V_q(\tau, t-\tau) = \frac{4}{3} \pi [R_{0q}(\tau) + \int_{\tau}^t v_q(\tau, t') dt']^3, \quad (8)$$

причем $v_q(\tau, t')$ – скорость расширения микрополости, а начальный радиус полости в момент ее возникновения определяется из соотношения $q(\tau) = 4\pi R_{0q}^2(\tau) n_s^{2/3}(\tau)/2$, откуда

$$R_{0q}(\tau) = \frac{1}{n_s^{1/3}(\tau)} \sqrt{\frac{q}{2\pi}}. \quad (9)$$

Суммирование в (7) проводится по всем возможным числам разорванных связей q от q_0 до ∞ , где $q_0(\tau) \equiv \max\{1, q_{\min}(\tau)\}$.

Таким образом, вместо (5) получаем уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} &= \sum_{q=q_0(t)}^{\infty} \frac{dN_q(t)}{dt} V_q(t,0) + \int_0^t \sum_{q=q_0(\tau)}^{\infty} \frac{dN_q(\tau)}{dt} \frac{dV_q(\tau,t-\tau)}{dt} d\tau = \\ &= \frac{n(t)}{\tau_0} \sum_{q=q_0(t)}^{\infty} V_q(t,0) \exp\left(-\frac{qW_{\text{фл}}A}{R_{\Gamma}T(t)}\right) + \\ &+ \frac{4\pi}{\tau_0} \int_0^t n(\tau) \sum_{q=q_0(\tau)}^{\infty} R_q^2(\tau,t-\tau) v_q(\tau,t-\tau) \exp\left(-\frac{qW_{\text{фл}}A}{R_{\Gamma}T(\tau)}\right) d\tau. \end{aligned}$$

3.2.2. Суммирование по числу разорванных связей

Заменяем суммирование по q в (7) на интегрирование и применим метод перевала для приближенного вычисления суммы по q :

$$\begin{aligned} \sum_{q=q_0(\tau)}^{\infty} \frac{dN_q(\tau)}{dt} V_q(\tau,t-\tau) &= \\ &= \frac{n(\tau)}{\tau_0} \sum_{q=q_0(\tau)}^{\infty} V_q(\tau,t-\tau) \exp\left(-\frac{qW_{\text{фл}}A}{R_{\Gamma}T(\tau)}\right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{n(\tau)}{\tau_0} \int_{q_0(\tau)}^{\infty} V_q(\tau,t-\tau) \exp\left(-\frac{qW_{\text{фл}}A}{R_{\Gamma}T(\tau)}\right) dq = \\ &= \frac{n(\tau)}{\tau_0} \int_{q_0(\tau)}^{\infty} \exp\left[\ln V_q(\tau,t-\tau) - \frac{qW_{\text{фл}}A}{R_{\Gamma}T(\tau)}\right] dq. \end{aligned}$$

Первая производная от показателя экспоненты в точке экстремума дает

$$\frac{dV_{q_3}}{dq} = V_{q_3} \frac{W_{\text{фл}}A}{R_{\Gamma}T}, \quad (10)$$

откуда и получаем величину $q_3(\tau)$ в точке экстремума. Вторая производная в точке экстремума равна

$$\frac{d^2V_{q_3}}{dq^2} \Big/ V_{q_3} - \left(\frac{W_{\text{фл}}A}{R_{\Gamma}T} \right)^2.$$

При этом в точке максимума она должна быть меньше нуля. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{q_0(\tau)}^{\infty} \exp\left[\ln V_q(\tau,t-\tau) - \frac{qW_{\text{фл}}A}{R_{\Gamma}T(\tau)}\right] dq &\approx \\ \approx V_{q_m}(\tau,t-\tau) \exp\left(-\frac{q_m W_{\text{фл}}A}{R_{\Gamma}T(\tau)}\right) \int_{q_0(\tau)}^{\infty} \exp\left\{-\left[\left(\frac{W_{\text{фл}}A}{R_{\Gamma}T}\right)^2 - \frac{d^2V_{q_m}}{dq^2}\right] \frac{(q-q_m)^2}{2}\right\} dq &= \\ = V_{q_m}(\tau,t-\tau) \exp\left(-\frac{q_m W_{\text{фл}}A}{R_{\Gamma}T(\tau)}\right) \frac{1}{q_m \sqrt{\left(\frac{W_{\text{фл}}A}{R_{\Gamma}T}\right)^2 - \frac{d^2V_{q_m}}{dq^2}}} \int_{-\sqrt{z_m}}^{\infty} \exp\left\{-\frac{\sigma^2}{2}\right\} d\sigma, \end{aligned}$$

где $\sigma(\tau) \equiv \sqrt{z_m(\tau)} \left[\frac{q}{q_m(\tau)} - 1 \right]$ и $z_m(\tau) \equiv$

$$\begin{aligned} &\equiv \left[\left(\frac{W_{\text{фл}}A}{R_{\Gamma}T} \right)^2 - \frac{d^2V_{q_m}}{dq^2} \right] q_m^2(\tau). \text{ Поэтому} \\ &\sum_{q=q_0(\tau)}^{\infty} \frac{dN_q(\tau)}{dt} V_q(\tau,t-\tau) \approx \\ &\approx \frac{n(\tau)}{\tau_0} V_{q_m}(\tau,t-\tau) \exp\left(-\frac{q_m W_{\text{фл}}A}{R_{\Gamma}T}\right) \sqrt{\frac{\pi}{2z_m}} \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{z_m}{\sqrt{2}}\right) \right] \end{aligned}$$

где $\operatorname{erf}(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx$ – интеграл ошибок, а

$$q_m(\tau) \equiv \max\{1, q_3(\tau)\}. \quad (11)$$

Значит, интегральное уравнение (7) для $\omega(t)$ приближенно переписывается в виде

$$\omega(t) \approx \frac{1}{\tau_0} \int_0^t n(\tau) V_{q_m}(\tau,t-\tau) \exp\left(-\frac{q_m W_{\text{фл}}A}{R_{\Gamma}T(\tau)}\right) \sqrt{\frac{\pi}{2z_m(\tau)}} \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{z_m}{\sqrt{2}}\right) \right] d\tau, \quad (12)$$

где $q_m(\tau)$ берется из (11).

3. Объем развивающейся микропоры

В приближенное интегральное уравнение (12) входит объем развивающейся микропоры (8), который зависит от скорости расширения микрополости $v_q(\tau, t)$ и начального радиуса (9). Рассмотрим уравнение развития сферической поры в вязкой сплошной среде с поверхностным натяжением [4]:

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 + \frac{4\eta}{\rho R}\dot{R} + \frac{2\sigma_{\text{пов}}}{\rho R} = \frac{P}{\rho}. \quad (13)$$

Здесь R – радиус микрополости, $\dot{R} \equiv \frac{dR}{dt} \equiv v(t)$ – скорость расширения полости, η – коэффициент вязкости материала, ρ – плотность вещества, $\sigma_{\text{пов}}$ – коэффициент поверхностного натяжения, P – модуль растягивающего давления на бесконечности. Заметим, что в рамках модели, учитывающей этап взаимовлияния пор, в (13) в качестве давления надо брать давление в повреждаемом (разрушаемом) материале, а плотность – в сплошном*: $P \rightarrow (1-\omega)P_s$ и $\rho \rightarrow \rho_s$! Давление P_s и плотность ρ_s зависят, вообще говоря, от времени, так же, впрочем, как и коэффициенты вязкости и поверхностного натя-

* Несколько иной подход изложен в Приложении

жения. Однако эти зависимости можно считать квазистационарными на фоне относительно быстрого роста $R(t)$ и поврежденности в целом. Учитывая относительно малый диапазон изменения множителя $0,7 \leq (1-\omega) \leq 1$, далее для простоты в ряде случаев будем полагать $P \approx P_s$.

Заметим, что в (13) нетрудно ввести учет сдвиговой прочности материала. Для этого вместо $P = (1-\omega)P_s$ в правой части нужно ввести

$$(P - 2/3Y_s) = (1 - \omega)P_s - 2/3Y_s \text{ при } 2G_sP/K_s < Y_s \text{ и} \\ (P - 4/3G_sP/K_s) = (1-\omega)P_s(1-4/3G_s/K_s) \text{ при } 2G_sP/K_s > Y_s,$$

где Y_s – предел текучести, а G_s и K_s – модули сдвига и объемного сжатия вещества в процессе растяжения микрополости.

Уравнение (13) нетрудно также превратить в

$$Rv \frac{dv}{dR} + \frac{3}{2}v^2 + \left(\frac{4\eta}{\rho R} \right)v + \frac{2\sigma_{\text{пов}}}{\rho R} = \frac{P}{\rho}. \quad (14)$$

При больших R решение этого уравнения выходит на чисто гидродинамический закон:

$$v \equiv v_{\text{гд}} \approx \sqrt{\frac{2P}{3\rho}}. \quad (15)$$

В точке экстремума скорость расширения поры

$$v_* = -\frac{4\eta}{3\rho R_*} + \sqrt{\left(\frac{4\eta}{3\rho R_*} \right)^2 - \frac{4\sigma_{\text{пов}}}{3\rho R_*} + \frac{2P}{3\rho}}. \quad (16)$$

Из этого соотношения видно, что вообще говоря, скорость v_* может оказаться как больше, так и меньше нуля. Однако, как показано в Приложении 2, минимуму соответствуют положительные v_* . Здесь v_* и R_* – значения скорости и радиуса полости в момент достижения минимума скорости. Для того чтобы возникшая в результате термофлуктуации полость могла расти, ее начальный размер R_0 , очевидно, должен быть меньше R_* (см. Приложение 3).

Важную роль в уравнениях (13)–(14) играют вязкость и поверхностное натяжение (поверхностная энергия). Рассмотрим их влияние на скорость роста сферической микрополости на примере алюминия. Согласно результатам расчетов, представленным в [1], разогрев алюминиевых образцов в ударно-волновых опытах составлял $\sim 350\text{--}460 \text{ К} \sim 75\text{--}190 \text{ }^\circ\text{C}$. С одной стороны, это ниже температуры плавления алюминия ($659 \text{ }^\circ\text{C}$ [5]). С другой стороны, алюминий мог расплавиться в нагружающей ударной волне, а на разгрузке не успеть перейти обратно в твердую фазу. Поэтому фазовое состояние алюминия в момент откола, вообще говоря, не известно. В качестве исходного

для начала оценок значения поверхностной энергии алюминия возьмем приведенную в справочнике [6] для твердого алюминия при $180 \text{ }^\circ\text{C}$ величину $\sigma_{\text{пов}} = 1,14 \text{ Дж/м}^2 = 1,14 \cdot 10^{-7} \text{ кДж/см}^2$. Следует отметить, что приведенные в том же справочнике значения поверхностного натяжения жидкого алюминия ($0,915 \text{ Дж/м}^2$ при $660 \text{ }^\circ\text{C}$) близки к указанному выше значению для твердой фазы Al.

В статье [7] рассматривались закономерности расширения микропор в вязкопластичных материалах. По результатам проведенного там рассмотрения получено для алюминия значение вязкости при действии растягивающих нагрузок $\sim 30 \text{ Па}\cdot\text{с}$. Проведем численное решение уравнения (13) и рассмотрим характер развития пор в алюминии при $\sigma_{\text{пов}} = 1,14 \cdot 10^{-7} \text{ кДж/см}^2$ и $\eta = 1 \div 1000 \text{ Па}\cdot\text{с} = (1 \div 1000) \cdot 10^{-4} \text{ ГПа}\cdot 10^{-5} \text{ с}$. При этом будем задавать различные значения начальных радиусов R_0 пор, образующихся в результате термофлуктуаций. На рис. 1, а, б, в изображены результаты расчетов для вязкости $\eta = 1 \text{ Па}\cdot\text{с} = 10^{-4} \text{ ГПа}\cdot(10^{-5} \text{ с})$. При этом растягивающее давление в материале полагалось равным $P(t) = 5 \text{ ГПа} = \text{const}$, а интегрирование уравнения (13) проводилось в пределах по времени от 0 до $10^{-2} (10 \text{ мкс}) = 10^{-7} \text{ с}^*$ при начальном радиусе микрополости $R_0 = 4,6 \cdot 10^{-8} \text{ см} \approx R_{\text{кр}}$ (см. Приложения 2 и 3).

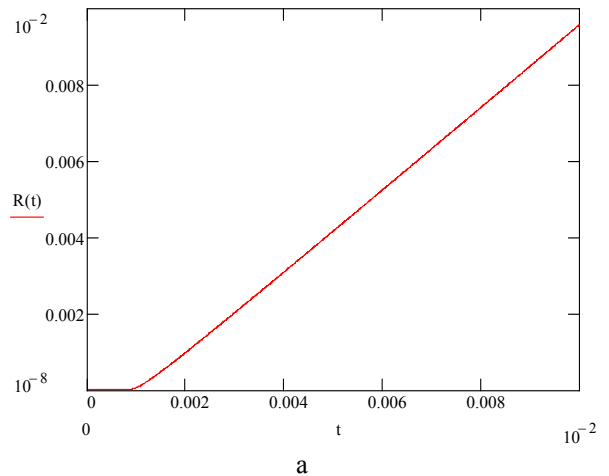


Рис. 1. Расчетные зависимости: а – радиуса микрополости $R(t)$ в см и б, в, г – скорости ее расширения $R1(t)$ в км/с от времени t (в единицах 10^{-5} с) для алюминия при $R_0 = 4,6 \cdot 10^{-8} \text{ см} \approx R_{\text{кр}}$ и $\eta = 1 \text{ Па}\cdot\text{с}$ (см. также с. 37)

* Согласно данным работы [11], время разрушения алюминия на больших растягивающих напряжениях ($\sim 5 \text{ ГПа}$) составляет $\sim 10^{-7} \text{ с}$.

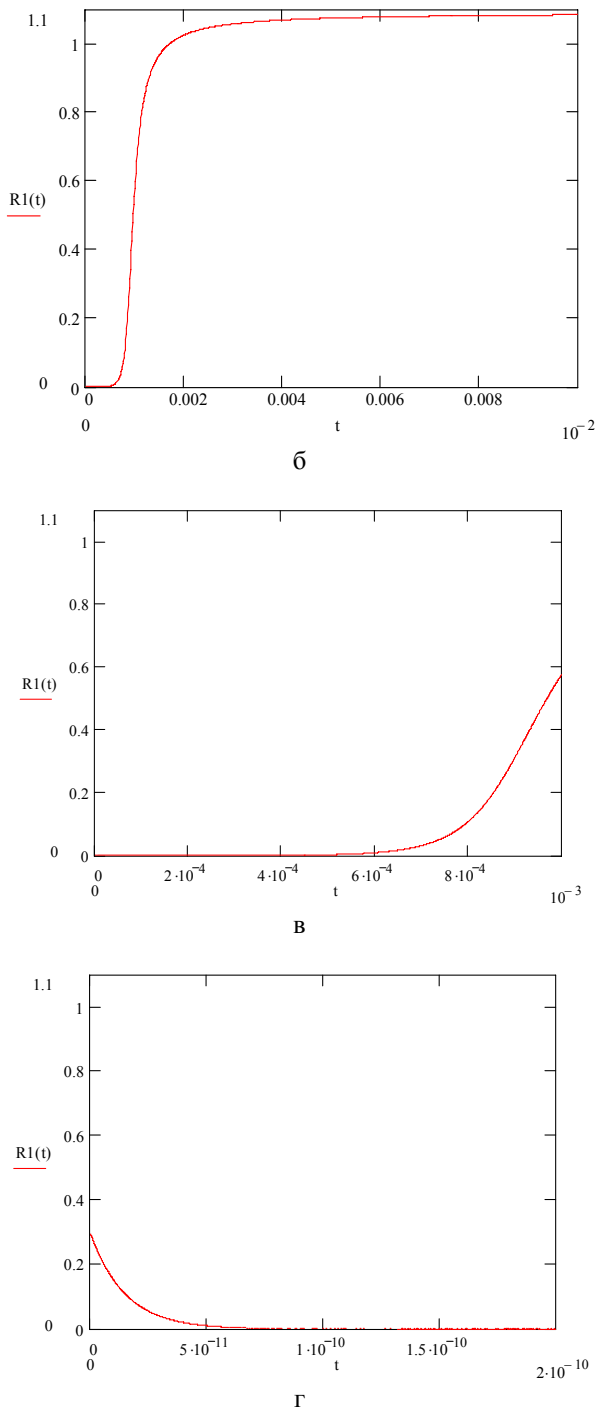


Рис. 1. Окончание

В варианте с величинами коэффициента вязкости алюминия $\eta = 1000$ Па·с и $R_0 = 4,6 \cdot 10^{-8}$ см $\approx R_{кр}$ возникшие микропоры вообще не расширяются: т. е. увеличение поврежденности в таком вязком материале может происходить лишь за счет их возникновения (нуклеации).

При $R_0 = 46 \cdot 10^{-8}$ см = $10R_{кр}$ и $\eta = 1$ Па·сек выход на гидродинамический (со скоростью $v_{гд}$) режим расширения полости при прочих равных ус-

ловиях происходит примерно вдвое быстрее, чем с $R_0 = 4,6 \cdot 10^{-8}$ см – см. рис. 2. При $R_0 = 10^{-4}$ см $\sim 10^3 R_{кр}$ и $\eta = 1$ Па·с решение уравнения (13) практически сразу выходит на гидродинамический закон (см. рис. 3). Как видно из рис. 1–3, при малых значениях коэффициента вязкости микрополости в алюминии подавляющую часть времени развиваются по гидродинамическому закону с $v_{гд}$ из (15).

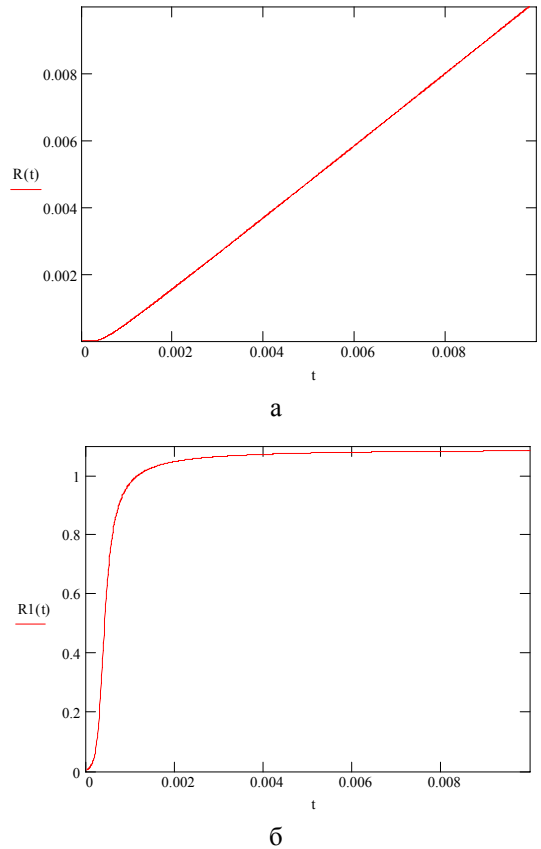
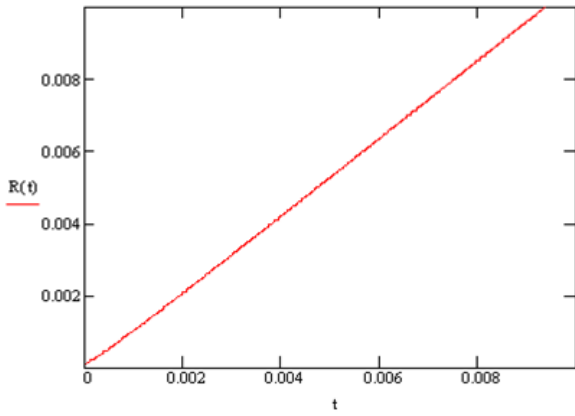


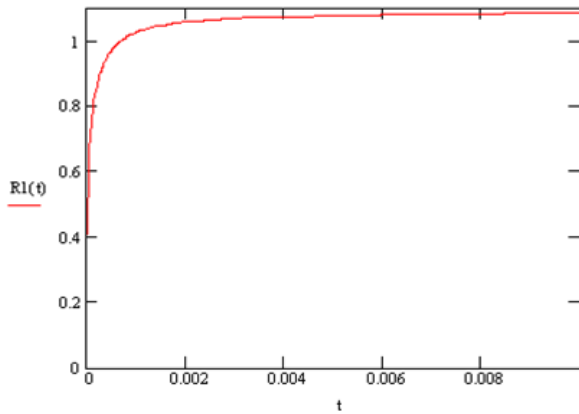
Рис. 2. Расчетные зависимости от t в 10^{-5} с для алюминия при $R_0 = 46 \cdot 10^{-8}$ см = $10R_{кр}$ и $\eta = 1$ Па·с: а – радиус микрополости, см; б – скорость расширения микрополости, км/с

Таким образом, характер развития микропор сильно зависит от величины коэффициента вязкости алюминия. Для простоты численной реализации модели можно ограничиться рассмотрением двух вариантов предельных законов: гидродинамического и закона расширения вблизи минимума скорости. Как следует из уравнения (13), вблизи минимума скорости – при малых dv/dt

$$v(t) \approx -\frac{4\eta}{3\rho R(t)} \pm \sqrt{\left(\frac{4\eta}{3\rho R(t)}\right)^2 - \frac{4\sigma_{пов}}{3\rho R(t)} + \frac{2P}{3\rho}}. \quad (17)$$



а



б

Рис. 3. Расчетные зависимости: а – радиуса микрополости $R(t)$ в см и б – скорости ее расширения $R1(t)$ в км/с от времени t в 10^{-5} с для алюминия при $R_0 = 10^{-4}$ см $\sim 10^3 R_{кр}$ и $\eta = 1$ Па·с

Решение дифференциального уравнения (17) относительно $R(t)$ слишком громоздко для численной реализации (см. Приложение 4). Поэтому, учитывая, что при малых вязкостях закон роста микрополости быстро выходит на гидродинамический предел, запишем (17) для случая больших коэффициентов вязкости:

$$v(t) \approx \frac{PR(t) - 2\sigma_{пов}}{4\eta} \quad (18)$$

Решение приближенного уравнения (18) записывается в виде

$$\begin{aligned} R(t, t') &= \exp\left[\int_{t'}^t \frac{P(t'')}{4\eta(t'')} dt''\right] \left[R_0(t') - \int_{t'}^t \frac{\sigma_{пов}(t'')}{2\eta(t'')} \exp\left(-\int_{t'}^{t''} \frac{P(t''')}{4\eta} dt'''\right) dt'' \right] = \\ &= R_0(t') \exp\left[\int_{t'}^t \frac{P(t'')}{4\eta(t'')} dt''\right] - \int_{t'}^t \frac{\sigma_{пов}(t'')}{2\eta(t'')} \exp\left(\int_{t'}^{t''} \frac{P(t''')}{4\eta} dt'''\right) dt'' \end{aligned}$$

(19)

Здесь $P(t)$ – давление в повреждаемом мате-

риале. Вязкость и поверхностное натяжение оказываются зависящими от времени через зависимость от температуры вещества.

4. Итоговые результаты

Итак, приближенное интегральное уравнение для поврежденности записывается в виде (12). Входящая туда величина q_3^* определяется по уравнению (10). Входящий в (10) объем полости определяется как

$$V_{q_m}(\tau, t - \tau) = \frac{4}{3} \pi [R_{q_m}(\tau, t - \tau)]^3 \quad (20)$$

4.1. Вариант модели для вязких материалов

При больших значениях коэффициента вязкости R_{q_m} в (20) определяется из (19):

$$\begin{aligned} R_{q_m}(\tau, t - \tau) &= R_{*q_m}(\tau) \exp\left[\int_{\tau}^t \frac{P(t'')}{4\eta(t'')} dt''\right] - \\ &- \int_{\tau}^t \frac{\sigma_{пов}(t'')}{2\eta(t'')} \exp\left[\int_{t''}^t \frac{P(t''')}{4\eta} dt'''\right] dt'' \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь $R_{*q_m}(\tau)$ – радиус микрополости в момент достижения минимума скорости ее расширения (определяется через начальное значение радиуса $R_{0q_m}(\tau)$ в Приложении 3). При этом в уравнении (12) интегрирование по τ осуществляется не от $\tau = 0$, а от $\tau = \Delta t_{min}$, определяемом в Приложении 5 (формула П.5.1).

Приближенно, пренебрегая** разницей между $R_{*q_m}(\tau)$ и $R_{0q_m}(\tau)$, можно переписать условие экстремума (10) в явном виде так:

$$\begin{aligned} &\frac{3}{2n_s^{1/3}(\tau) \sqrt{2\pi q_3(\tau)}} \times \\ &\times \frac{1}{n_s^{1/3}(\tau) \sqrt{\frac{q_3(\tau)}{2\pi}}} - \int_{\tau}^t \frac{\sigma_{пов}(t'')}{2\eta(t'')} \exp\left[\int_{t''}^t \frac{P(t''')}{4\eta} dt'''\right] dt'' \approx \\ &\approx \frac{W_{фл}(\tau) A}{R_r T(\tau)}, \end{aligned}$$

* Не путать с q_{min} и q_0 , определенными выше.

** Смотри по этому поводу Приложение 3.

где, согласно (9), $R_{0q_m}(\tau) = \frac{1}{n_s^{1/3}(\tau)} \sqrt{\frac{q_m(\tau)}{2\pi}}$, $q_m(\tau)$ определяется по (11), а $q_3(\tau)$ – из (10). Тогда

$$\sqrt{q_3(\tau)} \approx -\sqrt{\frac{\pi}{2} n_s^{1/3}(\tau)} \int_{\tau}^t \frac{\sigma_{\text{пов}}(t'')}{2\eta(t'')} \exp\left[\int_{t''}^{\tau} \frac{P(t''')}{4\eta} dt'''\right] dt'' +$$

$$+ \sqrt{\frac{\pi}{2} n_s^{2/3}(\tau) \left[\int_{\tau}^t \frac{\sigma_{\text{пов}}(t'')}{2\eta(t'')} \exp\left[\int_{t''}^{\tau} \frac{P(t''')}{4\eta} dt'''\right] dt'' \right]^2 + \frac{3R_{\Gamma}T(\tau)}{2W_{\text{фл}}(\tau)A}}.$$

Для *холодных* вязких материалов

$$\sqrt{q_3(\tau)} \sim \frac{3R_{\Gamma}T(\tau)}{\sqrt{8\pi W_{\text{фл}}(\tau)A}} \frac{1}{n_s^{1/3}(\tau) \int_{\tau}^t \frac{\sigma_{\text{пов}}(t'')}{2\eta(t'')} \exp\left[\int_{t''}^{\tau} \frac{P(t''')}{4\eta} dt'''\right] dt''} < 1,$$

поэтому по формуле (11) для них $q_m(\tau) = 1$. При больших разогревах $q_3(\tau) \sim \sqrt{\frac{3R_{\Gamma}T(\tau)}{2W_{\text{фл}}(\tau)A}}$.

4.2. Модель для «невязких» материалов

Если вязкость материала такова, что подавляющую часть времени поры развиваются по «гидродинамическому» закону (15), то входящий в кинетическое уравнение (12) объем (20) записывается в виде

$$V_{q_m(\tau)}(\tau, t - \tau) = \frac{4}{3} \pi [R_{0q_m(\tau)}(\tau) + \int_{\tau}^t \sqrt{\frac{2P(t')}{3\rho(t')}} dt']^3,$$

причем, согласно (9), $R_{0q_m}(\tau) = \frac{1}{n_s^{1/3}(\tau)} \sqrt{\frac{q_m(\tau)}{2\pi}}$, $q_m(\tau)$ определяется по (11), а $q_3(\tau)$ – из (10). При этом последнее уравнение можно переписать в явном виде:

$$\frac{3}{2\sqrt{q_3(\tau)}} \frac{1}{\sqrt{q_3(\tau)} + \sqrt{2\pi} n_s^{1/3}(\tau) \int_{\tau}^t \sqrt{\frac{2P(t')}{3\rho(t')}} dt'} = \frac{W_{\text{фл}}(\tau)A}{R_{\Gamma}T(\tau)},$$

откуда

$$\sqrt{q_3(\tau)} = -\sqrt{\frac{\pi}{2} n_s^{1/3}(\tau)} \int_{\tau}^t \sqrt{\frac{2P(t')}{3\rho(t')}} dt' +$$

$$+ \sqrt{\frac{\pi}{2} n_s^{2/3}(\tau) \left[\int_{\tau}^t \sqrt{\frac{2P(t')}{3\rho(t')}} dt' \right]^2 + \frac{3R_{\Gamma}T(\tau)}{2W_{\text{фл}}(\tau)A}}$$

Для *холодных* невязких материалов $\sqrt{q_3(\tau)} \sim \frac{3R_{\Gamma}T(\tau)}{\sqrt{8\pi W_{\text{фл}}(\tau)A}} \frac{1}{n_s^{1/3}(\tau) \int_{\tau}^t \sqrt{\frac{2P(t')}{3\rho(t')}} dt'} < 1$; поэтому по

формуле (11) для них $q_m(\tau) = 1$. При больших разогревах, как и для вязких материалов,

$$q_3(\tau) \sim \sqrt{\frac{3R_{\Gamma}T(\tau)}{2W_{\text{фл}}(\tau)A}}.$$

4.3. Комбинированный «вязкий-невязкий» вариант

Пусть через промежуток времени $\tau_{\text{гд}}$ после начала расширения скорость поры, определяемая по «вязкому» закону (18), оказывается равной «гидродинамической» скорости $v_{\text{гд}}$, т. е.

$$v(\tau, \tau_{\text{гд}}) \approx \frac{P(\tau + \tau_{\text{гд}})R_{q_m}(\tau, \tau_{\text{гд}}) - 2\sigma_{\text{пов}}(\tau + \tau_{\text{гд}})}{4\eta(\tau + \tau_{\text{гд}})} =$$

$$= \sqrt{\frac{2P(\tau + \tau_{\text{гд}})}{3\rho(\tau + \tau_{\text{гд}})}} \equiv v_{\text{гд}}.$$

Тогда в уравнении (12) в этот момент производим «переключение» с «вязкого» закона роста пор (21) на гидродинамический (15). После этого переключения, т. е. при $(t - \tau) > \tau_{\text{гд}}$, объем микрополости записывается в виде

$$V_{q_m(\tau)}(\tau, t - \tau) = \frac{4}{3} \pi [R_{q_m(\tau)}(\tau, \tau_{\text{гд}}) + \int_{\tau + \tau_{\text{гд}}}^t \sqrt{\frac{2P(t')}{3\rho(t')}} dt']^3.$$

При этом $R_{q_m}(\tau, \tau_{\text{гд}}) = R_{*q_m}(\tau) \exp\left[\int_{\tau}^{\tau + \tau_{\text{гд}}} \frac{P(t'')}{4\eta(t'')} dt''\right] -$

$$- \int_{\tau}^{\tau + \tau_{\text{гд}}} \frac{\sigma_{\text{пов}}(t'')}{2\eta(t'')} \exp\left[\int_{t''}^{\tau + \tau_{\text{гд}}} \frac{P(t''')}{4\eta} dt'''\right] dt''.$$

Условие экстремума (10) в этом случае переписывается так:

$$\sqrt{\frac{q_3(\tau)}{2\pi}} - n_s^{1/3}(\tau) \int_{\tau}^{\tau + \tau_{\text{гд}}} \frac{\sigma_{\text{пов}}(t'')}{2\eta(t'')} \exp\left[\int_{t''}^{\tau} \frac{P(t''')}{4\eta} dt'''\right] dt'' +$$

$$+ n_s^{1/3}(\tau) \exp\left[-\int_{\tau}^{\tau + \tau_{\text{гд}}} \frac{P(t'')}{4\eta(t'')} dt''\right] \int_{\tau + \tau_{\text{гд}}}^t \sqrt{\frac{2P(t')}{3\rho(t')}} dt' \approx$$

$$\approx \frac{3R_{\Gamma}T(\tau)}{2W_{\text{фл}}(\tau)A\sqrt{2\pi q_3(\tau)}}$$

Отсюда

$$\sqrt{q_3(\tau)} \approx -\sqrt{\frac{\pi}{2}} n_s^{1/3}(\tau) \left\{ \int_{\tau}^{\tau+\tau_{\text{гд}}} \frac{\sigma_{\text{пов}}(t'')}{2\eta(t'')} \exp\left[\int_{t''}^{\tau} \frac{P(t''')}{4\eta} dt'''\right] dt'' + \exp\left[-\int_{\tau}^{\tau+\tau_{\text{гд}}} \frac{P(t'')}{4\eta(t'')} dt''\right] \int_{\tau+\tau_{\text{гд}}}^t \sqrt{\frac{2P(t')}{3\rho(t')}} dt' \right\} +$$

$$+ \sqrt{\frac{\pi}{2}} n_s^{2/3}(\tau) \left[\int_{\tau}^{\tau+\tau_{\text{гд}}} \frac{\sigma_{\text{пов}}(t'')}{2\eta(t'')} \exp\left[\int_{t''}^{\tau} \frac{P(t''')}{4\eta} dt'''\right] dt'' + \exp\left[-\int_{\tau}^{\tau+\tau_{\text{гд}}} \frac{P(t'')}{4\eta(t'')} dt''\right] \int_{\tau+\tau_{\text{гд}}}^t \sqrt{\frac{2P(t')}{3\rho(t')}} dt' \right]^2 + \frac{3R_{\text{г}}T(\tau)}{2W_{\text{фл}}(\tau)A}.$$

При больших разогревах по-прежнему $q_3(\tau) \sim \sqrt{\frac{3R_{\text{г}}T(\tau)}{2W_{\text{фл}}(\tau)A}}$.

4.4. Параметры модели

Входящий в уравнение (12) период собственных колебаний атома τ_0 полагаем константой материала и берем из [8]. В случае учета упругопластических свойств вводятся соответствующие упругопластические параметры материала для процесса растяжения пор. Эмпирический параметр модели F_0 – работа на разрыв связи между атомами при нулевых давлении и температуре – входит в выражение для потенциала Гиббса (3). Критическое значение поврежденности $\omega_{\text{кр}}$, при достижении которого в рамках модели происходит макроразрушение, также будем считать эмпирическим параметром модели. «Запасной» эмпирический множитель ζ введем перед правой частью уравнения (12) на случай, если параметров F_0 и $\omega_{\text{кр}}$ «не хватит» для адекватного описания пространства экспериментальных данных.

Итого в предлагаемой модели, помимо констант материала, два эмпирических параметра модели и один «запасной» эмпирический множитель. Ожидается, что этот «запасной» множитель ζ окажется, в отличие от эмпирической константы ξ из доклада [1], намного ближе к единице.

Приложение 1

Оценка взаимовлияния пор на скорость их расширения

В разделе 3 обратное влияние накопленной поврежденности на скорость расширения микропоры предлагается учитывать в приближении «рассеянной поврежденности», подставляя в уравнения развития пор (13)–(14), (17)–(18) давление в повреждаемом материале. В настоящем Приложении описан другой способ учета взаимовлияния пор на их скорость расширения.

Вычислим поправку к скорости расширения одиночной микрополости, вызванную влиянием соседних пор. Как известно [9], в сферической геометрии радиальную скорость вещества в окрестности расширяющейся поры можно записать в виде $v(X,t) = v_s(t)R^2(t)/X^2$, где $v_s(t)$ – скорость расширения полости, вычисленная из уравнения (13) с давлением $P \rightarrow P_s$ для сплошного, неповрежденного вещества, $R(t)$ – радиус полости, X – расстояние от центра полости. Пусть центры соседних пор одинакового радиуса находятся друг от друга на расстоянии $L = 1/N^{1/3}$, где N – количество пор в единице объема. Тогда на стенку соседней полости приходит от соседней полости отрицательная добавка скорости, равная

$$\Delta v(L-R,t) = v_s(t)R^2(t)/(L-R)^2,$$

так что скорость расширения полости в этой зоне ее стенки оказывается равной

$$v_{\text{вл}}(t) = v_s(t)[1-R^2(t)/(L-R)^2].$$

Используем теперь очевидное выражение для поврежденности материала с порами одинакового размера:

$$\omega = 4\pi NR^3/3. \quad (\text{П.1.1})$$

Тогда

$$v_{\text{вл}}(t) = v_s(t) \left\{ 1 - \frac{[3\omega/(4\pi N)]^{2/3}}{[1/N^{1/3} - (3\omega)^{1/3}/(4\pi N)^{1/3}]^2} \right\} \approx v_s(t) \left\{ 1 - \frac{(0,24\omega)^{2/3}}{[1 - (0,24\omega)^{1/3}]^2} \right\} = v_s(t) \frac{1 - 2(0,24\omega)^{1/3}}{[1 - (0,24\omega)^{1/3}]^2}. \quad (\text{П.1.2})$$

Соотношение (П.1.2) получено для соседних *ближайших* точек соседних микрополостей. Из него видно, что при $\omega \approx 0,52$ скорость расширения поры в этой зоне зануляется. С другой стороны, из (П.1.1) видно, что эта поврежденность соответствует касанию соседних пор в соседних «кубиках» повреждаемого вещества. То есть при достижении поврежденности $\omega \approx 0,52$ начинается этап *коалесценции* – т. е. слияния пор. На этом этапе применять закон (13) сферического расширения поры, конечно же, некорректно.

Выражение (П.1.2) получено для поврежденного материала с порами одинакового размера, тогда как в экспериментах обычно наблюдается целый спектр пор разных размеров. В некоторых работах (например [3]) используется следующее распределение микропор по радиусам:

$$N(R) = N_0 \exp(-R/R_0), \quad (\text{П.1.3})$$

где N_0 – полное количество микропор в единице объема, $N(R)$ – количество микропор в единице объема с радиусами большими R , R_0 – характерный размер пор (параметр распределения). При этом для спектра (П.1.3)

$$\omega(t) = 8\pi N_0(t) R_0^3(t). \quad (\text{П.1.4})$$

Спектр вида (П.1.3) можно привести к такому эффективному радиусу $R_{\text{эф}}$, для которого, с одной стороны, поврежденность записывается в виде (П.1.1), а с другой – равна поврежденности из соотношения (П.1.4). То есть $8\pi N_0 R_0^3 = 4\pi N_0 R_{\text{эф}}^3/3$, откуда $R_{\text{эф}} = 1,82R_0$.

Из-за того что в соседних с плоскостью будущего откола сечениях по толщине разрушаемого образца накопление поврежденности несколько запаздывает, а в перпендикулярных к ним сечениях происходит одновременно, на этапе взаимодействия пор развивается *нарушение сферической симметрии расширения поры*: она должна вытягиваться в направлении распространения волны разрежения. Этот вывод подтверждается экспериментальными данными (например, [10]). Мы же, применяя закон (13) сферического расширения поры, как бы заменяем реальную пору *вписанной* в нее модельной сферической порой. Такая модельная сферическая пора имеет меньший объем, чем реальная, и соответствует *меньшей объемной поврежденности*, чем есть на самом деле. Однако для нас важно описать правильно *проекцию поврежденности* на плоскость будущего откола и начало слияния пор в плоскости будущего откола. С этой задачей представление с «вписанной» модельной порой с учетом (П.1.2) более менее справляется.

Приложение 2

Условие минимума скорости расширения пор

Для того чтобы экстремум скорости расширения пор, определяемый условием $dv/dt = 0$, был минимумом, необходимо, чтобы было $d^2v/dt^2 > 0$. Из уравнения (13) в точке экстремума скорости имеем

$$R_* \frac{d^2v}{dt^2} - \frac{4\eta}{\rho R_*^2} v_*^2 - \frac{2\sigma_{\text{нов}}}{\rho R_*^2} v_* = \frac{dP}{dt} = \frac{\partial P(t, \omega)}{\partial t} + \frac{\partial P(t, \omega)}{\partial \omega} \frac{d\omega}{dt}. \quad (\text{П.2.1})$$

Давление и плотность повреждаемого вещества зависят, во-первых, напрямую от времени за счет изменения во времени характеристик газодинамического течения, на фоне которого происходит набор поврежденности ω в разрушаемом материале. Характерные времена таких изменений намного больше времен кинетического процесса набора поврежденности, поэтому в рамках рассматриваемого кинетического уравнения частной производной по времени в правой части (П.2.1) можно пренебречь. С другой стороны, в рамках развиваемой модели в правой части уравнения (П.2.1) отношение P/ρ надо заменить на $P(t, \omega)/\rho_s(t) = (1-\omega)P_s(\rho_s, E_s)/\rho_s(t)$, так что

$$\frac{\partial P(t, \omega)}{\partial \omega} \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \frac{\partial P(t, \omega)}{\partial \omega} \frac{d\omega}{\rho_s(t)} = -\frac{P_s(t)}{\rho_s(t)} \frac{d\omega}{dt},$$

где P_s и ρ_s – давление и плотность сплошной компоненты разрушаемого материала, которые не зависят от поврежденности. Тогда из (П.2.1) получаем условие минимума скорости

$$\frac{d^2v}{dt^2} = \frac{4\eta}{\rho_s R_*^3} v_*^2 + \frac{2\sigma_{пов}}{\rho_s R_*^3} v_* - \frac{P_s(t)}{R_* \rho_s(t)} \frac{d\omega}{dt} > 0, \quad (\text{П.2.2})$$

откуда (отбрасывая заведомо отрицательную ветвь)

$$v_* > -\frac{\sigma_{пов}}{2\eta} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{пов}}{2\eta}\right)^2 + \frac{R_*^2 P_s}{4\eta} \frac{d\omega}{dt}} > 0.$$

Тогда из (16) следует, что радиус R_* в точке экстремума скорости, при котором не происходит «схлопывания» микрополости, должен быть заведомо больше критической величины, определяемой так:

$$R_* > R_{кр}(t) \equiv \frac{2\sigma_{пов}}{P(t)}.$$

Приложение 3

Размер микропор в точке минимума скорости расширения

Выразим размер R_* микрополости в момент достижения минимума скорости v_* через начальные значения радиуса R_0 и скорости расширения v_0 в момент возникновения полости. Для этого воспользуемся уравнением (14), введя новую функцию $F(R) \equiv R^3 v^2 / 2$. Тогда (14) перейдет в

$$\frac{dF}{dR} + \frac{4\eta}{\rho} \sqrt{\frac{2F}{R}} = \frac{R}{\rho} (PR - 2\sigma_{пов})$$

или

$$\frac{dF}{dR} = \frac{PR^2}{\rho} - \frac{2\sigma_{пов}R}{\rho} - \frac{4\eta}{\rho} \sqrt{\frac{2F}{R}} = \frac{PR^2}{\rho} - \frac{2\sigma_{пов}R}{\rho} - \frac{4\eta}{\rho} Rv(R). \quad (\text{П.3.1})$$

Для функции $v(R)$ используем следующее линейное приближение:

$$v \approx v_0 - \frac{v_0 - v_*}{R_* - R_0} (R - R_0) = \frac{R_* v_0 - R_0 v_*}{R_* - R_0} - \frac{v_0 - v_*}{R_* - R_0} R,$$

где нулевой нижний индекс соответствует начальным значениям радиуса и скорости, а индекс-звездочка – значениям в точке минимума скорости. Тогда можно получить приближенное решение уравнения (П.3.1):

$$F - F_0 \approx \frac{P(R^3 - R_0^3)}{3\rho} - \frac{\sigma_{пов}(R^2 - R_0^2)}{\rho} - \frac{2\eta}{\rho} \frac{R_* v_0 - R_0 v_*}{R_* - R_0} (R^2 - R_0^2) + \frac{4\eta}{3\rho} \frac{v_0 - v_*}{R_* - R_0} (R^3 - R_0^3).$$

Отсюда получаем соотношение для определения радиуса R_* в точке минимума скорости через значения начального радиуса R_0 :

$$R_*^3 v_*^2 / 2 - R_0^3 v_0^2 / 2 \approx \left(\frac{P}{3\rho} + \frac{4\eta}{3\rho} \frac{v_0 - v_*}{R_* - R_0}\right) (R_*^3 - R_0^3) - \left(\frac{\sigma_{пов}}{\rho} + \frac{2\eta}{\rho} \frac{R_* v_0 - R_0 v_*}{R_* - R_0}\right) (R_*^2 - R_0^2).$$

Здесь v_* выражается через R_* с помощью (16), а $v_0 = P/\rho_s c$, где P – давление в поврежденном материале, ρ_s – плотность сплошной компоненты повреждаемого материала. При $v_* \approx 0$

$$\begin{aligned} -R_0^3 v_0^2 / 2 \approx & \left(\frac{P\Delta R}{3\rho} + \frac{4\eta v_0}{3\rho}\right) (R_*^2 + R_* R_0 + R_0^2) - \left(\frac{\sigma_{пов}\Delta R}{\rho} + \frac{2\eta R_* v_0}{\rho}\right) (2R_0 + \Delta R) \approx \left(\frac{P\Delta R}{3\rho} + \frac{4\eta v_0}{3\rho}\right) [R_0^2 + R_0(R_0 + \Delta R) + \\ & + (R_0 + \Delta R)^2] - \left[\frac{\sigma_{пов}\Delta R}{\rho} + \frac{2\eta(R_0 + \Delta R)v_0}{\rho}\right] (2R_0 + \Delta R) \approx \left(\frac{P\Delta R}{3\rho} + \frac{4\eta v_0}{3\rho}\right) [3R_0^2 + 3R_0\Delta R + \Delta R^2] - \\ & - \left[\frac{\sigma_{пов}\Delta R}{\rho} + \frac{2\eta(R_0 + \Delta R)v_0}{\rho}\right] (2R_0 + \Delta R), \end{aligned}$$

где $\Delta R \equiv R_* - R_0$. При малых $\Delta R \ll R_0$

$$\begin{aligned}
 -R_0^3 v_0^2 / 2 &\approx \left(\frac{P\Delta R}{\rho} + \frac{4\eta v_0}{\rho} \right) [R_0^2 + R_0 \Delta R] - \left[\frac{\sigma_{пов} \Delta R}{\rho} + \frac{2\eta(R_0 + \Delta R)v_0}{\rho} \right] (2R_0 + \Delta R) \approx \\
 &\approx \left(\frac{P\Delta R}{\rho} + \frac{4\eta v_0}{\rho} \right) R_0^2 - \left[\frac{\sigma_{пов} \Delta R}{\rho} + \frac{2\eta R_0 v_0}{\rho} \right] 2R_0 + \left(\frac{P\Delta R}{\rho} + \frac{4\eta v_0}{\rho} \right) R_0 \Delta R - \left[\frac{\sigma_{пов} \Delta R}{\rho} + \frac{2\eta R_0 v_0}{\rho} \right] \Delta R - \\
 &- \frac{4\eta \Delta R v_0}{\rho} R_0 = \left(\frac{P}{\rho} R_0^2 - \frac{2\sigma_{пов} R_0}{\rho} \right) \Delta R + \left(\frac{PR_0}{\rho} - \frac{\sigma_{пов}}{\rho} \right) \Delta R^2 - \frac{2\eta R_0 v_0}{\rho} \Delta R = \\
 &= \frac{PR_0 - 2\sigma_{пов}}{\rho} R_0 \Delta R + \frac{PR_0 - 2\sigma_{пов}}{\rho} \Delta R^2 + \frac{\sigma_{пов}}{\rho} \Delta R^2 - \frac{2\eta R_0 v_0}{\rho} \Delta R \approx -\frac{P\Delta R R_0}{\rho} \Delta R - \frac{2\eta R_0 v_0}{\rho} \Delta R = \\
 &= -\left(\frac{P\Delta R}{\rho} + \frac{2\eta v_0}{\rho} \right) \Delta R R_0 \approx -\frac{2\eta v_0}{\rho} \Delta R R_0.
 \end{aligned}$$

Здесь, помимо прочего, учтено то, что согласно (16) при $v_* \approx 0$ разность $(PR_* - 2\sigma_{пов}) \approx 0$. Другими словами, при $v_* \approx 0$ $\Delta R \approx \frac{\rho v_0 R_0^2}{4\eta} \approx \frac{\rho v_0 R_*^2}{4\eta}$. Так, если для алюминия при $P=5$ ГПа и $\eta = 1$ Па·с $R_* = R_{кр} = 4,56 \cdot 10^{-8}$ см, то при $v_0 = 0,3$ км/с $\Delta R \approx 4 \cdot 10^{-12}$ см. Время достижения «нулевого» минимума скорости $\Delta t_{\min} \approx 2\Delta R/v_0 \approx 3 \cdot 10^{-11} (10^{-5} \text{ с}) = 3 \cdot 10^{-16}$ с.

Приложение 4

Решение уравнения (17) для случая стационарных или квазистационарных параметров среды

В случае стационарных коэффициентов при R решение уравнения (17) записывается в виде следующей квадратуры:

$$\begin{aligned}
 t(R) - \tau(R_*) &= \int_{R_*}^R \frac{3\rho R dR}{-4\eta + \sqrt{(4\eta)^2 - 12\sigma_{пов}\rho R + 6P\rho R^2}} = \frac{2\eta}{P} \ln \frac{PR - 2\sigma_{пов}}{PR_* - 2\sigma_{пов}} + \\
 &+ \frac{1}{2P} \sqrt{6\rho \frac{(PR - 2\sigma_{пов})^2}{P} + 6\rho \frac{2\sigma_{пов}}{P} (PR - 2\sigma_{пов}) + (4\eta)^2} - \frac{1}{2P} \sqrt{6\rho \frac{(PR_* - 2\sigma_{пов})^2}{P} + 6\rho \frac{2\sigma_{пов}}{P} (PR_* - 2\sigma_{пов}) + (4\eta)^2} + \\
 &+ \sigma_{пов} \sqrt{\frac{3\rho}{2P^3}} \ln \frac{\sqrt{4 \frac{(PR - 2\sigma_{пов})^2}{P^2} + \frac{8\sigma_{пов}}{P^2} (PR - 2\sigma_{пов}) + \frac{2}{3P\rho} (4\eta)^2} + \frac{2}{P} (PR - 2\sigma_{пов}) + \frac{2\sigma_{пов}}{P}}{\sqrt{4 \frac{(PR_* - 2\sigma_{пов})^2}{P^2} + \frac{8\sigma_{пов}}{P^2} (PR_* - 2\sigma_{пов}) + \frac{2}{3P\rho} (4\eta)^2} + \frac{2}{P} (PR_* - 2\sigma_{пов}) + \frac{2\sigma_{пов}}{P}}} + \\
 &+ \frac{2\eta}{P} \ln \left[\frac{4}{3} \eta \frac{\sqrt{6\rho \frac{(PR - 2\sigma_{пов})^2}{P} + 6\rho \frac{2\sigma_{пов}}{P} (PR - 2\sigma_{пов}) + (4\eta)^2}}{PR - 2\sigma_{пов}} + \frac{(4\eta)^2}{3(PR - 2\sigma_{пов})} + \frac{2\sigma_{пов}}{P} \right] - \\
 &- \frac{2\eta}{P} \ln \left[\frac{4}{3} \eta \frac{\sqrt{6\rho \frac{(PR_* - 2\sigma_{пов})^2}{P} + 6\rho \frac{2\sigma_{пов}}{P} (PR_* - 2\sigma_{пов}) + (4\eta)^2}}{PR_* - 2\sigma_{пов}} + \frac{(4\eta)^2}{3(PR_* - 2\sigma_{пов})} + \frac{2\sigma_{пов}}{P} \right],
 \end{aligned}$$

где R_* – значение радиуса полости в точке минимума скорости.

В рамках развиваемой модели разрушения входящее в полученное решение давление разрушаемого материала P никак нельзя признать квазистационарным, так как оно зависит от быстроменяющейся поврежденности: $P = (1 - \omega(t))P_s$. Однако множитель при квазистационарном давлении сплошной компоненты $0,7 \leq (1 - \omega(t)) \leq 1$ меняется в ограниченных пределах. В качестве ρ в этом решении надо брать квазистационарную плотность сплошной компоненты ρ_s . Поэтому полученное выше решение уравне-

ния (17) приближенно можно использовать в модели разрушения. Кроме того, оно может быть применено, если потребуется, к какому-либо критерию разрушения. Напомним, что во-первых, в критерии отсутствует обратное влияние поврежденности на давление и плотность материала. Во-вторых, как показано в [11], в акустическом приближении без обратного влияния поврежденности P_s и ρ_s в плоскости будущего откола стационарны, а значит в более точном гидродинамическом приближении можно признать их квазистационарными.

Приложение 5

Время достижения минимума скорости

Время Δt_{\min} достижения минимума скорости расширения микропоры оценим с помощью уравнения (13):

$$-\frac{v_0 - v_*}{\Delta t_{\min}} \sim \frac{P}{\rho} - \frac{3}{2R} v^2 - \frac{4\eta v}{\rho R^2} - \frac{2\sigma_{\text{пов}}}{\rho R^2} \sim \frac{P}{\rho} - \frac{4\eta}{\rho} \left(\frac{v}{R^2} \right)_{cp} \sim \frac{P}{\rho} - \frac{2\eta}{\rho} \left(\frac{v_0}{R_0^2} + \frac{v_*}{R_*^2} \right),$$

откуда

$$\Delta t_{\min} \sim \rho \frac{v_0 - v_*}{2\eta \left(\frac{v_0}{R_0^2} + \frac{v_*}{R_*^2} \right) - P} \sim \frac{\rho}{2\eta} \frac{v_0 - v_*}{\frac{v_0}{R_0^2} + \frac{v_*}{R_*^2}} < \frac{\rho}{2\eta} R_0^2. \quad (\text{П.5.1})$$

По данным статьи [11], для алюминия время разрушения на больших растягивающих давлениях $t_p \sim 10^{-7}$ с. Из (П.5.1) можно оценить, при каких начальных радиусах возникающих микропор время достижения минимума скорости оказывается сравнимым с временем разрушения:

$$\Delta t_p \sim \Delta t_{\min} < \frac{\rho}{2\eta} R_0^2, \text{ откуда } R_0 > \sqrt{\Delta t_p \frac{2\eta}{\rho}} \sim \sqrt{10^{-2} \frac{2 \cdot 10^{-4}}{2,8}} \sim 10^{-3} \text{ см} = 10^{-2} \text{ мм} = 10 \text{ мкм. То есть достаточ-}$$

но большие возникающие поры могут вообще не успевать достигать минимума скорости расширения за время разрушения! Размеру возникающей поры ~ 10 мкм соответствует число разорванных связей $q = 2\pi R_0^2 n^{2/3} \approx 6 \cdot 10^{-6} \cdot 6^{-1} \cdot 10^{16} \approx 10^{10}$. Вероятность возникновения микропор такого размера равна произведению 10^{10} вероятностей $\exp \frac{-W_{\text{фл}}(t)A}{R_1 T(t)}$ разрыва одной связи – т. е. исчезающе мала.

Список литературы

1. Михайлов С. В., Тяпин А. С., Серов Б. С., Руденко В. В. Кинетическая модель откольного разрушения материалов в условиях высокоинтенсивного ударноволнового воздействия // Экстремальные состояния вещества. Детонация. Ударные волны: Сборник докладов Международной конференции «XV Харитоновские тематические научные чтения». Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2013. С. 420–425.
2. Левич В. Г. Курс теоретической физики. Том I. М.: Физматгиз, 1962.
3. Огородников В. А., Садовой А. А., Софронов В. Н., Козлова Т. А., Ерунов С. В., Михайлов С. В. Кинетическая модель пластического разрушения с учетом диссипативных процессов // Хим. физика, 2002. Т. 21, № 9. С. 104–109.
4. Poritsky H. The collapse or growth of a spherical bubble or cavity in a viscous fluids / Proc 1st US Nat. Cong. Appl. Mech. (ASME), Chicago, IL, 1950. P. 813–821.
5. Кошкин Н. И., Ширкевич М. Г. Справочник по элементарной физике. М.: Наука, 1965.
6. Физические величины: Справочник / Под ред. И. С. Григорьевы, Е. З. Мейлихова. М.: Энергоатомиздат, 1991.
7. Новиков С. А., Дивнов И. И., Иванов А. Г. Исследование разрушения стали, алюминия и меди при взрывном нагружении / Прочность и ударные волны / Под ред. Новикова С. А. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ,

1996. С. 160–170.

8. Регель В. Р., Слуцкер А. И., Томашевский Э. Е. Кинетическая природа прочности твердых тел. М.: Наука, 1974.

9. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.

10. Трунин И. Р., Терешкина И. А., Подурец А. М. и др. Способы определения давления компактирования поврежденной меди // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2014. Вып. 2. С. 20–32.

11. Златин Н. А., Иоффе Б. С. О временной зависимости сопротивления отрыву при отколе // ЖТФ, 1972. Т. XLII. Вып. 8. С. 1740–1744.

12. Herrmann W. Constitutive equation for the dynamic compaction of ductile porous materials // J. Appl. Phys. 1969. Vol. 40, No.6. P. 2490–2499.

Статья поступила в редакцию 08.04.2015