

УСОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ ПРОЦЕССОВ НЕЙТРОННОЙ КИНЕТИКИ И РЕЗУЛЬТАТЫ НОВЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Н. Б. Бабичев

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Получены новые результаты и подведены итоги теоретических исследований, длившихся с 2007 года по сей день.

Ключевые слова: уравнение переноса нейтронов, инвариантность, собственные функции и собственные значения.

Введение

Результаты, полученные в работе [1] для профильных систем, в которых активность среды зависит от координат, а свободный пробег нейтронов постоянен, являются серьезным обобщением имевшихся ранее аналитических материалов по однородным объектам.

Тем не менее, существуют предпосылки для дальнейшего совершенствования элементов теоретической нейтронной кинетики профильных систем с произвольным пространственным распределением веществ. Изучение данного вопроса и совершенствование теории представляет собой тему настоящей статьи.

Изложение материалов ниже ведется следующим образом: в разделах 1 – 4 речь идет о результатах, полученных в односкоростном приближении без учета процессов неупругого взаимодействия нейтронов с веществом; в разделах 5 и 6 односкоростное приближение снято и учитывается эффект неупругого рассеяния нейтронов на ядрах.

Таковы особенности физической постановки решаемых в статье задач.

1. Исходное односкоростное кинетическое уравнение

За основу примем следующее односкоростное уравнение переноса нейтронов в профильных системах:

$$\frac{1}{V} \frac{\partial \psi(t, \vec{r}, \vec{\Omega})}{\partial t} + \left(\vec{\Omega} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \right) \psi(t, \vec{r}, \vec{\Omega}) + \alpha(\vec{r}) \psi(t, \vec{r}, \vec{\Omega}) = \frac{\beta(\vec{r})}{4\pi} \int d\vec{\omega} \psi(t, \vec{r}, \vec{\omega}), \quad (1)$$

$$\alpha(\vec{r}) = \frac{N_{\text{Авогадро}} \rho(\vec{r})}{\sum_i \mu_i(\vec{r}) A_i} \sum_i \mu_i(\vec{r}) (\sigma_{si} + \sigma_{fi} + \sigma_{ci}) \text{ и } \beta(\vec{r}) =$$

$$\frac{N_{\text{Авогадро}} \rho(\vec{r})}{\sum_i \mu_i(\vec{r}) A_i} \sum_i \mu_i(\vec{r}) (\sigma_{si} + \nu_i \sigma_{fi}) - \text{это параметр}$$

ры, характеризующие ядерно-физические свойства вещества с плотностью $\rho(\vec{r})$, состоящего из смеси компонентов с массовыми числами A_i и концентрациями по частицам $\mu_i(\vec{r})$; σ_{fi} , σ_{si} и σ_{ci} – элементарные сечения деления ядер i -го сорта, рассеяния поглощения нейтронов; ν_i – среднее число вторичных нейтронов, испускаемых в одном акте деления i -го ядра; отношение $h(\vec{r}) = \frac{\beta(\vec{r})}{\alpha(\vec{r})}$ – активность профильной среды.

Введя профильные функции $A\left(\vec{\xi} = \frac{\vec{r}}{R}\right)$, $B\left(\vec{\xi} = \frac{\vec{r}}{R}\right)$, нормированные условиями

$$\frac{\int d\vec{\xi} A(\vec{\xi})}{\int d\vec{\xi}} = \frac{\int d\vec{\xi} B(\vec{\xi})}{\int d\vec{\xi}} = 1, \quad \int d\vec{\xi} = 1, \quad (2)$$

и средние по объему системы величины $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$, из (1) получаем исходное нестационарное кинетическое уравнение

$$\frac{1}{V} \frac{\partial \psi(t, \vec{r}, \vec{\Omega})}{\partial t} + \left(\vec{\Omega} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \right) \psi(t, \vec{r}, \vec{\Omega}) + \bar{\alpha} A(\vec{\xi}) \psi(t, \vec{r}, \vec{\Omega}) = \frac{\bar{\beta} B(\vec{\xi})}{4\pi} \int d\vec{\omega} \psi(t, \vec{r}, \vec{\omega}). \quad (3)$$

2. Безразмерные односкоростные уравнения переноса частиц и формулы подобия для функций распределения нейтронов в нестационарных профильных системах

2.1. Интегродифференциальное безразмерное уравнение переноса нейтронов

В уравнении (1) перейдем к безразмерным аргументам

$$\tau = \bar{\beta} V t, \quad (4)$$

$$\vec{z} = \bar{\beta} \vec{r}. \quad (5)$$

С учетом связей между производными

$$\frac{\partial}{\partial t} = \bar{\beta} V \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}} = \bar{\beta} \frac{\partial}{\partial \vec{z}} \quad (7)$$

для функции распределения нейтронов в фазовом пространстве векторов $\vec{\zeta}, \vec{\Omega}$ получается кинетическое уравнение

$$\left[Z \frac{\partial}{\partial \tau} + \left(\vec{\Omega} \frac{\partial}{\partial \vec{\zeta}} \right) \right] \psi(\tau, \vec{\zeta}, \vec{\Omega}) + \bar{\alpha} Z A(\vec{\zeta}) \psi(\tau, \vec{\zeta}, \vec{\Omega}) = \frac{Z B(\vec{\zeta})}{4\pi} \int d\vec{\omega} \psi(\tau, \vec{\zeta}, \vec{\omega}), \quad (8)$$

$\vec{\zeta} = \frac{\vec{z}}{\bar{\beta} R} = \frac{\vec{z}}{Z}$, $Z = \bar{\beta} R$ – характерный размер системы в \vec{z} -пространстве, профильные функции нормированы условием

$$\int d\vec{\zeta} A(\vec{\zeta}) = \int d\vec{\zeta} B(\vec{\zeta}) = \int d\vec{\zeta} = 1. \quad (9)$$

2.2. Дифференциальное уравнение для нейтронной плотности и векторного потока нейтронов

В результате интегрирования (12) по углам $\vec{\Omega}$ для нейтронной плотности

$$n(\tau, \vec{z}) = \int d\vec{\Omega} \psi(\tau, \vec{z}, \vec{\Omega}) \quad (10)$$

и векторного потока нейтронов

$$\vec{j}(\tau, \vec{z}) = V \int d\vec{\Omega} \vec{\Omega} \psi(\tau, \vec{z}, \vec{\Omega}) \quad (11)$$

возникает следующее уравнение:

$$\frac{\partial n(\tau, \vec{z})}{\partial \tau} + \text{div} \vec{j}(\tau, \vec{z}) + \bar{\alpha} A(\vec{\zeta}) n(\tau, \vec{z}) V = \bar{\beta} B(\vec{\zeta}) n(\tau, \vec{z}) V. \quad (12)$$

2.3. Уравнение баланса полного количества нейтронов в системе

После интегрирования (15) по объему приходим к уравнению баланса полного числа нейтронов $N(\tau) = \int d\vec{z} n(\tau, \vec{z})$ в системе

$$L(\tau) = \frac{1}{N(\tau)} \frac{dN(\tau)}{d\tau} = \frac{\int d\vec{z} [\bar{\beta} B(\vec{\zeta}) - \bar{\alpha} A(\vec{\zeta})] n(\tau, \vec{z}) V}{\int d\vec{z} n(\tau, \vec{z})} - W(\tau), \quad (13)$$

$L(\tau)$ – логарифмическая производная от $N(\tau)$,

$$W(\tau) = \frac{\Pi(\tau)}{N(\tau)}, \quad \Pi(\tau) = \int d\vec{S} \vec{j}(\tau, \vec{\zeta}). \quad (14)$$

Функция $\Pi(\tau) = \int d\vec{S} \vec{j}(\tau, \vec{\zeta})$ представляет собой скорость утечки нейтронов в пустоту.

Величина $W(\tau) = \frac{\Pi(\tau)}{N(\tau)}$ – это эффективное

макроскопическое сечение поглощения нейтронов, равное вероятности их вылета из системы в единицу времени.

2.4. Вывод формулы подобия для функции распределения нейтронов внутри нестационарных профильных объектов

Воспользуемся фундаментальным свойством инвариантности уравнения переноса нейтронов (8) по отношению к преобразованиям подобия

$$\tau \rightarrow \tau' = \frac{Z'}{Z} \tau = \frac{\bar{\beta}' R'}{\bar{\beta} R} \tau, \quad (15)$$

$$\vec{z} \rightarrow \vec{z}' = \frac{Z'}{Z} \vec{z} = \frac{\bar{\beta}' R'}{\bar{\beta} R} \vec{z}, \quad (16)$$

$$\vec{\zeta} \rightarrow \vec{\zeta}' = \vec{\zeta}. \quad (17)$$

Тогда при переходе к штрихованной функции распределения нейтронов получаем уравнение

$$\left[Z' \frac{\partial}{\partial \tau'} + \left(\bar{\Omega} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}'} \right) \right] \Psi'(\tau', \bar{\zeta}', \bar{\Omega}) + \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}} Z' A'(\bar{\zeta}') \Psi'(\tau', \bar{\zeta}', \bar{\Omega}) = \frac{Z' B'(\bar{\zeta}')}{4\pi} \int d\bar{\omega} \Psi'(\tau', \bar{\zeta}', \bar{\omega}). \quad (18)$$

такого же вида, как (8), если выполняются следующие условия:

$$\tau' = \frac{Z'}{Z} \tau, \quad (19)$$

$$Z' B'(\bar{\zeta}') = Z B(\bar{\zeta}), \quad Z' A'(\bar{\zeta}') = Z A(\bar{\zeta}). \quad (20)$$

2.4.1. Частный случай объектов с подобной геометрией. У геометрически подобных систем профильные функции одинаковы, т. е.

$$B'(\bar{\zeta}') = B(\bar{\zeta}) \quad \text{и} \quad A'(\bar{\zeta}') = A(\bar{\zeta}), \quad (21)$$

и поэтому для них критериями подобия по нейтронной кинетике являются равенства

$$Z' = Z, \quad (22)$$

что соответствует следующим двум условиям:

$$\bar{\alpha}' R' = \bar{\alpha} R, \quad \bar{\beta}' R' = \bar{\beta} R. \quad (23)$$

При выводе формул (22) и (23) учитывалось

то, что $\bar{\zeta} = \frac{\bar{z}}{\beta R} = \frac{\bar{z}}{Z}$ зависит от Z .

Одновременно удовлетворить условия (23) можно для тех частных случаев, когда от координат зависит только свободный пробег нейтронов

$\frac{1}{\alpha}$ либо только активность среды h .

2.4.2. Формула подобия общего вида для функции распределения нейтронов в нестационарных профильных системах. В статье [1] были найдены две частные формулы подобия, соответствующие условиям (23), т. е. случаю подобных с точки зрения геометрии систем.

Здесь рассматривается общий случай

$$B'(\bar{\zeta}') \neq B(\bar{\zeta}), \quad (24)$$

$$A'(\bar{\zeta}') \neq A(\bar{\zeta}), \quad (25)$$

который охватывают более широкий класс подобных по нейтронной кинетике объектов, чем для систем с подобной геометрией, когда необходимо выполнить менее жесткие требования (23).

Вспомнив нормировки (9) в результате интегрирования (20) и (21) по $d\bar{\zeta}$ и $d\bar{\zeta}'$, получаем равенства (23).

Теперь учитывая соотношение (19), на которое в работе [1] не обращалось внимание, приходим к формуле

$$\Psi_2(\tau_2, \bar{z}_2, \bar{\Omega}) = C_{1,2} \Psi_1(\tau_1, \bar{z}_1, \bar{\Omega}), \quad (26)$$

выражающей взаимосвязь функций распределения нейтронов в любых двух подобных по нейтронной кинетике нестационарных профильных системах 1 и 2.

Из-за линейности кинетического уравнения зависящую от Z нормировочную константу в (26) можно заменить на одну условную единицу, приняв, к примеру, что при $z_2 = 0$ и $z_1 = 0$ $\Psi_2 = \Psi_1$.

Далее будем считать, что в формулах типа (26) постоянная $C_{1,2} = 1$.

При переходе от безразмерных аргументов к размерным, т. е. из пространства векторов $\bar{z}, \bar{\Omega}$ в фазовое пространство $\bar{r}, \bar{\Omega}$, формула подобия (26) превращается в

$$\Psi_2(t, \bar{r}, \bar{\Omega}) = \Psi_1\left(\frac{R_2}{R} t, \frac{R_2}{R} \bar{r}, \bar{\Omega}\right). \quad (27)$$

3. Общее решение задачи на главные собственные значения и главные собственные функции, полученное в односкоростном приближении на основе безразмерного уравнения переноса нейтронов в профильных системах

3.1. Вывод основных общих формул

В уравнения (8) осуществлен переход к единой переменной $\bar{\zeta}$ с учетом связей производных

$\frac{\partial}{\partial \bar{r}} = \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \frac{d\bar{\zeta}}{d\bar{r}} = \frac{1}{Z} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}}$, решение этого уравнения будем искать в следующем виде:

$$\Psi(\tau, \bar{\zeta}, \bar{\Omega}) = f(\tau, \bar{\zeta}, \bar{\Omega}) \exp\left[-\frac{\bar{\alpha} A(\bar{\zeta})}{\bar{\beta}} \tau\right]. \quad (28)$$

Легко показать, что функция $f(\tau, \bar{\zeta}, \bar{\Omega})$ подчиняется нестационарному кинетическому уравнению

$$Z \frac{\partial f(\tau, \bar{\zeta}, \bar{\Omega})}{\partial \tau} + \left(\bar{\Omega} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \right) f - f \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}} \left(\bar{\Omega} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \right) A(\bar{\zeta}) = \frac{Z B(\bar{\zeta})}{4\pi} \int d\bar{\omega} f(\tau, \bar{\zeta}, \bar{\omega}). \quad (29)$$

Для нахождения главных собственных значений Λ примем экспоненциальный закон

$$f(\tau, \vec{\zeta}, \vec{\Omega}) = e^{\Lambda\tau} f(\vec{\zeta}, \vec{\Omega}). \quad (30)$$

После подстановки (30) в (29) получается следующее стационарное кинетическое уравнение относительно главной собственной функции f :

$$\begin{aligned} \left(\vec{\Omega} \frac{\partial}{\partial \vec{\zeta}} \right) f(\vec{\zeta}, \vec{\Omega}) + \left[\Lambda Z + \frac{\bar{\alpha}}{\beta} \vec{\Omega} \frac{\partial A(\vec{\zeta})}{\partial \vec{\zeta}} \tau \right] f(\vec{\zeta}, \vec{\Omega}) = \\ = \frac{ZB(\vec{\zeta})}{4\pi} \int d\vec{\omega} f(\vec{\zeta}, \vec{\omega}). \end{aligned} \quad (31)$$

Проинтегрировав входящую в (31) структуру

$$D(\vec{\Omega}, \vec{\zeta}, \tau) = \Lambda Z - \frac{\bar{\alpha}}{\beta} \vec{\Omega} \frac{\partial A(\vec{\zeta})}{\partial \vec{\zeta}} \tau \quad (32)$$

по углам $\vec{\Omega}$ с учетом принятых нормировок (11) и того, что интеграл по $d\vec{\Omega}$ от нечетной функции $\vec{\Omega}$ равен нулю

$$\int d\vec{\Omega} \vec{\Omega} \frac{\partial A(\vec{\zeta})}{\partial \vec{\zeta}} = 0, \quad (33)$$

имеем

$$D = \Lambda Z. \quad (34)$$

Используем связи функции распределения нейтронов в \vec{r} и \vec{z} -пространствах.

Связь между размерными и безразмерными главными собственными значениями λ и Λ определяется из выражения

$$\psi\left(\vec{\xi} = \frac{\vec{r}}{R}, \vec{\Omega}\right) e^{\lambda t} = f(\vec{\zeta}, \vec{\Omega}) \exp\left[\left(\Lambda - \frac{\bar{\alpha}}{\beta} A(\vec{\zeta})\right) \tau(t)\right]. \quad (35)$$

Из выражения (35) следует равенство

$$\ln \left[\frac{\psi(\vec{\xi}, \vec{\Omega})}{f(\vec{\zeta}, \vec{\Omega})} \right] = \left[\Lambda - \frac{\bar{\alpha} A(\vec{\zeta})}{\beta} \right] \bar{\beta} V t - \lambda t. \quad (36)$$

Поскольку левая часть (36) не зависит от времени, то

$$\left[\Lambda - \frac{\bar{\alpha} A(\vec{\zeta})}{\beta} \right] \bar{\beta} V - \lambda = 0. \quad (37)$$

Интегрирование (37) по $d\vec{\zeta}$ приводит к следующему результату:

$$\lambda = \left[\Lambda(Z) - \frac{\bar{\alpha}}{\beta} \right] \bar{\beta} V. \quad (34)$$

Уравнение (8), в которое через профильные функции входит вектор $\vec{\zeta} = \frac{\vec{z}}{\beta R} = \frac{\vec{z}}{Z}$, показывает,

что главное собственное значение Λ зависит только от характерного размера системы в \vec{z} -пространстве $Z = \bar{\beta} R$.

Для главной собственной функции справедлива общая формула

$$\psi(\vec{\zeta}, \vec{\Omega}) = f(\vec{\zeta}, \vec{\Omega}). \quad (39)$$

После подстановки $Z = \bar{\beta} R$ в (38) имеем:

$$\lambda = \left[\Lambda(\bar{\beta} R) - \frac{\bar{\alpha}}{\beta} \right] \bar{\beta} V. \quad (40)$$

Если вместо (37) воспользоваться эквивалентным выражением

$$\tau = \bar{\beta} R \frac{V}{R} t, \quad (41)$$

то получается следующий итоговый ответ:

$$\lambda = \bar{\beta} R \left[\Lambda(\bar{\beta} R) - \frac{\bar{\alpha}}{\beta} \right] \frac{V}{R}. \quad (42)$$

Соотношение (42) есть не что иное, как общее решение поставленной задачи на главные собственные значения λ , в котором содержится универсальная функция $\Lambda(\bar{\beta} R)$.

Для определения явной функции $\Lambda(\bar{\beta} R)$ необходимо знать конкретную геометрию профильной системы.

В приложении А общее решение (42) получено вторым способом и представлена оценка точности диффузионной формулы для главных собственных значений λ .

Возможность использования формулы (42) с целью обобщения имеющихся аналитических решений для простых по геометрии однородных систем на случай профильных объектов продемонстрирована в подразделе 3.2 на одном из конкретных примеров.

3.2. Некоторые предельные решения задачи о критических параметрах активных однородных и профильных шаров

3.2.1. Известное решение, справедливое в случае пространственно однородного критического шара с бесконечной активностью. В книге [2] в методических целях рассмотрен критический однородный шар из гипотетического делящегося материала, активность которого h бесконечна.

В [2] путем решения интегрального уравнения переноса нейтронов для предельного случая $h \rightarrow \infty$ найден критический радиус однородного шара

$$R_* = \frac{1}{0,78\beta_*}. \quad (43)$$

3.2.2. *Предельные значения критических параметров профильного шара.* Формула (42) позволяет обобщить результат (43) на случай профильных шаров.

В самом деле, при условии критичности системы $\lambda = 0$ из (42) для профильного шара имеем:

$$\Lambda(\bar{\beta}R_*) = \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}} = \frac{\bar{\alpha}R_*}{\bar{\beta}R_*}. \quad (44)$$

Соотношение (44) прозрачно с точки зрения физического смысла. Поясним сказанное.

Очевидно, что при увеличении активности среды уменьшаются оптическая толщина $\bar{\alpha}R_*$, критическая масса M_* профильного шара и его радиус R_* .

Если теперь рассмотреть исследуемый предельный случай $h \rightarrow \infty$ при конечных значениях параметров $\bar{\alpha}_*$ и α_* (см. [2]), то при $R_* \rightarrow 0$ и соответственно $\bar{\alpha}R_* \rightarrow 0$, а произведение $\bar{\beta}_*R_*$ не равно нулю.

Таким образом, при $h \rightarrow \infty$ получаем следующие предельные главные собственные значения:

$$\Lambda \rightarrow 0, \quad \lambda \rightarrow 0. \quad (45)$$

Зная это и заменив в (43) β_* на усредненный по объему параметр $\bar{\beta}_*$, приходим к обобщенному на случай профильного шара ответу:

$$R_* = \frac{1}{0,78\bar{\beta}_*}. \quad (46)$$

4. Общие формулы подобия, имеющие место в односкоростном приближении

4.1. Формула подобия для главных собственных функций

Из соотношения (39) вытекает следующая общая формула подобия для главных собственных функций:

$$\psi_2(\vec{\zeta}_2, \vec{\Omega}) = f_2(\vec{\zeta}_2, \vec{\Omega}) = f_1(\vec{\zeta}_1, \vec{\Omega}), \quad (47)$$

верная при обязательном выполнении следующих двух условий:

$$Z_2 = Z_1, \quad (48)$$

$$\frac{\bar{\alpha}_2}{\bar{\beta}_2} = \frac{\bar{\alpha}_1}{\bar{\beta}_1}, \quad (49)$$

первое из которых относится к характерным размерам объектов, а второе – к ядерно-физическим характеристикам материалов, из которых они состоят.

4.2. Формулы подобия для главных собственных чисел уравнения переноса нейтронов в профильных системах

Воспользовавшись общим решением (42) задачи на главные собственные значения λ и взяв за основу критерии подобия типа (48), (49)

$$\bar{\beta}_2 R_2 = \bar{\beta}_1 R_1, \quad (50)$$

$$\frac{\bar{\alpha}_2}{\bar{\beta}_2} = \frac{\bar{\alpha}_1}{\bar{\beta}_1}, \quad (51)$$

приходим к

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= \bar{\beta}_2 R_2 \left[\Lambda(\bar{\beta}_2 R_2) - \frac{\bar{\alpha}_2}{\bar{\beta}_2} \right] \frac{V}{R_2} = \lambda_1 = \\ &= \bar{\beta}_1 R_1 \left[\Lambda(\bar{\beta}_1 R_1) - \frac{\bar{\alpha}_1}{\bar{\beta}_1} \right] \frac{V}{R_1}. \end{aligned} \quad (52)$$

Выразив Λ через λ следующим очевидным образом

$$\Lambda = \frac{\lambda}{\bar{\beta}V} + \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}} = \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}} \left(\frac{\lambda}{\bar{\alpha}V} + 1 \right), \quad (53)$$

используем аналогичное (50) следующее условие подобия профильных систем:

$$\Lambda(\bar{\beta}_2 R_2) = \Lambda(\bar{\beta}_1 R_1). \quad (54)$$

Тогда после выполнения простых преобразований получаем искомый ответ

$$\lambda_2 = \left[\frac{\bar{\alpha}_1 \bar{\beta}_2}{\bar{\alpha}_2 \bar{\beta}_1} \left(\frac{\lambda_1}{\bar{\alpha}_1 V} + 1 \right) - 1 \right] \bar{\alpha}_2 V. \quad (55)$$

Формула подобия (55) ранее в работе [3] была получена иным способом – из анализа вида справедливого в фазовом пространстве векторов \vec{r} , $\vec{\Omega}$ уравнения (1) переноса нейтронов в профильных системах. Здесь надо подчеркнуть, что в [3] при выводе соотношения (55) предполагалось равенство профильных функций, т. е. $B_2 \left(\vec{\xi} = \frac{\vec{r}}{R} \right) =$

$= B_1 \left(\vec{\xi} = \frac{\vec{r}}{R} \right)$, но это условие вовсе не обязательно

и в данной статье рассматривается случай $B_2 \neq B_1$, существенно расширивший класс подобных профильных систем.

Выше показана возможность нахождения соотношений подобия (55) с помощью общей формулы (42), даже не зная явной функциональной зависимости $\Lambda(\bar{\beta}R)$.

Очевидно, что вывод общей формулы подобия (55) можно провести и третьим способом, используя свойство инвариантности кинетического уравнения.

5. Общее решение упрощенного спектрального уравнения переноса нейтронов в нестационарных профильных системах

5.1. Основные теоретические результаты

В статье [1] был предложен, обоснован и подтвержден результатами численных расчетов по одной из существующих математических программ [4] новый метод поиска аналитических решений следующего спектрального уравнения переноса быстрых нейтронов (их скорость V значительно больше скорости ядер, которой пренебрегается):

$$\left[\frac{\partial}{\partial \tau} + \left(\bar{\Omega} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \right] \psi(\tau, \bar{z}, \vec{V}) + \frac{1}{\langle \bar{h} \rangle} \eta_0(\bar{z}, \vec{V}) \psi = \frac{H(\bar{\zeta})}{4\pi} \int d\vec{V} \Gamma_0(\bar{z}, \vec{V}) \psi(\tau, \bar{z}, \vec{V}) \quad (56)$$

для частного случая с постоянным параметром $\bar{\alpha} = \alpha$, когда от координат зависит только активность $h = \bar{h}H(\bar{\zeta})$.

В уравнении использованы безразмерные переменные

$$\tau = \bar{h}\alpha Vt, \quad (57)$$

$$\bar{z} = \bar{h}\alpha \bar{r}, \quad (58)$$

$$\bar{\zeta} = \frac{\bar{z}}{\bar{h}\alpha R} = \frac{\bar{z}}{Z}, \quad (59)$$

$$\bar{\zeta} = \frac{\bar{z}}{\bar{h}\alpha R} = \frac{\bar{z}}{Z} \quad (60)$$

и принята следующая нормировка профильной функции:

$$\int d\bar{\zeta} H(\bar{\zeta}) = \int d\bar{\zeta} = 1. \quad (61)$$

Скобками $\langle \rangle$ обозначено усреднение по известному типовому спектру нейтронов $F(E_n)$.

Физический смысл функций $\eta_0(\bar{z}, \vec{V})$ и $\Gamma_0(\bar{z}, \vec{V})$ раскрыт в [1].

В данном разделе на основе полученных выше новых результатов сделаны следующие обобщения.

Теперь

$$\tau = \bar{\beta} Vt, \quad (62)$$

$$\bar{z} = \bar{\beta} \bar{r}, \quad (63)$$

$$\bar{\zeta} = \frac{\bar{z}}{Z} = \frac{\bar{z}}{\bar{\beta} R} \quad (64)$$

и новое кинетическое уравнение

$$\left[\frac{\partial}{\partial \tau} + \left(\bar{\Omega} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \right] \psi(\tau, \bar{z}, \vec{V}) + \frac{\langle \bar{\alpha} \rangle}{\langle \bar{\beta} \rangle} A(\bar{\zeta}) \eta_0(\bar{z}, \vec{V}) \psi = \frac{B(\bar{\zeta})}{4\pi} \int d\vec{V} \Gamma_0(\bar{z}, \vec{V}) \psi(\tau, \bar{z}, \vec{V}) \quad (65)$$

позволяет усовершенствовать полученные в работе [1] формулы, произведя в них следующую замену параметров:

$$\frac{1}{\langle \bar{h} \rangle} \rightarrow \frac{\langle \bar{\alpha} \rangle}{\langle \bar{\beta} \rangle}. \quad (66)$$

5.2. Упрощающие предположения, принятые для решения односкоростных и спектральных задач

В случае односкоростного приближения считается, что индикатриса рассеяния нейтронов изотропна, что свойственно упругим столкновениям нейтронов с ядрами, а у неупругих процессов при энергиях нейтронов $E_n > \approx 8$ МэВ проявляется сильная анизотропия. Из-за этого исходное односкоростное кинетическое уравнение (1) применимо только в том случае, когда системы выполнены из веществ со сравнительно малыми по величине сечениями неупругих рассеяний нейтронов на ядрах.

Представленные в статье результаты аналитических исследований получены из односкоростного и спектрального кинетических уравнений, в каждом из которых использовалось упрощающее предположение о неподвижности ядер.

Таким образом, полученные выше результаты справедливы, если скорости ядер существенно меньше, чем скорости нейтронов

$$V_{\text{я}} \ll V_n. \quad (67)$$

Обязательное условие (67) ограничивает область применимости относящихся к спектральному случаю теоретических материалов. Ими можно пользоваться только в случае систем на быстрых нейтронах со спектром, например, близким к делительному, и нельзя, особенно при рассмотрении водородосодержащих систем с мягким спектром термализованных нейтронов.

6. Новые результаты аналитических исследований, обобщенные на спектральный случай

С комментариями приведем основные результаты, вытекающие из теоретических материалов разделов 5 и 2.

6.1. Результаты, полученные на основе формул пятого раздела

6.1.1. *Общее и частное решения задачи на главные собственные значения и главные собственные функции.* Обобщенное на спектральный случай общее решение задачи на главные собственные значения и главные собственные функции выглядит следующим образом:

$$\lambda = \langle \bar{\beta} \rangle R \left[\Lambda(\langle \bar{\beta} \rangle R) - \frac{\langle \bar{\alpha} \rangle}{\langle \bar{\beta} \rangle} \right] \frac{\langle V \rangle}{R}, \quad (68)$$

$$\Psi \left(\bar{\xi} = \frac{\langle \bar{\beta} \bar{r} \rangle}{\langle \bar{\beta} R \rangle}, \bar{\Omega} \right) = f(\bar{\xi}, \bar{\Omega}). \quad (69)$$

На базе соотношений, полученных в работе [5] в рамках асимптотической диффузионной теории Ю. А. Романова [6], была найдена следующая явная аналитическая зависимость универсальной функции от βR :

$$\Lambda(\beta R) = \frac{\varphi(\beta R)}{\operatorname{tg} \varphi(\beta R)}, \quad (70)$$

$$\varphi(\beta R) = \frac{\pi}{\beta R + 0,71}. \quad (71)$$

Для главных собственных значений λ справедлива формула

$$\lambda = \beta R \left[\frac{\varphi(\beta R)}{\operatorname{tg} \varphi(\beta R)} - \frac{1}{h} \right] \frac{V}{R}. \quad (72)$$

Приведем обобщенное явное решение диффузионной задачи на главные собственные значения и главные собственные функции распределения нейтронов внутри профильного шара, вытекающее из результатов, изложенных в разделе 5.

$$\Lambda(\langle \bar{\beta} R \rangle) = \frac{\varphi(\langle \bar{\beta} R \rangle)}{\operatorname{tg} \varphi(\langle \bar{\beta} R \rangle)}, \quad (73)$$

$$\varphi(\langle \bar{\beta} R \rangle) = \frac{\pi}{\langle \bar{\beta} R \rangle + 0,71}. \quad (74)$$

Зависимость плотности нейтронов от радиуса r точки наблюдения подчиняется формуле

$$n(r) = \frac{K}{r} \sin \left[\langle \bar{\alpha} \rangle r \left(1 + \frac{\lambda}{\langle \bar{\alpha} \rangle V} \right) \operatorname{tg} \varphi(\langle \bar{\beta} \rangle R) \right], \quad (75)$$

K – нормировочная константа.

Выражение (75) содержит в себе величину λ , определенную формулой

$$\lambda = \langle \bar{\beta} \rangle R \left[\frac{\varphi(\langle \bar{\beta} R \rangle)}{\operatorname{tg} \varphi(\langle \bar{\beta} R \rangle)} - \frac{\langle \bar{\alpha} \rangle}{\langle \bar{\beta} \rangle} \right] \frac{\langle V \rangle}{R}, \quad (76)$$

которая применима для критических и надкритических профильных шаров.

6.1.2. *Формулы подобия для главных собственных значений, главных собственных функций и для логарифмических производных.* Формула подобия (55) для главных собственных чисел (см. раздел 4), справедливая при выполнении инвариантного соотношения

$$\langle \bar{\beta}_2 \rangle R_2 = \langle \bar{\beta}_1 \rangle R_1, \quad (77)$$

теперь пишется так:

$$\frac{\lambda_2}{\langle \alpha_2 \rangle \langle V_2 \rangle} = \frac{\langle \alpha_1 \rangle \langle \beta_2 \rangle}{\langle \alpha_2 \rangle \langle \beta_1 \rangle} \left(\frac{\lambda_1}{\langle \alpha_1 \rangle \langle V_1 \rangle} + 1 \right) - 1. \quad (78)$$

Формула для подобных главных собственных функций распределения нейтронов в фазовом пространстве векторов $\vec{r}, \bar{\Omega}$ имеет следующий общий вид:

$$\Psi_2(\vec{r}, \bar{\Omega}) = \Psi_1 \left(\frac{R_2}{R_1} \vec{r}, \bar{\Omega} \right). \quad (79)$$

В работе [1] на примере однородных систем из делящихся материалов показано, что при достаточно больших значениях аргумента βR универсальной функции $\Lambda(\beta R)$ логарифмическая производная (см. выражение (13)) подчиняется приближенной формуле

$$L(\tau \geq \tau_0) = \Lambda(\beta R) - \frac{1}{h} \quad (80)$$

вне зависимости от того вышло или нет решение нестационарного кинетического уравнения на экспоненциальный режим, когда $L(\tau \geq \tau_0) = \lambda$.

При этом логарифмические производные подобных систем, для которых выполняются условия

$$\beta_2 R_2 = \beta_1 R_1, \quad (81)$$

$$\beta R \geq 3,6,$$

связаны следующим образом:

$$L_2(\tau) \approx L_1(\tau) + \frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}. \quad (82)$$

Численный расчет, в котором была задана геометрия однородного плутониевого шара со значением $\beta R = 3,6$, показал (см. статью [1]), что погрешность $\delta = \frac{|L_2 - L_{2\text{расч}}|}{L_2}$ в логарифмической производной L , определенной по формуле (82), составляет 0,7 %.

Очевидно, что в случаях $\beta R > 3,6$ точность формулы (82) увеличивается.

Приведем модификации формул (80) и (82), обобщенные на случай профильных систем.

$$L(\tau) \approx \Lambda(\langle \bar{\beta} \rangle R) - \frac{\langle \bar{\alpha} \rangle}{\langle \bar{\beta} \rangle}, \quad (83)$$

$$L_2(\tau) \approx L_1(\tau) + \frac{\langle \bar{\alpha}_1 \rangle}{\langle \bar{\beta}_1 \rangle} - \frac{\langle \bar{\alpha}_2 \rangle}{\langle \bar{\beta}_2 \rangle}. \quad (84)$$

Формулу (84) можно использовать, если выполняется приведенное выше необходимое и в то же время достаточное соотношение подобия (77).

Из (84) следует, что в подобных профильных системах при значениях параметра $\beta R > 3,6$ процесс эволюции логарифмических производных в единой шкале безразмерного времени τ протекает практически одинаково.

6.2. Выводы, сделанные по результатам раздела 2

Связь между обобщенными на спектральный случай функциями распределения нейтронов внутри подобных нестационарных профильных систем

$$\psi_2(t, \vec{r}, \vec{\Omega}) = \psi_1\left(\frac{R_2}{R_1}t, \frac{R_2}{R_1}\vec{r}, \vec{\Omega}\right) \quad (85)$$

имеет место при соблюдении инвариантных соотношений

$$\frac{\langle \bar{\beta}_2 \rangle R_2}{\langle \bar{\beta}_1 \rangle R_1} = 1, \quad (86)$$

$$\frac{R_2 t_1}{R_1 t_2} = 1. \quad (87)$$

6.3. Некоторые замечания

6.3.1. Замечание по поводу средних параметров, входящих в полученные выше формулы. Пара-

метры $\langle \bar{\alpha} \rangle$ и $\langle \bar{\beta} \rangle$ являются средними характеристиками материалов, из которых состоят произвольные по геометрии профильные объекты.

Величины $\langle \bar{\alpha} \rangle$ и $\langle \bar{\beta} \rangle$ можно определить, задавшись конкретными пространственными распределениями.

В общем случае величины $\langle \bar{\alpha} \rangle$ и $\langle \bar{\beta} \rangle$ включают в себя не только зависимости плотностей ядер от координат, но и ядерно-физические свойства веществ из которых состоят неоднородные системы.

Одинаковыми значениями каждого из рассматриваемых параметров могут характеризоваться системы с разными профилями плотности, а также неоднородные и однородные объекты с разными ядерно-физическими свойствами, входящих в них материалов.

Иначе говоря, одинаковыми величинами $\langle \bar{\alpha} \rangle$, а также $\langle \bar{\beta} \rangle$ могут обладать совершенно разные профильные и однородные системы.

6.3.2. О приближенном характере численных решений упрощенного спектрального уравнения переноса нейтронов в профильных системах. Процедура усреднения величин $\langle \bar{\beta} \rangle, \langle \bar{\alpha} \rangle, \langle V \rangle$, входящих в представленные выше формулы, не может привести к точным результатам, поскольку спектр нейтронов $F(E_n)$, по которому усредняются данные величины, практически всегда должен отличаться от полученного при решении спектрального (многогруппового) кинетического уравнения (65).

Для реализации достаточно высокой точности решений уравнения (65) требуется иметь в распоряжении набор типовых спектров $F_j(E_n)$ и выработать критерий, по которому их надо применять в спектральных расчетах характеристик тех или других конкретных профильных систем.

Заключение

Получены новые теоретические результаты, последовательно изложенные в разделах 1 – 6 данной статьи.

В итоге можно утверждать, что задача, поставленная во введении, успешно решена.

Сделаем ряд замечаний общего характера.

Явный вид универсальной функции $\Lambda(\bar{\beta}R)$ можно найти только в случае систем с простой

геометрией. К известным точным явным аналитическим формулам для Λ можно отнести решение, полученное в связи с проблемой Милна в теории переноса нейтронов, и некоторые тривиальные решения, например, в случае мгновенного моноэнергетичного источника в центре однородного шара. Существует несколько ограниченных диапазонами их справедливости приближенных аналитических решений простых задач. Соотношения подобия процессов нейтронной кинетики столь же точны, как и кинетические уравнения, из которых они получены. В этом их преимущества по сравнению с приближенными формулами. Действительно, располагая всего лишь одним результатом численного расчета по математической методике, с помощью формул подобия можно с высокой точностью определить характеристики целого класса изучаемых объектов. Кроме этого теория подобия нейтронно-кинетических процессов полезна для контроля точности результатов численных расчетов и, например, для выбора оптимальной сетки ячеек при постановке некоторых математических задач. Иначе дело обстоит, когда требуется определить характеристики сложных по геометрии систем, для которых найти функцию $\Lambda(\beta R)$ явного вида невозможно. В этом случае возникает потребность в теории подобия хотя бы в целях решения задач о надежности разрабатываемых новых приборов и устройств. Отталкиваясь от номинальной конструкции прибора с известными фактическими и расчетными показателями, с помощью формул подобия можно проварьировать различные параметры, выходя (даже сильно) за существующие поля допусков на элементы конструкции. Это позволяет определить границу отказа прибора без проведения соответствующих экспериментальных исследований.

Таким образом, задачи о надежности можно решать не только с помощью проведения больших по объему серий численных расчетов, но также привлекая теорию подобия (для ее применения достаточно располагать результатами единственного номинального расчета).

Аналитические решения интегродифференциального кинетического уравнения для нейтронов получить намного трудней, чем решить дифференциальные уравнения математической физики. Поэтому количество найденных аналитических решений кинетического уравнения очень ограничено,

а решенных соответствующих задач по математической физике много (см., к примеру, [7]). Тем не менее, для оценок надежности работы различных приборов со сложной геометрией желательно иметь в арсенале теорию подобия тепловых и волновых процессов. Результаты, полученные в этом направлении, изложены в работах [8, 9].

Список литературы

1. Бабичев Н. Б. Некоторые вопросы теоретической нейтронной кинетики // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2015. Вып. 1. С. 41–52.
2. Ахиезер А., Померанчук И. Некоторые вопросы теории ядра. Л.: Оборонгиз, 1950.
3. Бабичев Н. Б., Лутиков И. В., Незнамов В. П. Теория подобия в рамках односкоростной нейтронной кинетики квазистационарных систем // ВАНТ. Теоретическая и прикладная физика. 2008. Вып. 1. С. 56–66.
4. Шагалиев Р. М., Гребенников А. Н., Артемьев А. Ю., Будников В. И. Развитие основных методик и программ ИТМФ // Журнал Атом, 2011, № 50–51.
5. Бабичев Н. Б., Лутиков И. В., Севастьянов А. А. Нейтронная кинетика однородных шаров из плутония-238 и плутония-239, находящихся в произвольных состояниях // ВАНТ. Теоретическая и прикладная физика. 2014. Вып. 3. С. 46–66.
6. Романов Ю. А. Критические параметры реакторных систем. Точные решения односкоростного кинетического уравнения и их использование для решения диффузионных задач (усовершенствованный диффузионный метод). М.: Госатомиздат, 1960. С. 3–26.
7. Арсенин В. Я. Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1984.
8. Бабичев Н. Б., Севастьянов А. А. Соотношения подобия, вытекающие из уравнения переноса тепла в однородных и профильных системах // См. настоящий выпуск. С. 56–60.
9. Бабичев Н. Б., Севастьянов А. А. Элементы теории подобия волновых процессов // См. настоящий выпуск. С. 61–63.
10. Бабичев Н. Б. К вопросу о применимости диффузионной теории в случае среды с высокой активностью // ВАНТ. Теоретическая и прикладная физика. 2015. Вып. 1. С. 3–5.

Приложение

Один из способов решения общей задачи на главные собственные значения и главные собственные функции
А.1. Вывод общей формулы, которой подчиняются главные собственные значения

Приняв за основу кинетическое уравнение (29) для функции

$$f(\vec{\zeta}, \vec{\Omega}) = f(\tau, \vec{\zeta}, \vec{\Omega}) e^{-\Lambda \tau}, \quad (\text{П.1})$$

записанное в виде

$$\begin{aligned} \left(\vec{\Omega} \frac{\partial}{\partial \vec{\zeta}} \right) f(\vec{\zeta}, \vec{\Omega}) + \left[\Lambda Z - \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}} \vec{\Omega} \frac{\partial A(\vec{\zeta})}{\partial \vec{\zeta}} \tau \right] f(\vec{\zeta}, \vec{\Omega}) = \\ = \frac{ZB(\vec{\zeta})}{4\pi} \int d\vec{\omega} f(\vec{\zeta}, \vec{\omega}), \end{aligned} \quad (\text{П.2})$$

величину Λ определим способом, отличающимся от использованного выше (см. подраздел 3.1).

В качестве $A(\vec{\zeta})$ возьмем ступенчатую (кусочно-постоянную) функцию

$$A(\vec{\zeta}) = \sum_i A_{0i} \theta(\vec{\zeta}_i - \vec{\zeta}_{0i}), \quad (\text{П.3})$$

с независимыми от координат амплитудами A_{0i} , у которой внутри всех интервалов $\theta(\vec{\zeta}_i - \vec{\zeta}_{0i}) = 1$ и соответственно

$$\frac{\partial A(\vec{\zeta})}{\partial \vec{\zeta}} = 0, \quad (\text{П.4})$$

а в точках $\vec{\zeta}_{0i}$, в том числе и на внешней границе $|\vec{\zeta}_{0i}| = 1$ системы, имеются разрывы производных

$$\frac{d\theta(\vec{\zeta}_i - \vec{\zeta}_{0i})}{d\vec{\zeta}_i} = \delta(\vec{\zeta}_i - \vec{\zeta}_{0i}) = \pm\infty. \quad (\text{П.5})$$

Отметим, что профильные функции отнормированы условием

$$\begin{aligned} \int d\vec{\zeta} A(\vec{\zeta}) &= \int d\vec{\zeta} \sum_i A_{0i} \theta(\vec{\zeta}_i - \vec{\zeta}_{0i}) = \\ &= \sum_i A_{0i} \int d\vec{\zeta} \theta(\vec{\zeta}_i - \vec{\zeta}_{0i}) = \int d\vec{\zeta} = 1. \end{aligned} \quad (\text{П.6})$$

С учетом (П.3) вместо (П.4) получаем значительно более простое, чем (П.2), уравнение переноса

нейтронов в произвольных по геометрии неоднородных системах

$$\begin{aligned} \left(\vec{\Omega} \frac{\partial}{\partial \vec{\zeta}} \right) f(\vec{\zeta}, \vec{\Omega}) + \Lambda Z f(\vec{\zeta}, \vec{\Omega}) = \\ = \frac{ZB(\vec{\zeta})}{4\pi} \int d\vec{\omega} f(\vec{\zeta}, \vec{\omega}). \end{aligned} \quad (\text{П.7})$$

Воспользовавшись связью (36) величин λ и Λ

$$\psi\left(\vec{\xi} = \frac{\vec{r}}{R}, \vec{\Omega}\right) e^{\lambda t} = f(\vec{\zeta}, \vec{\Omega}) \exp\left[\left(\Lambda - \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}\right) \tau(t)\right], \quad (\text{П.8})$$

приходим к следующим итоговым результатам, полученным выше другим способом:

$$\lambda = \bar{\beta} R \left[\Lambda(\bar{\beta} R) - \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}} \right] \frac{V}{R}. \quad (\text{П.9})$$

В диффузионном приближении универсальная функция выражается в следующем явном виде:

$$\Lambda(\bar{\beta} R) = \frac{\varphi(\bar{\beta} R)}{tg\varphi(\bar{\beta} R)}, \quad (\text{П.10})$$

$$\varphi(\bar{\beta} R) = \frac{\pi}{\bar{\beta} R + 0,71} \quad (\text{П.11})$$

и для главных собственных значений справедлива формула

$$\lambda = \bar{\beta} R \left[\frac{\varphi(\bar{\beta} R)}{tg\varphi(\bar{\beta} R)} - \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}} \right] \frac{V}{R}. \quad (\text{П.12})$$

Сравним результаты аналитических вычислений по формуле (П.12) при значениях $\bar{\alpha} = 0,7$ 1/см, $\bar{\beta} = 1,2$ 1/см, $\bar{\beta} R = 3,6$, $R = 3$ см и соответствующего численного расчета по одной из программ [4].

Обратим внимание на одну тонкость. Расчет надо проводить в постановке со значениями параметров $\bar{\beta}$ и $\bar{\alpha}$, входящими в выражение (П.12).

Приведем полученные результаты. Главное собственное значение, найденное по формуле (П.12), $\lambda = 27,9639 \cdot 10^7$ 1/с, а при численном решении однокоростного кинетического уравнения реализовалась величина $\lambda_{\text{расч}} = 27,9547 \cdot 10^7$ 1/с.

Таким образом, погрешность формулы (П.12) составила

$$\delta = \frac{|\lambda - \lambda_{\text{расч}}|}{\lambda} = 0,033 \%. \quad (\text{П.13})$$

А.2. Общие формулы для главных собственных функций в \vec{z} -пространстве и \vec{r} -пространстве и некоторые замечания

$$\psi(\vec{\zeta}, \vec{\Omega}) = f(\vec{\zeta}, \vec{\Omega}), \quad (\text{П.14})$$

Из работы [10] следует, что в случае постоянной оптической толщины

$$\bar{\alpha}R = \text{const} \quad (\text{П.15})$$

уменьшение параметра $\bar{\beta}$ за счет активности $h = h(\vec{r})$ приведет к следующим эффектам и обстоятельствам: падение надкритичности системы,

снижение скорости размножения нейтронов λ , увеличение погрешности формулы (П.12)

$$\delta = \frac{|\lambda - \lambda_{\text{расч}}|}{\lambda}, \quad \text{сглаживание пространственного}$$

распределения нейтронов по главной собственной

$$\text{функции } \psi\left(\vec{\xi} = \frac{\vec{r}}{R}, \vec{\Omega}\right).$$

В противоположном случае увеличения $\bar{\beta}$ при условии (П.15) реализуются обратные эффекты и, в частности, произойдет обострение пространственного распределения нейтронов в рассматриваемых профилейных системах.

Статья поступила в редакцию 15.04.2015