УДК 539.17

СООТНОШЕНИЯ ПОДОБИЯ, ВЫТЕКАЮЩИЕ ИЗ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ТЕПЛА В ОДНОРОДНЫХ И ПРОФИЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

Н. Б. Бабичев, А. А. Севастьянов

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Получены соотношения подобия тепловых процессов.

Ключевые слова: уравнение переноса тепла, инвариантность.

Введение

Цель данной статьи состоит в выводе формул подобия для тепловых процессов.

Ниже за основу принято уравнение теплопроводности [1].

1. Формулы подобия частного вида для температуры среды

1.1. Случай стационарного уравнения теплопроводности

В качестве примера рассмотрим следующее стационарное уравнение переноса тепла в простом случае постоянного источника энергии Q в единице объема системы:

$$\frac{d}{d\vec{r}}\left[k[T(\vec{r})]\frac{dT(\vec{r})}{d\vec{r}}\right]=-Q, \qquad (1)$$

T – температура системы, k – коэффициент теплопроводности.

В уравнении (1) осуществим преобразование подобия

$$\vec{r}\to\vec{r}'=\sqrt{\frac{Q}{Q'}}\vec{r}. \qquad (2)$$

С учетом того, что

$$\frac{d}{d\vec{r}}=\frac{d}{d\vec{r}'}\frac{d\vec{r}'}{d\vec{r}}=\sqrt{\frac{Q'}{Q}}\frac{d}{d\vec{r}'}, \qquad (3)$$

из уравнения (1) для штрихованной функции $T'(\vec{r}')$ получаем

$$\frac{d}{d\vec{r}'}\left[k'[T'(\vec{r}')]\frac{dT'(\vec{r}')}{d\vec{r}'}\right]=-Q'. \qquad (4)$$

Дифференциальное уравнение (4) имеет точно такой же вид, как (1), если выполняются (2) и инвариантное соотношение подобия

$$R'=\sqrt{\frac{Q}{Q'}}R, \qquad (5)$$

где R и R' – характерные размеры двух подобных систем.

Температурные поля внутри двух подобных систем связаны формулой подобия

$$T'(\vec{r})=T\left(\sqrt{\frac{Q}{Q'}}\vec{r}\right). \qquad (6)$$

1.2. Соотношения подобия, полученные из простого уравнения переноса тепла в нестационарных системах

Рассмотрим однородный шар с радиусом R и получим соотношения подобия, вытекающие из следующего нестационарного уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial T(t,r)}{\partial t}=\frac{\chi}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial T(t,r)}{\partial r}\right], \qquad (7)$$

которому подчиняется температура $T(t,r)$; $\chi = \dfrac{k}{\rho c_p}$ – постоянный коэффициент температуропроводности; k, ρ, и c_p –соответственно коэффициент теплопроводности, плотность вещества и теплоемкость при постоянном давлении.

Начальные условия будем считать слабыми.

Выполнив преобразования подобия

$$t \to t' = \frac{\chi'}{\chi} t, \;\; r \to r' = \frac{\chi'}{\chi} r, \tag{8}$$

для штрихованной функции $T'(t', r')$ получаем уравнение

$$\frac{\partial T'(t', r')}{\partial t'} = \frac{\chi'}{r'^2} \frac{\partial}{\partial r'} \left[r'^2 \frac{\partial T'(t', r')}{\partial r'} \right] \tag{9}$$

такого вида, как (7). Значит уравнение (7) инвариантно по отношению к преобразованиям подобия (8).

При соблюдении инвариантных условий

$$t' = \frac{\chi'}{\chi} t, \tag{10}$$

$$r' = \frac{\chi'}{\chi} r, \tag{11}$$

$$R' = \frac{\chi'}{\chi} R \tag{12}$$

справедлива формула подобия

$$T'(t,r) = T\left(\frac{\chi'}{\chi} t, \frac{\chi'}{\chi} r \right). \tag{13}$$

Найти аналитическое решение уравнения теплопроводности (7) нетрудно.

Обобщим полученные выше результаты на случай профильных систем с произвольной геометрией. Тогда нестационарное уравнение теплопроводности принимает вид

$$\frac{\partial T(t,\vec{r})}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \left[\chi(\vec{r}) \frac{\partial T(t,\vec{r})}{\partial \vec{r}} \right]. \tag{14}$$

Легко показать, что вместо соотношений (10) – (12) теперь справедливы следующие более общие их модификации:

$$t' = \frac{\chi'(\vec{r}')}{\chi(\vec{r})} t, \tag{15}$$

$$\vec{r}' = \frac{\chi'(\vec{r}')}{\chi(\vec{r})} \vec{r}, \tag{16}$$

$$R' = \frac{\chi'(\vec{r}')}{\chi(\vec{r})} R. \tag{17}$$

В выражение (17) входят характерные размеры подобных объектов.

Приведем итоговую формулу для подобных профильных систем, физические свойства которых зависят от координат:

$$T'(t,\vec{r}) = T\left[\frac{\chi'(\vec{r}')}{\chi(\vec{r})} t, \frac{\chi'(\vec{r}')}{\chi(\vec{r})} \vec{r} \right]. \tag{18}$$

2. Соотношения подобия, справедливые для однородных и профильных систем

2.1. Вывод формул из нестационарного уравнения теплопроводности без источника

Запишем нестационарное уравнение теплопроводности без источника в виде

$$b \frac{\partial T(t,\vec{r})}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \left\{ k[T(t,\vec{r})] \frac{\partial T(t,\vec{r})}{\partial \vec{r}} \right\}. \tag{19}$$

В нем произведение плотности и теплоемкости обозначено через b, т. е.

$$b = \rho c_p. \tag{20}$$

Уравнение (19) можно переписать, раскрыв дивергентное слагаемое:

$$b \frac{\partial T(t,\vec{r})}{\partial t} = \frac{\partial k[T(t,\vec{r})]}{\partial \vec{r}} \frac{\partial T(t,\vec{r})}{\partial \vec{r}} + k[T(t,\vec{r})] \frac{\partial^2 T(t,\vec{r})}{\partial \vec{r}^2}. \tag{21}$$

2.1.1. Частные соотношения подобия

1) Рассмотрим следующие преобразования подобия:

$$t \to t' = t, \vec{r} \to \vec{r}' = \left(\frac{b}{b'} \right)^n \vec{r}. \tag{22}$$

В этом случае в подобных системах время течет одинаково.

В уравнение (21) входят производные $\dfrac{\partial}{\partial t}$, $\dfrac{\partial}{\partial \vec{r}}$ и $\dfrac{\partial^2}{\partial \vec{r}^2}$, которые преобразуются по следующим формулам:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'}, \tag{23}$$

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}} = \frac{\partial}{\partial \vec{r}'} \frac{d\vec{r}'}{d\vec{r}} = \left(\frac{b}{b'} \right)^n \frac{\partial}{\partial \vec{r}'}, \tag{24}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \vec{r}^2} = \left(\frac{b}{b'} \right)^{2n} \frac{\partial^2}{\partial \vec{r}'^2}. \tag{25}$$

С учетом этого для штрихованной функции $T'(t',\vec{r}')$ имеем:

$$b\left(\frac{b'}{b}\right)^{2n}\frac{\partial T'(t',\vec{r}')}{\partial t'}=\frac{\partial k'[T'(t',\vec{r}')]}{\partial \vec{r}'}\frac{\partial T'(t',\vec{r}')}{\partial \vec{r}'}+$$

$$+k[T'(t',\vec{r}')]\frac{\partial^2 T'(t',\vec{r}')}{\partial \vec{r}'^2}. \qquad (26)$$

Чтобы уравнение (21) было инвариантным относительно преобразований подобия (22), т. е. принимало вид

$$b'\frac{\partial T'(t',\vec{r}')}{\partial t'}=\frac{\partial k'[T'(t',\vec{r}')]}{\partial \vec{r}'}\frac{\partial T'(t',\vec{r}')}{\partial \vec{r}'}+$$

$$+k'[T'(t',\vec{r}')]\frac{\partial^2 T'(t',\vec{r}')}{\partial \vec{r}'^2}, \qquad (27)$$

необходимо выполнение условия

$$b\left(\frac{b'}{b}\right)^{2n}=b' \qquad (28)$$

или

$$\left(\frac{b'}{b}\right)^{1-2n}=1. \qquad (29)$$

Из (29) получаем

$$n=\frac{1}{2}. \qquad (30)$$

Таким образом, соотношения подобия имеют следующий вид:

$$\vec{r}'=\sqrt{\frac{\rho c_p}{\rho' c_p'}}\vec{r}, \qquad (31)$$

$$R'=\sqrt{\frac{\rho c_p}{\rho' c_p'}}R. \qquad (32)$$

При соблюдении условий (31), (32) справедлива формула подобия

$$T'(t,\vec{r})=T\left(t,\sqrt{\frac{\rho c_p}{\rho' c_p'}}\vec{r}\right). \qquad (33)$$

2) Теперь сделаем такие преобразования подобия, в которых изменения претерпевает только время:

$$t\to t'=\left(\frac{b'}{b}\right)^{m}t,\ \vec{r}\to\vec{r}'=\vec{r}. \qquad (34)$$

Тогда

$$\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t'}\frac{dt'}{dt}=\left(\frac{b'}{b}\right)^{m}\frac{\partial}{\partial t'}, \qquad (35)$$

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}}=\frac{\partial}{\partial \vec{r}'}, \qquad (36)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \vec{r}^2}=\frac{\partial^2}{\partial \vec{r}'^2}, \qquad (37)$$

и уравнение для штрихованной функции $T'(t',\vec{r}')$ имеет вид

$$b\left(\frac{b'}{b}\right)^{m}\frac{\partial T'(t',\vec{r}')}{\partial t'}=\frac{\partial k'[T'(t',\vec{r}')]}{\partial \vec{r}'}\frac{\partial T'(t',\vec{r}')}{\partial \vec{r}'}+$$

$$+k'[T'(t',\vec{r}')]\frac{\partial^2 T'(t',\vec{r}')}{\partial \vec{r}'^2}. \qquad (38)$$

Для инвариантности уравнения (21) необходимо выполнение условия

$$m=1. \qquad (39)$$

Таким образом, соотношения подобия и формула подобия имеют следующий вид:

$$t'=\frac{\rho' c_p'}{\rho c_p}t, \qquad (40)$$

$$T'(t,\vec{r})=T\left(\frac{\rho' c_p'}{\rho c_p}t,\vec{r}\right). \qquad (41)$$

2.1.2. Соотношения подобия общего вида. Рассмотрим преобразования времени и координат в следующем общем виде:

$$t\to t'=\left(\frac{b'}{b}\right)^{\beta}t,\ \vec{r}\to\vec{r}'=\left(\frac{b}{b'}\right)^{\gamma}\vec{r}, \qquad (42)$$

где β и γ – любые простые числа, а также иррациональные числа, комбинация которых (см. ниже) представляет собой простое число.

Тогда соотношения подобия имеют следующий общий вид:

$$1-\beta-2\gamma=0. \qquad (43)$$

$$t'=\left(\frac{\rho' c_p'}{\rho c_p}\right)^{\beta}t, \qquad (44)$$

$$\vec{r}'=\left(\frac{\rho c_p}{\rho' c_p'}\right)^{\gamma}\vec{r}, \qquad (45)$$

$$R'=\left(\frac{\rho c_p}{\rho' c_p'}\right)^{\gamma}R. \qquad (46)$$

Числа β и γ строго связаны выражением (43). Данная связь предполагает бесконечное множество вариантов преобразования времени и координат, в результате которых исходное уравнение теплопроводности (19) будет инвариантным относительно них.

При соблюдении условий (42) – (46) справедлива формула подобия

$$T'(t,\vec{r}) = T\left[\left(\frac{\rho' c_p'}{\rho c_p}\right)^{\beta} t, \left(\frac{\rho c_p}{\rho' c_p'}\right)^{\gamma} \vec{r}\right]. \qquad (47)$$

2.2. Соотношения подобия, вытекающие из нестационарного уравнения с источником

В задачах с источником предполагается отсутствие начальных условий.

Рассмотрим нестационарное уравнение теплопроводности, в котором источник является профильной функцией:

$$b\frac{\partial T(t,\vec{r})}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \vec{r}}\left\{k[T(t,\vec{r})]\frac{\partial T(t,\vec{r})}{\partial \vec{r}}\right\} + Q(t,\vec{r}). \quad (48)$$

Применим преобразования подобия (42) к уравнению (48). Для штрихованной функции $T'(t',\vec{r}')$ получаем следующее уравнение:

$$b\left(\frac{b'}{b}\right)^{\beta+2\gamma}\frac{\partial T'(t',\vec{r}')}{\partial t'} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \vec{r}'}\left\{k'[T'(t',\vec{r}')]\frac{\partial T'(t,\vec{r})}{\partial \vec{r}'}\right\} + Q(t,\vec{r}). \qquad (49)$$

Для того чтобы уравнение (48) было инвариантным, кроме выполнения соотношений (43) – (46) должно выполняться дополнительное условие

$$Q'(t,\vec{r}) = Q\left[\left(\frac{\rho' c_p'}{\rho c_p}\right)^{\beta} t, \left(\frac{\rho c_p}{\rho' c_p'}\right)^{\gamma} \vec{r}\right]. \qquad (50)$$

Формулой подобия является выражение (47), которое было получено без дополнительного условия (50).

Появление источника в уравнении теплопроводности расширило класс подобных систем по сравнению с найденным в предыдущем подразделе.

3. Результаты вычислений по формуле подобия и их сравнение с точным решением уравнения теплопроводности

Рассмотрим однородный шар. Пусть в уравнении (1) коэффициент теплопроводности не зависит от температуры среды. Тогда (1) приводится к виду

$$\frac{d^2T(r)}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dT(r)}{dr} = -\frac{Q}{k}. \qquad (51)$$

В рассмотренном случае, кроме формул подобия, существуют простые аналитические решения упрощенной задачи, зависящие от граничных условий.

1) Если на границе шара температура равна температуре окружающей среды T_0, т. е.

$$T(r)\big|_{r=R} = T_0, \qquad (52)$$

то известным решением уравнения (51) является функция

$$T(r) = T_0 + \frac{Q}{6k}(R^2 - r^2). \qquad (53)$$

Пусть температура окружающей среды $T_0 = 293$ K и коэффициент теплопроводности плутония $k = 12$ Вт/(м · К) (см. [2]).

В качестве исходного рассмотрим шар из ^{239}Pu с радиусом $R = 100$ см. Интенсивность источника из изотопа ^{239}Pu составляет $Q = 32000$ Вт/м^3 (см. [3]). Распределение температуры (56) в исходном шаре считается известным.

Если подобный шар выполнен из ^{238}Pu, то его тепловыделение составляет $Q' = 9455000$ Вт/м^3 [3]. Из соотношения подобия (5) следует

$$R' = \sqrt{\frac{Q}{Q'}}R = 5{,}8 \text{ см}. \qquad (54)$$

Приведем результаты аналитического решения (53) и вычислений температуры в подобном шаре по формуле подобия (6) (рис. 1).

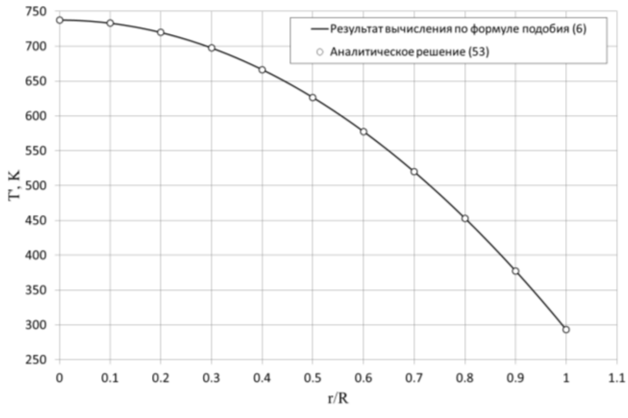

Рис. 1. Зависимость температуры $T'\left(\frac{r}{R}\right)$ в подобном шаре

Формула подобия столь же точна, как и уравнение теплопроводности. Можно утверждать, что результаты аналитических вычислений совпали с решением (53).

2) Если на границе шара происходит конвективный теплообмен с окружающей средой, то его можно смоделировать следующим граничным условием:

$$-k\left.\frac{dT(r)}{dr}\right|_{r=R}=\alpha(T_R-T_0), \tag{55}$$

где α – коэффициент теплопередачи, T_R – температура на поверхности шара.

Решением уравнения (51) в этом случае является функция

$$T(r)=T_0+\frac{QR}{3\alpha}+\frac{Q}{6k}(R^2-r^2) \tag{56}$$

(см. [4]).

В решении (56) возникло дополнительное слагаемое, связанное с конвективным теплообменом. В связи с этим необходимо выполнение дополнительного к (5) соотношения подобия

$$R'=\frac{\alpha}{\alpha'}R, \tag{57}$$

согласно которому изменяется коэффициент теплопередачи.

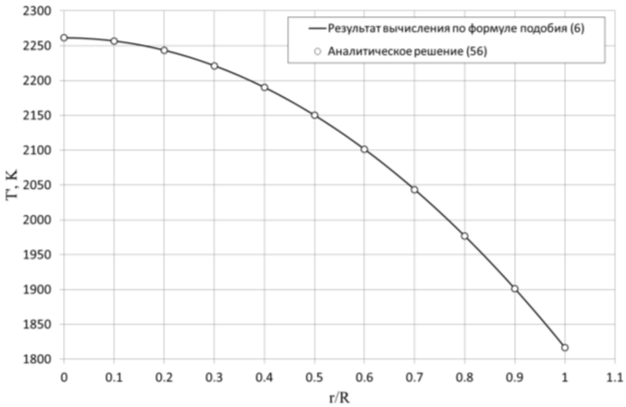

Рис. 2. Пространственное распределение температуры в подобном шаре

Рассмотрим те же исходный и подобный шары, что и в п.1), положив коэффициент теплопередачи в исходном шаре $\alpha=7$ Вт/(м$^2\cdot$К) (см. [5]).

$$\alpha'=\frac{R}{R'}\alpha=120{,}32\ \text{Вт/м}^2\cdot\text{К}. \tag{58}$$

На рис. 2 показаны температура $T'\left(\frac{r}{R}\right)$, полученная по формуле подобия (6), и результат аналитического решения (56).

Видно, что результаты аналитических вычислений совпали с результатами, в которых применялась формула подобия.

Заключение

Из материалов, представленных в разделах 1 – 3, следует, что поставленная во введении задача решена.

Список литературы

1. Арсенин В. Я. Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1984.

2. Физические величины: Справочник / Под ред. И. С. Григорьева, Е. З. Мейлихова. М.: Энергоатомиздат, 1991.

3. Lederer C. M. and Shirley V. S., Eds., Table of Isotopes, 7th ed. (John Wiley&Sons,I nc., New York, 1978).

4. Бабичев Н. Б., Севастьянов А. А. Об эффекте саморазогрева плутония-238 в простых по геометрии сферически-симметричных системах // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2014. Вып. 3. С. 85–88.

5. Отопление и вентиляция: Учебник для вузов в двух частях / Под ред. П. Н. Каменева, А. Н. Сканави, В. Н. Богословского, А. Г. Егиазарова, В. П. Щеглова. М.: Стройиздат, 1975.

Статья поступила в редакцию 20.04.2015