УДК 539.17

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ

Н. Б. Бабичев, А. А. Севастьянов

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Получены соотношения подобия, вытекающие из волнового уравнения.

Ключевые слова: волновое уравнение, инвариантность.

Введение

Цель данной статьи состоит в выводе формул подобия процессов, подчиняющихся дифференциальному волновому уравнению в частных производных [1].

Ниже задачи решаются в тех же предположениях, что и в статье [2].

1. Соотношения подобия, полученные из нестационарного волнового уравнения без источника

1.1. Частные соотношения подобия

1) Будем исходить из нестационарного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u(t,\vec{r})}{\partial t^2} = a\frac{\partial^2 u(t,\vec{r})}{\partial \vec{r}^{\,2}}. \quad (1)$$

Отметим, что вид положительного коэффициента a зависит от того, какие волновые процессы имеются в виду (распространение электромагнитных волн и, например, колебания стержня).

Подвергнем уравнение (1) преобразованиям подобия

$$t \to t' = t, \vec{r} \to \vec{r}\,' = \sqrt{\frac{a'}{a}}\vec{r}. \quad (2)$$

При этом в подобных системах время течёт одинаково.

Если выполняются условия (2), то для штрихованной функции $u'(t', r')$ получается уравнение

$$\frac{\partial^2 u'(t',\vec{r}\,')}{\partial t'^2} = a'\frac{\partial^2 u'(t',\vec{r}\,')}{\partial \vec{r}\,'^2}. \quad (3)$$

Сравнив (1) и (3), видим, что уравнение (1) инвариантно по отношению к замене переменной $\vec{r} \to \vec{r}\,' = \sqrt{\frac{a'}{a}}\vec{r}.$

Инвариантные соотношения подобия выглядят следующим образом:

$$\vec{r}\,' = \sqrt{\frac{a'}{a}}\vec{r}, \quad (4)$$

$$R' = \sqrt{\frac{a'}{a}}R, \quad (5)$$

R и R' – характерные размеры двух подобных систем.

При соблюдении условий (4) и (5) имеет место формула подобия

$$u'(t,\vec{r}) = u\left(t, \sqrt{\frac{a'}{a}}\vec{r}\right). \quad (6)$$

2) Применим к уравнению (1) преобразования подобия

$$t \to t' = \sqrt{\frac{a}{a'}}t, \vec{r} \to \vec{r}\,' = \vec{r}. \quad (7)$$

В этом случае пространственные зависимости не изменяются. При таких преобразованиях уравнение (1) остается инвариантным. Ниже приведены соотношения подобия и формула подобия:

$$t' = \sqrt{\frac{a}{a'}}t, \quad (8)$$

$$u'(t,\vec{r}) = u\left(\sqrt{\frac{a}{a'}}t, \vec{r}\right). \quad (9)$$

1.2. Соотношения подобия общего вида

Рассмотрим следующие преобразования времени и координат:

$$t \to t' = \left(\frac{a}{a'}\right)^{\alpha} t, \vec{r} \to \vec{r}\,' = \left(\frac{a'}{a}\right)^{\beta} \vec{r}. \qquad (10)$$

В исходное волновое уравнение (1) входят вторые производные, которые преобразуются по следующим формулам:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \left(\frac{a}{a'}\right)^{2\alpha} \frac{\partial^2}{\partial t'^2}. \qquad (11)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \vec{r}^{\,2}} = \left(\frac{a'}{a}\right)^{2\beta} \frac{\partial^2}{\partial \vec{r}\,'^2}. \qquad (12)$$

Подстановка (11) и (12) в (1) приводит к следующему уравнению для штрихованной функции $u'(t',\vec{r}\,')$:

$$\frac{\partial^2 u'(t',\vec{r}\,')}{\partial t'^2} = a\left(\frac{a'}{a}\right)^{2\alpha+2\beta} \frac{\partial^2 u'(t',\vec{r}\,')}{\partial \vec{r}\,'^2}. \qquad (13)$$

Чтобы уравнение (1) было инвариантно относительно преобразований подобия (10), т. е. принимало вид (3), обязано выполняться условие $a\left(\frac{a'}{a}\right)^{2\alpha+2\beta} = a'$ или

$$\left(\frac{a'}{a}\right)^{2\alpha+2\beta-1} = 1. \qquad (14)$$

Последнее выражение справедливо при

$$\alpha + \beta = \frac{1}{2}. \qquad (15)$$

Константы α и β – рациональные и иррациональные числа, соответствующие ограничению (15).

Соотношения подобия имеют следующий общий вид:

$$t' = \left(\frac{a}{a'}\right)^{\alpha} t, \qquad (16)$$

$$\vec{r}\,' = \left(\frac{a'}{a}\right)^{\beta} \vec{r}, \qquad (17)$$

$$R' = \left(\frac{a'}{a}\right)^{\beta} R. \qquad (18)$$

При соблюдении условий (15) – (18) имеет место формула подобия

$$u'(t,\vec{r}) = u\left[\left(\frac{a}{a'}\right)^{\alpha} t, \left(\frac{a'}{a}\right)^{\beta} \vec{r}\right]. \qquad (19)$$

При $\alpha = 0$ в одном случае и $\beta = 0$ в другом случае соотношения (16) – (19) переходят в (4) – (6) и (8), (9) соответственно.

2. Некоторые соотношения подобия, полученные при использовании свойства инвариантности неоднородного стационарного и нестационарного волнового уравнения

2.1. Стационарный случай

Стационарное волновое уравнение с постоянным источником имеет следующий вид

$$a\frac{\partial^2 u(\vec{r})}{\partial \vec{r}^{\,2}} = -Q. \qquad (20)$$

Преобразование подобия

$$\vec{r} \to \vec{r}\,' = \sqrt{\frac{a'Q}{aQ'}}\vec{r}. \qquad (21)$$

приводит к следующему уравнению для штрихованной функции $u'(\vec{r}\,')$

$$a'\frac{\partial^2 u'(\vec{r}\,')}{\partial \vec{r}\,'^2} = -Q', \qquad (22)$$

что свидетельствует об инвариантности (20).

Таким образом, имеем следующие соотношения подобия

$$\vec{r}\,' = \sqrt{\frac{a'Q}{aQ'}}\vec{r}, \qquad (23)$$

$$R' = \sqrt{\frac{a'Q}{aQ'}}R, \qquad (24)$$

и формулу подобия

$$u'(\vec{r}) = u\left(\sqrt{\frac{a'Q}{aQ'}}\vec{r}\right). \qquad (25)$$

2.2. Случай нестационарных систем

Рассмотрим неоднородное нестационарное волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 u(t,\vec{r})}{\partial t^2} = a\frac{\partial^2 u(t,\vec{r})}{\partial \vec{r}^{\,2}} + Q(t,\vec{r}). \qquad (26)$$

Применим преобразования подобия (10) к уравнению (26). Для штрихованной функции $u'(t',\vec{r}')$ получаем следующее уравнение:

$$\frac{\partial^2 u'(t',\vec{r}')}{\partial t'^2} = a' \frac{\partial^2 u'(t',\vec{r}')}{\partial \vec{r}'^2} + Q(t,\vec{r}). \qquad (27)$$

Чтобы уравнение (26) было инвариантным, кроме выполнения обязательных условий (16) – (18) должно выполняться дополнительное требование

$$Q'(t,\vec{r}) = Q\left[\left(\frac{a}{a'}\right)^{\alpha} t, \left(\frac{a'}{a}\right)^{\beta} \vec{r}\right]. \qquad (28)$$

Формула подобия (19) не изменяется.

Заключение

Изложенные в статье материалы являются основой для дальнейшего развития теории подобия волновых процессов.

Список литературы

1. Арсенин В. Я. Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1984.
2. Бабичев Н. Б., Севастьянов А. А. Соотношения подобия, вытекающие из уравнения переноса тепла в однородных и профильных системах // См. настоящий выпуск. С. 57–61.

Статья поступила в редакцию 20.04.2015