УДК 539.17

# СООТНОШЕНИЯ ПОДОБИЯ, ПОЛУЧЕННЫЕ ИЗ НЕОДНОРОДНОГО ОДНОСКОРОСТНОГО КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ НЕЙТРОНОВ

**Н. Б. Бабичев, А. А. Севастьянов**

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Получены и опробованы новые формулы подобия нейтронно-кинетических процессов.

*Ключевые слова:* кинетическое уравнение, формулы подобия, инвариантность.

## Введение

В работе [1] теория подобия разработана на основе однородного уравнения переноса нейтронов в профильных системах с произвольной геометрией.

Цель данной статьи заключается в нахождении соотношений подобия, исходя из неоднородного кинетического уравнения.

## 1. Вывод соотношений подобия

В статье [1] представлено однородное односкоростное уравнение переноса нейтронов в профильных системах. Дополнив его источником с интенсивностью $Q$ (количество нейтронов, испускаемых в единичный объем в момент времени $t$ в точке $\vec{r}$ за единицу времени), получаем следующее неоднородное безразмерное уравнение переноса нейтронов в профильных нестационарных системах:

$$\left[Z\frac{\partial}{\partial\tau}+\left(\vec{\Omega}\frac{\partial}{\partial\vec{\zeta}}\right)\right]\psi\left(\tau,\vec{\zeta},\vec{\Omega}\right)+\frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}ZA\left(\vec{\zeta}\right)\psi\left(\tau,\vec{\zeta},\vec{\Omega}\right)=$$

$$=\frac{ZB\left(\vec{\zeta}\right)}{4\pi}\int d\vec{\omega}\psi\left(\tau,\vec{\zeta},\vec{\omega}\right)+S\left(\tau,\vec{\zeta}\right), \qquad (1)$$

$$\tau=\overline{\beta}Vt, \qquad (2)$$

$$\vec{z}=\overline{\beta}\vec{r}, \qquad (3)$$

$\vec{\zeta}=\dfrac{\vec{z}}{Z}$, $Z=\overline{\beta}R$ – характерный размер объекта в $\vec{z}$-пространстве, $S\left(\tau,\vec{\zeta}\right)$ – безразмерный источник нейтронов, а используемый далее $Q\left(t,\vec{r}\right)$ имеет размерность 1/(см$^3$ · с).

В уравнение (1) входят средние по объему системы параметры $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ и профильные функции $A\left(\vec{\zeta}\right), B\left(\vec{\zeta}\right)$, нормированные следующим образом:

$$\int d\vec{\zeta}A(\vec{\zeta})=\int d\vec{\zeta}B(\vec{\zeta})=\int d\vec{\zeta}=1. \qquad (4)$$

Появление источника в кинетическом уравнении приводит к следующим дополнениям:

$$S(\tau,\vec{z})=\overline{S}(\tau)q(\vec{\zeta}), \qquad (5)$$

$\overline{S}(\tau)$ – зависящий от безразмерного времени источник нейтронов, усредненный по объему; $q(\vec{\zeta})$ – соответствующая профильная функция, для которой принята аналогичная (4) нормировка

$$\int d\vec{\zeta}q(\vec{\zeta})=\int d\vec{\zeta}=1. \qquad (6)$$

Воспользуемся свойством инвариантности уравнения переноса нейтронов (1) по отношению к преобразованиям подобия

$$\tau\to\tau'=\frac{Z'}{Z}\tau=\frac{\overline{\beta}'R'}{\overline{\beta}R}\tau, \qquad (7)$$

$$\vec{z}\to\vec{z}'=\frac{Z'}{Z}\vec{z}=\frac{\overline{\beta}'R'}{\overline{\beta}R}\vec{z}, \qquad (8)$$

при этом $\vec{\zeta}'=\vec{\zeta}$.

Переход к штрихованной функции распределения нейтронов дает уравнение

$$\left[Z'\frac{\partial}{\partial\tau'}+\left(\vec{\Omega}\frac{\partial}{\partial\vec{\zeta}'}\right)\right]\psi'\left(\tau',\vec{\zeta}',\vec{\Omega}\right)+\frac{\bar{\alpha}'}{\bar{\beta}'}Z'A'\left(\vec{\zeta}'\right)\psi'\left(\tau',\vec{\zeta}',\vec{\Omega}\right)=$$

$$=\frac{Z'B'\left(\vec{\zeta}'\right)}{4\pi}\int d\vec{\omega}\psi'\left(\tau',\vec{\zeta}',\vec{\omega}\right)+S'\left(\tau',\vec{\zeta}'\right) \qquad (9)$$

такого же вида, как (1), если выполняются следующие инвариантные соотношения:

$$\bar{\beta}'\vec{r}'=\bar{\beta}\vec{r}; \qquad (10)$$

$$Z'=\bar{\beta}'R'=Z=\bar{\beta}R, \qquad (11)$$

где $R'$ и $R$ – характерные размеры двух подобных систем в $\vec{r}$ -пространстве;

$$\tau'=\frac{\bar{\beta}'R'}{\bar{\beta}R}\tau; \qquad (12)$$

$$\bar{\beta}'R'B'\left(\vec{\zeta}'\right)=\bar{\beta}RB\left(\vec{\zeta}\right),\quad \bar{\alpha}'R'A'\left(\vec{\zeta}'\right)=\bar{\alpha}RA\left(\vec{\zeta}\right),$$

$$\bar{S}'\left(\tau'\right)q'\left(\vec{\zeta}'\right)=\bar{S}\left(\tau\right)q\left(\vec{\zeta}\right). \qquad (13)$$

Функции распределения нейтронов в любых двух подобных системах связаны следующим образом:

$$\psi_2\left(\tau_2,\vec{\zeta}_2,\vec{\Omega}\right)=C_{1,2}\psi_1\left(\tau_1,\vec{\zeta}_1,\vec{\Omega}\right). \qquad (14)$$

Формула подобия (14) справедлива, если выполняются условия (10) – (13).

Нормировочную константу $C_{1,2}$ можно заменить на одну условную единицу, приняв, к примеру, что при $z_2 = 0$ и $z_1 = 0$ $\psi_2=\psi_1$.

Далее будем считать, что постоянная $C_{1,2}$ равна единице.

При переходе из $\vec{z}$ -пространства в фазовое пространство векторов $\vec{r}$ , $\vec{\Omega}$ (14) превращается в

$$\psi_2\left(t,\vec{r},\vec{\Omega}\right)=\psi_1\left(\frac{R_2}{R}t,\frac{R_2}{R}\vec{r},\vec{\Omega}\right) \qquad (15)$$

и источники нейтронов подчиняются соотношению подобия

$$Q_2\left(t,\vec{r}\right)R_2=Q_1\left(\frac{R_2}{R}t,\frac{R_2}{R}\vec{r}\right)R. \qquad (16)$$

В выражениях (15) и (16) в качестве $R_1$ взят характерный размер первой системы $R$.

## 2. Результаты расчетов и аналитических вычислений

### *2.1. Постановка задачи*

Численные расчеты проводились по одной из математических программ [2] при значении скорости нейтронов $V=10^9$ см/с.

Рассмотрим подобные шары с профилями параметров $\alpha(\xi)$, $\beta(\xi)$ у одного шара и $\alpha'(\xi')$, $\beta'(\xi')$ у второго шара, где $\xi=\frac{r}{R}$, $\xi'=\frac{r'}{R'}$.

Пусть для примера шары являются двухобластными, в которых объем центральной области в три раза меньше полного объема, с профильными функциями

$$A(\xi)=B(\xi)=\begin{cases}1{,}5 \text{ при } 0<\xi\le\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}},\\[2ex] 0{,}75 \text{ при } \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}<\xi\le 1,\end{cases}$$

$$A'(\xi')=A(\xi),\ B'(\xi')=B(\xi) \qquad (17)$$

и значении $\bar{\beta}R=\bar{\beta}'R'=1{,}788$.

У исходного шара выберем $\bar{\alpha}=0{,}3733\ 1/\text{см}$, $\bar{\beta}=0{,}6384\ 1/\text{см}$, $R$ = 2,8 см.

Формулой подобия (16) можно пользоваться при любой зависимости источника от времени. Ниже она применялась для следующего частного случая.

В центральной области шара в течение времени $0<t<2\cdot10^{-7}$с действует, а затем при $t>2\cdot10^{-7}$с отключается источник нейтронов

$$Q(t,\xi)=\bar{Q}_0(t)q(\xi),\ \frac{\partial\bar{Q}_0(t)}{\partial t}=0, \qquad (18)$$

$$\bar{Q}_0(t)=42735\,\text{нейтр./(см}^3\cdot\text{с) при } t<2\cdot10^{-7}\ \text{с},$$

$$q(\xi)=\begin{cases}1 \text{ при } 0<\xi\le\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}},\\[2ex] 0 \text{ при } \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}<\xi\le 1.\end{cases} \qquad (19)$$

В подобном шаре с $\bar{\alpha}'=0{,}1867\ 1/\text{см}$, $\bar{\beta}'=0{,}3192\ 1/\text{см}$, $R'$ = 5,6 см

$$Q'(t',\xi')=\bar{Q}_0'(t')q'(\xi'), \qquad (20)$$

$$\bar{Q}_0'(t')=\frac{R}{R'}\bar{Q}_0\left(\frac{R'}{R}t\right)=21367{,}5\ \text{нейтр./(см}^3\cdot\text{с)} \qquad (21)$$

при $t'<4\cdot10^{-7}$ с,

$$q'(\xi')=q(\xi). \qquad (22)$$

## *2.2. Эволюция процессов нейтронной кинетики во времени*

График полученной в численном расчете для исходного шара зависимости логарифмической производной $\dfrac{1}{N(t)}\dfrac{dN(t)}{dt}$ от полного числа нейтронов $N(t)$ представлен на рис. 1.

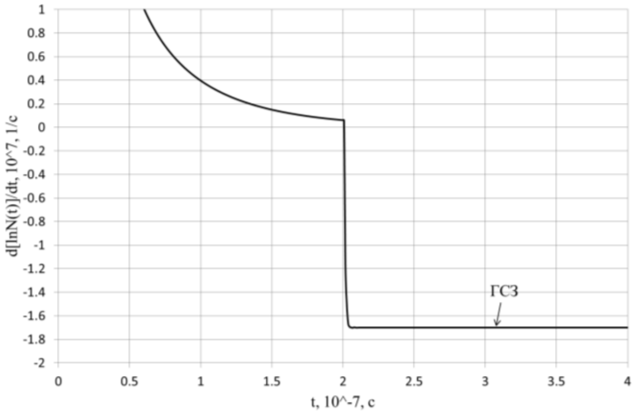


Рис. 1. Зависимость $\dfrac{1}{N(t)}\dfrac{dN(t)}{dt}$ в исходном шаре

Из рисунка видно, что после выключения источника нейтронов логарифмическая производная за короткое время $\Delta t=0{,}1\cdot10^{-7}$ с выходит на главное собственное значение (ГСЗ)

$$\lambda_{\text{расч}}=-1{,}7\cdot10^{7}\ 1/\text{с}. \qquad (23)$$

Для подобного шара расчет привел к значению ГСЗ

$$\lambda'_{\text{расч}}=-0{,}85\cdot10^{7}\ 1/\text{с}. \qquad (24)$$

На рис. 2 приведены графики нейтронных плотностей в подобном шаре $n'\left(t',\xi'=\dfrac{r'}{R'}\right)$ на разные моменты времени, полученные из формулы подобия

$$n'(t,r)=n\left(\frac{R'}{R}t,\frac{R'}{R}r\right), \qquad (25)$$

и из расчета $n'_{\text{расч}}(t',\xi')$.

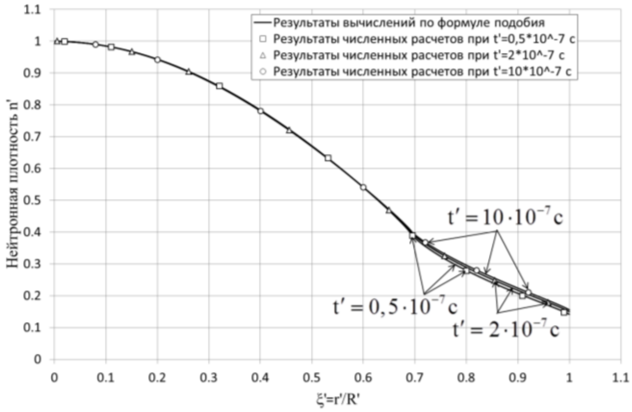


Рис. 2. Зависимость нейтронной плотности в подобном шаре от относительного радиуса в некоторые моменты времени

Нейтронные плотности отнормированы на единицу в центре шара.

Отметим, что погрешность численного расчета $\delta=\dfrac{\left|n'_{\text{расч}}(t',\xi')-n'(t',\xi')\right|}{n'_{\text{расч}}(t',\xi')}$ не превышает 0,8 % при $t'=0{,}5\cdot10^{-7}$ с, 0,08 % при $t'=2\cdot10^{-7}$ с и 0,009 % при $t'=10\cdot10^{-7}$ с.

Из рис.2 видно, что нейтронная плотность в момент $t'=2\cdot10^{-7}$ с, когда еще действует источник нейтронов, незначительно отличается от $n'(t',\xi')$ на далекий момент времени $t'=10\cdot10^{-7}$ с.

Наибольшие отклонения нейтронной плотности от $n'(t'=0{,}5\cdot10^{-7}\ \text{с},\ \xi')$ на некоторые моменты приведены в табл. 1.

Таблица 1

Максимальные отклонения нейтронной плотности от $n'(t'=0{,}5\cdot10^{-7}\ \text{с},\ \xi')$ при $t'\geq0{,}5\cdot10^{-7}$ с

| $t'$, $10^{-7}$, с | $\delta=\dfrac{\left|n'(t',\xi')-n'(t'=0{,}5\cdot10^{-7}\ \text{с},\ \xi')\right|}{n'(t',\xi')}$, % |
|---|---|
| 0,5 | 0 |
| 2 | 6,052 |
| 3 | 6,516 |
| 4 | 6,679 |
| 5 | 9,632 |
| 10 | 9,651 |

Из таблицы видно, что после выключения источника при $t'=4\cdot10^{-7}$ с распределение нейтронов в подобной системе быстро выходит на главную собственную функцию (ГСФ).

Приведем нейтронные плотности в подобном шаре (без нормировки) в процессе их изменения во времени.

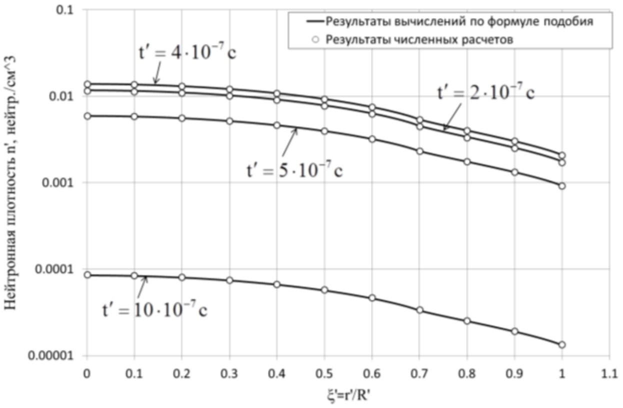


Рис. 3. Изменение нейтронной плотности в подобном шаре со временем

Из рис. 3 видно, что нейтронная плотность со временем растет до выключения источника нейтронов, далее она падает. Совпадение результатов вычислений по формуле подобия (25) (линии) и результатов численных расчетов (маркеры) обусловлено выполнением соотношения подобия (16) для источника.

### *2.3. Сравнение характеристик некоторых подобных однородных шаров, выполненных из изотопов $^{238}$Pu и $^{239}$Pu*

Изотоп $^{238}$Pu характеризуется высоким удельным выходом нейтронов при спонтанных делениях ядер $2{,}59\cdot 10^3$ нетр./(г · с) (см. [3]), что на пять порядков больше, чем у $^{239}$Pu. Удельная интенсивность нейтронного выхода у изотопа $^{239}$Pu составляет $2{,}18\cdot 10^{-2}$ нетр./(г · с).

В работе [4] показано, что из-за сильного саморазогрева $^{238}$Pu вследствие α-распада только миниатюрные объекты не подвержены плавлению. Ниже рассматривается малый по размеру шар из $^{238}$Pu, размер которого оценен в [4].

В аналитических вычислениях и расчетах были приняты следующие одногрупповые нейтронные константы $^{238}$Pu и $^{239}$Pu.

Таблица 2

Значения параметров $\alpha(\rho_0)$, $\beta(\rho_0)$ и активности $h$ (см. [5])

| Изотоп | $^{238}$Pu | $^{239}$Pu |
|---|---|---|
| Кристаллическая плотность $\rho_0$, г/см$^3$ | 19,84 | 19,851 |
| $\alpha(\rho_0)$, 1/см | 0,2691 | 0,2779 |
| $\beta(\rho_0)$, 1/см | 0,4602 | 0,4607 |
| $h = \beta/\alpha$ | 1,7101 | 1,6578 |

Рассмотрим исходный шар из $^{238}$Pu с радиусом $R = 0{,}1$ см, в котором действует постоянный источник спонтанных делений $Q_0$. Если плотность плутония $\rho = 16{,}5$ г/см$^3$, то $Q_0 = 42735$ нейтр./(см$^3$·с), $\alpha = 0{,}2238\ 1/\text{см}$, $\beta = 0{,}3827\ 1/\text{см}$, $\beta R = 0{,}03827$.

У подобного шара из $^{239}$Pu $Q_0' = 0{,}36$ нейтр./(см$^3$·с) и его радиус $R' = R\dfrac{Q_0}{Q_0'} = 11881$ см.

Приведем нейтронную плотность в подобном шаре, полученную вычислением по формуле подобия (25) и с помощью численного расчета.

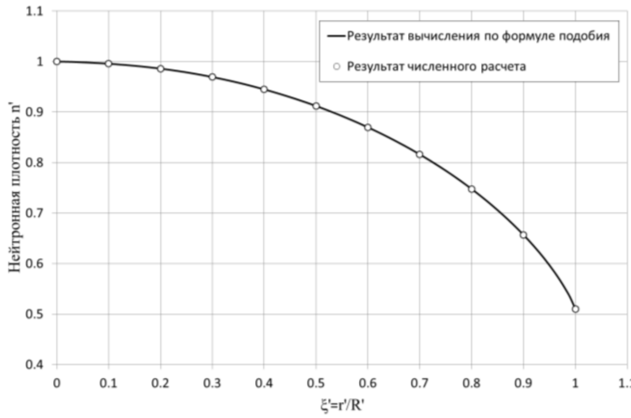


Рис.4. Пространственная зависимость нейтронной плотности в подобном шаре, нормированная на единицу в центре

Погрешность расчетной нейтронной плотности в случае шара из $^{239}$Pu не превышает 0,008 %. Для достижения высокой точности численный расчет характеристик подобного шара из $^{239}$Pu из-за его огромного размера ($R$ = 119 м) потребовал в полторы тысячи раз больших затрат машинного времени, чем расчет в случае исходного шара из $^{238}$Pu. Таким образом, решенные выше задачи представляют собой яркий пример практической ценности формул подобия.

## Заключение

На основе неоднородного кинетического уравнения разработаны элементы теории подобия процессов нейтронной кинетики, протекающих в нестационарных системах.

Из общих результатов можно легко получить частные формулы подобия, справедливые для стационарных объектов.

Отметим, что формулы подобия (15), (16) остаются в силе и в случае анизотропного источника нейтронов $Q(\tau, \vec{z}, \vec{Y})$, в котором анизотропия описывается вектором $\vec{Y} \neq \vec{\Omega}$.

Полученные выше новые теоретические материалы подтверждены результатами численных расчетов и вычислений по формулам подобия.

## Список литературы

1. Бабичев Н. Б. Усовершенствование теории подобия процессов нейтронной кинетики и результаты новых аналитических исследований // См. настоящий выпуск. С. 46–56.

2. Шагалиев Р. М., Гребенников А. Н., Артемьев А. Ю., Будников В. И. Развитие основных методик и программ ИТМФ // Журнал Атом, 2011, № 50–51.

3. Perry R. T. and Wilson W. B. Neutron Production from (α, *n*) Reactions and Spontaneous Fission in $ThO_2$, $UO_2$, and $(U, Pu)O_2$ Fuels. Los Alamos National Laboratory report LA-8869-MS (June 1981).

4. Бабичев Н. Б., Севастьянов А. А. Об эффекте саморазогрева плутония-238 в простых по геометрии сферически-симметричных системах // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2014. Вып. 3. С. 85–88.

5. Бабичев Н. Б., Севастьянов А. А. Критические параметры однородных шаров, состоящих из плутония-238 и плутония-239 // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2014. Вып. 3. С. 28–35.

Статья поступила в редакцию 20.04.2015