

РЕГУЛЯРНОЕ ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОЕ СТАТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ КОНФОРМНОЙ ГЕОМЕТРОДИНАМИКИ

М. В. Горбатенко

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл. Email: gorbatenko@vniief.ru

Находится регулярное центрально-симметричное статическое решение уравнений общей теории относительности, обобщенных таким образом, чтобы они удовлетворяли условию конформной инвариантности. Решение состоит из двух частей, разделенных поверхностью ветвления. Во внешней части решение совпадает с решением Шварцшильда в пространстве де Ситтера. Внутренняя ветвь отличается от внешней тем, что в ней не равен нулю инвариант, построенный из вектора Вейля. На поверхности ветвления выполняются все условия, выполнение которых требуется в релятивистской гидродинамике при рассмотрении поверхностей разрыва: непрерывность компонент метрики и равенство нулю радиальной компоненты силы, действующей на объект. Видимый радиус объекта определяется его гравитационным радиусом и кривизной пространства в месте размещения объекта. Построенное решение позволяет избежать концептуальных трудностей, возникающих в ОТО (сингулярности, горизонты событий и др.). В то же время построенное решение приводит к уравнению состояния материи внутри объекта, относящееся к категории смеси обычной материи и темной энергии.

Ключевые слова: Централно-симметричные решения уравнений общей теории относительности, конформная геометродинамика, регулярные решения, проблема черных дыр.

1. Введение

Централно-симметричные статические (ЦСС) решения уравнений общей теории относительности (ОТО) являются предметом исследований во многих работах и по разным причинам. Исторически первое решение для пустого пространства получил К. Шварцшильд в [1]. Он же в [2] получил ЦСС решение и для массивного объекта с конечным радиусом поверхности и с конечной плотностью энергии. Систематическое изложение второго решения имеется в [3]. Детальное обсуждение ЦСС решения уравнений ОТО применительно к теории звезд имеется, например, в [4, 5]. ЦСС решения активно обсуждаются в связи с проблемой коллапса, возникновения горизонтов событий, сингулярностей физических величин в центре и других атрибутов черных дыр [6–10].

В данной работе предметом исследований также является ЦСС решение уравнений ОТО. Исследования в данной работе имеют две особенно-

сти. Одна из них состоит в использовании в уравнениях ОТО

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = -2A_{\alpha}A_{\beta} - g_{\alpha\beta}A^2 - 2g_{\alpha\beta}A^{\nu}_{;\nu} + A_{\alpha;\beta} + A_{\beta;\alpha} + \lambda g_{\alpha\beta} \quad (1)$$

специфического тензора энергии-импульса $T_{\alpha\beta}$, а именно, такого тензора $T_{\alpha\beta}$, при котором уравнения ОТО для пустого пространства становятся инвариантными относительно конформных преобразований

$$\left. \begin{aligned} g_{\alpha\beta} &\rightarrow g'_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} e^{2\sigma}, \\ A_{\alpha} &\rightarrow A'_{\alpha} = A_{\alpha} - \sigma_{,\alpha}, \\ \lambda &\rightarrow \lambda' = \lambda e^{-2\sigma}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Здесь λ – функция от времени и радиуса, известная как лямбда-член. Из способа получения уравнений (1) [см. 11, 12] следует, что в этих уравнениях нулевые значения лямбда-члена в принципе

не допускаются. Что касается величины A_α , то ее будем называть вектором Вейля. В (2) $\sigma(x)$ – произвольная достаточно гладкая функция координат. Уравнения (1) будем называть уравнениями конформной геометродинамики (КГД).

Другая особенность состоит в допуске в качестве полноправных решений уравнений ОТО так называемых разрывных решений¹. Такие решения удовлетворяют во всем пространстве уравнениям (1), но на некоторых пространственноподобных поверхностях могут испытывать разрыв некоторые производные от метрики, а также вектор Вейля и лямбда-член.

Возникает вопрос: с чем связано обращение к направлению исследований с указанными двумя особенностями? Дело в том, что все решения уравнений ОТО (за исключением тривиальных случаев в виде пространства Минковского или пространства де Ситтера) имеют сингулярности. Это относится к статическому решению Шварцшильда, стационарному решению Керра, космологическим решениям Фридмана.

Использование тензора $T_{\alpha\beta}$ в виде правой части уравнений (1), конечно, не спасает от сингулярностей. Но ситуация с сингулярностями меняется, поскольку становится более широким класс точных решений уравнений КГД. Одни ветви решений имеют сингулярности в одних пространственно-временных областях, а другие – в других. В результате появляется возможность ставить вопрос о сшивке различных ветвей решений на некоторых поверхностях разрыва. И вот тут начинает играть роль тот факт, что для уравнений (1) задача Коши ставится без связей на начальные данные (см. [11]). С какими бы значениями не приходила одна ветвь решения на поверхность разрыва, мы можем быть уверенными в том, что эти значения могут быть использованы в качестве начальных или граничных данных для другой ветви.

Приведенные соображения будут продемонстрированы в данной работе на примере ЦСС решения уравнений КГД. Интересно заметить, что полученное в данной работе ЦСС решение не может быть в принципе сведено к конформно плоскому, поскольку имеет ненулевой инвариант $(F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta})$, где $F_{\alpha\beta} \equiv A_{\beta,\alpha} - A_{\alpha,\beta}$.

В заключение работы проводится сравнительный анализ полученных результатов и результатов ранее рассмотренных ЦСС задач. Результаты обобщаются.

2. Метрика Кристоффеля

Для описания центрально-симметричных ситуаций может быть использовано выражение для квадрата интервала в следующем виде (см., например, [3]):

$$ds^2 = -e^\gamma dt^2 + e^\alpha dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (3)$$

Здесь $d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$, где θ, φ – полярный и азимутальный углы соответственно. Входящие в (3) функции $\gamma(r), \alpha(r)$ являются функциями радиальной переменной r . Стандартная процедура вычисления символов Кристоффеля приводит к следующим выражениям для отличных от нуля символов:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ 01 \end{pmatrix} = \frac{\gamma'}{2} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 00 \end{pmatrix} = \frac{\gamma'}{2} e^{\gamma-\alpha} & \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \end{pmatrix} = \frac{\alpha'}{2} & \begin{pmatrix} 1 \\ 22 \end{pmatrix} = -re^{-\alpha} & \begin{pmatrix} 1 \\ 33 \end{pmatrix} = -re^{-\alpha} \sin^2\theta \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \end{pmatrix} = \frac{1}{r} & \begin{pmatrix} 2 \\ 33 \end{pmatrix} = -\sin\theta \cos\theta \\ \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \end{pmatrix} = \frac{1}{r} & \begin{pmatrix} 3 \\ 23 \end{pmatrix} = \text{ctg}\theta \end{cases} \quad (4)$$

Штрих обозначает производную по r .

3. Уравнения КГД

Явный вид величин $G_{\alpha\beta}$ для ЦСС задачи заимствуем из [3] (формулы (7.81)). В результате уравнения ОТО принимают следующий вид:

$$\frac{1}{r^2} e^{-\alpha} (1 - r\alpha') - \frac{1}{r^2} = T_0^0. \quad (5)$$

$$\frac{1}{r^2} e^{-\alpha} (1 + r\gamma') - \frac{1}{r^2} = T_1^1. \quad (6)$$

$$e^{-\alpha} \left(\frac{\gamma''}{2} + \frac{\gamma'^2}{4} + \frac{\gamma'}{2r} - \frac{\alpha'}{2r} - \frac{\alpha'\gamma'}{4} \right) = T_2^2. \quad (7)$$

$$0 = T_0^1. \quad (8)$$

$$0 = T_1^0. \quad (9)$$

¹ По другой терминологии: сшитых решений, решений с поверхностями бифуркаций, решений с поверхностями ветвления.

4. Вспомогательные соотношения, необходимые для нахождения тензора энергии-импульса

Будем считать, что в ЦСС задаче вектор Вейля имеет отличной от нуля только временную компоненту,

$$A_\alpha = (\varphi(r), 0, 0, 0). \quad (10)$$

Это предположение должно быть подтверждено апостериори.

Вычислим некоторые комбинации, которые входят в тензор энергии-импульса.

$$A^2 = g^{\mu\nu} A_\mu A_\nu = g^{00} A_0 A_0 = -e^{-\gamma} \varphi^2. \quad (11)$$

$$A_{0;1} = \varphi' - \begin{pmatrix} 0 \\ 01 \end{pmatrix} \varphi = \varphi' - \frac{\gamma'}{2} \varphi. \quad (12)$$

$$A_{1;0} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 01 \end{pmatrix} \varphi = -\frac{\gamma'}{2} \varphi. \quad (13)$$

$$A_{0;0} = 0, \quad A_{1;1} = 0, \quad A_{2;2} = 0, \quad A_{3;3} = 0, \quad A^{\nu}_{;\nu} = 0. \quad (14)$$

Подстановка (10–14) в правую часть уравнения (1) приводит к следующим соотношениям:

$$T_{00} = -3\varphi^2 - \lambda e^\gamma; \quad (15)$$

$$T_{01} = \varphi' - \gamma' \varphi; \quad (16)$$

$$T_{11} = \varphi^2 e^{\alpha-\gamma} + \lambda e^\alpha; \quad (17)$$

$$T_{22} = r^2 e^{-\gamma} \varphi^2 + \lambda r^2. \quad (18)$$

5. Уравнения КГД для ЦСС задачи

Подставляем приведенные выше выражения для тензора энергии-импульса в уравнения (5–9).

$$G_0^0 = T_0^0 \rightarrow \frac{1}{r^2} e^{-\alpha} (1 - r\alpha') - \frac{1}{r^2} = 3\varphi^2 e^{-\gamma} + \lambda. \quad (19)$$

$$G_0^1 = T_0^1 \rightarrow 0 = e^{-\alpha} [\varphi' - \gamma' \varphi]. \quad (20)$$

$$G_1^1 = T_1^1 \rightarrow \frac{1}{r^2} e^{-\alpha} (1 + r\gamma') - \frac{1}{r^2} = \varphi^2 e^{-\gamma} + \lambda. \quad (21)$$

$$G_2^2 = T_2^2 \rightarrow e^{-\alpha} \left(\frac{\gamma''}{2} + \frac{\gamma'^2}{4} + \frac{\gamma'}{2r} - \frac{\alpha'}{2r} - \frac{\alpha'\gamma'}{4} \right) = \varphi^2 e^{-\gamma} + \lambda. \quad (22)$$

6. Решение уравнений КГД для ЦСС задачи

6.1. Первый этап

Из уравнения (20) следует, что

$$\varphi = p e^\gamma, \quad (23)$$

где p – константа с размерностью 1/см. Подстановка (23) в уравнения (19), (21), (22) приводит к следующим трем уравнениям для трех функций α, γ, λ :

$$\frac{1}{r^2} e^{-\alpha} (1 - r\alpha') - \frac{1}{r^2} = 3p^2 e^\gamma + \lambda; \quad (24)$$

$$\frac{1}{r^2} e^{-\alpha} (1 + r\gamma') - \frac{1}{r^2} = p^2 e^\gamma + \lambda; \quad (25)$$

$$e^{-\alpha} \left(\frac{\gamma''}{2} + \frac{\gamma'^2}{4} + \frac{\gamma'}{2r} - \frac{\alpha'}{2r} - \frac{\alpha'\gamma'}{4} \right) = p^2 e^\gamma + \lambda. \quad (26)$$

Вычтем уравнение (24) из уравнения (25).

$$\frac{1}{r} e^{-\alpha} (\gamma' + \alpha') = -2p^2 e^\gamma. \quad (27)$$

Если уравнение (27) записать как

$$e^{-(\alpha+\gamma)} (\gamma' + \alpha') = -2p^2 r, \quad (28)$$

то становится очевидным, что интегралом уравнения (28) является

$$e^{(\alpha+\gamma)} = \frac{1}{c + p^2 r^2}. \quad (29)$$

Здесь c – безразмерная константа интегрирования. Поскольку для метрики (3)

$$\sqrt{-g} = r^2 \sin \theta \cdot e^{\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)}, \quad (30)$$

то из (29) следует, что

$$\sqrt{-g} = \frac{r^2}{\sqrt{c + p^2 r^2}} \sin \theta. \quad (31)$$

В терминах безразмерной переменной x ,

$$x \equiv pr, \quad (32)$$

соотношение (31) записывается как

$$\sqrt{-g} = \frac{\sin \theta}{p^2} \frac{x^2}{\sqrt{c + x^2}}. \quad (33)$$

6.2. Последующая стратегия нахождения решения

С учетом соотношения (29) последующую стратегию нахождения решения ЦСС задачи можно сформулировать следующим образом. Сначала необходимо найти функцию

$$F \equiv e^{-\alpha}. \quad (34)$$

Затем по формуле (29) можно найти функцию e^γ . После этого по формуле (23) сразу определяется функция ϕ . Зная три перечисленные функции, по одному из уравнений (24)-(26) можем найти функцию λ внутри объекта.

Итак, ключевым моментом в нахождении решения ЦСС задачи является нахождение функции (34).

6.3. Уравнение для функции F и его общее решение

Вычтем уравнение (25) из уравнения (26)

$$e^{-\alpha} \left(\frac{\gamma''}{2} + \frac{\gamma'^2}{4} - \frac{\gamma'}{2r} - \frac{\alpha'}{2r} - \frac{\alpha'\gamma'}{4} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = 0. \quad (35)$$

Выражаем производные γ', γ'' через производные α', α'' с помощью соотношения (29).

$$\gamma' = -\alpha' - \frac{2p^2r}{(c+p^2r^2)}. \quad (36)$$

$$\gamma'' = -\alpha'' - \frac{2p^2(c-p^2r^2)}{(c+p^2r^2)^2}. \quad (37)$$

Подставляем (36), (37) в (35).

$$e^{-\alpha} \left(-\frac{\alpha''}{2} + \frac{\alpha'^2}{2} + \frac{3p^2r}{2(c+p^2r^2)}\alpha' + \frac{3p^4r^2}{(c+p^2r^2)^2} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = 0. \quad (38)$$

Записываем уравнение (38), используя обозначение (34)

$$F'' - \frac{3p^2r}{(c+p^2r^2)}F' + \left(\frac{6p^4r^2}{(c+p^2r^2)^2} - \frac{2}{r^2} \right)F + \frac{2}{r^2} = 0. \quad (39)$$

Переписываем (39) в терминах безразмерной переменной x (см. (32)). Производные по x обозначаем далее точкой над символом функции. Так,

$$F' = \dot{F}p, \quad F'' = \ddot{F}p^2.$$

Уравнение (39) (после сокращения на p^2) записывается как

$$\ddot{F} - \frac{3x}{(c+x^2)}\dot{F} + \left(\frac{6x^2}{(c+x^2)^2} - \frac{2}{x^2} \right)F + \frac{2}{x^2} = 0. \quad (40)$$

Общее решение нелинейного дифференциального уравнения второго порядка (40) находится с помощью, например, комплекса Mathematica и имеет вид:

$$F(x) = \frac{(c+x^2)}{c} + C_1 \frac{(c+x^2)^{3/2}}{x} - C_2 \frac{(c+x^2)}{x} \left[x - \sqrt{(c+x^2)} \ln \left(x + \sqrt{(c+x^2)} \right) \right]. \quad (41)$$

Помимо константы интегрирования c , появившейся при нахождении решения уравнения (28), при нахождении решения уравнения (40) появляются еще две безразмерные константы интегрирования C_1 и C_2 .

Таким образом,

$$g^{11} = \begin{cases} (c+p^2r^2) \left[\frac{1}{c} + C_1 \frac{\sqrt{c+p^2r^2}}{pr} - C_2 \left[1 - \frac{\sqrt{c+p^2r^2}}{pr} \ln \left(pr + \sqrt{c+p^2r^2} \right) \right] \right], & r < \bar{r}, \\ 1 - \frac{\lambda_0}{r} + \frac{\lambda_0}{3}r^2, & r > \bar{r}. \end{cases} \quad (42)$$

$$g_{11} = \begin{cases} \frac{1}{(c+p^2r^2) \left[\frac{1}{c} + C_1 \frac{\sqrt{c+p^2r^2}}{pr} - C_2 \left[1 - \frac{\sqrt{c+p^2r^2}}{pr} \ln \left(pr + \sqrt{c+p^2r^2} \right) \right] \right]}, & r < \bar{r}, \\ \frac{1}{1 - \frac{\lambda_0}{r} + \frac{\lambda_0}{3}r^2}, & r > \bar{r}. \end{cases} \quad (43)$$

Формулы (42), (43) записаны в предположении о том, что внешняя часть решения представляет собой внешнее решение Шварцшильда

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{x_0}{x} + \frac{\lambda_0}{3p^2}x^2 \right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{x_0}{x} + \frac{\lambda_0}{3p^2}x^2 \right)} + r^2 \left[d\theta^2 + \sin^2 \theta \cdot d\varphi^2 \right] \quad (44)$$

Константа λ в области $r > \bar{r}$ постоянна, она обозначена через λ_0 .

6.4. Выражения для других функций

Компонента метрики g_{00} определяется с помощью соотношения (29) и оказывается равной

$$-g_{00} = \begin{cases} \frac{1}{c} + C_1 \frac{\sqrt{c+p^2r^2}}{pr} - C_2 \left[1 - \frac{\sqrt{c+p^2r^2}}{pr} \ln \left(pr + \sqrt{c+p^2r^2} \right) \right], & r < \bar{r}, \\ 1 - \frac{r_0}{r} + \frac{\lambda_0}{3} r^2, & r > \bar{r}. \end{cases} \quad (45)$$

Согласно (23) функция φ с точностью до константы совпадает с функцией e^γ

$$\varphi = pe^\gamma. \quad (46)$$

Из четырех функций $e^\alpha, e^\gamma, \varphi, \lambda$, подлежащих определению, осталось найти только функцию λ внутри объекта. Для нахождения явного выражения для функции λ воспользуемся уравнением (24), согласно которому

$$\lambda = \frac{1}{r^2} e^{-\alpha} (1 - r\alpha') - \frac{1}{r^2} - 3p^2 e^\gamma. \quad (47)$$

После подстановки в (47) найденных выше функций e^α и e^γ и небольших преобразований получаем:

$$\lambda = \begin{cases} p^2 C_2, & r < \bar{r}, \\ \lambda_0, & r > \bar{r}. \end{cases} \quad (48)$$

Функция λ как внутри объекта, так и вне, оказывается не зависящей от радиальной переменной. На поверхности объекта функция λ может испытывать разрыв.

Таким образом, выражения (43), (45), (46), (48) представляют собой общее решение ЦСС задачи для уравнений КГД.

6.5. Нахождение констант интегрирования

В общее решение входят четыре константы: c, C_1, C_2, p . От константы p можно избавиться, перейдя во всех соотношениях от r, \bar{r}, r_0, U, P и λ к безразмерным величинам

$$x \equiv pr, \bar{x} \equiv p\bar{r}, x_0 \equiv pr_0, \hat{\lambda} \equiv \frac{\lambda}{p^2}, \quad (49)$$

$$\hat{\lambda}_0 \equiv \frac{\lambda_0}{p^2}, \hat{U} \equiv \frac{U}{p^2}, \hat{P} \equiv \frac{P}{p^2}.$$

Выразим оставшиеся три константы c, C_1, C_2 через другие три константы, имеющие ясный физический смысл с точки зрения внешнего наблюдателя. К числу таких констант относится радиус

поверхности сшивки \bar{r} , а также две константы, входящие во внешнюю (наблюдаемую) часть решения:

- гравитационный радиус $r_0 = (2GM)/c^2$,
- лямбда-член λ_0 .

Выражения для констант c, C_1, C_2 найдем из условий сшивки внутренней части решения с внешней (44). В качестве условий сшивки примем те условия, которые используются при получении решения Шварцшильда–Синга [2]. К числу этих условий относится непрерывность на поверхности сшивки компонент метрики g_{00}, g_{11} и непрерывность давления P . Потребуем также, чтобы во всем диапазоне изменения радиальной переменной компоненты метрики были конечными и положительными.

Константа c .

В точке сшивки, т. е. в точке $x = \bar{x}$, величина $\sqrt{-g}$ должна гладко сшиваться со значением $(x/p)^2 \sin \theta$, равным значению $\sqrt{-g}$ во внешней части решения. Таким образом, в точке сшивки

$$e^{(\alpha+\gamma)} \Big|_{x=\bar{x}} = 1. \quad (50)$$

Из (50) и (29) следует, что

$$c = 1 - \bar{x}^2. \quad (51)$$

Это и есть соотношение, которое связывает константу c и радиус сшивки. Если записать соотношение (51) как

$$\bar{x} = \sqrt{1-c}, \quad (52)$$

то из него следует, что величина c не может быть равной единице или больше единицы. Она не может быть также равной нулю или быть отрицательной, поскольку иначе существовало бы значение радиальной переменной, в котором детерминант (33) был бы сингулярным. С учетом (51) получаем

$$0 < c < 1. \quad (53)$$

Из (53) с учетом (52) получаем ограничение на радиус сшивки

$$0 < \bar{x} < 1. \quad (54)$$

При выполнении неравенств (54) выражение для функции $e^{(\alpha+\gamma)}$ записывается как

$$e^{(\alpha+\gamma)} = \frac{1}{1 - \bar{x}^2 + x^2}. \quad (55)$$

С помощью соотношения (55) получаем для величины $\sqrt{-g}$ следующее выражение:

$$\sqrt{-g} = \frac{\sin \theta}{p^2} x^2 e^{\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)} = \frac{x^2 \sin \theta}{p^2 \sqrt{1-\bar{x}^2+x^2}}. \quad (56)$$

С помощью соотношения (55) величину e^γ можем выразить через функцию $e^{-\alpha}$

$$e^\gamma = \frac{e^{-\alpha}}{(1-\bar{x}^2+x^2)}. \quad (57)$$

Константа C_2 .

Функция $F(x)$ совпадает с компонентой g^{11} . В центре она не должна обращаться в бесконечность. Главный расходящийся член в разложении функции (41) имеет вид

$$F(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{c^{3/2}}{x} \left\{ C_1 + C_2 \ln(\sqrt{c}) \right\}. \quad (58)$$

Расходимость исчезнет, если константы C_1 и C_2 будут связаны соотношением

$$C_2 = -\frac{C_1}{\ln(\sqrt{c})}. \quad (59)$$

С учетом (59) выражение для функции $e^{-\alpha}$ принимает следующий вид:

$$e^{-\alpha} = \frac{(1-\bar{x}^2+x^2)}{(1-\bar{x}^2)} + C_1 \left\{ \frac{(1-\bar{x}^2+x^2)^{3/2}}{x} + \frac{(1-\bar{x}^2+x^2)}{x \ln(\sqrt{1-\bar{x}^2})} \left[x - \sqrt{(1-\bar{x}^2+x^2)} \ln \left(x + \sqrt{(1-\bar{x}^2+x^2)} \right) \right] \right\}. \quad (60)$$

Константа C_1 .

Условие сшивки компоненты метрики g^{11} на поверхности радиуса $x = \bar{x}$ при использовании соотношений (51) и (59) дает:

$$\frac{1}{(1-\bar{x}^2)} + C_1 \left(\frac{1}{\bar{x}} + \frac{1}{\ln(\sqrt{1-\bar{x}^2})} - \frac{1}{\ln(\sqrt{c})} \frac{\ln(\bar{x}+1)}{\bar{x}} \right) = 1 - \frac{x_0}{\bar{x}} + \frac{\lambda_0}{3p^2} \bar{x}^2. \quad (61)$$

После упрощений получаем:

$$C_1 = \frac{\ln(\sqrt{1-\bar{x}^2}) \left[\bar{x} - x_0 - \frac{\bar{x}}{(1-\bar{x}^2)} + \frac{\lambda_0}{3p^2} \bar{x}^3 \right]}{\left[\bar{x} + \ln \left(\sqrt{\frac{1-\bar{x}}{1+\bar{x}}} \right) \right]}. \quad (62)$$

6.6. Выражения для искомых функций в терминах $x_0, \hat{\lambda}_0, \bar{x}$

Подставляем (62) в (60).

$$g^{11} = e^{-\alpha} = \begin{cases} (1-\bar{x}^2+x^2) \left\{ \frac{1}{(1-\bar{x}^2)} + \frac{\ln(\sqrt{1-\bar{x}^2}) \left[\bar{x} - x_0 - \frac{\bar{x}}{(1-\bar{x}^2)} + \frac{\lambda_0}{3p^2} \bar{x}^3 \right]}{\left[\bar{x} + \ln \left(\sqrt{\frac{1-\bar{x}}{1+\bar{x}}} \right) \right]} \right\}, & x < \bar{x}, \\ \left(\frac{(1-\bar{x}^2+x^2)^{1/2}}{x} + \frac{1}{\ln(\sqrt{1-\bar{x}^2})} \left[1 - \frac{\sqrt{(1-\bar{x}^2+x^2)}}{x} \ln \left(x + \sqrt{(1-\bar{x}^2+x^2)} \right) \right] \right), & \\ 1 - \frac{x_0}{x} + \frac{\hat{\lambda}_0}{3} x^2, & x > \bar{x}. \end{cases} \quad (63)$$

Подстановка (63) в (29) приводит к следующему выражению для e^γ :

$$-g_{00} = e^\gamma = \begin{cases} \left\{ \frac{1}{(1-\bar{x}^2)} + \frac{\ln(\sqrt{1-\bar{x}^2}) \left[\bar{x} - x_0 - \frac{\bar{x}}{(1-\bar{x}^2)} + \frac{\lambda_0}{3p^2} \bar{x}^3 \right]}{\left[\bar{x} + \ln \left(\sqrt{\frac{1-\bar{x}}{1+\bar{x}}} \right) \right]} \right\}, & \\ \left(\frac{(1-\bar{x}^2+x^2)^{1/2}}{x} + \frac{1}{\ln(\sqrt{1-\bar{x}^2})} \left[1 - \frac{\sqrt{(1-\bar{x}^2+x^2)}}{x} \ln \left(x + \sqrt{(1-\bar{x}^2+x^2)} \right) \right] \right), & x < \bar{x}, \\ 1 - \frac{x_0}{x} + \frac{\hat{\lambda}_0}{3} x^2, & x > \bar{x}. \end{cases} \quad (64)$$

В выражении (48) для функции λ константу C_2 заменяем через константу C_1 по формуле (59). После чего переписываем выражение (48) в терминах $x_0, \hat{\lambda}_0, \bar{x}$.

$$\hat{\lambda} = \begin{cases} \frac{\left(x_0 (1-\bar{x}^2) - \bar{x}^3 \left(1 - \frac{\hat{\lambda}_0}{3} + \frac{\hat{\lambda}_0}{3} \bar{x}^2 \right) \right)}{(1-\bar{x}^2) \left(\bar{x} + \ln \sqrt{\frac{1-\bar{x}}{1+\bar{x}}} \right)}, & x < \bar{x}, \\ \hat{\lambda}_0, & x > \bar{x}. \end{cases} \quad (65)$$

6.7. Плотность энергии и давление

Из конструкции тензора энергии-импульса (19), (21) следует, что плотность энергии U и давление P выражаются через функции e^γ и λ посредством формул

$$\frac{U}{p^2} = -3e^\gamma - \frac{\lambda}{p^2}, \quad (66)$$

$$\frac{P}{p^2} = e^\gamma + \frac{\lambda}{p^2}. \quad (67)$$

На поверхности сшивки для давления имеем:

$$P = \begin{cases} p^2 e^\gamma + \lambda_-, & r = \bar{r} - \varepsilon, \\ \lambda_0, & r > \bar{r}. \end{cases} \quad (68)$$

Здесь λ_- – предел функции $\lambda(r)$ внутри объекта при приближении радиуса к поверхности сшивки; ε – бесконечно малое положительное число. Поскольку давление должно быть непрерывным, имеем:

$$p^2 e^{\gamma(\bar{r})} = \lambda_0 - \lambda_+. \quad (69)$$

Поскольку величина e^γ должна быть положительной, то из (69) следует неравенство

$$\lambda_- < \lambda_0. \quad (70)$$

Неравенство (70) является необходимым условием для непрерывности давления на поверхности сшивки.

Подстановка в (66), (67) соотношений (64), (65) приводит к следующим выражениям (71), (72) для функций \hat{U} , \hat{P} .

Формулы (63), (64), (65), (71), (72) для функций g^{11} , g_{00} , $\hat{\lambda}$, \hat{U} , \hat{P} соответственно записаны как функции радиальной переменной и трех констант: гравитационного радиуса $r_0 = (2GM)/c^2$, лямбда-члена $\hat{\lambda}_0$ и радиуса поверхности сшивки \bar{r} . К этому моменту осталось не использованным одно из соотношений, которое должно быть удовлетворено на поверхности сшивки. Этим условием является непрерывность давления. После использования условия непрерывности давления величина \bar{x} должна быть определена как функция x_0 и $\hat{\lambda}_0$ при условии выполнения неравенства (70).

$$\hat{U} = \begin{cases} \left\{ \frac{1}{(1-\bar{x}^2)} + \frac{\ln(\sqrt{1-\bar{x}^2}) \left[\bar{x} - x_0 - \frac{\bar{x}}{(1-\bar{x}^2)} + \frac{\hat{\lambda}_0}{3} \bar{x}^3 \right]}{\left[\bar{x} + \ln\left(\sqrt{\frac{1-\bar{x}}{1+\bar{x}}}\right) \right]} \right\} x \\ \left\{ \frac{(1-\bar{x}^2+x^2)^{1/2}}{x} + \frac{1}{\ln(\sqrt{1-\bar{x}^2})} \left[1 - \frac{\sqrt{1-\bar{x}^2+x^2}}{x} \ln\left(x + \sqrt{1-\bar{x}^2+x^2}\right) \right] \right\} \end{cases} - \begin{cases} \frac{x_0(1-\bar{x}^2) - \bar{x}^3 \left(1 - \frac{\hat{\lambda}_0}{3} + \frac{\hat{\lambda}_0}{3} \bar{x}^2 \right)}{(1-\bar{x}^2) \left(\bar{x} + \ln\sqrt{\frac{1-\bar{x}}{1+\bar{x}}} \right)}, & x < \bar{x}, \\ -\hat{\lambda}_0, & x > \bar{x}. \end{cases} \quad (71)$$

$$\hat{P} = \begin{cases} \left\{ \frac{1}{(1-\bar{x}^2)} + \frac{\ln(\sqrt{1-\bar{x}^2}) \left[\bar{x} - x_0 - \frac{\bar{x}}{(1-\bar{x}^2)} + \frac{\hat{\lambda}_0}{3} \bar{x}^3 \right]}{\left[\bar{x} + \ln\left(\sqrt{\frac{1-\bar{x}}{1+\bar{x}}}\right) \right]} \right\} x \\ \left\{ \frac{(1-\bar{x}^2+x^2)^{1/2}}{x} + \frac{1}{\ln(\sqrt{1-\bar{x}^2})} \left[1 - \frac{\sqrt{1-\bar{x}^2+x^2}}{x} \ln\left(x + \sqrt{1-\bar{x}^2+x^2}\right) \right] \right\} \end{cases} + \begin{cases} \frac{x_0(1-\bar{x}^2) - \bar{x}^3 \left(1 - \frac{\hat{\lambda}_0}{3} + \frac{\hat{\lambda}_0}{3} \bar{x}^2 \right)}{(1-\bar{x}^2) \left(\bar{x} + \ln\sqrt{\frac{1-\bar{x}}{1+\bar{x}}} \right)}, & x < \bar{x}, \\ \hat{\lambda}_0, & x > \bar{x}. \end{cases} \quad (72)$$

7. Нахождение радиуса поверхности сшивки

7.1. Условие для определения радиуса поверхности сшивки

Радиус поверхности сшивки будем находить, как сказано выше, из условия непрерывности на поверхности сшивки давления. Заметим, что согласно уравнению (21) из непрерывности давления на поверхности сшивки следует, что на этой поверхности непрерывна и производная от компоненты $-g_{00}$.

Согласно (72) давление является функцией четырех переменных

$$P = P(x, x_0, \bar{x}, \hat{\lambda}_0). \quad (73)$$

На поверхности сшивки, т. е. при $x = \bar{x}$, функция (73) становится функцией трех переменных. Предел функции (73) при приближении x к \bar{x} со стороны меньших значений x обозначим как $\hat{P}^-(x_0, \bar{x}, \hat{\lambda}_0)$, а со стороны больших значений x –

как $\hat{P}^+(x_0, \bar{x}, \hat{\lambda}_0)$. Поскольку во внешней части решения давление равно λ_0 , то ясно, что $\hat{P}^+(x_0, \bar{x}, \hat{\lambda}_0) = \hat{\lambda}_0$. Таким образом, на поверхности сшивки должно выполняться соотношение

$$\hat{P}^-(x_0, \bar{x}, \hat{\lambda}_0) = \hat{\lambda}_0. \quad (74)$$

Из формулы (72) находим выражение для $\hat{P}^-(x_0, \bar{x}, \hat{\lambda}_0)$:

$$\begin{aligned} \hat{P}^-(x_0, \bar{x}, \hat{\lambda}_0) = & \frac{1}{1-\bar{x}^2} + \frac{2(3x_0(1-\bar{x}^2) + \bar{x}^3(-3 + (1-\bar{x}^2)))}{3(1-\bar{x}^2)\left(2\bar{x} + \ln\left(\frac{1-\bar{x}}{1+\bar{x}}\right)\right)} + \\ & + \frac{(-3x_0(1-\bar{x}^2) + \bar{x}^3(-3 + (1-\bar{x}^2)\hat{\lambda}_0))\left(\bar{x} - \ln(1+\bar{x}) + \ln(1-\bar{x}^2)\right)}{3\bar{x}(1-\bar{x}^2)\left(2\bar{x} + \ln\left(\frac{1-\bar{x}}{1+\bar{x}}\right)\right)}. \end{aligned} \quad (75)$$

Подстановка (75) в (74) приводит к уравнению на нахождение радиуса поверхности сшивки. Это уравнение связывает три величины $x_0, \bar{x}, \hat{\lambda}_0$ и является иррациональным. Общее решение этого уравнения найти не удалось. Однако при любых двух заданных параметрах третий параметр может быть найден численным методом. В качестве примера нахождения решения численным методом на рис. 1 представлены графики зависимостей давления (73) от радиальной переменной при трех значениях параметра $\hat{\lambda}_0$ и при фиксированных значениях двух других параметров $x_0 = 10^{-13}$, $\bar{x} = 10^{-4}$. При одном значении $\hat{\lambda}_0 = 18,5$ давление изнутри в точке сшивки меньше давления снаружи. При другом значении $\hat{\lambda}_0 = 0,185$ давление изнутри больше давления снаружи. И наконец, при значении $\hat{\lambda}_0 = 1,85$ давление изнутри и давление снаружи сравниваются. Это означает, что набор величин $x_0 = 10^{-13}$, $\bar{x} = 3 \cdot 10^{-4}$, $\hat{\lambda}_0 = -1,85$ является решением уравнения (75).

Приближенное аналитическое решение уравнения (75) можно получить в области значений параметров x_0, \bar{x} , которые удовлетворяют неравенствам

$$x_0 \ll 1, \quad x_0 < \bar{x} \ll 1, \quad \hat{\lambda}_0 \gg 1. \quad (76)$$

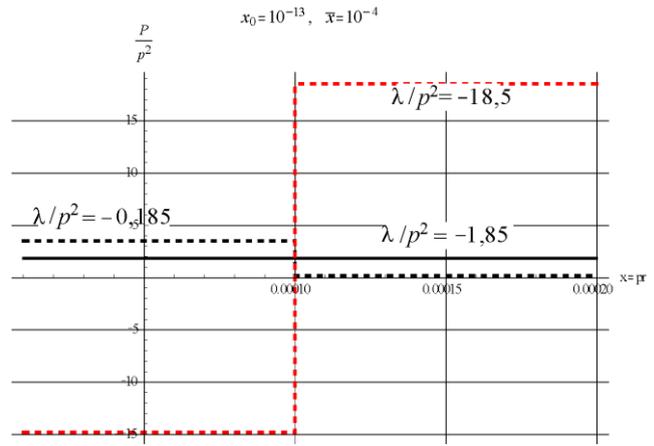


Рис. 1. Давление $\frac{1}{p^2}P(x, x_0, \bar{x}, \hat{\lambda}_0)$ при фиксированных $x_0 = 10^{-13}$, $\bar{x} = 3 \cdot 10^{-4}$ и при трех значениях $\hat{\lambda}_0$, указанных на рисунке. Сшивка давления с внутренней стороны и давления с внешней стороны достигается при $\hat{\lambda}_0 = -1,85$

Для этого разложим выражение (75) в ряд по степеням x_0, \bar{x} и результат приравняем $\hat{\lambda}_0$. Получаем:

$$\begin{aligned} & \left((4 - 2\hat{\lambda}_0) + \left(-\frac{3}{4} + \frac{\hat{\lambda}_0}{4} \right) \bar{x} + \left(\frac{17}{10} + \frac{23}{30} \hat{\lambda}_0 \right) \bar{x}^2 + O(\bar{x}^3) \right) + \\ & + \left(-\frac{3}{\bar{x}^3} - \frac{3}{4\bar{x}^2} + \frac{13}{10\bar{x}} + \frac{3}{40} + \frac{36\bar{x}}{175} + \frac{37\bar{x}^2}{1400} + O(\bar{x}^3) \right) x_0 + O(\bar{x}^3) = 0. \end{aligned} \quad (77)$$

Оставляем в разложении (77) главные члены в предположениях (76)

$$\hat{\lambda}_0 = -\frac{3x_0}{2\bar{x}^3}. \quad (78)$$

Отсюда для радиуса поверхности сшивки получаем

$$\bar{x} = -\left(\frac{3x_0}{2\hat{\lambda}_0} \right)^{1/3}. \quad (79)$$

Из (79) следует, что решение существует только при отрицательных значениях $\hat{\lambda}_0$.

8. Окончательный вид решения

8.1. Графики функций

В качестве иллюстрации характера зависимости функции $-g_{00} = e^\gamma$ от радиальной переменной

для внутренней и внешней частей ЦСС решения на рис. 3 приведен график этой функции для значений $x_0 = 10^{-13}$, $\bar{x} = 3 \cdot 10^{-4}$ и $\hat{\lambda}_0 = -1,85$. Для этих же значений параметров на рис. 3 приведен график компоненты метрики $g^{11} = e^{-\alpha}$. Указанные значения параметров соответствуют условию сшивки давления на поверхности радиуса \bar{r} .

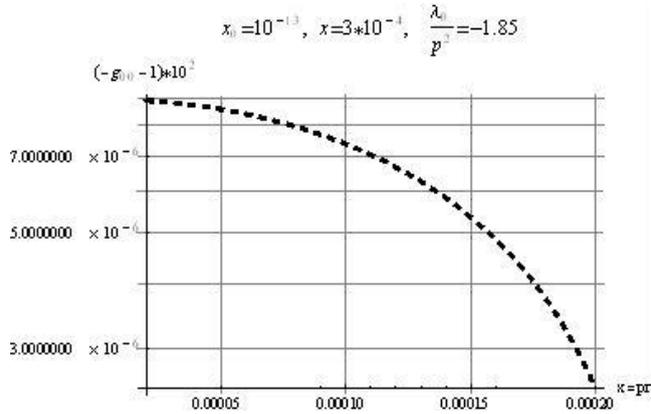


Рис. 2. Отличие компоненты метрики $-g_{00}$ от единицы для ЦСС решения уравнений КГД при значении параметров, указанных на рисунке

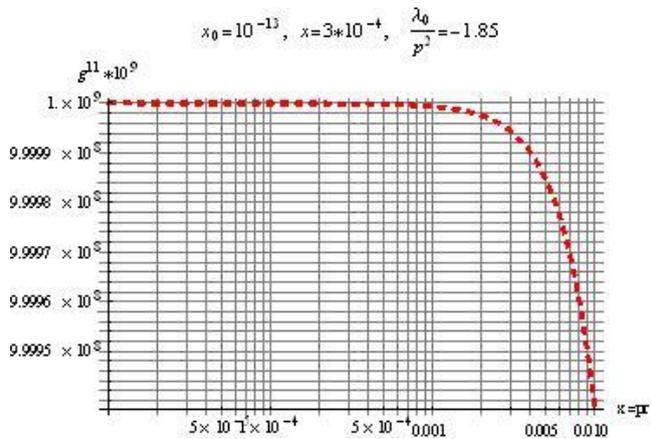


Рис. 3. Компонента метрики g_{11} для ЦСС решения уравнений КГД при значении параметров, указанных на рисунке

График давления изображен на рис. 1 (кривая, соответствующая $\hat{\lambda}_0 = -1,85$).

9. Обсуждение результатов

В работе получено точное ЦСС решение уравнений КГД (1). Решение состоит из двух ветвей – внутренней и внешней. Обе ветви сшиваются на поверхности разрыва радиуса \bar{r} таким образом,

что на этой поверхности непрерывными оказываются все компоненты метрики и давление. Разрыв испытывают плотность энергии, функции λ и ϕ . Несмотря на разрывы этих функций во всем пространстве, вся совокупность функций удовлетворяет уравнениям (1).

С технической точки зрения методология нахождения ЦСС решения, использованная в работе, аналогична той, что использовалась Шварцшильдом в [2] и Сингом в [3]. Использованы, в частности, такие условия на поверхности разрыва, что и в [2, 3]. Однако в [2 и 3] решалась ЦСС задача с привнесенным руками тензором энергии-импульса, а в нашем случае тензор энергии-импульса предопределен условием конформной инвариантности. И это различие носит не технический, а принципиальный характер. Для уравнений (1) задача Коши ставится без связей на начальные данные, и это позволяет не заботиться об удовлетворении связей между данными на поверхности разрыва для различных ветвей решения как при построении ЦСС решений, так и решений более общего характера. Процедура сшивки различных ветвей решения выполнима при любых значениях этих ветвей на поверхности сшивки. После сшивки в полное решение входят только регулярные части точных решений. А это в свою очередь приводит к регулярности решения в целом, т. е. к такому решению, в котором все компоненты метрики имеют конечные знакоопределенные значения и не возникают атрибуты, связанные с появлением горизонтов событий и сингулярностей.

Одно из следствий найденного решения состоит в возникновении аномальных уравнений состояния материи как во внешней, так и во внутренней частях решений. Во внешней части тензор энергии-импульса состоит из одного постоянного лямбда-члена, т. е. имеет тот вид, который используется в стандартной космологической модели для объяснения разлета Вселенной с ускорением (см., например, [14]). Уравнение состояния соответствует при этом соотношению $P = -U$, которое описывает темную энергию. Величина λ_0 вне объекта отрицательна, плотность энергии положительна, давление отрицательно. С точки зрения обычной материи такое уравнение состояния является аномальным.

Во внутренней части решения зависимость плотности энергии и давления от параметра $\lambda/(p^2 e^\gamma)$ определяется формулами (66), (67), т. е.

$$\frac{U}{p^2} = -3e^\gamma - \frac{\lambda}{p^2}, \quad (80)$$

$$\frac{P}{p^2} = e^\gamma + \frac{\lambda}{p^2}. \quad (81)$$

Зависимость функций $\left(U/(p^2 e^\gamma)\right)$ и $\left(P/(p^2 e^\gamma)\right)$ от величины $\left(\lambda/(p^2 e^\gamma)\right)$ имеет вид, приведенный на рис. 4.

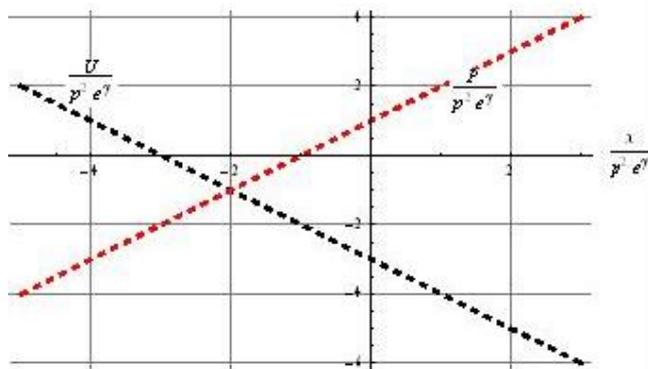


Рис. 4. Зависимость плотности энергии U и давления P от величины $\lambda/(p^2 e^\gamma)$ для ЦСС решения уравнений КГД

Из рис. 4 видно, что давление положительно только при $\left(\lambda/(p^2 e^\gamma)\right) > -1$, а плотность энергии положительна только при $\left(\lambda/(p^2 e^\gamma)\right) < -3$. Одновременно давление и плотность энергии положительными быть не могут. Отсюда следует, что в построенном ЦСС решении тензор энергии-импульса не допускает предположения об обычных уравнениях состояния материи внутри объекта.

В данной работе сшивка внутренней ветви решения производилась с решением де Ситтера. Но использованный способ сшивки позволяет его применять и для сшивки с иными решениями. Например, с решением Шварцшильда–Синга [2, 3]. Остаются в силе все приведенные до раздела 6.5 соотношения. Для нахождения констант c, C_1, C_2 следует:

1) использовать равенство функции $\sqrt{-g}$ на поверхности сшивки. Это позволяет выразить константу c через новый радиус сшивки \bar{r} ;

2) константу C_2 найти из условия исключения в центре сингулярности функции g_{00} ;

3) константу C_1 найти из условия непрерывности функции g_{00} на поверхности радиуса \bar{r} .

После выполнения этих трех операций все константы оказываются выраженными через константы интегрирования той ветви решения, с которой производится сшивка. Последняя константа \bar{r} находится из условия равенства давления.

Исходные уравнения (1), решения которых находились в данной работе, инвариантны относительно конформных преобразований (2). Частным случаем таких преобразований являются масштабные преобразования. Поэтому решения должны допускать запись в терминах безразмерных величин, не изменяющих своих значений при изменении масштаба. Действительно, все соотношения, как оказывается, записываются в терминах безразмерных величин $x = pr, x_0 = pr_0, \bar{x} = p\bar{r}, \hat{\lambda} = \lambda/p^2, \hat{U} = U/p^2, \hat{P} = P/p^2$. Здесь p имеет размерность $1/\text{см}$ и представляет собой величину, задающую масштаб длины. Это свойство решения является разновидностью автомодельности и означает, что одно и то же решение описывает целый класс решений, различающихся выбором масштаба длины.

Автор благодарит В. П. Незнамова за ряд полезных дискуссий.

Список литературы

1. Schwarzschild K. *Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie* // Sitzber. Deut. Akad. Wiss. Berlin. 1916. S. 189–196.
2. Schwarzschild K. *Über das Gravitationsfeld einer Kugel aus inkompressibler Flüssigkeit nach der Einsteinschen Theorie* // Sitz. Preuss. Akad. Wiss. 1916. S. 424.
3. Синг Дж. *Общая теория относительности*. М.: ИЛ, 1963.
4. Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. *Гравитация*. Том 2. М.: Мир, 1977.
5. Зельдович Я. Б., Новиков И. Д. *Релятивистская астрофизика*. М.: Наука, 1967.
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Теория поля*. М.: Наука, 1988.
7. Барцело Карлос, Виссер Мэт, Либерати Стефано и Сонего Себастьяно. *Черные звезды* // Наука и техника. 2013, № 9. С. 13–18.
8. Oppenheimer J. R., Snyder H. // Phys. Rev. 1939. Vol. 56. P. 455.

9. Einstein A. *On a Stationary System with Spherical Symmetry Consisting of many Gravitating Masses* // Ann. Math. 1939. Vol. **40**. P. 922–936.

10. Черепашук А. М. *Демография черных дыр* // Природа. 2006, № 10. С. 16–26.

11. Горбатенко М. В., Пушкин А. В. *Динамика пространства линейной аффинной связности и конформно-инвариантное расширение уравнений Эйнштейна* // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 1984. Вып. 2. С. 40–46.

12. Романов Ю. А. *Динамика пространства аффинной связности* // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 1996. Вып. 3. С. 55–57.

13. Горбатенко М. В. *Задача Коши для уравнений конформной геометродинамики* // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2012. Вып. 2. С. 31–42.

14. Горбунов Д. С., Рубаков В. А. *Введение в теорию ранней Вселенной. Теория горячего большого взрыва*. М.: Изд-во ЛКИ, 2008.

Статья поступила в редакцию 29.05.2015