УДК 530.145.7; 514.764.2

О РЕГУЛЯРНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА В ЭКСТРЕМАЛЬНОМ ПОЛЕ РАЙССНЕРА-НОРДСТРЁМА

М. В. Горбатенко[1], В. П. Незнамов[1,2*], Е. Ю. Попов[1]

[1]ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.
[2]Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», г. Москва

В работе анализируются эффективные потенциалы квадрированных уравнений Дирака в статических полях Шварцшильда и Райсснера–Нордстрёма.

Показано, что во всех рассмотренных случаях реализуются условия «падения» частиц на соответствующие горизонты событий.

Исключение составляет одно из решений для экстремального поля Райсснера–Нордстрёма с единственным горизонтом событий.

Голая сингулярность Райсснера–Нордстрёма, как и сингулярности в центре для рассматриваемых метрик с горизонтами событий, прикрыта для квантово-механических частиц бесконечно большим отталкивающим потенциальным барьером.

Ключевые слова: метрика Райсснера–Нордстрёма, дираковский гамильтониан, эффективный потенциал, голая сингулярность, горизонт событий.

Введение

В. И. Докучаевым и Ю. Н. Ерошенко в [1] для заряженных частиц со спином ½ получены регулярные стационарные решения уравнения Дирака в экстремальном поле Райсснера–Нордстрёма. Ими же в [2] на основе полученных в [1] решений структуры со связанными состояниями заряженных дираковских частиц под горизонтом событий предложены в качестве возможных частиц «темной материи».

Авторами в [3, 4] проведен анализ областей определения волновых функций и эффективных потенциалов уравнений Дирака и Клейна–Гордона для квантово-механических частиц в статических центрально-симметричных гравитационных полях.

Там же, в частности, анализировались решения, полученные в [1], путем рассмотрения эффективных потенциалов уравнения Дирака в экстремальном поле Райсснера–Нордстрёма.

В данной работе результаты этого анализа приведены в более подробном изложении с новыми, по сравнению с работами [1, 2], выявленными физическими особенностями. Эти особенности можно свести к трем основным выводам:

1. Вне горизонта событий для частиц с положительной энергией (с одноименными знаками зарядов частицы и источника поля Райсснера–Нордстрёма) отсутствует возможность существования стационарных связанных состояний дираковских частиц. Движение дираковских частиц в этом случае является инфинитным. Аналогичный вывод из других соображений ранее был сделан Гаральдом Шмидом в [5].

2. Для частиц с отрицательной энергией (с разноименными знаками зарядов частицы и источника поля Райсснера–Нордстрёма) возможно существование стационарных связанных состояний частиц со спином ½. Изменением соотношения между гравитационной и электромагнитной константами связи можно добиться сколь угодно большой по абсолютной величине отрицательной энергии частицы $E < -mc^2$.

3. Под горизонтом событий существование стационарных связанных состояний дираковских

[*] E-mail: neznamov@vniief.ru

частиц возможно лишь для частиц с положительной энергией. Это достигается при одноименных знаках зарядов частицы и источника поля Райсснера–Нордстрёма и при значениях энергии дираковской частицы больше минимума эффективного потенциала в области под горизонтом событий.

Нескомпенсированность зарядов частицы и источника поля Райсснера–Нордстрёма затрудняют рассмотрение таких связанных объектов в качестве кандидатов в частицы «темной материи».

В разделе 1 работы приводится метрика Райсснера–Нордстрёма, самосопряженный гамильтониан дираковской частицы, системы уравнений для радиальных волновых функций.

В разделе 2 получаются и анализируются эффективные потенциалы уравнения Дирака для различных вариантов поля Райсснера–Нордстрёма. Особое внимание уделяется рассмотрению экстремального поля.

В разделе 3 проводится обсуждение полученных результатов.

В работе используется система единиц $\hbar = c = 1$; сигнатура пространства Минковского выбрана равной

$$g_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}[1,-1,-1,-1]. \quad (1)$$

1. Метрика Райсснера–Нордстрёма

Статическая метрика Райсснера–Нордстрёма характеризуется точечным сферически симметричным источником гравитационного поля с массой *M* и электрического поля с зарядом *Q*.

Квадрат интервала равен

$$ds^2 = f_{R-N}dt^2 - \frac{dr^2}{f_{R-N}} - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right), \quad (2)$$

где $f_{R-N} = \left(1 - \frac{r_0}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)$, $r_0 = \frac{2GM}{c^2}$ – гравитационный радиус поля Шварцшильда, $r_Q = \frac{\sqrt{G}Q}{c^2}$ – «зарядовый» радиус, *G* – гравитационная постоянная, *c* – скорость света.

Условие Гильберта $g_{00} > 0$ приводит к необходимости рассмотрения лишь положительных значений $f_{R-N} > 0$.

1. Если $r_0 > 2r_Q$, то

$$f_{R-N} = \left(1 - \frac{r_+}{r}\right)\left(1 - \frac{r_-}{r}\right), \quad (3)$$

где $r_\pm$ – внешний и внутренний радиусы горизонтов событий

$$r_\pm = \frac{r_0}{2} \pm \sqrt{\frac{r_0^2}{4} - r_Q^2}. \quad (4)$$

Областью определения волновых функций, где $f_{R-N} > 0$, являются области

$$r > r_+ \text{ и } r < r_-. \quad (5)$$

2. Случай $r_0 = 2r_Q$ соответствует экстремальному полю Райсснера–Нордстрёма. В этом случае разрешенной областью определения является все пространство $r \in [0,\infty)$ за исключением радиуса единственного горизонта событий $r_\pm = \frac{r_0}{2}$.

3. Случай $r_0 < 2r_Q$ соответствует «голой» сингулярности. В этом случае всегда $f_{R-N} > 0$ и областью определения волновых функций является вся область $r \in [0,\infty)$.

2. Эффективные потенциалы для центрально-симметричного поля Райсснера–Нордстрёма

Самосопряженный гамильтониан частицы со спином ½, массой *m* и зарядом *e* имеет вид [6]:

$$H_\eta = \sqrt{f_{R-N}}\beta m - i\alpha^1\left(f_{R-N}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} - \frac{r_0}{2r^2}\right) - i\sqrt{f_{R-N}}\frac{1}{r}\left[\alpha^2\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{2}\mathrm{ctg}\theta\right) + \alpha^3\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right] + \frac{eQ}{r}. \quad (6)$$

В (6) α^k, β – матрицы Дирака.

После разделения переменных система уравнений для радиальных функций $F_{R-N}(\rho)$, $G_{R-N}(\rho)$ имеет вид:

$$\begin{aligned} & f_{R-N}\frac{dF_{R-N}(\rho)}{d\rho}+\left(\frac{1+\kappa\sqrt{f_{R-N}}}{\rho}-\frac{\alpha}{\rho^2}\right)F_{R-N}(\rho)- \\ & \qquad -\left(\varepsilon-\frac{\alpha_{em}}{\rho}+\sqrt{f_{R-N}}\right)G_{R-N}(\rho)=0, \\ & f_{R-N}\frac{dG_{R-N}(\rho)}{d\rho}+\left(\frac{1-\kappa\sqrt{f_{R-N}}}{\rho}-\frac{\alpha}{\rho^2}\right)G_{R-N}(\rho)+ \\ & \qquad +\left(\varepsilon-\frac{\alpha_{em}}{\rho}-\sqrt{f_{R-N}}\right)F_{R-N}(\rho)=0. \end{aligned} \tag{7}$$

В (7) введены безразмерные переменные

$$\rho=\frac{r}{l_c};\ \varepsilon=\frac{E}{m};\ \alpha=\frac{r_0}{2l_c}=\frac{GMm}{\hbar c}=\frac{Mm}{M_P^2}; \tag{8}$$

$$\alpha_Q=\frac{r_Q}{l_c}=\frac{\sqrt{G}Qm}{\hbar c}=\frac{\sqrt{\alpha_{ts}}}{M_P}m\frac{Q}{|e|};\ \alpha_{em}=\frac{eQ}{\hbar c}=\alpha_{ts}\frac{Q}{e}, \tag{9}$$

$l_c=\dfrac{\hbar}{mc}$ – комптоновская длина волны дираковской частицы; E – энергия дираковской частицы; $M_P=\sqrt{\dfrac{\hbar c}{G}}$ – планковская масса; α_{ts} – электромагнитная постоянная тонкой структуры; α, α_{em} – гравитационная и электромагнитная константы связи; α_Q – безразмерная константа, характеризующая источник электромагнитного поля в метрике Райсснера–Нордстрёма. $M_p=2{,}2\cdot 10^{-5}\times \times\left(1{,}2\cdot 10^{19}\text{ ГэВ}\right)$; $\alpha_{ts}\approx\dfrac{1}{137}$;

В (7) константа разделения $\kappa=\pm\left(j+\dfrac{1}{2}\right)= =\begin{cases}-(l+1), & j=l+\dfrac{1}{2};\\ l\ \ \ , & j=l-\dfrac{1}{2};\end{cases}$ l, j – квантовые числа орбитального и полного момента дираковской частицы.

Величину f_{R-N} можно представить в виде:

$$f_{R-N}=1-\frac{2\alpha}{\rho}+\frac{\alpha_Q^2}{\rho^2}=\left(1-\frac{\rho_+}{\rho}\right)\left(1-\frac{\rho_-}{\rho}\right), \tag{10}$$

где

$$\rho_+=\alpha+\sqrt{\alpha^2-\alpha_Q^2}\ –$$

радиус внешнего горизонта событий (11)

$$\rho_-=\alpha-\sqrt{\alpha^2-\alpha_Q^2}\ –$$

радиус внутреннего горизонта событий (12)

Далее из системы уравнений (7) получим уравнение второго порядка для функции $\psi(\rho)$, пропорциональной либо $F(\rho)$, либо $G(\rho)$.

В первом случае

$$\psi(\rho)=F(\rho)\exp\left(\frac{1}{2}\int A_1(\rho')d\rho'\right). \tag{13}$$

Уравнение для $\psi(\rho)$ имеет вид уравнения Шредингера

$$\frac{d^2\psi(\rho)}{d\rho^2}+2\left(E_{schr}-U_{eff}(\rho)\right)\psi(\rho)=0. \tag{14}$$

В уравнении (14)

$$\begin{aligned} & E_{schr}=\frac{1}{2}\left(\varepsilon^2-1\right), \\ & U_{eff}(\rho)=E_{schr}+\frac{1}{4}\frac{dA_1(\rho)}{d\rho}+\frac{1}{8}A_1^2(\rho)-\frac{1}{2}B_1(\rho). \end{aligned} \tag{15}$$

В выражениях (13), (15)

$$\begin{aligned} & A_1(\rho)=-\frac{1}{B(\rho)}\frac{dB(\rho)}{d\rho}-A(\rho)-D(\rho), \\ & B_1(\rho)=-B(\rho)\frac{d}{d\rho}\left(\frac{A(\rho)}{B(\rho)}\right)-C(\rho)B(\rho)+A(\rho)D(\rho). \end{aligned} \tag{16}$$

В выражениях (16)

$$\begin{aligned} & A(\rho)=-\frac{1}{f_{R-N}}\left(\frac{1+\kappa\sqrt{f_{R-N}}}{\rho}-\frac{\alpha}{\rho^2}\right), \\ & B(\rho)=\frac{1}{f_{R-N}}\left(\varepsilon-\frac{\alpha_{em}}{\rho}+\sqrt{f_{R-N}}\right), \\ & C(\rho)=-\frac{1}{f_{R-N}}\left(\varepsilon-\frac{\alpha_{em}}{\rho}-\sqrt{f_{R-N}}\right), \\ & D(\rho)=-\frac{1}{f_{R-N}}\left(\frac{1-\kappa\sqrt{f_{R-N}}}{\rho}-\frac{\alpha}{\rho^2}\right). \end{aligned} \tag{17}$$

Рассмотрим два случая соотношения констант α и α_Q.

2.1. $\alpha^2>\alpha_Q^2$ – поле Райсснера–Нордстрёма с двумя горизонтами событий

В этом случае область определения волновых функций гамильтониана (6) имеет вид

$$\rho\in\left[0,\rho_-\right)\ \text{ и }\ \rho\in\left(\rho_+,\infty\right). \tag{18}$$

Эффективные потенциалы имеют следующие ведущие особенности при $\rho \to \rho_-\left(\rho < \rho_-\right)$ и $\rho \to \rho_+\left(\rho > \rho_+\right)$

$$U_{R-N}\left(\rho \to \rho_-\right) = -\frac{1}{8\left(\rho_- - \rho\right)^2}\left[1 + \frac{\left(\varepsilon\rho_- - \alpha_{em}\right)^2 \rho_-^2}{\left(\alpha - \rho_-\right)^2}\right], \tag{19}$$

$$U_{R-N}\left(\rho \to \rho_+\right) = -\frac{1}{8\left(\rho_+ - \rho\right)^2}\left[1 + \frac{\left(\varepsilon\rho_+ - \alpha_{em}\right)^2 \rho_+^2}{\left(\rho_+ - \alpha\right)^2}\right]. \tag{20}$$

Числители в выражениях (19), (20) всегда $\geq 1/8$ при любых значениях $\alpha, \alpha_Q, \alpha_{em}$ и ε.

Отсюда следует, что если движение частицы рассматривается в области $\rho \in \left[0, \rho_-\right)$ и если $\varepsilon \neq \frac{\alpha_{em}}{\rho_-}$, то такая частица будет находиться в режиме «падения» на внутренний горизонт событий. Аналогично при рассмотрении движения частицы в области $\rho \in \left(\rho_+, \infty\right)$ если $\varepsilon \neq \frac{\alpha_{em}}{\rho_+}$, то квантово-механическая частица будет находиться в режиме «падения» на внешний горизонт событий.

В случаях $\varepsilon = \frac{\alpha_{em}}{\rho_-}$ или $\varepsilon = \frac{\alpha_{em}}{\rho_+}$ «падения» частиц на соответствующие горизонты событий не происходят [7]. Однако эти решения являются нерегулярными из-за расходимости нормировочных интегралов волновых функций [1].

2.2. $\alpha^2 = \alpha_Q^2$ – *экстремальное поле Райсснера–Нордстрёма*

В этом случае существует единственный горизонт событий с радиусом $\rho_+ = \rho_- = \alpha$.

Областью определения волновых функций является все пространство $\rho \in \left[0, \infty\right)$ за исключением радиуса горизонта событий $\rho_\pm = \alpha$, на котором $g_{00} = 0$.

Если $\varepsilon \neq \frac{\alpha_{em}}{\alpha}$, эффективный потенциал имеет ведущие особенности при $\rho \to \alpha$.

$$U_{R-N}^{extr}\left(\rho \to \alpha\right) = -\frac{\left(\varepsilon - \frac{\alpha_{em}}{\alpha}\right)^2 \alpha^4}{2\left(\rho - \alpha\right)^4} - \frac{\left(\varepsilon - \frac{\alpha_{em}}{\alpha}\right)\alpha^3\left(2\varepsilon - \frac{\alpha_{em}}{\alpha}\right)}{\left(\rho - \alpha\right)^3} + O\left(\frac{1}{\left(\rho - \alpha\right)^2}\right). \tag{21}$$

Для зависимости $U\left(\rho \to \alpha\right) \sim \frac{1}{\left(\rho - \alpha\right)^4}$ квантово-механическая частица, находящаяся выше или ниже горизонта событий, будет всегда двигаться в режиме «падения» на горизонт $\rho_\pm = \alpha$ [7].

При $\varepsilon = \frac{\alpha_{em}}{\alpha}$ эффективный потенциал имеет вид

$$\left(U_{R-N}^{extr}\right)_1\left(\rho\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{\left(1 - \frac{\alpha_{em}^2}{\alpha^2}\right)\rho^4 + \left(\kappa^2 + \kappa\right)\rho^2 - \alpha\left(\kappa + 1\right)\rho + \frac{3}{4}\alpha^2}{\rho^2\left(\rho - \alpha\right)^2} - \left(1 - \frac{\alpha_{em}^2}{\alpha^2}\right)\right]. \tag{22}$$

Ведущая особенность потенциала (22) становится равной

$$\left(U_{R-N}^{extr}\right)_1\left(\rho \to \alpha\right) = -\frac{\frac{1}{4} - \kappa^2 - \alpha^2 + \alpha_{em}^2}{2\left(\rho - \alpha\right)^2}. \tag{23}$$

Отсутствие «падения» на горизонт в соответствии с [7] достигается при выполнении условия

$$\kappa^2 + \alpha^2 - \alpha_{em}^2 > 0. \tag{24}$$

Однако для существования решения $\varepsilon = \frac{\alpha_{em}}{\alpha}$ со сходящимся нормировочным интегралом для волновых функций необходимо выполнение более жесткого условия

$$\kappa^2 + \alpha^2 - \alpha_{em}^2 > \frac{1}{4}. \tag{25}$$

Решение $\varepsilon = \frac{\alpha_{em}}{\alpha}$ с условием (25) ранее было получено в [1] непосредственным решением системы уравнений Дирака для радиальных функций.

Из вида решения $\varepsilon = \frac{\alpha_{em}}{\alpha}$ следует, что положительные значения энергии дираковской частицы осуществляются при одинаковых знаках зарядов Q и e, и наоборот, отрицательные значения энергии ε реализуются при разноименных знаках зарядов Q и e.

Для решений с положительными энергиями вне горизонта событий, значение $\varepsilon = \dfrac{\alpha_{em}}{\alpha}$ будет решением для связанных состояний дираковской частицы с массой m и зарядом e, если $\varepsilon < 1$, т. е.

$$\alpha_{em} < \alpha. \qquad (26)$$

Для области определения волновых функций $\rho \in (\alpha, \infty)$ при $\alpha_{em} < \alpha$ эффективный потенциал (22) всюду положителен и по результатам численных расчетов не содержит экстремумов. Асимптотика потенциала (22) при $\rho \to \infty$

$$\left(U_{R-N}^{ext}\right)_1 \to (\rho \to \infty) = 0. \qquad (27)$$

Характерный вид потенциала $\left(U_{R-N}^{ext}\right)_1(\rho)$ приведен на рис. 1.

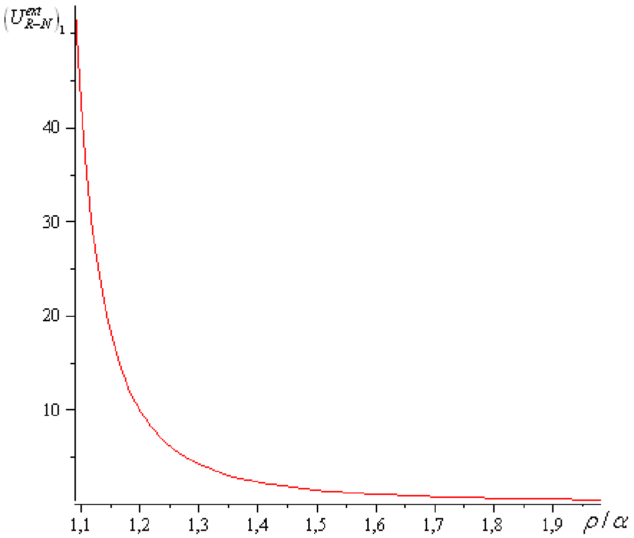

Рис. 1. Поведение эффективного потенциала уравнения шредингеровского типа в поле экстремальной черной дыры Райсснера–Нордстрёма при $\alpha > \alpha_{em}$, $\alpha = \alpha_Q = 1$, $\alpha_{em} = 0,9$, $\varepsilon = 0,9$

Видно, что потенциальная яма для частицы отсутствует, и поэтому стационарных связанных состояний для дираковской частицы вне горизонта событий $\rho_{\pm} = \alpha$ не существует. Аналогичный вывод был сделан ранее в [5].

Если рассматривать положительные энергии частицы $\varepsilon > 1$, то для одноименных знаков зарядов Q и e

$$\alpha_{em} > \alpha. \qquad (28)$$

В этом случае вид потенциала $\left(U_{R-N}^{ext}\right)_1(\rho)$ качественно изменяется (см. рис. 2).

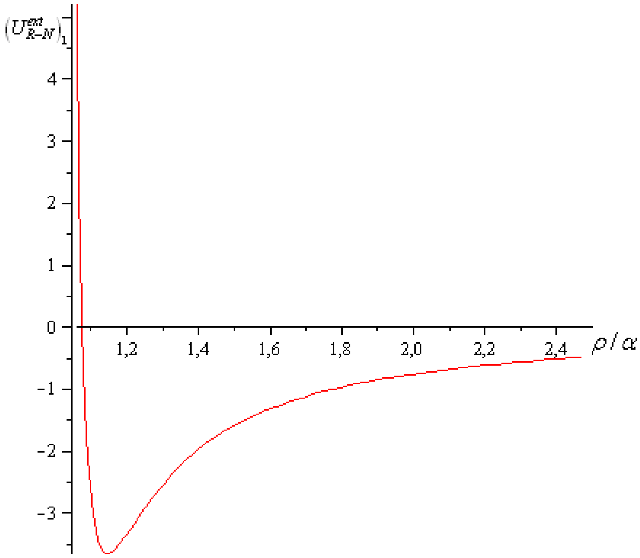

Рис. 2. Поведение эффективного потенциала уравнения шредингеровского типа в поле экстремальной черной дыры Райсснера–Нордстрёма при $\alpha < \alpha_{em}$, $\alpha = \alpha_Q = 1$, $\alpha_{em} = 1,25$, $\varepsilon = 1,25$

Эффективный потенциал содержит потенциальную яму и стремится к нулю при $\rho \to \infty$ со стороны отрицательных значений. Однако движение частицы с $\varepsilon > 1$ будет, как и для случая $\varepsilon < 1$, инфинитным. В обоих рассмотренных случаях выбор конкретных величин α, α_{em} должен осуществляться с выполнением условия (25).

Таким образом, при одноименных знаках зарядов Q и e регулярное решение $\varepsilon = \dfrac{\alpha_{em}}{\alpha}$ вне горизонта событий не реализуется для дираковской частицы в виде стационарного решения. Частица всегда будет уходить от горизонта событий $\rho_{\pm} = \alpha$ к $\rho \to \infty$.

При разноименных знаках зарядов Q, e и отрицательных значениях $\varepsilon = -\dfrac{|\alpha_{em}|}{\alpha}$ вид эффективных потенциалов на рис. 1, 2 остается неизменным (см. выражение (22)).

Для дираковской частицы вне горизонта событий при $\varepsilon = -\dfrac{|\alpha_{em}|}{\alpha} < -1$ $(E < -m)$ должна возникать реакция вакуума, подобная реакции электрон-позитронного вакуума в атомах со сверхтяжелыми ядрами с $Z \geq 170 \div 175$ [8–12]. Более подробно об этом изложено в разделе 3.

Под горизонтом событий $\rho\in[0,\alpha)$ эффективный потенциал (22) всюду положителен с асимптотиками $\sim\dfrac{1}{\rho^2}$ при $\rho\to 0$ и $\sim\dfrac{1}{(\rho-\alpha)^2}$ при $\rho\to\alpha$.

Характерный вид потенциала приведен на рис. 3. Он свидетельствует о существовании стационарных связанных состояний частиц со спином 1/2.

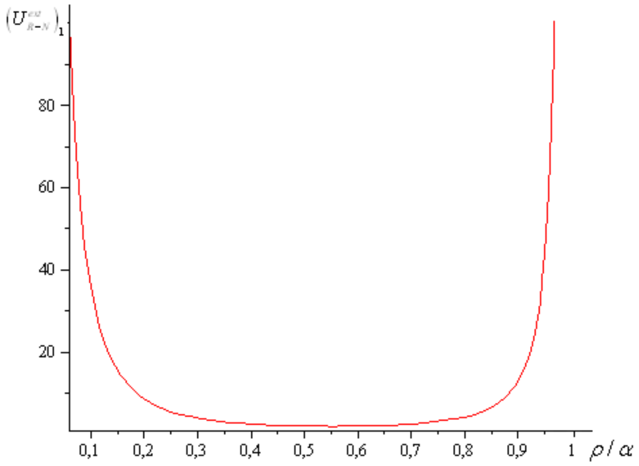

Рис. 3. Поведение эффективного потенциала уравнения Дирака в поле экстремальной черной дыры Райсснера–Нордстрёма внутри горизонта событий $0<\rho<\alpha$, $\alpha=\alpha_Q=1$, $\alpha_{em}=1,25$, $\varepsilon=1,25$

Энергетический уровень связанных состояний с $\varepsilon=\dfrac{\alpha_{em}}{\alpha}$ должен быть положительным и может быть сколь угодно большим. Кроме того, он должен быть больше минимума эффективного потенциала в области $\rho\in[0,\alpha)$, т. е.

$$\frac{\alpha_{em}}{\alpha}>\min\left(U^{ext}_{R-N}\right)_1(\rho),\ 0\le\rho<\alpha. \qquad (29)$$

Положительность энергии ε достигается лишь при одноименных знаках зарядов Q и e.

3. Обсуждение результатов

Анализ эффективных потенциалов уравнения Дирака в статических центрально-симметричных гравитационных полях, проведенный в [4] и в настоящей работе, позволяет сделать следующие выводы:

1. Для всех рассмотренных метрик, допускающих горизонты событий, движение квантово-механических частиц осуществляется в режиме «падения» на соответствующие горизонты событий. В этом режиме частицы локализуются вблизи горизонтов событий, не пересекая их. Это полностью согласуется с ограничениями областей определения волновых функций, вытекающими из принципа причинности Гильберта.

2. Отсутствие режима «падения» частиц на горизонты событий осуществляется в поле Райсснера–Нордстрёма лишь в двух случаях. Первый случай соответствует решениям $\varepsilon=\dfrac{\alpha_{em}}{\rho_-}$ и $\varepsilon=\dfrac{\alpha_{em}}{\rho_+}$ для поля Райсснера–Нордстрёма с горизонтами событий ρ_+,ρ_- при $\alpha^2>\alpha_Q^2$. Однако эти решения являются нерегулярными из-за расходимости нормировочного интеграла.

Второй случай соответствует решению $\varepsilon=\dfrac{\alpha_{em}}{\alpha}$ для экстремального поля Райсснера–Нордстрёма с единственным горизонтом событий $\rho_+=\rho_-=\alpha$ при $\alpha^2=\alpha_Q^2$.

Оба случая найдены авторами [1] и воспроизведены нами при анализе эффективных потенциалов уравнения Дирака.

В случае экстремального поля Райсснера–Нордстрёма при выполнении условия $\kappa^2+\alpha^2-\alpha_{em}^2>\dfrac{1}{4}$ нормировочный интеграл является сходящимся, а волновые функции обращаются в нуль на единственном горизонте событий $\rho_+=\rho_-=\alpha$. Последнее обстоятельство соответствует принципу причинности Гильберта, запрещающему рассмотрение областей определения волновых функций с $g_{00}\le 0$.

Вид эффективного потенциала (22) (см. рис. 1, 2, 3) показывает, что для дираковской частицы вблизи горизонта событий существуют бесконечно большие потенциальные барьеры. Нулевые плотности вероятности на горизонте событий не позволяют квантово-механической частице пересекать его как с внешней, так и с внутренней стороны [13].

3. Реализация экстремального поля Райсснера–Нордстрёма сопряжена с определенной экзотикой. Равенство $\alpha^2=\alpha_Q^2$ в соответствии с (8), (9) приводит к величине массы источника гравитационного поля

$$M=\sqrt{\alpha_{ts}}M_P\left|\frac{Q}{e}\right|. \qquad (30)$$

Видно, что масса M должна быть сравнимой или больше планковской массы.

Отношение $\frac{\alpha_{em}}{\alpha}$ может быть выражено как

$$\frac{\alpha_{em}}{\alpha} = \sqrt{\alpha_{ts}}\,\frac{M_P}{m}\operatorname{sgn}\frac{Q}{e}. \quad (31)$$

Видно, что для заряженных частиц стандартной модели это отношение чрезвычайно велико. Например, для электрона

$$\frac{\alpha_{em}}{\alpha} = \frac{1,2\cdot 10^{22}}{11,7\cdot 0,5}\operatorname{sgn}\frac{Q}{e} \approx 2\cdot 10^{21}\operatorname{sgn}\frac{Q}{e}. \quad (32)$$

Реализовать случай $\frac{|\alpha_{em}|}{\alpha} < 1$, рассматриваемый в п. 2.2 нашей работы, возможно лишь, если в качестве дираковской частицы использовать частицу с элементарным зарядом e и массой, сравнимой с планковской массой M_P.

4. Анализ эффективных потенциалов уравнения Дирака для экстремального поля Райсснера–Нордстрёма показал, что при одноименных знаках зарядов Q и e вне горизонта событий отсутствует возможность существования стационарных связанных состояний частиц со спином 1/2. Квантово-механические частицы не могут пересечь горизонта событий и находятся в инфинитном движении.

5. Под горизонтом событий, при одноименных знаках зарядов Q, e и при выполнении условия (29) стационарные связанные состояния дираковских частиц могут существовать. Энергия этих состояний вырождена по значениям κ (или по значениям орбитального момента l) и для частиц Стандартной модели является чрезвычайно большой. Для электрона с массой m энергия связанных состояний равна

$$E = \varepsilon m \approx 2\cdot 10^{21} m. \quad (33)$$

Квантово-механическая частица, находящаяся под горизонтом, не может пересечь его и уйти в область вне горизонта.

Рассмотренная выше структура со связанными состояниями дираковских частиц предлагалась в [2] в качестве кандидатуры «темной материи». Недостатком этого предложения является нескомпенсированность зарядов частицы и источника электрического поля Райсснера–Нордстрёма, что противоречит наблюдениям электронейтральности «темной материи».

6. При разноименных знаках зарядов Q и e решение $\varepsilon = \frac{\alpha_{em}}{\alpha}$ является отрицательным. При $\frac{\alpha_{em}}{\alpha} < -1$ $(E < -m)$ возникает ситуация, схожая с квантово-механической картиной движения электронов в кулоновском поле сверхтяжелых ядер с зарядами $Ze > Z_{cr}e$, где $Z_{cr} \simeq 170 \div 175$ [8–12]. В этом случае один или несколько дискретных уровней электронов попадают в область нижнего континуума $E < -m$. Если соответствующие уровни с положительной энергией не заняты электронами, то за счет перестройки вакуума происходит спонтанное испускание электрон-позитронных пар. Электроны занимают соответствующие свободные уровни с положительной энергией, позитроны уходят вне рассматриваемых систем. Для S-состояний испускаются два электрона и два позитрона. Если уровни с положительной энергией заняты электронами, испускание электрон-позитронных пар не происходит.

В нашем случае уровни с решением $\varepsilon = \frac{\alpha_{em}}{\alpha}$ при $\frac{\alpha_{em}}{\alpha} < -1$ также попадают в нижний континуум. Однако в отличие от движения электронов в кулоновском поле сверхтяжелых ядер в экстремальном поле Райсснера–Нордстрёма при разноименных знаках Q и e отсутствуют уровни дираковских частиц с положительной энергией. Стабильный вакуум в этом случае становится заряженным [11] без спонтанного излучения пар «частица-античастица».

Подводя итоги обсуждения, мы констатируем, что в нашей работе получены новые результаты с видоизменением интерпретации результатов [1, 2].

Авторы благодарят В. И. Докучаева, Ю. Н. Ерошенко и участников семинара теоретического отдела ИЯИ РАН за плодотворные обсуждения данной работы.

Список литературы

1. Докучаев В. И., Ерошенко Ю. Н. // ЖЭТФ. 2013. Т. 144. Вып. 1(7). С. 85–91.

2. Dokuchaev V. I., Eroshenko Y. N. arxiv:1403. 1375 [astro-ph.co].

3. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. arxiv:1404. 2085 [gr-qc].

4. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P., Popov E. Yu. arxiv:1504.00306 [gr-qc], [hep-th].

5. Schmid H. arxiv: 0207039v2 [math-ph].

6. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. arxiv: 1302. 2557 [gr-qc].

7. Landau L. D., Lifshitz E. M. Quantum Mechanics. Nonrelativistic Theory, Fizmatlit, Moscow (1963) (in Russian) [L.D.Landau and E.M.Lifshits. Quantum Mechanics. Nonrelativistic Theory, Pergamon Press, Oxford (1965)].

8. Pomeranchuk I., Smorodinsky Ya. // J. Phys. USSR. 1945. Vol. 9. P. 97.

9. Зельдович Я. Б., Попов В. С. // УФН. 1971. Т. 105. С. 403. [Zeldovich Ya. B., Popov V. S., Sov. Phys. Usp. 14, 673 (1972)].

10. Pieper W., Greiner W. // Z. Phys. 1969. Vol. 218. P. 327.

11. Greiner W., Mueller B., Rafelski J. Quantum electrodynamics of Strong Fields. Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1985).

12. Незнамов В. П., Сафронов И. И. // УФН. 2014. Т. 184б, № 2Б. С. 200–205.

13. Dittrich J., Exner P. // J. Math. Phys, 1985. Vol. 26(8). P. 2000–2008.

Статья поступила в редакцию 22.06.2015