

ВОПРОСЫ АТОМНОЙ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ:

Теоретическая и прикладная
физика

ВЫПУСК 3

2015

ФГУП

«РОССИЙСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ЯДЕРНЫЙ ЦЕНТР – ВНИИЭФ»

ВОПРОСЫ АТОМНОЙ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ:

**Теоретическая и прикладная
физика**

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СБОРНИК

ВЫПУСК 3

Издается с 1984 г.

Саров – 2015

Уважаемые читатели!

Редакция н/т сборника «Вопросы атомной науки и техники» серии «Теоретическая и прикладная физика» информирует о том, что начиная со 2-го полугодия 2008 г. журнал распространяется согласно новым правилам подписки.

Теперь подписаться на сборник можно во всех отделениях связи России по каталогу Агентства «Роспечать», раздел «Периодические издания НТИ», подписной индекс 72246.

Цена одного журнала – 200 руб.

В год издается 3 выпуска.

По всем вопросам обращаться по адресу:

607188 г. Саров Нижегородской обл., пр. Мира, 37, РФЯЦ-ВНИИЭФ, ИТМФ.

Редакция журнала ВАНТ, сер. «Теоретическая и прикладная физика».

Тел. (83130)7-54-96; e-mail: kul@otd68.vniief.ru

Главный редактор Ю. А. Трутнев

Редакционная коллегия:

Е. Н. Аврорин – зам. главного редактора, М. В. Горбатенко, В. П. Копышев, Н. В. Лычагина –
ответственный секретарь, Б. А. Надыкто – зам. главного редактора, А. В. Певницкий,
В. А. Симоненко, В. П. Соловьев, С. А. Холин

О ПРИБЛИЖЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ НА ГЛАВНЫЕ СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

Н. Б. Бабичев, А. А. Севастьянов

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Отработан алгоритм приближенного решения спектрального кинетического уравнения.

Ключевые слова: кинетическое уравнение, главные собственные значения, нейтронные константы материалов.

Введение

В работе [1] обоснован метод решения упрощенного спектрального кинетического уравнения, в которое входят содержащие ядерно-физические свойства среды параметры, усредненные по некоторому типовому спектру $F(E_n)$, где E_n – энергия нейтронов.

Одна из целей данной статьи заключается в оценке погрешности двух известных приближенных решений задачи на главные собственные значения (ГСЗ) λ при использовании соответствующих тоже известных функций $F_1(E_n)$ и $F_2(E_n)$.

Ниже преследуются также и следующие другие цели: определение области применимости спектров $F_1(E_n)$ и $F_2(E_n)$; поиск приближенных спектров $f_i(E_n)$, зная которые можно проводить предварительные оценки характеристик некоторых систем с помощью аналитических вычислений и численных расчетов (дело в том, что кроме $F_1(E_n)$ и $F_2(E_n)$ другие спектры в настоящее время отсутствуют).

В упрощенное многогрупповое кинетическое уравнение [1] входят усредненные по типовым спектрам величины $\langle \bar{\alpha} \rangle$ и $\langle \bar{\beta} \rangle$. Усредненные по объему системы параметры обозначены через $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$. Скобками $\langle \rangle$ отмечены усреднения по нейтронным спектрам. В данной статье рассмотрен случай $\bar{\alpha} = \alpha$, $\bar{\beta} = \beta$.

Для выбора $f_i(E_n)$ имеются предпосылки.

Как отмечалось в работе [1], величины $\langle \alpha \rangle$ и $\langle \beta \rangle$ в случае рассматриваемых ниже активных профильных шаров слабо зависят от энергии нейтронов E_n , а средние скорости $\langle V \rangle$, наоборот, сильно. Данные обстоятельства заложены в основу алгоритма нахождения $f_i(E_n)$.

Ниже рассматриваются системы из делящихся материалов, для которых кроме ГСЗ λ определяются также величины λ_∞ по формуле

$$\lambda_\infty = (\langle \beta \rangle - \langle \alpha \rangle) \langle V \rangle. \quad (1)$$

1. Известные формулы для ГСЗ

В статье [1] получена общая формула

$$\lambda = \langle \bar{\beta} \rangle R \left[\Lambda(\langle \bar{\beta} \rangle R) - \frac{\langle \bar{\alpha} \rangle}{\langle \bar{\beta} \rangle} \right] \frac{\langle V \rangle}{R}, \quad (2)$$

в которую входит универсальная зависимость $\Lambda(\langle \bar{\beta} \rangle R)$. Явный вид этой функции можно определить, если известна конкретная геометрия системы.

Функция $\Lambda(\langle \bar{\beta} \rangle R)$ выражается через λ следующим образом:

$$\Lambda(\langle \bar{\beta} \rangle R) = \frac{\langle \bar{\alpha} \rangle}{\langle \bar{\beta} \rangle} \left(1 + \frac{\lambda}{\langle \bar{\alpha} \rangle \langle V \rangle} \right). \quad (3)$$

1.1. Приближенные модернизированные формулы В. П. Незнамова

$$\Lambda(\langle\bar{\beta}\rangle R) = \frac{1}{(\langle\bar{\beta}\rangle R)^{0,17}} \left(1,57 - \frac{2}{\langle\bar{\beta}\rangle R} \right), \quad (4)$$

$$\lambda = \langle\bar{\beta}\rangle R \left[\frac{1}{(\langle\bar{\beta}\rangle R)^{0,17}} \left(1,57 - \frac{2}{\langle\bar{\beta}\rangle R} \right) - \frac{\langle\bar{\alpha}\rangle}{\langle\bar{\beta}\rangle} \right] \frac{\langle V \rangle}{R}. \quad (5)$$

В статье [1] показана возможность использования формул (4), (5) не только в случаях надкритических и критических активных шаров, но даже и для глубокоподкритических, когда они находятся в вырожденном состоянии или близком к нему. При усреднении параметров формул (4), (5) по известному типовому спектру $F_1(E_n)$ существует ограничение области применимости данных формул.

1.2. Приближенные диффузионные формулы явного вида

В рамках асимптотической диффузионной теории Ю. А. Романова [2] в случае профильного шара справедливы следующие модернизированные в [1] явные формулы:

$$\Lambda(\langle\bar{\beta}\rangle R) = \frac{\varphi(\langle\bar{\beta}\rangle R)}{\text{tg}\varphi(\langle\bar{\beta}\rangle R)}, \quad (6)$$

$$\varphi(\langle\bar{\beta}\rangle R) = \frac{\pi}{\langle\bar{\beta}\rangle R + 0,71}, \quad (7)$$

$$\lambda = \langle\bar{\beta}\rangle R \left[\frac{\varphi(\langle\bar{\beta}\rangle R)}{\text{tg}\varphi(\langle\bar{\beta}\rangle R)} - \frac{\langle\bar{\alpha}\rangle}{\langle\bar{\beta}\rangle} \right] \frac{\langle V \rangle}{R}. \quad (8)$$

Формулы (6) – (8) имеют высокую точность, если значения $\langle\bar{\beta}\rangle R$ велики.

2. Результаты аналитических вычислений и численных расчетов, проведенных на многогрупповых нейтронных константах

Ниже рассматриваются однородные шары из ^{238}Pu .

2.1. Усредненные параметры и нейтронные константы плутония-238

Приведем значения усредненных по типовым спектрам параметров, входящих в упрощенное уравнение переноса нейтронов.

Таблица 1

Значения усредненных величин, входящих в упрощенное кинетическое уравнение

Использованный типовой спектр нейтронов	$F_1(E_n)$	$F_2(E_n)$
$\langle V \rangle, 10^7, \text{ см/с}$	120,6	147,5
$\langle \alpha(\rho_0) \rangle, 1/\text{см}$	0,2691	0,2444
$\langle \beta(\rho_0) \rangle, 1/\text{см}$	0,4602	0,4756

Кристаллическая плотность ρ_0 ^{238}Pu равна $\rho_0 = 19,84 \text{ г/см}^3$.

Двадцатишестигрупповые нейтронные константы, полученные А. В. Алексеевым с использованием спектров $F_1(E_n)$ и $F_2(E_n)$, представлены в следующей табл. 2.

Таблица 2

Двадцатистигрупповые нейтронные константы ^{238}Pu

E_n , МэВ	$F_1(E_n)$				$F_2(E_n)$			
	ν	σ_f , барн	σ_s , барн	σ_c , барн	ν	σ_f , барн	σ_s , барн	σ_c , барн
13,91-14,19	4,96917	2,66747	3,26747	0,0113752	4,9647	2,66787	3,26629	0,011418
13,1-13,91	4,88914	2,6746	3,24641	0,0121465	4,90776	2,67294	3,25131	0,011967
12,4-13,1	4,74049	2,68784	3,20727	0,0135803	4,78193	2,68415	3,21819	0,01318
11,7-12,4	4,65426	2,69552	3,18458	0,0144115	4,67675	2,69352	3,1905	0,014195
10,5-11,7	4,51863	2,7076	3,1489	0,0157187	4,53452	2,70618	3,15308	0,015565
9,3-10,5	4,34393	2,71499	3,18454	0,0174046	4,35491	2,71549	3,17267	0,017299
7,65-9,3	4,1247	2,68544	3,66417	0,0194074	4,14262	2,68904	3,61534	0,019265
6,065-7,65	3,88733	2,50866	4,29999	0,01936	3,896	2,51882	4,27572	0,019389
4-6,065	3,60223	2,22149	4,95879	0,0217952	3,6071	2,22145	4,94952	0,021707
2,85-4	3,3889	2,28579	5,45203	0,0360837	3,39011	2,28642	5,45089	0,035903
2-2,85	3,24414	2,20945	5,27964	0,0702364	3,24261	2,20872	5,27033	0,070635
1,353-2	3,13599	2,14307	4,75856	0,112359	3,13741	2,14425	4,77085	0,11158
0,8-1,353	3,04823	2,0452	4,40729	0,177099	3,04843	2,04539	4,40721	0,176898
0,4979-0,8	2,98751	1,69131	5,47829	0,229802	2,98787	1,69554	5,46199	0,229103
0,2788-0,4979	2,94927	1,14182	7,44874	0,312649	2,95003	1,15295	7,40128	0,310606
0,15-0,2788	2,92323	0,813688	9,56417	0,401311	2,92337	0,815829	9,54874	0,400723
0,0823-0,15	2,90826	0,674516	10,8781	0,525792	2,90824	0,674514	10,8796	0,52597
0,04086-0,0823	2,90009	0,604699	12,091	0,663251	2,90014	0,604292	12,0729	0,661912
0,02-0,04086	2,89544	0,69382	14,4658	0,868682	2,89547	0,693041	14,4504	0,867142
0,009119-0,02	2,89305	0,639533	15,8913	1,15539	2,89307	0,63941	15,8779	1,15014
0,003355-0,009119	2,89184	1,40001	17,7864	1,87515	2,89179	1,4061	17,9786	1,92516
0,0015-0,003355	2,8912	1,63125	22,4324	3,03187	2,8912	1,63771	22,5119	3,03833
0,001-0,0015	2,89101	2,01687	26,7563	3,68818	2,89101	2,03497	26,9184	3,75929
0,000215-0,001	2,89089	3,0221	36,418	9,78698	2,89091	2,73353	32,5288	6,88921
4E-5-0,000215	2,89085	6,40514	39,5912	23,9099	2,89084	4,14407	25,2341	25,2507
2E-6-4E-5	2,89082	0,662998	12,2133	13,4471	2,89082	0,503975	11,6741	10,7451

2.2. Характеристики однородных шаров

Таблица 3

Численные расчеты проводились по одной из математических методик [3].

2.2.1. Результаты многогрупповых расчетов и вычислений, основанных на формуле (5). В качестве примера рассмотрим шары со следующими усредненными по спектру $F_1(E_n)$ (см. выше) параметрами: $\langle\alpha\rangle = 0,6782$ 1/см, $\langle\beta\rangle = 1,1598$ 1/см, $\lambda_\infty = (\langle\beta\rangle - \langle\alpha\rangle)\langle V\rangle = 58,0755 \cdot 10^7$ 1/с.

Результаты вычислений по формуле (5) и расчетов приведены в табл. 3.

Из таблицы видно, что при использовании формулы (5) интервалы, в которых погрешность мала, узкие.

В табл. 4 приведены результаты вычислений Λ по формуле (4) и $\Lambda_{\text{расч}}$ по формуле (3), в которой в качестве ГСЗ взята $\lambda_{\text{расч}}$ из табл. 3.

Результаты вычислений λ по формуле (5) и 26-групповых численных расчетов

$\langle\beta\rangle R$	λ , 10^7 , 1/с	$\lambda_{\text{расч}}$, 10^7 , 1/с	$\frac{\lambda}{\lambda_\infty}$	$\delta_\lambda = \frac{\lambda - \lambda_{\text{расч}}}{\lambda}$
4	36,4439	48,5265	0,628	-33,2 %
3,4509	30,4352	38,9942	0,524	-28,1 %
3,25	27,4846	34,5678	0,473	-25,8 %
3	23,0314	28,1264	0,397	-22,1 %
2,5	10,3733	11,1052	0,179	-7,1 %
2,457	8,9649	9,3228	0,154	-4,0 %
2,42	7,7015	7,7439	0,133	-0,55 %
2,415	7,52699	7,52732	0,130	-0,0044 %
2,41	7,3515	7,3100	0,127	0,57 %
2,4	6,9979	6,8730	0,121	1,8 %
2,384	6,4241	6,1675	0,111	4,0 %
2,3	3,2443	2,3393	0,056	27,9 %
2,28	2,4431	1,3989	0,042	42,7 %
2,26	1,6244	0,4488	0,028	72,4 %

Таблица 4

Результаты вычислений Λ по формуле (4) и $\Lambda_{расч}$ по формуле (3)

$\langle\beta\rangle R$	Λ	$\Lambda_{расч}$	$\delta_{\Lambda} = \frac{\Lambda - \Lambda_{расч}}{\Lambda}$
4	0,8453	0,9317	-10,2 %
3,4509	0,8024	0,8636	-7,6 %
3,25	0,7813	0,8319	-6,5 %
3	0,7494	0,7859	-4,9 %
2,5	0,6589	0,6642	-0,80 %
2,457	0,6489	0,6514	-0,40 %
2,42	0,6398	0,6401	-0,048 %
2,415	0,6386	0,6386	-0,00061 %
2,41	0,6373	0,6370	0,046 %
2,4	0,6348	0,6339	0,14 %
2,384	0,6307	0,6289	0,29 %
2,3	0,6080	0,6015	1,1 %
2,28	0,6022	0,5948	1,2 %
2,26	0,5964	0,5880	1,4 %

2.2.2. Результаты многогрупповых расчетов и вычислений по формуле типа (7). Примем $\langle\alpha\rangle = 0,6160$ 1/см, $\langle\beta\rangle = 1,1985$ 1/см, $\lambda_{\infty} = (\langle\beta\rangle - \langle\alpha\rangle)\langle V\rangle = 85,9421 \cdot 10^7$ 1/с.

В табл. 5 и 6 приведены результаты аналитических вычислений и 26-групповых расчетов с использованием типового спектра $F_2(E_n)$.

Таблица 5

Результаты вычислений λ по формуле (8) и 26-групповых численных расчетов

$\langle\beta\rangle R$	$\lambda, 10^7, 1/с$	$\lambda_{расч}, 10^7, 1/с$	$\frac{\lambda}{\lambda_{\infty}}$	$\delta_{\lambda} = \frac{\lambda - \lambda_{расч}}{\lambda}$
20	84,5837	83,6594	0,984	1,1 %
15	83,5787	82,0139	0,973	1,9 %
10	80,8410	77,6722	0,941	3,9 %
7	76,0454	70,4272	0,885	7,4 %
6	72,8283	65,7632	0,847	9,7 %
5	67,7283	58,6272	0,788	13,4 %
4	58,9057	46,8938	0,685	20,4 %
3,4509	50,9894	36,9190	0,593	27,6 %
3,25	47,1879	32,2962	0,549	31,6 %
3	4,1507	2,5581	0,483	38,4 %

Из таблицы следует, что при $\langle\beta\rangle R \geq 7$ формула (8) достаточно точна.

Таблица 6

Результаты вычислений Λ по формуле (6) и $\Lambda_{расч}$ по формуле (3)

$\langle\beta\rangle R$	Λ	$\Lambda_{расч}$	$\delta_{\Lambda} = \frac{\Lambda - \Lambda_{расч}}{\Lambda}$
20	0,9923	0,9871	0,53 %
15	0,9866	0,9778	0,90 %
10	0,9712	0,9532	1,9 %
7	0,9440	0,9123	3,4 %
6	0,9258	0,8859	4,3 %
5	0,8970	0,8455	5,7 %
4	0,8471	0,7792	8,0 %
3,4509	0,8023	0,7228	9,9 %
3,25	0,7808	0,6966	10,8 %
3	0,7487	0,6587	12,0 %

2.3. Анализ полученных результатов

Приведем формулы для вычисления отношения $\frac{\lambda}{\lambda_{\infty}}$, полученные на основе общей формулы (2), модернизированной формулы В. П. Незнамова (5) и диффузионной формулы (8):

$$\frac{\lambda}{\lambda_{\infty}} = \frac{\Lambda(\langle\beta\rangle R) - \frac{\langle\alpha\rangle}{\langle\beta\rangle}}{1 - \frac{\langle\alpha\rangle}{\langle\beta\rangle}}, \quad (9)$$

$$\frac{\lambda}{\lambda_{\infty}} = \frac{1}{(\langle\beta\rangle R)^{0,17} \left(1,57 - \frac{2}{\langle\beta\rangle R} \right) - \frac{\langle\alpha\rangle}{\langle\beta\rangle}} \cdot \frac{\langle\alpha\rangle}{1 - \frac{\langle\alpha\rangle}{\langle\beta\rangle}}, \quad (10)$$

$$\frac{\lambda}{\lambda_{\infty}} = \frac{\frac{\varphi(\langle\beta\rangle R)}{\operatorname{tg}\varphi(\langle\beta\rangle R)} - \frac{\langle\alpha\rangle}{\langle\beta\rangle}}{1 - \frac{\langle\alpha\rangle}{\langle\beta\rangle}}. \quad (11)$$

На рис. 1 представлены графики $\frac{\lambda}{\lambda_{\infty}}$ вычислений по формулам (10), (11) и $\frac{\lambda_{расч}}{\lambda_{\infty}}$, построенные по данным табл. 3, 5.

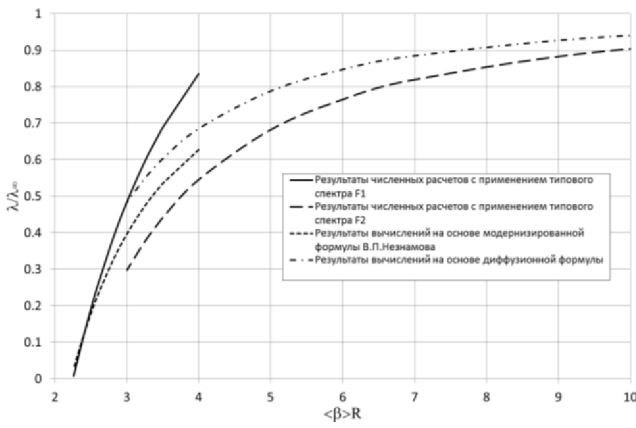


Рис. 1. Зависимости $\frac{\lambda}{\lambda_{\infty}}$ и $\frac{\lambda_{\text{расч}}}{\lambda_{\infty}}$ от параметра $\langle\beta>R$

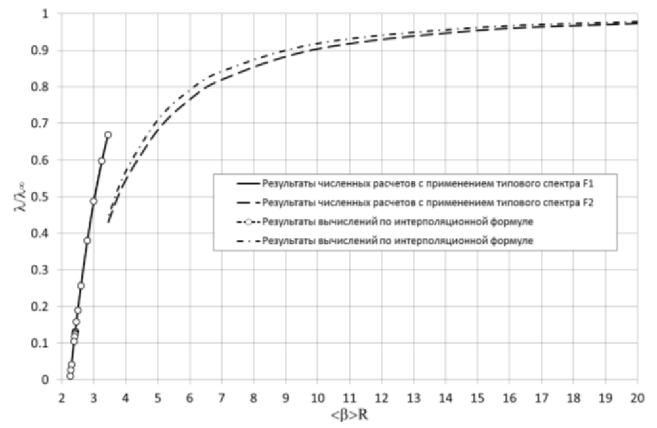


Рис. 2. Зависимости $\left(\frac{\lambda}{\lambda_{\infty}}\right)_{\text{интерполяц}}$ и $\frac{\lambda_{\text{расч}}}{\lambda_{\infty}}$ от $\langle\beta>R$

Заинтерполируем результаты численных расчетов.

В работе [4] получено общее соотношение со сшивкой формулы В. П. Незнамова с диффузионной формулой в точке $\beta R = 3,4509$. В нашем случае принимается $\langle\beta>R = 3,4509$. Поэтому результаты численных расчетов, выполненных на спектрах $F_1(E_n)$ и $F_2(E_n)$, будем интерполировать соответственно при значениях $\langle\beta>R \leq 3,4509$ и $\langle\beta>R > 3,4509$.

Результаты расчетов с применением типового спектра $F_1(E_n)$ интерполируются квадратичным трехчленом вида

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda_{\infty}}\right)_{\text{интерполяц}} = -0,20413(\langle\beta>R)^2 + \quad (12)$$

$$+1,71861\langle\beta>R - 2,83129 \text{ при } \langle\beta>R \leq 3,4509,$$

а в случае спектра $F_2(E_n)$ интерполяционная формула выглядит так:

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda_{\infty}}\right)_{\text{интерполяц}} = \frac{\varphi(\langle\beta>R) - 1,255 \frac{\langle\alpha\rangle}{\langle\beta\rangle}}{1 - 1,255 \frac{\langle\alpha\rangle}{\langle\beta\rangle}} \quad (13)$$

$$\text{при } \langle\beta>R > 3,4509.$$

Результаты вычислений $\left(\frac{\lambda}{\lambda_{\infty}}\right)_{\text{интерполяц}}$ по

формулам (12), (13) и $\frac{\lambda_{\text{расч}}}{\lambda_{\infty}}$ приведены на рис. 2.

Из рисунка видно, что результаты вычислений по формуле (12) и численных расчетов, вообще говоря, слабо отличаются друг от друга.

Наибольшая погрешность интерполяции (13) составляет 4,3 %.

Определим зависимость средней скорости нейтронов $\langle V \rangle$ от параметра $\langle\beta>R$.

Средние скорости $\langle V \rangle$ сильно зависят от используемого спектра $f_i(E_n)$, а сечения взаимодействия нейтронов с веществом, наоборот, слабо (см. введение). Чтобы учесть эту зависимость, ниже выбраны следующие величины $\langle\alpha\rangle$ и $\langle\beta\rangle$:

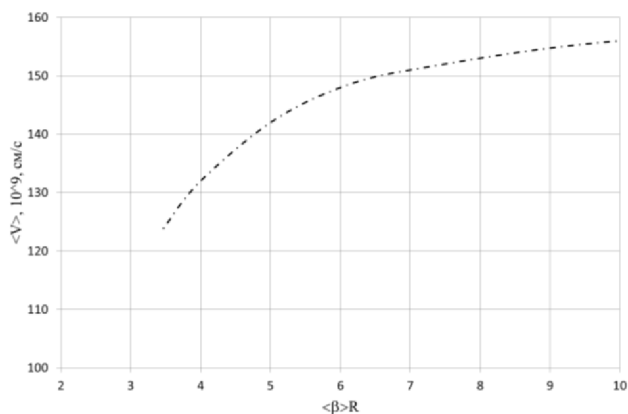
$$\langle\alpha\rangle = \frac{\langle\alpha_1\rangle + \langle\alpha_2\rangle}{2}, \quad (14)$$

$$\langle\beta\rangle = \frac{\langle\beta_1\rangle + \langle\beta_2\rangle}{2}. \quad (15)$$

Параметры, отмеченные разными индексами, соответствуют спектрам $F_1(E_n)$ и $F_2(E_n)$.

Отметим, что при одинаковых плотностях среды $\langle\alpha_1\rangle$ отличается от $\langle\alpha_2\rangle$ на 10 %, а $\langle\beta_1\rangle$ от $\langle\beta_2\rangle$ – на 3 %.

Зависимость $\langle V \rangle$ от $\langle\beta>R$, полученная по формуле (6), представлена на рис. 3.

Рис. 3. Зависимость $\langle V \rangle$ от $\langle \beta \rangle R$

Заключение

Для решения предложенного в [1] упрощенного спектрального кинетического уравнения требуется иметь в арсенале несколько типовых спектров $f_i(E_n)$.

В настоящее время существуют только два таких спектра $F_1(E_n)$ и $F_2(E_n)$.

Тем не менее, показано, что с помощью полученных в данной статье интерполяционных формул можно проводить приближенные оценки характеристик спектральных систем.

Список литературы

1. Бабичев Н. Б. Усовершенствование теории подобия процессов нейтронной кинетики и результаты новых аналитических исследований // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2015. Вып. 2. С. 46–56.

2. Романов Ю. А. Критические параметры реакторных систем. Точные решения односкоростного кинетического уравнения и их использование для решения диффузионных задач (усовершенствованный диффузионный метод). М.: Госатомиздат, 1960. С. 3–26.

3. Шагалиев Р. М., Гребенников А. Н., Артемьев А. Ю, Будников В. И. Развитие основных методик и программ ИТМФ // Журнал Атом. 2011, № 50–51.

4. Бабичев Н. Б., Забусов П. В., Лутиков И. В., Незнамов В. П. Приближенное аналитическое решение задачи на главные собственные значения односкоростного кинетического уравнения переноса нейтронов в случае однородного шара из произвольного вещества при любых его оптических толщинах // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2009. Вып. 3. С. 14–17.

Статья поступила в редакцию 06.05.2015

О ФОРМУЛАХ ПОДОБИЯ, ПОЛУЧЕННЫХ НА ОСНОВЕ СВОЙСТВА ИНВАРИАНТНОСТИ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

Н. Б. Бабичев, А. А. Севастьянов

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Получены формулы подобия некоторых квантово-механических процессов.

Ключевые слова: теория подобия, волновая функция, уравнение Шредингера.

Введение

В статьях [1, 2] представлены элементы теории подобия тепловых и волновых процессов, подчиняющихся соответствующим дифференциальным уравнениям математической физики (см., например, [3]).

В. П. Незнамов обратил внимание на возможность разработки теории подобия квантово-механических процессов. Эту задачу предстоит решить в дальнейшем. Ниже приведены формулы подобия, справедливые в стационарных случаях распределения частиц в потенциальных ямах.

1. Случай произвольной зависимости потенциала U от координат \vec{r}

Примем простое по своему виду уравнение Шредингера (см. [4])

$$\frac{\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \psi(\vec{r})}{\partial \vec{r}^2} + [E - U(\vec{r})] \psi(\vec{r}) = 0, \quad (1)$$

$\psi(\vec{r})$ – волновая функция, m и E – соответственно масса частицы и ее энергия.

В уравнении (1) осуществим преобразование подобия

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = \sqrt{\frac{m}{m'}} \vec{r} \quad (2)$$

и учтем, что

$$\frac{d}{d\vec{r}} = \sqrt{\frac{m}{m'}} \frac{d}{d\vec{r}'}, \quad (3)$$

$$\frac{d^2}{d^2\vec{r}} = \frac{m}{m'} \frac{d^2}{d^2\vec{r}'}. \quad (4)$$

Тогда для штрихованной волновой функции вместо (1) имеем

$$\frac{\hbar}{2m'} \frac{\partial^2 \psi'(\vec{r}')}{\partial \vec{r}'^2} + [E' - U(\vec{r}')] \psi'(\vec{r}') = 0. \quad (5)$$

Чтобы уравнения (1) и (5) по своему виду совпали, должно выполняться следующее соотношение подобия

$$\vec{r}' = \sqrt{\frac{m}{m'}} \vec{r}. \quad (6)$$

Для волновых функций справедлива формула подобия

$$\psi'(\vec{r}') = C \psi \left(\sqrt{\frac{m}{m'}} \vec{r} \right). \quad (7)$$

Нормировочную константу C примем равной одной условной единице, что возможно из-за линейности уравнения Шредингера.

Массы частиц в подобных системах изменились, а их энергии связаны следующим образом:

$$E'm' = Em. \quad (8)$$

Выражение (8) является инвариантом преобразования подобия (2).

2. Случай одномерной прямоугольной ямы

Прямоугольная потенциальная яма изображена на рис. 1.

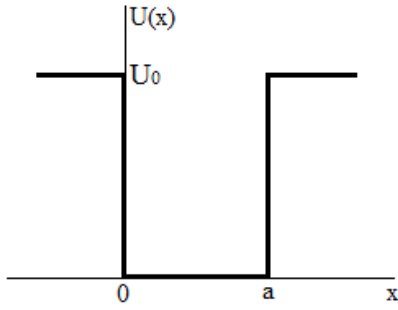


Рис.1. Прямоугольная потенциальная яма

Внутри ямы имеет место следующее уравнение Шредингера:

$$\frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + k^2 \psi(x) = 0, \quad k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)}. \quad (9)$$

При выполнении инвариантного соотношения

$$x' \sqrt{E' - U_0} = x \sqrt{E - U_0} \quad (10)$$

получается следующая формула подобия для волновых функций частиц с разными энергиями и одинаковыми массами:

$$\psi'(x') = \psi \left(\sqrt{\frac{E - U_0}{E' - U_0}} x \right). \quad (11)$$

В области за пределами ямы справедливо уравнение

$$\frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} - k^2 \psi(x) = 0, \quad k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)}. \quad (12)$$

При $x = 0$ и $x = a$ решения этих уравнений должны сшиваться так, чтобы были непрерывны волновые функции и их первые производные.

Обращающееся на бесконечности в нуль решение уравнения (12) есть

$$\psi(x) = \text{const} \cdot \exp(\mp kx) \quad (13)$$

(знаки минус и плюс относятся соответственно к областям $x > a$ и $x < 0$). Учитывая (13), получаем граничное условие в виде

$$\frac{1}{\psi(x)} \frac{d\psi(x)}{dx} = \mp k. \quad (14)$$

Рассмотрим предельный случай $U_0 \rightarrow \infty$. В этом случае требуется найти решение уравнения (9) с граничным условием

$$\psi = 0 \text{ при } x = 0 \text{ и } x = a. \quad (15)$$

Решение будем искать в виде

$$\psi = c \sin(kx + \delta). \quad (16)$$

Условие $\psi = 0$ при $x = 0$ дает $\delta = 0$, а условие на правой границе приводит к равенству $\sin(ka) = 0$, из которого следует $ka = \pi(n + 1)$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Таким образом, в яме рис. 1 частица обладает следующими дискретными уровнями энергии

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} (n + 1)^2. \quad (17)$$

Приведем некоторые результаты, представленные в [4].

В одномерной потенциальной яме любой формы всегда имеется, по крайней мере один уровень энергии, даже если глубина ямы очень мала, но не равна нулю. Это свойство, однако, специфично только для одномерного случая и не имеет места в случае трехмерной потенциальной ямы (см. подраздел 1).

Если глубина $|U_0|$ такой ямы

$$|U_0| \ll \frac{\hbar^2}{ma^2}, \quad (18)$$

то в ней нет ни одного дискретного уровня энергии. То есть, если яма недостаточно глубока, то в ней нет связанных состояний (частица не может захватиться ямой). Это чисто квантовый эффект. В рамках классической механики частица может совершать финитное движение в любой потенциальной яме.

3. Движение частиц в гауссовской сферически-симметричной потенциальной яме

В случае гауссовской потенциальной ямы

$$U(r) = U_{\max} \frac{\exp\left[-\alpha\left(r - \frac{R}{2}\right)^2\right] - \exp\left(-\frac{\alpha R^2}{4}\right)}{1 - \exp\left(-\frac{\alpha R^2}{4}\right)}, \quad (19)$$

показанной на рис. 2, уравнение Шредингера, справедливое внутри ямы, приобретает следующий вид:

$$\frac{\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \psi(r)}{\partial r^2} + \left[E - U_{\max} \frac{\exp\left[-\alpha\left(r - \frac{R}{2}\right)^2\right] - \exp\left(-\frac{\alpha R^2}{4}\right)}{1 - \exp\left(-\frac{\alpha R^2}{4}\right)} \right] \psi(r) = 0. \quad (20)$$

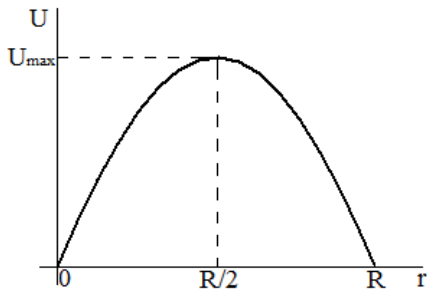


Рис. 2. Гауссова потенциальная яма с радиусом R

Ниже решение уравнения Шредингера за пределами ямы не ищется.

Применив преобразование подобия

$$r \rightarrow r' = \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha'}} r, \quad (21)$$

для любой другой частицы с массой m' и энергией $E' = E$ получаем инвариантные условия

$$r' = \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha'}} r, \quad (22)$$

$$R' = \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha'}} R, \quad (23)$$

$$m' = \frac{\alpha'}{\alpha} m, \quad (24)$$

при выполнении которых волновые функции в подобных системах связаны следующим образом:

$$\psi'(r') = \psi\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha'}} r\right). \quad (25)$$

Заключение

В статье решена поставленная во введении задача о нахождении формул подобия для частиц, захваченных разными потенциальными ямами.

Список литературы

1. Бабичев Н. Б., Севастьянов А. А. Соотношения подобия, вытекающие из уравнения переноса тепла в однородных и профильных системах // ВАНТ. Сер.: Теоретическая и прикладная физика. 2014. Вып. 3. С.56–60.
2. Бабичев Н. Б., Севастьянов А. А. Элементы теории подобия волновых процессов // ВАНТ. Сер.: Теоретическая и прикладная физика. 2015. Вып. 2. С. 62–64.
3. Арсенин В. Я. Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1984.
4. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М. Краткий курс теоретической физики. Книга 2. Квантовая механика. М.: Наука, 1972.

Статья поступила в редакцию 29.05.2015

РЕГУЛЯРНОЕ ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОЕ СТАТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ КОНФОРМНОЙ ГЕОМЕТРОДИНАМИКИ

М. В. Горбатенко

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл. Email: gorbatenko@vniief.ru

Находится регулярное центрально-симметричное статическое решение уравнений общей теории относительности, обобщенных таким образом, чтобы они удовлетворяли условию конформной инвариантности. Решение состоит из двух частей, разделенных поверхностью ветвления. Во внешней части решение совпадает с решением Шварцшильда в пространстве де Ситтера. Внутренняя ветвь отличается от внешней тем, что в ней не равен нулю инвариант, построенный из вектора Вейля. На поверхности ветвления выполняются все условия, выполнение которых требуется в релятивистской гидродинамике при рассмотрении поверхностей разрыва: непрерывность компонент метрики и равенство нулю радиальной компоненты силы, действующей на объект. Видимый радиус объекта определяется его гравитационным радиусом и кривизной пространства в месте размещения объекта. Построенное решение позволяет избежать концептуальных трудностей, возникающих в ОТО (сингулярности, горизонты событий и др.). В то же время построенное решение приводит к уравнению состояния материи внутри объекта, относящееся к категории смеси обычной материи и темной энергии.

Ключевые слова: Центральные-симметричные решения уравнений общей теории относительности, конформная геометродинамика, регулярные решения, проблема черных дыр.

1. Введение

Центрально-симметричные статические (ЦСС) решения уравнений общей теории относительности (ОТО) являются предметом исследований во многих работах и по разным причинам. Исторически первое решение для пустого пространства получил К. Шварцшильд в [1]. Он же в [2] получил ЦСС решение и для массивного объекта с конечным радиусом поверхности и с конечной плотностью энергии. Систематическое изложение второго решения имеется в [3]. Детальное обсуждение ЦСС решения уравнений ОТО применительно к теории звезд имеется, например, в [4, 5]. ЦСС решения активно обсуждаются в связи с проблемой коллапса, возникновения горизонтов событий, сингулярностей физических величин в центре и других атрибутов черных дыр [6–10].

В данной работе предметом исследований также является ЦСС решение уравнений ОТО. Исследования в данной работе имеют две особенно-

сти. Одна из них состоит в использовании в уравнениях ОТО

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = -2A_{\alpha}A_{\beta} - g_{\alpha\beta}A^2 - 2g_{\alpha\beta}A^{\nu}_{;\nu} + A_{\alpha;\beta} + A_{\beta;\alpha} + \lambda g_{\alpha\beta} \quad (1)$$

специфического тензора энергии-импульса $T_{\alpha\beta}$, а именно, такого тензора $T_{\alpha\beta}$, при котором уравнения ОТО для пустого пространства становятся инвариантными относительно конформных преобразований

$$\left. \begin{aligned} g_{\alpha\beta} &\rightarrow g'_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} e^{2\sigma}, \\ A_{\alpha} &\rightarrow A'_{\alpha} = A_{\alpha} - \sigma_{,\alpha}, \\ \lambda &\rightarrow \lambda' = \lambda e^{-2\sigma}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Здесь λ – функция от времени и радиуса, известная как лямбда-член. Из способа получения уравнений (1) [см. 11, 12] следует, что в этих уравнениях нулевые значения лямбда-члена в принципе

не допускаются. Что касается величины A_α , то ее будем называть вектором Вейля. В (2) $\sigma(x)$ – произвольная достаточно гладкая функция координат. Уравнения (1) будем называть уравнениями конформной геометродинамики (КГД).

Другая особенность состоит в допуске в качестве полноправных решений уравнений ОТО так называемых разрывных решений¹. Такие решения удовлетворяют во всем пространстве уравнениям (1), но на некоторых пространственноподобных поверхностях могут испытывать разрыв некоторые производные от метрики, а также вектор Вейля и лямбда-член.

Возникает вопрос: с чем связано обращение к направлению исследований с указанными двумя особенностями? Дело в том, что все решения уравнений ОТО (за исключением тривиальных случаев в виде пространства Минковского или пространства де Ситтера) имеют сингулярности. Это относится к статическому решению Шварцшильда, стационарному решению Керра, космологическим решениям Фридмана.

Использование тензора $T_{\alpha\beta}$ в виде правой части уравнений (1), конечно, не спасает от сингулярностей. Но ситуация с сингулярностями меняется, поскольку становится более широким класс точных решений уравнений КГД. Одни ветви решений имеют сингулярности в одних пространственно-временных областях, а другие – в других. В результате появляется возможность ставить вопрос о сшивке различных ветвей решений на некоторых поверхностях разрыва. И вот тут начинает играть роль тот факт, что для уравнений (1) задача Коши ставится без связей на начальные данные (см. [11]). С какими бы значениями не приходила одна ветвь решения на поверхность разрыва, мы можем быть уверенными в том, что эти значения могут быть использованы в качестве начальных или граничных данных для другой ветви.

Приведенные соображения будут продемонстрированы в данной работе на примере ЦСС решения уравнений КГД. Интересно заметить, что полученное в данной работе ЦСС решение не может быть в принципе сведено к конформно плоскому, поскольку имеет ненулевой инвариант $(F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta})$, где $F_{\alpha\beta} \equiv A_{\beta,\alpha} - A_{\alpha,\beta}$.

В заключение работы проводится сравнительный анализ полученных результатов и результатов ранее рассмотренных ЦСС задач. Результаты обобщаются.

2. Метрика Кристоффеля

Для описания центрально-симметричных ситуаций может быть использовано выражение для квадрата интервала в следующем виде (см., например, [3]):

$$ds^2 = -e^\gamma dt^2 + e^\alpha dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (3)$$

Здесь $d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$, где θ, φ – полярный и азимутальный углы соответственно. Входящие в (3) функции $\gamma(r), \alpha(r)$ являются функциями радиальной переменной r . Стандартная процедура вычисления символов Кристоффеля приводит к следующим выражениям для отличных от нуля символов:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ 01 \end{pmatrix} = \frac{\gamma'}{2} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 00 \end{pmatrix} = \frac{\gamma'}{2} e^{\gamma-\alpha} & \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \end{pmatrix} = \frac{\alpha'}{2} & \begin{pmatrix} 1 \\ 22 \end{pmatrix} = -re^{-\alpha} & \begin{pmatrix} 1 \\ 33 \end{pmatrix} = -re^{-\alpha} \sin^2\theta \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \end{pmatrix} = \frac{1}{r} & \begin{pmatrix} 2 \\ 33 \end{pmatrix} = -\sin\theta \cos\theta \\ \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \end{pmatrix} = \frac{1}{r} & \begin{pmatrix} 3 \\ 23 \end{pmatrix} = \text{ctg}\theta \end{cases} \quad (4)$$

Штрих обозначает производную по r .

3. Уравнения КГД

Явный вид величин $G_{\alpha\beta}$ для ЦСС задачи заимствуем из [3] (формулы (7.81)). В результате уравнения ОТО принимают следующий вид:

$$\frac{1}{r^2} e^{-\alpha} (1 - r\alpha') - \frac{1}{r^2} = T_0^0. \quad (5)$$

$$\frac{1}{r^2} e^{-\alpha} (1 + r\gamma') - \frac{1}{r^2} = T_1^1. \quad (6)$$

$$e^{-\alpha} \left(\frac{\gamma''}{2} + \frac{\gamma'^2}{4} + \frac{\gamma'}{2r} - \frac{\alpha'}{2r} - \frac{\alpha'\gamma'}{4} \right) = T_2^2. \quad (7)$$

$$0 = T_0^1. \quad (8)$$

$$0 = T_1^0. \quad (9)$$

¹ По другой терминологии: сшитых решений, решений с поверхностями бифуркаций, решений с поверхностями ветвления.

4. Вспомогательные соотношения, необходимые для нахождения тензора энергии-импульса

Будем считать, что в ЦСС задаче вектор Вейля имеет отличной от нуля только временную компоненту,

$$A_\alpha = (\varphi(r), 0, 0, 0). \quad (10)$$

Это предположение должно быть подтверждено апостериори.

Вычислим некоторые комбинации, которые входят в тензор энергии-импульса.

$$A^2 = g^{\mu\nu} A_\mu A_\nu = g^{00} A_0 A_0 = -e^{-\gamma} \varphi^2. \quad (11)$$

$$A_{0;1} = \varphi' - \begin{pmatrix} 0 \\ 01 \end{pmatrix} \varphi = \varphi' - \frac{\gamma'}{2} \varphi. \quad (12)$$

$$A_{1;0} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 01 \end{pmatrix} \varphi = -\frac{\gamma'}{2} \varphi. \quad (13)$$

$$A_{0;0} = 0, \quad A_{1;1} = 0, \quad A_{2;2} = 0, \quad A_{3;3} = 0, \quad A^{\nu}_{;\nu} = 0. \quad (14)$$

Подстановка (10–14) в правую часть уравнения (1) приводит к следующим соотношениям:

$$T_{00} = -3\varphi^2 - \lambda e^\gamma; \quad (15)$$

$$T_{01} = \varphi' - \gamma' \varphi; \quad (16)$$

$$T_{11} = \varphi^2 e^{\alpha-\gamma} + \lambda e^\alpha; \quad (17)$$

$$T_{22} = r^2 e^{-\gamma} \varphi^2 + \lambda r^2. \quad (18)$$

5. Уравнения КГД для ЦСС задачи

Подставляем приведенные выше выражения для тензора энергии-импульса в уравнения (5–9).

$$G_0^0 = T_0^0 \rightarrow \frac{1}{r^2} e^{-\alpha} (1 - r\alpha') - \frac{1}{r^2} = 3\varphi^2 e^{-\gamma} + \lambda. \quad (19)$$

$$G_0^1 = T_0^1 \rightarrow 0 = e^{-\alpha} [\varphi' - \gamma' \varphi]. \quad (20)$$

$$G_1^1 = T_1^1 \rightarrow \frac{1}{r^2} e^{-\alpha} (1 + r\gamma') - \frac{1}{r^2} = \varphi^2 e^{-\gamma} + \lambda. \quad (21)$$

$$G_2^2 = T_2^2 \rightarrow e^{-\alpha} \left(\frac{\gamma''}{2} + \frac{\gamma'^2}{4} + \frac{\gamma'}{2r} - \frac{\alpha'}{2r} - \frac{\alpha'\gamma'}{4} \right) = \varphi^2 e^{-\gamma} + \lambda. \quad (22)$$

6. Решение уравнений КГД для ЦСС задачи

6.1. Первый этап

Из уравнения (20) следует, что

$$\varphi = p e^\gamma, \quad (23)$$

где p – константа с размерностью 1/см. Подстановка (23) в уравнения (19), (21), (22) приводит к следующим трем уравнениям для трех функций α, γ, λ :

$$\frac{1}{r^2} e^{-\alpha} (1 - r\alpha') - \frac{1}{r^2} = 3p^2 e^\gamma + \lambda; \quad (24)$$

$$\frac{1}{r^2} e^{-\alpha} (1 + r\gamma') - \frac{1}{r^2} = p^2 e^\gamma + \lambda; \quad (25)$$

$$e^{-\alpha} \left(\frac{\gamma''}{2} + \frac{\gamma'^2}{4} + \frac{\gamma'}{2r} - \frac{\alpha'}{2r} - \frac{\alpha'\gamma'}{4} \right) = p^2 e^\gamma + \lambda. \quad (26)$$

Вычтем уравнение (24) из уравнения (25).

$$\frac{1}{r} e^{-\alpha} (\gamma' + \alpha') = -2p^2 e^\gamma. \quad (27)$$

Если уравнение (27) записать как

$$e^{-(\alpha+\gamma)} (\gamma' + \alpha') = -2p^2 r, \quad (28)$$

то становится очевидным, что интегралом уравнения (28) является

$$e^{(\alpha+\gamma)} = \frac{1}{c + p^2 r^2}. \quad (29)$$

Здесь c – безразмерная константа интегрирования. Поскольку для метрики (3)

$$\sqrt{-g} = r^2 \sin \theta \cdot e^{\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)}, \quad (30)$$

то из (29) следует, что

$$\sqrt{-g} = \frac{r^2}{\sqrt{c + p^2 r^2}} \sin \theta. \quad (31)$$

В терминах безразмерной переменной x ,

$$x \equiv pr, \quad (32)$$

соотношение (31) записывается как

$$\sqrt{-g} = \frac{\sin \theta}{p^2} \frac{x^2}{\sqrt{c + x^2}}. \quad (33)$$

6.2. Последующая стратегия нахождения решения

С учетом соотношения (29) последующую стратегию нахождения решения ЦСС задачи можно сформулировать следующим образом. Сначала необходимо найти функцию

$$F \equiv e^{-\alpha}. \quad (34)$$

Затем по формуле (29) можно найти функцию e^γ . После этого по формуле (23) сразу определяется функция φ . Зная три перечисленные функции, по одному из уравнений (24)-(26) можем найти функцию λ внутри объекта.

Итак, ключевым моментом в нахождении решения ЦСС задачи является нахождение функции (34).

6.3. Уравнение для функции F и его общее решение

Вычтем уравнение (25) из уравнения (26)

$$e^{-\alpha} \left(\frac{\gamma''}{2} + \frac{\gamma'^2}{4} - \frac{\gamma'}{2r} - \frac{\alpha'}{2r} - \frac{\alpha'\gamma'}{4} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = 0. \quad (35)$$

Выражаем производные γ', γ'' через производные α', α'' с помощью соотношения (29).

$$\gamma' = -\alpha' - \frac{2p^2r}{(c+p^2r^2)}. \quad (36)$$

$$\gamma'' = -\alpha'' - \frac{2p^2(c-p^2r^2)}{(c+p^2r^2)^2}. \quad (37)$$

Подставляем (36), (37) в (35).

$$e^{-\alpha} \left(-\frac{\alpha''}{2} + \frac{\alpha'^2}{2} + \frac{3p^2r}{2(c+p^2r^2)}\alpha' + \frac{3p^4r^2}{(c+p^2r^2)^2} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = 0. \quad (38)$$

Записываем уравнение (38), используя обозначение (34)

$$F'' - \frac{3p^2r}{(c+p^2r^2)}F' + \left(\frac{6p^4r^2}{(c+p^2r^2)^2} - \frac{2}{r^2} \right)F + \frac{2}{r^2} = 0. \quad (39)$$

Перепишем (39) в терминах безразмерной переменной x (см. (32)). Производные по x обозначаем далее точкой над символом функции. Так,

$$F' = \dot{F}p, \quad F'' = \ddot{F}p^2.$$

Уравнение (39) (после сокращения на p^2) записывается как

$$\ddot{F} - \frac{3x}{(c+x^2)}\dot{F} + \left(\frac{6x^2}{(c+x^2)^2} - \frac{2}{x^2} \right)F + \frac{2}{x^2} = 0. \quad (40)$$

Общее решение нелинейного дифференциального уравнения второго порядка (40) находится с помощью, например, комплекса Mathematica и имеет вид:

$$F(x) = \frac{(c+x^2)}{c} + C_1 \frac{(c+x^2)^{3/2}}{x} - C_2 \frac{(c+x^2)}{x} \left[x - \sqrt{(c+x^2)} \ln \left(x + \sqrt{(c+x^2)} \right) \right]. \quad (41)$$

Помимо константы интегрирования c , появившейся при нахождении решения уравнения (28), при нахождении решения уравнения (40) появляются еще две безразмерные константы интегрирования C_1 и C_2 .

Таким образом,

$$g^{11} = \begin{cases} (c+p^2r^2) \left[\frac{1}{c} + C_1 \frac{\sqrt{c+p^2r^2}}{pr} - C_2 \left[1 - \frac{\sqrt{c+p^2r^2}}{pr} \ln \left(pr + \sqrt{c+p^2r^2} \right) \right] \right], & r < \bar{r}, \\ 1 - \frac{\lambda_0}{r} + \frac{\lambda_0}{3}r^2, & r > \bar{r}. \end{cases} \quad (42)$$

$$g_{11} = \begin{cases} \frac{1}{(c+p^2r^2) \left[\frac{1}{c} + C_1 \frac{\sqrt{c+p^2r^2}}{pr} - C_2 \left[1 - \frac{\sqrt{c+p^2r^2}}{pr} \ln \left(pr + \sqrt{c+p^2r^2} \right) \right] \right]}, & r < \bar{r}, \\ \frac{1}{1 - \frac{\lambda_0}{r} + \frac{\lambda_0}{3}r^2}, & r > \bar{r}. \end{cases} \quad (43)$$

Формулы (42), (43) записаны в предположении о том, что внешняя часть решения представляет собой внешнее решение Шварцшильда

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{x_0}{x} + \frac{\lambda_0}{3p^2}x^2 \right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{x_0}{x} + \frac{\lambda_0}{3p^2}x^2 \right)} + r^2 \left[d\theta^2 + \sin^2 \theta \cdot d\varphi^2 \right] \quad (44)$$

Константа λ в области $r > \bar{r}$ постоянна, она обозначена через λ_0 .

6.4. Выражения для других функций

Компонента метрики g_{00} определяется с помощью соотношения (29) и оказывается равной

$$-g_{00} = \begin{cases} \frac{1}{c} + C_1 \frac{\sqrt{c+p^2r^2}}{pr} - C_2 \left[1 - \frac{\sqrt{c+p^2r^2}}{pr} \ln \left(pr + \sqrt{c+p^2r^2} \right) \right], & r < \bar{r}, \\ 1 - \frac{r_0}{r} + \frac{\lambda_0}{3} r^2, & r > \bar{r}. \end{cases} \quad (45)$$

Согласно (23) функция φ с точностью до константы совпадает с функцией e^γ

$$\varphi = pe^\gamma. \quad (46)$$

Из четырех функций $e^\alpha, e^\gamma, \varphi, \lambda$, подлежащих определению, осталось найти только функцию λ внутри объекта. Для нахождения явного выражения для функции λ воспользуемся уравнением (24), согласно которому

$$\lambda = \frac{1}{r^2} e^{-\alpha} (1 - r\alpha') - \frac{1}{r^2} - 3p^2 e^\gamma. \quad (47)$$

После подстановки в (47) найденных выше функций e^α и e^γ и небольших преобразований получаем:

$$\lambda = \begin{cases} p^2 C_2, & r < \bar{r}, \\ \lambda_0, & r > \bar{r}. \end{cases} \quad (48)$$

Функция λ как внутри объекта, так и вне, оказывается не зависящей от радиальной переменной. На поверхности объекта функция λ может испытывать разрыв.

Таким образом, выражения (43), (45), (46), (48) представляют собой общее решение ЦСС задачи для уравнений КГД.

6.5. Нахождение констант интегрирования

В общее решение входят четыре константы: c, C_1, C_2, p . От константы p можно избавиться, перейдя во всех соотношениях от r, \bar{r}, r_0, U, P и λ к безразмерным величинам

$$x \equiv pr, \bar{x} \equiv p\bar{r}, x_0 \equiv pr_0, \hat{\lambda} \equiv \frac{\lambda}{p^2}, \quad (49)$$

$$\hat{\lambda}_0 \equiv \frac{\lambda_0}{p^2}, \hat{U} \equiv \frac{U}{p^2}, \hat{P} \equiv \frac{P}{p^2}.$$

Выразим оставшиеся три константы c, C_1, C_2 через другие три константы, имеющие ясный физический смысл с точки зрения внешнего наблюдателя. К числу таких констант относится радиус

поверхности сшивки \bar{r} , а также две константы, входящие во внешнюю (наблюдаемую) часть решения:

- гравитационный радиус $r_0 = (2GM)/c^2$,
- лямбда-член λ_0 .

Выражения для констант c, C_1, C_2 найдем из условий сшивки внутренней части решения с внешней (44). В качестве условий сшивки примем те условия, которые используются при получении решения Шварцшильда–Синга [2]. К числу этих условий относится непрерывность на поверхности сшивки компонент метрики g_{00}, g_{11} и непрерывность давления P . Потребуем также, чтобы во всем диапазоне изменения радиальной переменной компоненты метрики были конечными и положительными.

Константа c .

В точке сшивки, т. е. в точке $x = \bar{x}$, величина $\sqrt{-g}$ должна гладко сшиваться со значением $(x/p)^2 \sin \theta$, равным значению $\sqrt{-g}$ во внешней части решения. Таким образом, в точке сшивки

$$e^{(\alpha+\gamma)} \Big|_{x=\bar{x}} = 1. \quad (50)$$

Из (50) и (29) следует, что

$$c = 1 - \bar{x}^2. \quad (51)$$

Это и есть соотношение, которое связывает константу c и радиус сшивки. Если записать соотношение (51) как

$$\bar{x} = \sqrt{1-c}, \quad (52)$$

то из него следует, что величина c не может быть равной единице или больше единицы. Она не может быть также равной нулю или быть отрицательной, поскольку иначе существовало бы значение радиальной переменной, в котором детерминант (33) был бы сингулярным. С учетом (51) получаем

$$0 < c < 1. \quad (53)$$

Из (53) с учетом (52) получаем ограничение на радиус сшивки

$$0 < \bar{x} < 1. \quad (54)$$

При выполнении неравенств (54) выражение для функции $e^{(\alpha+\gamma)}$ записывается как

$$e^{(\alpha+\gamma)} = \frac{1}{1 - \bar{x}^2 + x^2}. \quad (55)$$

С помощью соотношения (55) получаем для величины $\sqrt{-g}$ следующее выражение:

$$\sqrt{-g} = \frac{\sin \theta}{p^2} x^2 e^{\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)} = \frac{x^2 \sin \theta}{p^2 \sqrt{1-\bar{x}^2+x^2}}. \quad (56)$$

С помощью соотношения (55) величину e^γ можем выразить через функцию $e^{-\alpha}$

$$e^\gamma = \frac{e^{-\alpha}}{(1-\bar{x}^2+x^2)}. \quad (57)$$

Константа C_2 .

Функция $F(x)$ совпадает с компонентой g^{11} . В центре она не должна обращаться в бесконечность. Главный расходящийся член в разложении функции (41) имеет вид

$$F(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{c^{3/2}}{x} \left\{ C_1 + C_2 \ln(\sqrt{c}) \right\}. \quad (58)$$

Расходимость исчезнет, если константы C_1 и C_2 будут связаны соотношением

$$C_2 = -\frac{C_1}{\ln(\sqrt{c})}. \quad (59)$$

С учетом (59) выражение для функции $e^{-\alpha}$ принимает следующий вид:

$$e^{-\alpha} = \frac{(1-\bar{x}^2+x^2)}{(1-\bar{x}^2)} + C_1 \left\{ \frac{(1-\bar{x}^2+x^2)^{3/2}}{x} + \frac{(1-\bar{x}^2+x^2)}{x \ln(\sqrt{1-\bar{x}^2})} \left[x - \sqrt{(1-\bar{x}^2+x^2)} \ln \left(x + \sqrt{(1-\bar{x}^2+x^2)} \right) \right] \right\}. \quad (60)$$

Константа C_1 .

Условие сшивки компоненты метрики g^{11} на поверхности радиуса $x = \bar{x}$ при использовании соотношений (51) и (59) дает:

$$\frac{1}{(1-\bar{x}^2)} + C_1 \left(\frac{1}{\bar{x}} + \frac{1}{\ln(\sqrt{1-\bar{x}^2})} - \frac{1}{\ln(\sqrt{c})} \frac{\ln(\bar{x}+1)}{\bar{x}} \right) = 1 - \frac{x_0}{\bar{x}} + \frac{\lambda_0}{3p^2} \bar{x}^2. \quad (61)$$

После упрощений получаем:

$$C_1 = \frac{\ln(\sqrt{1-\bar{x}^2}) \left[\bar{x} - x_0 - \frac{\bar{x}}{(1-\bar{x}^2)} + \frac{\lambda_0}{3p^2} \bar{x}^3 \right]}{\left[\bar{x} + \ln \left(\sqrt{\frac{1-\bar{x}}{1+\bar{x}}} \right) \right]}. \quad (62)$$

6.6. Выражения для искомых функций в терминах $x_0, \hat{\lambda}_0, \bar{x}$

Подставляем (62) в (60).

$$g^{11} = e^{-\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{(1-\bar{x}^2+x^2)} \left\{ \frac{1}{(1-\bar{x}^2)} + \frac{\ln(\sqrt{1-\bar{x}^2}) \left[\bar{x} - x_0 - \frac{\bar{x}}{(1-\bar{x}^2)} + \frac{\lambda_0}{3p^2} \bar{x}^3 \right]}{\left[\bar{x} + \ln \left(\sqrt{\frac{1-\bar{x}}{1+\bar{x}}} \right) \right]} \right\}, & x < \bar{x}, \\ \left(\frac{(1-\bar{x}^2+x^2)^{1/2}}{x} + \frac{1}{\ln(\sqrt{1-\bar{x}^2})} \left[1 - \frac{\sqrt{(1-\bar{x}^2+x^2)}}{x} \ln \left(x + \sqrt{(1-\bar{x}^2+x^2)} \right) \right] \right), & \\ 1 - \frac{x_0}{x} + \frac{\hat{\lambda}_0}{3} x^2, & x > \bar{x}. \end{cases} \quad (63)$$

Подстановка (63) в (29) приводит к следующему выражению для e^γ :

$$-g_{00} = e^\gamma = \begin{cases} \frac{1}{(1-\bar{x}^2)} + \frac{\ln(\sqrt{1-\bar{x}^2}) \left[\bar{x} - x_0 - \frac{\bar{x}}{(1-\bar{x}^2)} + \frac{\lambda_0}{3p^2} \bar{x}^3 \right]}{\left[\bar{x} + \ln \left(\sqrt{\frac{1-\bar{x}}{1+\bar{x}}} \right) \right]}, & \\ \left(\frac{(1-\bar{x}^2+x^2)^{1/2}}{x} + \frac{1}{\ln(\sqrt{1-\bar{x}^2})} \left[1 - \frac{\sqrt{(1-\bar{x}^2+x^2)}}{x} \ln \left(x + \sqrt{(1-\bar{x}^2+x^2)} \right) \right] \right), & x < \bar{x}, \\ 1 - \frac{x_0}{x} + \frac{\hat{\lambda}_0}{3} x^2, & x > \bar{x}. \end{cases} \quad (64)$$

В выражении (48) для функции λ константу C_2 заменяем через константу C_1 по формуле (59). После чего переписываем выражение (48) в терминах $x_0, \hat{\lambda}_0, \bar{x}$.

$$\hat{\lambda} = \begin{cases} \frac{\left(x_0 (1-\bar{x}^2) - \bar{x}^3 \left(1 - \frac{\hat{\lambda}_0}{3} + \frac{\hat{\lambda}_0}{3} \bar{x}^2 \right) \right)}{(1-\bar{x}^2) \left(\bar{x} + \ln \sqrt{\frac{1-\bar{x}}{1+\bar{x}}} \right)}, & x < \bar{x}, \\ \hat{\lambda}_0, & x > \bar{x}. \end{cases} \quad (65)$$

6.7. Плотность энергии и давление

Из конструкции тензора энергии-импульса (19), (21) следует, что плотность энергии U и давление P выражаются через функции e^γ и λ посредством формул

$$\frac{U}{p^2} = -3e^\gamma - \frac{\lambda}{p^2}, \quad (66)$$

$$\frac{P}{p^2} = e^\gamma + \frac{\lambda}{p^2}. \quad (67)$$

На поверхности сшивки для давления имеем:

$$P = \begin{cases} p^2 e^\gamma + \lambda_-, & r = \bar{r} - \varepsilon, \\ \lambda_0, & r > \bar{r}. \end{cases} \quad (68)$$

Здесь λ_- – предел функции $\lambda(r)$ внутри объекта при приближении радиуса к поверхности сшивки; ε – бесконечно малое положительное число. Поскольку давление должно быть непрерывным, имеем:

$$p^2 e^{\gamma(\bar{r})} = \lambda_0 - \lambda_+. \quad (69)$$

Поскольку величина e^γ должна быть положительной, то из (69) следует неравенство

$$\lambda_- < \lambda_0. \quad (70)$$

Неравенство (70) является необходимым условием для непрерывности давления на поверхности сшивки.

Подстановка в (66), (67) соотношений (64), (65) приводит к следующим выражениям (71), (72) для функций \hat{U} , \hat{P} .

Формулы (63), (64), (65), (71), (72) для функций g^{11} , g_{00} , $\hat{\lambda}$, \hat{U} , \hat{P} соответственно записаны как функции радиальной переменной и трех констант: гравитационного радиуса $r_0 = (2GM)/c^2$, лямбда-члена $\hat{\lambda}_0$ и радиуса поверхности сшивки \bar{r} . К этому моменту осталось не использованным одно из соотношений, которое должно быть удовлетворено на поверхности сшивки. Этим условием является непрерывность давления. После использования условия непрерывности давления величина \bar{x} должна быть определена как функция x_0 и $\hat{\lambda}_0$ при условии выполнения неравенства (70).

$$\hat{U} = \begin{cases} \left\{ \frac{1}{(1-\bar{x}^2)} + \frac{\ln(\sqrt{1-\bar{x}^2}) \left[\bar{x} - x_0 - \frac{\bar{x}}{(1-\bar{x}^2)} + \frac{\hat{\lambda}_0}{3} \bar{x}^3 \right]}{\left[\bar{x} + \ln\left(\sqrt{\frac{1-\bar{x}}{1+\bar{x}}}\right) \right]} \right\} x \\ \left\{ \frac{(1-\bar{x}^2+x^2)^{1/2}}{x} + \frac{1}{\ln(\sqrt{1-\bar{x}^2})} \left[1 - \frac{\sqrt{1-\bar{x}^2+x^2}}{x} \ln\left(x + \sqrt{1-\bar{x}^2+x^2}\right) \right] \right\} \end{cases} - \begin{cases} \frac{x_0(1-\bar{x}^2) - \bar{x}^3 \left(1 - \frac{\hat{\lambda}_0}{3} + \frac{\hat{\lambda}_0}{3} \bar{x}^2 \right)}{(1-\bar{x}^2) \left(\bar{x} + \ln\sqrt{\frac{1-\bar{x}}{1+\bar{x}}} \right)}, & x < \bar{x}, \\ -\hat{\lambda}_0, & x > \bar{x}. \end{cases} \quad (71)$$

$$\hat{P} = \begin{cases} \left\{ \frac{1}{(1-\bar{x}^2)} + \frac{\ln(\sqrt{1-\bar{x}^2}) \left[\bar{x} - x_0 - \frac{\bar{x}}{(1-\bar{x}^2)} + \frac{\hat{\lambda}_0}{3} \bar{x}^3 \right]}{\left[\bar{x} + \ln\left(\sqrt{\frac{1-\bar{x}}{1+\bar{x}}}\right) \right]} \right\} x \\ \left\{ \frac{(1-\bar{x}^2+x^2)^{1/2}}{x} + \frac{1}{\ln(\sqrt{1-\bar{x}^2})} \left[1 - \frac{\sqrt{1-\bar{x}^2+x^2}}{x} \ln\left(x + \sqrt{1-\bar{x}^2+x^2}\right) \right] \right\} \end{cases} + \begin{cases} \frac{x_0(1-\bar{x}^2) - \bar{x}^3 \left(1 - \frac{\hat{\lambda}_0}{3} + \frac{\hat{\lambda}_0}{3} \bar{x}^2 \right)}{(1-\bar{x}^2) \left(\bar{x} + \ln\sqrt{\frac{1-\bar{x}}{1+\bar{x}}} \right)}, & x < \bar{x}, \\ \hat{\lambda}_0, & x > \bar{x}. \end{cases} \quad (72)$$

7. Нахождение радиуса поверхности сшивки

7.1. Условие для определения радиуса поверхности сшивки

Радиус поверхности сшивки будем находить, как сказано выше, из условия непрерывности на поверхности сшивки давления. Заметим, что согласно уравнению (21) из непрерывности давления на поверхности сшивки следует, что на этой поверхности непрерывна и производная от компоненты $-g_{00}$.

Согласно (72) давление является функцией четырех переменных

$$P = P(x, x_0, \bar{x}, \hat{\lambda}_0). \quad (73)$$

На поверхности сшивки, т. е. при $x = \bar{x}$, функция (73) становится функцией трех переменных. Предел функции (73) при приближении x к \bar{x} со стороны меньших значений x обозначим как $\hat{P}^-(x_0, \bar{x}, \hat{\lambda}_0)$, а со стороны больших значений x –

как $\hat{P}^+(x_0, \bar{x}, \hat{\lambda}_0)$. Поскольку во внешней части решения давление равно λ_0 , то ясно, что $\hat{P}^+(x_0, \bar{x}, \hat{\lambda}_0) = \hat{\lambda}_0$. Таким образом, на поверхности сшивки должно выполняться соотношение

$$\hat{P}^-(x_0, \bar{x}, \hat{\lambda}_0) = \hat{\lambda}_0. \quad (74)$$

Из формулы (72) находим выражение для $\hat{P}^-(x_0, \bar{x}, \hat{\lambda}_0)$:

$$\begin{aligned} \hat{P}^-(x_0, \bar{x}, \hat{\lambda}_0) = & \frac{1}{1-\bar{x}^2} + \frac{2(3x_0(1-\bar{x}^2) + \bar{x}^3(-3 + (1-\bar{x}^2)))}{3(1-\bar{x}^2)\left(2\bar{x} + \ln\left(\frac{1-\bar{x}}{1+\bar{x}}\right)\right)} + \\ & + \frac{(-3x_0(1-\bar{x}^2) + \bar{x}^3(-3 + (1-\bar{x}^2)\hat{\lambda}_0))\left(\bar{x} - \ln(1+\bar{x}) + \ln(1-\bar{x}^2)\right)}{3\bar{x}(1-\bar{x}^2)\left(2\bar{x} + \ln\left(\frac{1-\bar{x}}{1+\bar{x}}\right)\right)}. \end{aligned} \quad (75)$$

Подстановка (75) в (74) приводит к уравнению на нахождение радиуса поверхности сшивки. Это уравнение связывает три величины $x_0, \bar{x}, \hat{\lambda}_0$ и является иррациональным. Общее решение этого уравнения найти не удалось. Однако при любых двух заданных параметрах третий параметр может быть найден численным методом. В качестве примера нахождения решения численным методом на рис. 1 представлены графики зависимостей давления (73) от радиальной переменной при трех значениях параметра $\hat{\lambda}_0$ и при фиксированных значениях двух других параметров $x_0 = 10^{-13}$, $\bar{x} = 10^{-4}$. При одном значении $\hat{\lambda}_0 = 18,5$ давление внутри в точке сшивки меньше давления снаружи. При другом значении $\hat{\lambda}_0 = 0,185$ давление внутри больше давления снаружи. И наконец, при значении $\hat{\lambda}_0 = 1,85$ давление внутри и давление снаружи сравниваются. Это означает, что набор величин $x_0 = 10^{-13}$, $\bar{x} = 3 \cdot 10^{-4}$, $\hat{\lambda}_0 = -1,85$ является решением уравнения (75).

Приближенное аналитическое решение уравнения (75) можно получить в области значений параметров x_0, \bar{x} , которые удовлетворяют неравенствам

$$x_0 \ll 1, \quad x_0 < \bar{x} \ll 1, \quad \hat{\lambda}_0 \gg 1. \quad (76)$$

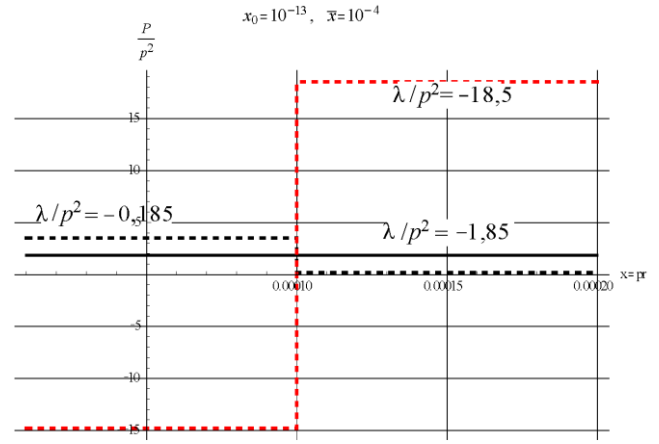


Рис. 1. Давление $\frac{1}{p^2}P(x, x_0, \bar{x}, \hat{\lambda}_0)$ при фиксированных $x_0 = 10^{-13}$, $\bar{x} = 3 \cdot 10^{-4}$ и при трех значениях $\hat{\lambda}_0$, указанных на рисунке. Сшивка давления с внутренней стороны и давления с внешней стороны достигается при $\hat{\lambda}_0 = -1,85$

Для этого разложим выражение (75) в ряд по степеням x_0, \bar{x} и результат приравняем $\hat{\lambda}_0$. Получаем:

$$\begin{aligned} & \left((4 - 2\hat{\lambda}_0) + \left(-\frac{3}{4} + \frac{\hat{\lambda}_0}{4} \right) \bar{x} + \left(\frac{17}{10} + \frac{23}{30} \hat{\lambda}_0 \right) \bar{x}^2 + O(\bar{x}^3) \right) + \\ & + \left(-\frac{3}{\bar{x}^3} - \frac{3}{4\bar{x}^2} + \frac{13}{10\bar{x}} + \frac{3}{40} + \frac{36\bar{x}}{175} + \frac{37\bar{x}^2}{1400} + O(\bar{x}^3) \right) x_0 + O(\bar{x}^3) = 0. \end{aligned} \quad (77)$$

Оставляем в разложении (77) главные члены в предположениях (76)

$$\hat{\lambda}_0 = -\frac{3x_0}{2\bar{x}^3}. \quad (78)$$

Отсюда для радиуса поверхности сшивки получаем

$$\bar{x} = -\left(\frac{3x_0}{2\hat{\lambda}_0} \right)^{1/3}. \quad (79)$$

Из (79) следует, что решение существует только при отрицательных значениях $\hat{\lambda}_0$.

8. Окончательный вид решения

8.1. Графики функций

В качестве иллюстрации характера зависимости функции $-g_{00} = e^\gamma$ от радиальной переменной

для внутренней и внешней частей ЦСС решения на рис. 3 приведен график этой функции для значений $x_0 = 10^{-13}$, $\bar{x} = 3 \cdot 10^{-4}$ и $\hat{\lambda}_0 = -1,85$. Для этих же значений параметров на рис. 3 приведен график компоненты метрики $g^{11} = e^{-\alpha}$. Указанные значения параметров соответствуют условию сшивки давления на поверхности радиуса \bar{r} .

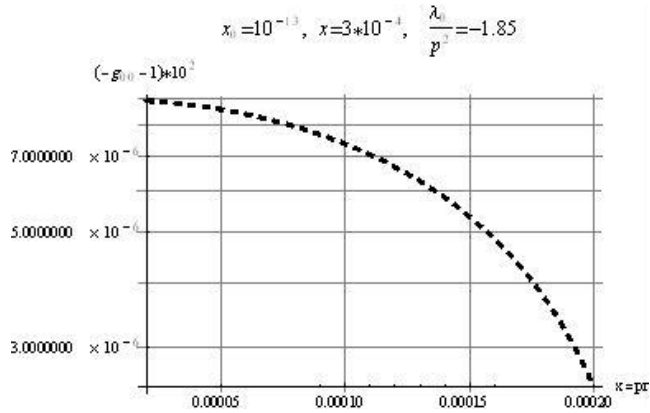


Рис. 2. Отличие компоненты метрики $-g_{00}$ от единицы для ЦСС решения уравнений КГД при значении параметров, указанных на рисунке

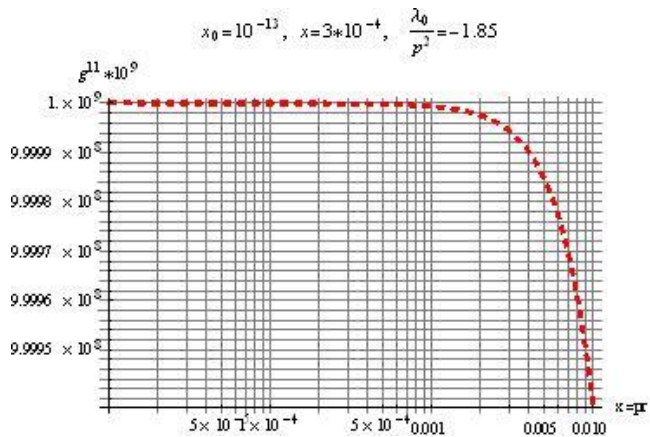


Рис. 3. Компонента метрики g_{11} для ЦСС решения уравнений КГД при значении параметров, указанных на рисунке

График давления изображен на рис. 1 (кривая, соответствующая $\hat{\lambda}_0 = -1,85$).

9. Обсуждение результатов

В работе получено точное ЦСС решение уравнений КГД (1). Решение состоит из двух ветвей – внутренней и внешней. Обе ветви сшиваются на поверхности разрыва радиуса \bar{r} таким образом,

что на этой поверхности непрерывными оказываются все компоненты метрики и давление. Разрыв испытывают плотность энергии, функции λ и ϕ . Несмотря на разрывы этих функций во всем пространстве, вся совокупность функций удовлетворяет уравнениям (1).

С технической точки зрения методология нахождения ЦСС решения, использованная в работе, аналогична той, что использовалась Шварцшильдом в [2] и Сингом в [3]. Использованы, в частности, такие условия на поверхности разрыва, что и в [2, 3]. Однако в [2 и 3] решалась ЦСС задача с привнесенным руками тензором энергии-импульса, а в нашем случае тензор энергии-импульса предопределен условием конформной инвариантности. И это различие носит не технический, а принципиальный характер. Для уравнений (1) задача Коши ставится без связей на начальные данные, и это позволяет не заботиться об удовлетворении связей между данными на поверхности разрыва для различных ветвей решения как при построении ЦСС решений, так и решений более общего характера. Процедура сшивки различных ветвей решения выполнима при любых значениях этих ветвей на поверхности сшивки. После сшивки в полное решение входят только регулярные части точных решений. А это в свою очередь приводит к регулярности решения в целом, т. е. к такому решению, в котором все компоненты метрики имеют конечные знакоопределенные значения и не возникают атрибуты, связанные с появлением горизонтов событий и сингулярностей.

Одно из следствий найденного решения состоит в возникновении аномальных уравнений состояния материи как во внешней, так и во внутренней частях решений. Во внешней части тензор энергии-импульса состоит из одного постоянного лямбда-члена, т. е. имеет тот вид, который используется в стандартной космологической модели для объяснения разлета Вселенной с ускорением (см., например, [14]). Уравнение состояния соответствует при этом соотношению $P = -U$, которое описывает темную энергию. Величина λ_0 вне объекта отрицательна, плотность энергии положительна, давление отрицательно. С точки зрения обычной материи такое уравнение состояния является аномальным.

Во внутренней части решения зависимость плотности энергии и давления от параметра $\lambda/(p^2 e^\gamma)$ определяется формулами (66), (67), т. е.

$$\frac{U}{p^2} = -3e^\gamma - \frac{\lambda}{p^2}, \quad (80)$$

$$\frac{P}{p^2} = e^\gamma + \frac{\lambda}{p^2}. \quad (81)$$

Зависимость функций $\left(U/(p^2 e^\gamma)\right)$ и $\left(P/(p^2 e^\gamma)\right)$ от величины $\left(\lambda/(p^2 e^\gamma)\right)$ имеет вид, приведенный на рис. 4.

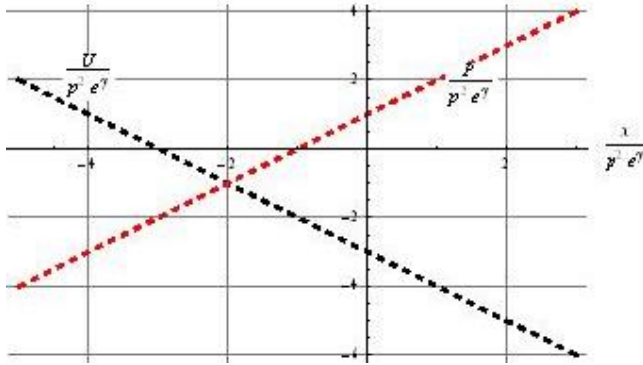


Рис. 4. Зависимость плотности энергии U и давления P от величины $\lambda/(p^2 e^\gamma)$ для ЦСС решения уравнений КГД

Из рис. 4 видно, что давление положительно только при $\left(\lambda/(p^2 e^\gamma)\right) > -1$, а плотность энергии положительна только при $\left(\lambda/(p^2 e^\gamma)\right) < -3$. Одновременно давление и плотность энергии положительными быть не могут. Отсюда следует, что в построенном ЦСС решении тензор энергии-импульса не допускает предположения об обычных уравнениях состояния материи внутри объекта.

В данной работе сшивка внутренней ветви решения производилась с решением де Ситтера. Но использованный способ сшивки позволяет его применять и для сшивки с иными решениями. Например, с решением Шварцшильда–Синга [2, 3]. Остаются в силе все приведенные до раздела 6.5 соотношения. Для нахождения констант c, C_1, C_2 следует:

1) использовать равенство функции $\sqrt{-g}$ на поверхности сшивки. Это позволяет выразить константу c через новый радиус сшивки \bar{r} ;

2) константу C_2 найти из условия исключения в центре сингулярности функции g_{00} ;

3) константу C_1 найти из условия непрерывности функции g_{00} на поверхности радиуса \bar{r} .

После выполнения этих трех операций все константы оказываются выраженными через константы интегрирования той ветви решения, с которой производится сшивка. Последняя константа \bar{r} находится из условия равенства давления.

Исходные уравнения (1), решения которых находились в данной работе, инвариантны относительно конформных преобразований (2). Частным случаем таких преобразований являются масштабные преобразования. Поэтому решения должны допускать запись в терминах безразмерных величин, не изменяющих своих значений при изменении масштаба. Действительно, все соотношения, как оказывается, записываются в терминах безразмерных величин $x = pr, x_0 = pr_0, \bar{x} = p\bar{r}, \hat{\lambda} = \lambda/p^2, \hat{U} = U/p^2, \hat{P} = P/p^2$. Здесь p имеет размерность $1/\text{см}$ и представляет собой величину, задающую масштаб длины. Это свойство решения является разновидностью автомодельности и означает, что одно и то же решение описывает целый класс решений, различающихся выбором масштаба длины.

Автор благодарит В. П. Незнамова за ряд полезных дискуссий.

Список литературы

1. Schwarzschild K. *Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie* // Sitzber. Deut. Akad. Wiss. Berlin. 1916. S. 189–196.
2. Schwarzschild K. *Über das Gravitationsfeld einer Kugel aus inkompressibler Flüssigkeit nach der Einsteinschen Theorie* // Sitz. Preuss. Akad. Wiss. 1916. S. 424.
3. Синг Дж. *Общая теория относительности*. М.: ИЛ, 1963.
4. Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. *Гравитация*. Том 2. М.: Мир, 1977.
5. Зельдович Я. Б., Новиков И. Д. *Релятивистская астрофизика*. М.: Наука, 1967.
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Теория поля*. М.: Наука, 1988.
7. Барцело Карлос, Виссер Мэт, Либерати Стефано и Сонего Себастьяно. *Черные звезды* // Наука и техника. 2013, № 9. С. 13–18.
8. Oppenheimer J. R., Snyder H. // Phys. Rev. 1939. Vol. 56. P. 455.

9. Einstein A. *On a Stationary System with Spherical Symmetry Consisting of many Gravitating Masses* // Ann. Math. 1939. Vol. **40**. P. 922–936.

10. Черепашук А. М. *Демография черных дыр* // Природа. 2006, № 10. С. 16–26.

11. Горбатенко М. В., Пушкин А. В. *Динамика пространства линейной аффинной связности и конформно-инвариантное расширение уравнений Эйнштейна* // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 1984. Вып. 2. С. 40–46.

12. Романов Ю. А. *Динамика пространства аффинной связности* // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 1996. Вып. 3. С. 55–57.

13. Горбатенко М. В. *Задача Коши для уравнений конформной геометродинамики* // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2012. Вып. 2. С. 31–42.

14. Горбунов Д. С., Рубаков В. А. *Введение в теорию ранней Вселенной. Теория горячего большого взрыва*. М.: Изд-во ЛКИ, 2008.

Статья поступила в редакцию 29.05.2015

О РЕГУЛЯРНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА В ЭКСТРЕМАЛЬНОМ ПОЛЕ РАЙССНЕРА-НОРДСТРЕМА

М. В. Горбатенко¹, В. П. Незнамов^{1,2*}, Е. Ю. Попов¹

¹ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

²Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», г. Москва

В работе анализируются эффективные потенциалы квадратированных уравнений Дирака в статических полях Шварцшильда и Райсснера–Нордстрёма.

Показано, что во всех рассмотренных случаях реализуются условия «падения» частиц на соответствующие горизонты событий.

Исключение составляет одно из решений для экстремального поля Райсснера–Нордстрёма с единственным горизонтом событий.

Голая сингулярность Райсснера–Нордстрёма, как и сингулярности в центре для рассматриваемых метрик с горизонтами событий, прикрыта для квантово-механических частиц бесконечно большим отталкивающим потенциальным барьером.

Ключевые слова: метрика Райсснера–Нордстрёма, дираковский гамильтониан, эффективный потенциал, голая сингулярность, горизонт событий.

Введение

В. И. Докучаевым и Ю. Н. Ерошенко в [1] для заряженных частиц со спином $\frac{1}{2}$ получены регулярные стационарные решения уравнения Дирака в экстремальном поле Райсснера–Нордстрёма. Ими же в [2] на основе полученных в [1] решений структуры со связанными состояниями заряженных дираковских частиц под горизонтом событий предложены в качестве возможных частиц «темной материи».

Авторами в [3, 4] проведен анализ областей определения волновых функций и эффективных потенциалов уравнений Дирака и Клейна–Гордона для квантово-механических частиц в статических центрально-симметричных гравитационных полях.

Там же, в частности, анализировались решения, полученные в [1], путем рассмотрения эффективных потенциалов уравнения Дирака в экстремальном поле Райсснера–Нордстрёма.

В данной работе результаты этого анализа приведены в более подробном изложении с новыми, по сравнению с работами [1, 2], выявленными

физическими особенностями. Эти особенности можно свести к трем основным выводам:

1. Вне горизонта событий для частиц с положительной энергией (с одноименными знаками зарядов частицы и источника поля Райсснера–Нордстрёма) отсутствует возможность существования стационарных связанных состояний дираковских частиц. Движение дираковских частиц в этом случае является инфинитным. Аналогичный вывод из других соображений ранее был сделан Гаральдом Шмидом в [5].

2. Для частиц с отрицательной энергией (с разноименными знаками зарядов частицы и источника поля Райсснера–Нордстрёма) возможно существование стационарных связанных состояний частиц со спином $\frac{1}{2}$. Изменением соотношения между гравитационной и электромагнитной константами связи можно добиться сколь угодно большой по абсолютной величине отрицательной энергии частицы $E < -mc^2$.

3. Под горизонтом событий существование стационарных связанных состояний дираковских

* E-mail: neznamov@vniief.ru

частиц возможно лишь для частиц с положительной энергией. Это достигается при одноименных знаках зарядов частицы и источника поля Райсснера–Нордстрёма и при значениях энергии дираковской частицы больше минимума эффективного потенциала в области под горизонтом событий.

Нескомпенсированность зарядов частицы и источника поля Райсснера–Нордстрёма затрудняют рассмотрение таких связанных объектов в качестве кандидатов в частицы «темной материи».

В разделе 1 работы приводится метрика Райсснера–Нордстрёма, самосопряженный гамильтониан дираковской частицы, системы уравнений для радиальных волновых функций.

В разделе 2 получаются и анализируются эффективные потенциалы уравнения Дирака для различных вариантов поля Райсснера–Нордстрёма. Особое внимание уделяется рассмотрению экстремального поля.

В разделе 3 проводится обсуждение полученных результатов.

В работе используется система единиц $\hbar = c = 1$; сигнатура пространства Минковского выбрана равной

$$g_{\alpha\beta} = \text{diag}[1, -1, -1, -1]. \quad (1)$$

1. Метрика Райсснера–Нордстрёма

Статическая метрика Райсснера–Нордстрёма характеризуется точечным сферически симметричным источником гравитационного поля с массой M и электрического поля с зарядом Q .

Квадрат интервала равен

$$ds^2 = f_{R-N} dt^2 - \frac{dr^2}{f_{R-N}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (2)$$

где $f_{R-N} = \left(1 - \frac{r_0}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)$, $r_0 = \frac{2GM}{c^2}$ – гравитацион-

ный радиус поля Шварцшильда, $r_Q = \frac{\sqrt{G}Q}{c^2}$ – «зарядовый» радиус, G – гравитационная постоянная, c – скорость света.

Условие Гильберта $g_{00} > 0$ приводит к необходимости рассмотрения лишь положительных значений $f_{R-N} > 0$.

1. Если $r_0 > 2r_Q$, то

$$f_{R-N} = \left(1 - \frac{r_+}{r}\right) \left(1 - \frac{r_-}{r}\right), \quad (3)$$

где r_{\pm} – внешний и внутренний радиусы горизонтов событий

$$r_{\pm} = \frac{r_0}{2} \pm \sqrt{\frac{r_0^2}{4} - r_Q^2}. \quad (4)$$

Областью определения волновых функций, где $f_{R-N} > 0$, являются области

$$r > r_+ \text{ и } r < r_-. \quad (5)$$

2. Случай $r_0 = 2r_Q$ соответствует экстремальному полю Райсснера–Нордстрёма. В этом случае разрешенной областью определения является все пространство $r \in [0, \infty)$ за исключением радиуса единственного горизонта событий $r_{\pm} = \frac{r_0}{2}$.

3. Случай $r_0 < 2r_Q$ соответствует «голой» сингулярности. В этом случае всегда $f_{R-N} > 0$ и областью определения волновых функций является вся область $r \in [0, \infty)$.

2. Эффективные потенциалы для центрально-симметричного поля Райсснера–Нордстрёма

Самосопряженный гамильтониан частицы со спином $1/2$, массой m и зарядом e имеет вид [6]:

$$H_{\eta} = \sqrt{f_{R-N}} \beta m - i\alpha^1 \left(f_{R-N} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} - \frac{r_0}{2r^2} \right) - i\sqrt{f_{R-N}} \frac{1}{r} \left[\alpha^2 \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \text{ctg} \theta \right) + \alpha^3 \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] + \frac{eQ}{r}. \quad (6)$$

В (6) α^k , β – матрицы Дирака.

После разделения переменных система уравнений для радиальных функций $F_{R-N}(\rho)$, $G_{R-N}(\rho)$ имеет вид:

$$\begin{aligned}
 f_{R-N} \frac{dF_{R-N}(\rho)}{d\rho} + \left(\frac{1 + \kappa \sqrt{f_{R-N}}}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right) F_{R-N}(\rho) - \\
 - \left(\varepsilon - \frac{\alpha_{em}}{\rho} + \sqrt{f_{R-N}} \right) G_{R-N}(\rho) = 0, \\
 f_{R-N} \frac{dG_{R-N}(\rho)}{d\rho} + \left(\frac{1 - \kappa \sqrt{f_{R-N}}}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right) G_{R-N}(\rho) + \\
 + \left(\varepsilon - \frac{\alpha_{em}}{\rho} - \sqrt{f_{R-N}} \right) F_{R-N}(\rho) = 0.
 \end{aligned} \quad (7)$$

В (7) введены безразмерные переменные

$$\rho = \frac{r}{l_c}; \quad \varepsilon = \frac{E}{m}; \quad \alpha = \frac{r_0}{2l_c} = \frac{GMm}{\hbar c} = \frac{Mm}{M_P^2}; \quad (8)$$

$$\alpha_Q = \frac{r_Q}{l_c} = \frac{\sqrt{GQm}}{\hbar c} = \frac{\sqrt{\alpha_{ts}}}{M_P} m \frac{Q}{|e|}; \quad \alpha_{em} = \frac{eQ}{\hbar c} = \alpha_{ts} \frac{Q}{e}, \quad (9)$$

$l_c = \frac{\hbar}{mc}$ – комптоновская длина волны дираковской частицы; E – энергия дираковской частицы;

$M_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}$ – планковская масса; α_{ts} – электро-

магнитная постоянная тонкой структуры; α, α_{em} – гравитационная и электромагнитная константы связи; α_Q – безразмерная константа, характеризующая источник электромагнитного поля в метрике Райсснера–Нордстрёма. $M_P = 2,2 \cdot 10^{-5} \times$

$\times (1,2 \cdot 10^{19} \text{ ГэВ}); \alpha_{ts} \approx \frac{1}{137};$

$$\begin{aligned}
 \text{В (7) константа разделения } \kappa = \pm \left(j + \frac{1}{2} \right) = \\
 = \begin{cases} -(l+1), & j = l + \frac{1}{2}; \\ l, & j = l - \frac{1}{2}; \end{cases} \quad l, j - \text{квантовые числа орби-}
 \end{aligned}$$

тального и полного момента дираковской частицы.

Величину f_{R-N} можно представить в виде:

$$f_{R-N} = 1 - \frac{2\alpha}{\rho} + \frac{\alpha_Q^2}{\rho^2} = \left(1 - \frac{\rho_+}{\rho} \right) \left(1 - \frac{\rho_-}{\rho} \right), \quad (10)$$

где

$$\rho_+ = \alpha + \sqrt{\alpha^2 - \alpha_Q^2} -$$

радиус внешнего горизонта событий (11)

$$\rho_- = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - \alpha_Q^2} -$$

радиус внутреннего горизонта событий (12)

Далее из системы уравнений (7) получим уравнение второго порядка для функции $\psi(\rho)$, пропорциональной либо $F(\rho)$, либо $G(\rho)$.

В первом случае

$$\psi(\rho) = F(\rho) \exp\left(\frac{1}{2} \int A_1(\rho') d\rho' \right). \quad (13)$$

Уравнение для $\psi(\rho)$ имеет вид уравнения Шредингера

$$\frac{d^2\psi(\rho)}{d\rho^2} + 2(E_{schr} - U_{eff}(\rho))\psi(\rho) = 0. \quad (14)$$

В уравнении (14)

$$E_{schr} = \frac{1}{2}(\varepsilon^2 - 1), \quad (15)$$

$$U_{eff}(\rho) = E_{schr} + \frac{1}{4} \frac{dA_1(\rho)}{d\rho} + \frac{1}{8} A_1^2(\rho) - \frac{1}{2} B_1(\rho).$$

В выражениях (13), (15)

$$A_1(\rho) = -\frac{1}{B(\rho)} \frac{dB(\rho)}{d\rho} - A(\rho) - D(\rho),$$

$$B_1(\rho) = -B(\rho) \frac{d}{d\rho} \left(\frac{A(\rho)}{B(\rho)} \right) - C(\rho)B(\rho) + A(\rho)D(\rho). \quad (16)$$

В выражениях (16)

$$\begin{aligned}
 A(\rho) &= -\frac{1}{f_{R-N}} \left(\frac{1 + \kappa \sqrt{f_{R-N}}}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right), \\
 B(\rho) &= \frac{1}{f_{R-N}} \left(\varepsilon - \frac{\alpha_{em}}{\rho} + \sqrt{f_{R-N}} \right), \\
 C(\rho) &= -\frac{1}{f_{R-N}} \left(\varepsilon - \frac{\alpha_{em}}{\rho} - \sqrt{f_{R-N}} \right), \\
 D(\rho) &= -\frac{1}{f_{R-N}} \left(\frac{1 - \kappa \sqrt{f_{R-N}}}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right).
 \end{aligned} \quad (17)$$

Рассмотрим два случая соотношения констант α и α_Q .

2.1. $\alpha^2 > \alpha_Q^2$ – поле Райсснера–Нордстрёма с двумя горизонтами событий

В этом случае область определения волновых функций гамильтониана (6) имеет вид

$$\rho \in [0, \rho_-] \text{ и } \rho \in (\rho_+, \infty). \quad (18)$$

Эффективные потенциалы имеют следующие ведущие особенности при $\rho \rightarrow \rho_- (\rho < \rho_-)$ и $\rho \rightarrow \rho_+ (\rho > \rho_+)$

$$U_{R-N}(\rho \rightarrow \rho_-) = -\frac{1}{8(\rho_- - \rho)^2} \left[1 + \frac{(\varepsilon \rho_- - \alpha_{em})^2 \rho_-^2}{(\alpha - \rho_-)^2} \right], \quad (19)$$

$$U_{R-N}(\rho \rightarrow \rho_+) = -\frac{1}{8(\rho_+ - \rho)^2} \left[1 + \frac{(\varepsilon \rho_+ - \alpha_{em})^2 \rho_+^2}{(\rho_+ - \alpha)^2} \right]. \quad (20)$$

Числители в выражениях (19), (20) всегда $\geq 1/8$ при любых значениях $\alpha, \alpha_Q, \alpha_{em}$ и ε .

Отсюда следует, что если движение частицы рассматривается в области $\rho \in [0, \rho_-)$ и если $\varepsilon \neq \frac{\alpha_{em}}{\rho_-}$, то такая частица будет находиться в режиме «падения» на внутренний горизонт событий. Аналогично при рассмотрении движения частицы в области $\rho \in (\rho_+, \infty)$ если $\varepsilon \neq \frac{\alpha_{em}}{\rho_+}$, то квантово-механическая частица будет находиться в режиме «падения» на внешний горизонт событий.

В случаях $\varepsilon = \frac{\alpha_{em}}{\rho_-}$ или $\varepsilon = \frac{\alpha_{em}}{\rho_+}$ «падения» частиц на соответствующие горизонты событий не происходят [7]. Однако эти решения являются нерегулярными из-за расходимости нормировочных интегралов волновых функций [1].

2.2. $\alpha^2 = \alpha_Q^2$ – экстремальное поле

Райссера–Нордстрёма

В этом случае существует единственный горизонт событий с радиусом $\rho_+ = \rho_- = \alpha$.

Областью определения волновых функций является все пространство $\rho \in [0, \infty)$ за исключением радиуса горизонта событий $\rho_{\pm} = \alpha$, на котором $g_{00} = 0$.

Если $\varepsilon \neq \frac{\alpha_{em}}{\alpha}$, эффективный потенциал имеет ведущие особенности при $\rho \rightarrow \alpha$.

$$U_{R-N}^{extr}(\rho \rightarrow \alpha) = -\frac{\left(\varepsilon - \frac{\alpha_{em}}{\alpha}\right)^2 \alpha^4}{2(\rho - \alpha)^4} - \frac{\left(\varepsilon - \frac{\alpha_{em}}{\alpha}\right) \alpha^3 \left(2\varepsilon - \frac{\alpha_{em}}{\alpha}\right)}{(\rho - \alpha)^3} + O\left(\frac{1}{(\rho - \alpha)^2}\right). \quad (21)$$

Для зависимости $U(\rho \rightarrow \alpha) \sim \frac{1}{(\rho - \alpha)^4}$ квантово-механическая частица, находящаяся выше или ниже горизонта событий, будет всегда двигаться в режиме «падения» на горизонт $\rho_{\pm} = \alpha$ [7].

При $\varepsilon = \frac{\alpha_{em}}{\alpha}$ эффективный потенциал имеет вид

$$(U_{R-N}^{extr})_1(\rho) = \frac{1}{2} \left[\frac{\left(1 - \frac{\alpha_{em}^2}{\alpha^2}\right) \rho^4 + (\kappa^2 + \kappa) \rho^2 - \alpha(\kappa + 1) \rho + \frac{3}{4} \alpha^2}{\rho^2 (\rho - \alpha)^2} - \left(1 - \frac{\alpha_{em}^2}{\alpha^2}\right) \right]. \quad (22)$$

Ведущая особенность потенциала (22) становится равной

$$(U_{R-N}^{extr})_1(\rho \rightarrow \alpha) = -\frac{\frac{1}{4} - \kappa^2 - \alpha^2 + \alpha_{em}^2}{2(\rho - \alpha)^2}. \quad (23)$$

Отсутствие «падения» на горизонт в соответствии с [7] достигается при выполнении условия

$$\kappa^2 + \alpha^2 - \alpha_{em}^2 > 0. \quad (24)$$

Однако для существования решения $\varepsilon = \frac{\alpha_{em}}{\alpha}$ со сходящимся нормировочным интегралом для волновых функций необходимо выполнение более жесткого условия

$$\kappa^2 + \alpha^2 - \alpha_{em}^2 > \frac{1}{4}. \quad (25)$$

Решение $\varepsilon = \frac{\alpha_{em}}{\alpha}$ с условием (25) ранее было получено в [1] непосредственным решением системы уравнений Дирака для радиальных функций.

Из вида решения $\varepsilon = \frac{\alpha_{em}}{\alpha}$ следует, что положительные значения энергии дираковской частицы

осуществляются при одинаковых знаках зарядов Q и e , и наоборот, отрицательные значения энергии ε реализуются при разноименных знаках зарядов Q и e .

Для решений с положительными энергиями вне горизонта событий, значение $\varepsilon = \frac{\alpha_{em}}{\alpha}$ будет решением для связанных состояний дираковской частицы с массой m и зарядом e , если $\varepsilon < 1$, т. е.

$$\alpha_{em} < \alpha. \quad (26)$$

Для области определения волновых функций $\rho \in (\alpha, \infty)$ при $\alpha_{em} < \alpha$ эффективный потенциал (22) всюду положителен и по результатам численных расчетов не содержит экстремумов. Асимптотика потенциала (22) при $\rho \rightarrow \infty$

$$(U_{R-N}^{ext})_1 \rightarrow (\rho \rightarrow \infty) = 0. \quad (27)$$

Характерный вид потенциала $(U_{R-N}^{ext})_1(\rho)$ приведен на рис. 1.

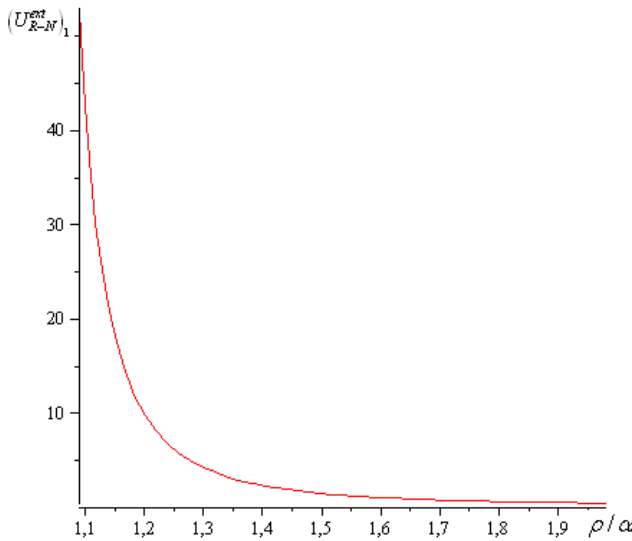


Рис. 1. Поведение эффективного потенциала уравнения шредингеровского типа в поле экстремальной черной дыры Райсснера–Нордстрёма при $\alpha > \alpha_{em}$, $\alpha = \alpha_Q = 1$, $\alpha_{em} = 0,9$, $\varepsilon = 0,9$

Видно, что потенциальная яма для частицы отсутствует, и поэтому стационарных связанных состояний для дираковской частицы вне горизонта событий $\rho_{\pm} = \alpha$ не существует. Аналогичный вывод был сделан ранее в [5].

Если рассматривать положительные энергии частицы $\varepsilon > 1$, то для одноименных знаков зарядов Q и e

$$\alpha_{em} > \alpha. \quad (28)$$

В этом случае вид потенциала $(U_{R-N}^{ext})_1(\rho)$ качественно изменяется (см. рис. 2).

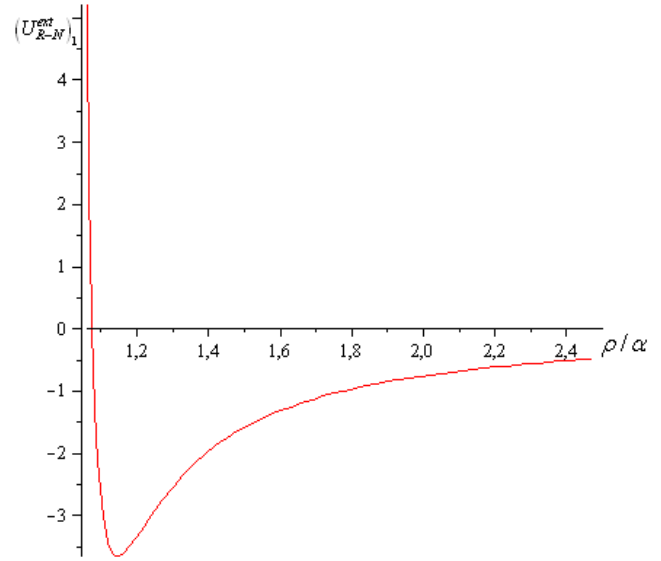


Рис. 2. Поведение эффективного потенциала уравнения шредингеровского типа в поле экстремальной черной дыры Райсснера–Нордстрёма при $\alpha < \alpha_{em}$, $\alpha = \alpha_Q = 1$,

$$\alpha_{em} = 1,25, \quad \varepsilon = 1,25$$

Эффективный потенциал содержит потенциальную яму и стремится к нулю при $\rho \rightarrow \infty$ со стороны отрицательных значений. Однако движение частицы с $\varepsilon > 1$ будет, как и для случая $\varepsilon < 1$, инфинитным. В обоих рассмотренных случаях выбор конкретных величин α , α_{em} должен осуществляться с выполнением условия (25).

Таким образом, при одноименных знаках зарядов Q и e регулярное решение $\varepsilon = \frac{\alpha_{em}}{\alpha}$ вне горизонта событий не реализуется для дираковской частицы в виде стационарного решения. Частица всегда будет уходить от горизонта событий $\rho_{\pm} = \alpha$ к $\rho \rightarrow \infty$.

При разноименных знаках зарядов Q , e и отрицательных значениях $\varepsilon = -\frac{|\alpha_{em}|}{\alpha}$ вид эффективных потенциалов на рис. 1, 2 остается неизменным (см. выражение (22)).

Для дираковской частицы вне горизонта событий при $\varepsilon = -\frac{|\alpha_{em}|}{\alpha} < -1$ ($E < -m$) должна возникнуть реакция вакуума, подобная реакции электрон-позитронного вакуума в атомах со сверхтяжелыми ядрами с $Z \geq 170 \div 175$ [8–12]. Более подробно об этом изложено в разделе 3.

Под горизонтом событий $\rho \in [0, \alpha)$ эффективный потенциал (22) всюду положителен с асимптотиками $\sim \frac{1}{\rho^2}$ при $\rho \rightarrow 0$ и $\sim \frac{1}{(\rho - \alpha)^2}$ при $\rho \rightarrow \alpha$.

Характерный вид потенциала приведен на рис. 3. Он свидетельствует о существовании стационарных связанных состояний частиц со спином $1/2$.

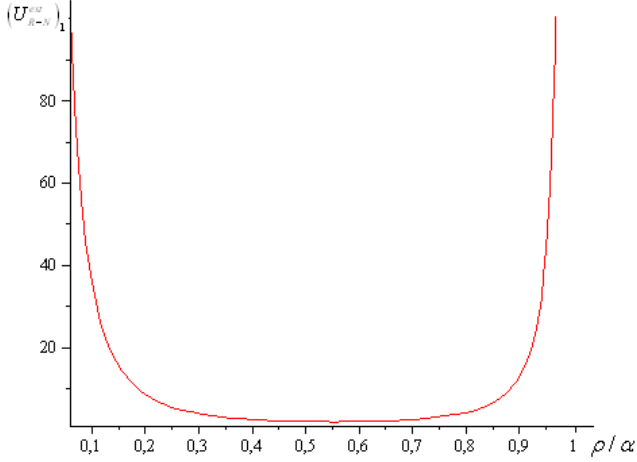


Рис. 3. Поведение эффективного потенциала уравнения Дирака в поле экстремальной черной дыры Райсснера–Нордстрёма внутри горизонта событий $0 < \rho < \alpha$, $\alpha = \alpha_Q = 1$, $\alpha_{em} = 1,25$, $\varepsilon = 1,25$

Энергетический уровень связанных состояний с $\varepsilon = \frac{\alpha_{em}}{\alpha}$ должен быть положительным и может быть сколь угодно большим. Кроме того, он должен быть больше минимума эффективного потенциала в области $\rho \in [0, \alpha)$, т. е.

$$\frac{\alpha_{em}}{\alpha} > \min \left(U_{R-N}^{ext} \right)_1(\rho), \quad 0 \leq \rho < \alpha. \quad (29)$$

Положительность энергии ε достигается лишь при одноименных знаках зарядов Q и e .

3. Обсуждение результатов

Анализ эффективных потенциалов уравнения Дирака в статических центрально-симметричных гравитационных полях, проведенный в [4] и в настоящей работе, позволяет сделать следующие выводы:

1. Для всех рассмотренных метрик, допускающих горизонты событий, движение квантово-механических частиц осуществляется в режиме

«падения» на соответствующие горизонты событий. В этом режиме частицы локализуются вблизи горизонтов событий, не пересекая их. Это полностью согласуется с ограничениями областей определения волновых функций, вытекающими из принципа причинности Гильберта.

2. Отсутствие режима «падения» частиц на горизонты событий осуществляется в поле Райсснера–Нордстрёма лишь в двух случаях. Первый случай соответствует решениям $\varepsilon = \frac{\alpha_{em}}{\rho_-}$ и $\varepsilon = \frac{\alpha_{em}}{\rho_+}$ для поля Райсснера–Нордстрёма с горизонтами событий ρ_+, ρ_- при $\alpha^2 > \alpha_Q^2$. Однако эти решения являются нерегулярными из-за расходимости нормировочного интеграла.

Второй случай соответствует решению $\varepsilon = \frac{\alpha_{em}}{\alpha}$ для экстремального поля Райсснера–Нордстрёма с единственным горизонтом событий $\rho_+ = \rho_- = \alpha$ при $\alpha^2 = \alpha_Q^2$.

Оба случая найдены авторами [1] и воспроизведены нами при анализе эффективных потенциалов уравнения Дирака.

В случае экстремального поля Райсснера–Нордстрёма при выполнении условия $\kappa^2 + \alpha^2 - \alpha_{em}^2 > \frac{1}{4}$ нормировочный интеграл является сходящимся, а волновые функции обращаются в нуль на единственном горизонте событий $\rho_+ = \rho_- = \alpha$. Последнее обстоятельство соответствует принципу причинности Гильберта, запрещающему рассмотрение областей определения волновых функций с $g_{00} \leq 0$.

Вид эффективного потенциала (22) (см. рис. 1, 2, 3) показывает, что для дираковской частицы вблизи горизонта событий существуют бесконечно большие потенциальные барьеры. Нулевые плотности вероятности на горизонте событий не позволяют квантово-механической частице пересекать его как с внешней, так и с внутренней стороны [13].

3. Реализация экстремального поля Райсснера–Нордстрёма сопряжена с определенной экзотикой. Равенство $\alpha^2 = \alpha_Q^2$ в соответствии с (8), (9) приводит к величине массы источника гравитационного поля

$$M = \sqrt{\alpha_{ts}} M_P \left| \frac{Q}{e} \right|. \quad (30)$$

Видно, что масса M должна быть сравнимой или больше планковской массы.

Отношение $\frac{\alpha_{em}}{\alpha}$ может быть выражено как

$$\frac{\alpha_{em}}{\alpha} = \sqrt{\alpha_{is}} \frac{M_P}{m} \operatorname{sgn} \frac{Q}{e}. \quad (31)$$

Видно, что для заряженных частиц стандартной модели это отношение чрезвычайно велико. Например, для электрона

$$\frac{\alpha_{em}}{\alpha} = \frac{1,2 \cdot 10^{22}}{11,7 \cdot 0,5} \operatorname{sgn} \frac{Q}{e} \approx 2 \cdot 10^{21} \operatorname{sgn} \frac{Q}{e}. \quad (32)$$

Реализовать случай $\left| \frac{\alpha_{em}}{\alpha} \right| < 1$, рассматриваемый в п. 2.2 нашей работы, возможно лишь, если в качестве дираковской частицы использовать частицу с элементарным зарядом e и массой, сравнимой с планковской массой M_P .

4. Анализ эффективных потенциалов уравнения Дирака для экстремального поля Райсснера–Нордстрёма показал, что при одноименных знаках зарядов Q и e вне горизонта событий отсутствует возможность существования стационарных связанных состояний частиц со спином $1/2$. Квантово-механические частицы не могут пересечь горизонт событий и находятся в инфинитном движении.

5. Под горизонтом событий, при одноименных знаках зарядов Q , e и при выполнении условия (29) стационарные связанные состояния дираковских частиц могут существовать. Энергия этих состояний вырождена по значениям k (или по значениям орбитального момента l) и для частиц Стандартной модели является чрезвычайно большой. Для электрона с массой m энергия связанных состояний равна

$$E = \varepsilon m \approx 2 \cdot 10^{21} m. \quad (33)$$

Квантово-механическая частица, находящаяся под горизонтом, не может пересечь его и уйти в область вне горизонта.

Рассмотренная выше структура со связанными состояниями дираковских частиц предлагалась в [2] в качестве кандидатуры «темной материи». Недостатком этого предложения является некомпенсированность зарядов частицы и источника электрического поля Райсснера–Нордстрёма, что противоречит наблюдениям электронейтральности «темной материи».

6. При разноименных знаках зарядов Q и e решение $\varepsilon = \frac{\alpha_{em}}{\alpha}$ является отрицательным. При

$\frac{\alpha_{em}}{\alpha} < -1$ ($E < -m$) возникает ситуация, схожая

с квантово-механической картиной движения электронов в кулоновском поле сверхтяжелых ядер с зарядами $Ze > Z_{cr}e$, где $Z_{cr} \approx 170 \div 175$ [8–12]. В этом случае один или несколько дискретных уровней электронов попадают в область нижнего континуума $E < -m$. Если соответствующие уровни с положительной энергией не заняты электронами, то за счет перестройки вакуума происходит спонтанное испускание электрон-позитронных пар. Электроны занимают соответствующие свободные уровни с положительной энергией, позитроны уходят вне рассматриваемых систем. Для S -состояний испускаются два электрона и два позитрона. Если уровни с положительной энергией заняты электронами, испускание электрон-позитронных пар не происходит.

В нашем случае уровни с решением $\varepsilon = \frac{\alpha_{em}}{\alpha}$ при $\frac{\alpha_{em}}{\alpha} < -1$ также попадают в нижний континуум.

Однако в отличие от движения электронов в кулоновском поле сверхтяжелых ядер в экстремальном поле Райсснера–Нордстрёма при разноименных знаках Q и e отсутствуют уровни дираковских частиц с положительной энергией. Стабильный вакуум в этом случае становится заряженным [11] без спонтанного излучения пар «частица-античастица».

Подводя итоги обсуждения, мы констатируем, что в нашей работе получены новые результаты с видоизменением интерпретации результатов [1, 2].

Авторы благодарят В. И. Докучаева, Ю. Н. Ерошенко и участников семинара теоретического отдела ИЯИ РАН за плодотворные обсуждения данной работы.

Список литературы

1. Докучаев В. И., Ерошенко Ю. Н. // ЖЭТФ. 2013. Т. 144. Вып. 1(7). С. 85–91.
2. Dokuchaev V. I., Eroshenko Y. N. arxiv:1403.1375 [astro-ph.co].
3. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. arxiv:1404.2085 [gr-qc].
4. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P., Popov E. Yu. arxiv:1504.00306 [gr-qc], [hep-th].
5. Schmid H. arxiv: 0207039v2 [math-ph].

6. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. arxiv: 1302.2557 [gr-qc].
7. Landau L. D., Lifshitz E. M. Quantum Mechanics. Nonrelativistic Theory, Fizmatlit, Moscow (1963) (in Russian) [L.D.Landau and E.M.Lifshits. Quantum Mechanics. Nonrelativistic Theory, Pergamon Press, Oxford (1965)].
8. Pomeranchuk I., Smorodinsky Ya. // J. Phys. USSR. 1945. Vol. 9. P. 97.
9. Зельдович Я. Б., Попов В. С. // УФН. 1971. Т. 105. С. 403. [Zeldovich Ya. B., Popov V. S., Sov. Phys. Usp. 14, 673 (1972)].
10. Pieper W., Greiner W. // Z. Phys. 1969. Vol. 218. P. 327.
11. Greiner W., Mueller B., Rafelski J. Quantum electrodynamics of Strong Fields. Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1985).
12. Незнамов В. П., Сафронов И. И. // УФН. 2014. Т. 184б, № 2Б. С. 200–205.
13. Dittrich J., Exner P. // J. Math. Phys, 1985. Vol. 26(8). P. 2000–2008.

Статья поступила в редакцию 22.06.2015

ЭВОЛЮЦИЯ ВО ВРЕМЕНИ НЕЙТРОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ОДНОРОДНЫХ ШАРОВ ИЗ ДЕЛЯЩИХСЯ МАТЕРИАЛОВ

А. А. Севастьянов

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

С помощью аналитических вычислений и численных расчетов исследовано изменение нейтронных характеристик активных шаров с течением времени.

Ключевые слова: односкоростное уравнение переноса нейтронов, формулы подобия, нейтронная плотность, собственная функция, логарифмическая производная от полного числа нейтронов в системе, главное собственное значение.

Введение

В работах [1, 2] исследовались характеристики нестационарных систем и были получены формулы подобия для собственных функций и логарифмических производных по времени от полного числа нейтронов в системах.

Основной целью данной статьи является сравнение результатов вычислений по формулам подобия с соответствующими результатами численных решений односкоростного кинетического уравнения, выполненных по одной из математических программ [3].

Кроме того, в статье изучался вопрос о поведении собственной функции во времени при различных начальных условиях задачи.

1. Исходное односкоростное кинетическое уравнение для нейтронов

Примем следующие упрощения: считается, что все нейтроны имеют одинаковую по величине скорость V , индикатриса упругого рассеяния нейтронов на ядрах изотропна и не учитываются неупругие процессы. При выполнении данных упрощающих предположений зависящая от времени t функция распределения нейтронов $\psi(t, \vec{r}, \vec{\Omega})$ в фа-

зовом пространстве векторов \vec{r} , $\vec{\Omega} = \frac{\vec{V}}{V}$ подчиняется кинетическому уравнению

$$\frac{1}{V} \frac{\partial \psi(t, \vec{r}, \vec{\Omega})}{\partial t} + \left(\vec{\Omega} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \right) \psi(t, \vec{r}, \vec{\Omega}) + \alpha(\vec{r}) \psi(t, \vec{r}, \vec{\Omega}) = \frac{\beta(\vec{r})}{4\pi} \int d\vec{\omega} \psi(t, \vec{r}, \vec{\omega}), \quad (1)$$

которое надо решать при соответствующих начальном и граничном условиях.

В (1) использованы следующие обозначения:
 $\alpha(\vec{r}) = n_{\text{я}}(\vec{r}) \sum_i \mu_i (\sigma_{si} + \sigma_{fi} + \sigma_{ci}) =$
 $= \frac{N_{\text{Авогадро}} \rho(\vec{r})}{\sum_i \mu_i A_i} \sum_i \mu_i (\sigma_{si} + \sigma_{fi} + \sigma_{ci})$ – обратный

полный пробег нейтронов в среде с плотностью ядер $n_{\text{я}}(\vec{r})$, состоящей из смеси компонентов с массовыми числами A_i и концентрациями по частицам μ_i ; $\rho(\vec{r})$ – плотность вещества; $\beta(\vec{r}) = n_{\text{я}}(\vec{r}) \sum_i \mu_i (\sigma_{si} + \nu_i \sigma_{fi})$; σ_{si} , σ_{fi} , σ_{ci} – элементарные сечения рассеяния, деления и захвата нейтронов на ядрах i -го сорта; ν_i – среднее число вторичных нейтронов, испускаемых в одном акте деления i -го ядра; отношение $h(\vec{r}) = \frac{\beta(\vec{r})}{\alpha(\vec{r})}$ – активность среды.

2. Формулы подобия нестационарных решений односкоростного кинетического уравнения переноса нейтронов в однородных системах

В работе [1] было показано, что если перейти к безразмерным переменным

$$\vec{z} = \beta \vec{r}, \quad (2)$$

$$\tau = \beta V t, \quad (3)$$

то для функции $m(\tau, \vec{z})$, включающей в себя нейтронную плотность $n(\tau, \vec{z})$, справедлива следующая формула подобия, вытекающая из нестационарного односкоростного уравнения переноса нейтронов:

$$m_2(\tau_2, \vec{z}_2) = m_1(\tau_1, \vec{z}_1), \quad (4)$$

$$m_i(\tau_i, \vec{z}_i) = n_i(\tau_i, \vec{z}_i) \exp\left(\frac{\tau_i}{h_i}\right), \quad (5)$$

$$\vec{z}_i = \beta_i \vec{r}_i, \quad (6)$$

$$\tau_i = \beta_i V_i t, \quad (7)$$

$$i = 1, 2.$$

В работе [2] была введена безразмерная логарифмическая производная полного числа нейтронов в системе от безразмерного времени

$$L(\tau) = \frac{1}{N(\tau)} \frac{dN(\tau)}{d\tau}. \quad (8)$$

Связь размерной и безразмерной функций выражается следующим образом:

$$\frac{1}{N(t)} \frac{dN(t)}{dt} = \beta V L(\tau). \quad (9)$$

Формула подобия для функции $L(\tau)$ имеет следующий вид:

$$L_2(\tau_2) \approx L_1(\tau_1) + \frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}. \quad (10)$$

3. Результаты аналитических вычислений и численных расчетов, полученные для однородных шаров из ^{239}Pu и ^{238}Pu

В аналитических вычислениях, а также в численных расчетах приняты скорость нейтронов $V = 10^9$ см/с и взятые из [4] односторонние нейтронные константы (см. таблицу).

Значения активности и параметров $\alpha(\rho_0)$, $\beta(\rho_0)$

Изотоп плутония	^{239}Pu	^{238}Pu
Активность среды h	1,6578	1,7101
Кристаллическая плотность плутония ρ_0 , г/см ³	19,851	19,840
$\alpha_0 = \alpha(\rho_0)$, 1/см	0,2779	0,2691
$\beta_0 = \beta(\rho_0)$, 1/см	0,4607	0,4602

В численных расчетах в начальный момент времени на всю систему задавалось число нейтронов N_0 с равномерным распределением по объему шара.

Ниже исследуются нейтронные характеристики следующих систем: исходный шар 1 из ^{239}Pu и подобный шар 2 из ^{238}Pu .

Шар 1: плотность $\rho_1 = 80$ г/см³ ($\alpha_1 = 1,1200$ 1/см, $\beta_1 = 1,8566$ 1/см), масса $M_1 = 2,5$ кг, радиус $R_1 = 1,9540$ см.

Шар 2: плотность $\rho_2 = 40$ г/см³ ($\alpha_2 = 0,5425$ 1/см, $\beta_2 = 0,9278$ 1/см), масса $M_2 = 10$ кг, радиус $R_2 = 3,9101$ см.

Величина R_2 получена из условия

$$\beta_2 R_2 = \beta_1 R_1, \quad (11)$$

справедливого для подобных систем.

На рис. 1 показаны зависимости $\frac{1}{N(t)} \frac{dN(t)}{dt}$ рассматриваемых шаров, полученные в расчетах.

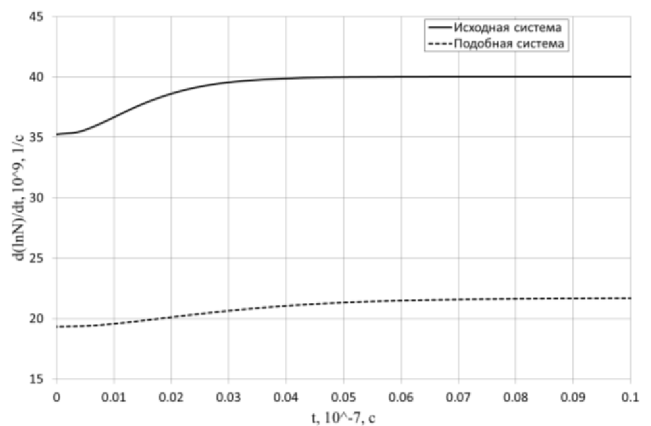


Рис. 1. Расчетные зависимости $\frac{1}{N(t)} \frac{dN(t)}{dt}$ для исходного шара из ^{239}Pu и подобного шара из ^{238}Pu

В расчетах получены следующие значения главного собственного значения:

$$\lambda_{1\text{расч}} = 40,027494 \cdot 10^7 \text{ 1/с}, \quad (12)$$

$$\lambda_{2\text{расч}} = 21,709973 \cdot 10^7 \text{ 1/с}. \quad (13)$$

Вычисление по формуле подобия

$$\lambda_2 = \left[\frac{h_2}{h_1} \left(1 + \frac{\lambda_1}{\alpha_1 V} \right) - 1 \right] \alpha_2 V \quad (14)$$

дало следующий результат:

$$\lambda_2 = 21,714068 \cdot 10^7 \text{ 1/с.} \quad (15)$$

Погрешность результата расчета составила

$$\delta = \frac{|\lambda_{2\text{расч}} - \lambda_2|}{\lambda_{2\text{расч}}} = 0,019 \%. \quad (16)$$

Графики безразмерных логарифмических производных $L(\tau)$ для исходного и подобного шаров представлены на рис. 2.

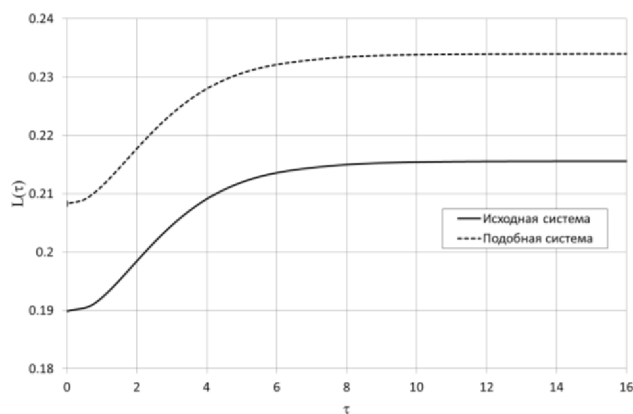


Рис. 2. Зависимости безразмерной функции

$L(\tau) = \frac{1}{N(\tau)} \frac{dN(\tau)}{d\tau}$ от безразмерного времени $\tau = \beta V t$ для исходного и подобного шаров

Результаты вычисления функции $L_2(\tau_2)$ для подобного шара по формуле подобия (10) и результаты численного расчета приведены на рис. 3.

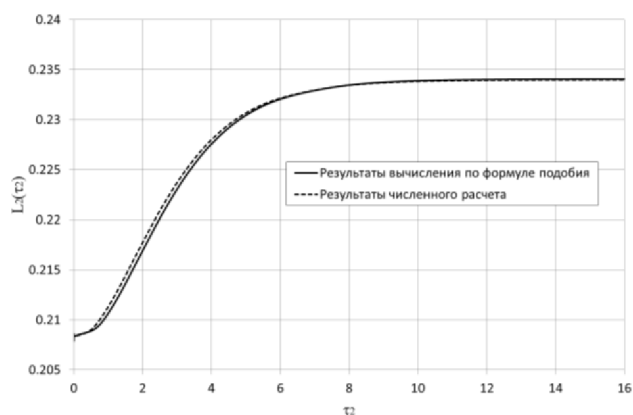


Рис. 3. Зависимости $L_2(\tau_2)$, полученные по формуле подобия (10) и в численном расчете

Наибольшее различие в результатах вычисления $L_2(\tau_2)$ по формуле подобия и численного расчета составляет 0,4 %.

Результаты численных расчетов функции $m(\tau, z)$ для исходного и подобного шаров даны на рис. 4.

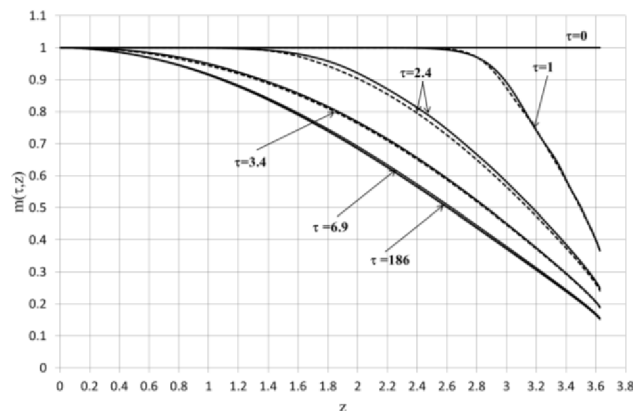


Рис. 4. Эволюция функции $m(\tau, z)$ во времени в z -пространстве для шара 1 (сплошные линии) и шара 2 (пунктирные линии)

На рис. 4 зависимости $m(\tau, z)$ приведены в нормировке на единицу в центре шара. Эти зависимости подтверждают справедливость формулы подобия (4).

На рис. 5 представлена погрешность $\delta = \frac{|m_{2\text{расч}} - m_2|}{m_{2\text{расч}}}$ расчета функции $m_{2\text{расч}}(\tau_2, z_2)$ в зависимости от точки наблюдения z на два момента времени.

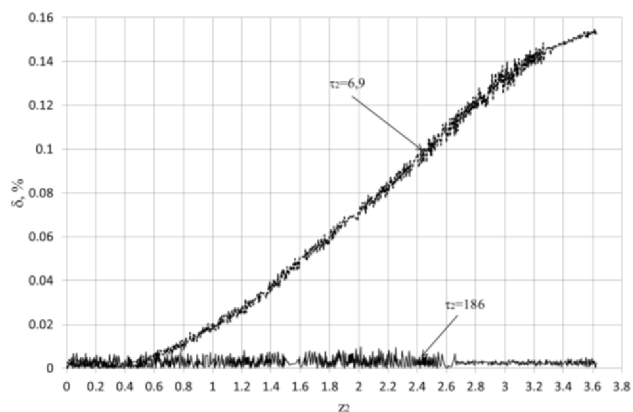


Рис. 5. Зависимость $\delta(z_2)$ при $\tau_2 = 6,9$ и $\tau_2 = 186$

Видно, что точность результатов расчета растет со временем.

Заметим, что характеристики взаимодействия ядер изотопов ^{238}Pu и ^{239}Pu с нейтронами довольно близки (см. таблицу). Поэтому полезно исследовать

вопрос о применимости формул подобия для систем с сильно отличающимися нейтронно-ядерными свойствами. Это сделано в следующем параграфе.

4. Результаты вычислений по нестационарным формулам подобия и численных расчетов в случае шаров с сильно отличающимися нейтронно-ядерными характеристиками

Рассмотрим подобные шары со следующими параметрами.

Шар 1: $h_1 = 1,8$, $\alpha_1 = 0,5600$ 1/см, $\beta_1 = 1,0080$ 1/см, $M_1 = 10$ кг, $R_1 = 3,9080$ см.

Шар 2: $h_2 = 1,6$, $\alpha_2 = 1,1199$ 1/см, $\beta_2 = 1,7919$ 1/см, $M_2 = 3,56$ кг, $R_2 = 2,1982$ см.

Постановка численных расчетов принята такой же, как и в предыдущем параграфе.

4.1. Решение задачи на определение логарифмической производной полного числа нейтронов в подобном шаре от времени

Для исходного шара 1 в расчете получено время выхода логарифмической производной на главное собственное значение $t_0 \approx 0,13 \cdot 10^{-7}$ с и

$$\lambda_{1\text{расч}} = 28,97180 \cdot 10^7 \text{ 1/с.} \quad (17)$$

Результаты вычисления функции $L_2(\tau_2)$ по формуле подобия (10) и результаты численного расчета приведены на рис. 6.

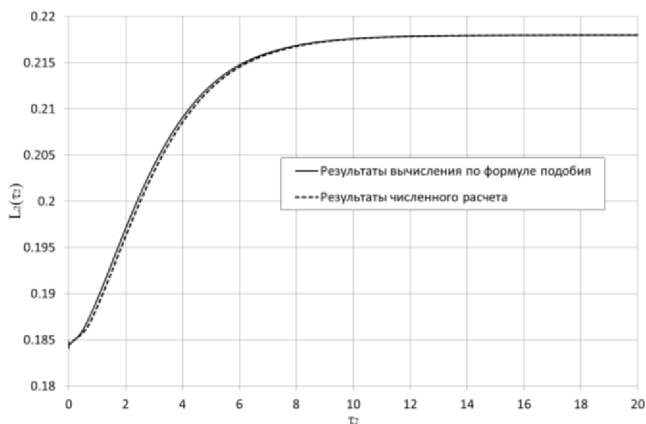


Рис.6. Зависимости $L_2(\tau_2)$, полученные по формуле подобия (10) и в численном расчете

Максимальная погрешность численного решения в процессе установления составляет 0,5%. Время выхода безразмерной логарифмической производной на главное собственное значение составляет $\tau_0 \approx 12$. В размерных переменных при

скорости нейтронов $V = 10^9$ см/с имеем время $t_0 \approx 0,067 \cdot 10^{-7}$ с и главные собственные значения

$$\lambda_2 = 39,06165 \cdot 10^7 \text{ 1/с,} \quad (18)$$

$$\lambda_{2\text{расч}} = 39,06171 \cdot 10^7 \text{ 1/с,} \quad (19)$$

$$\delta = \frac{|\lambda_{2\text{расч}} - \lambda_2|}{\lambda_{2\text{расч}}} = 0,00015 \%. \quad (20)$$

4.2. Решение задачи на отыскание нейтронной плотности в подобных шарах

Для каждого шара построим графики изменения функции $m(\tau, z = \beta r)$ на различные моменты безразмерного времени τ (рис.7).

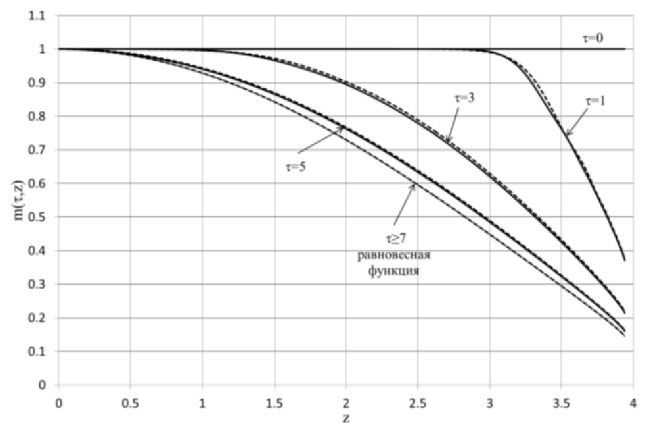


Рис. 7. Зависимости $m(\tau, z)$ для шара 1 (сплошные линии) и шара 2 (пунктирные линии), нормированные на единицу в центрах шаров

Из рисунка видно, что подобные шары в βr -пространстве и безразмерном времени $\tau = \beta V t$ превращаются в один шар с инвариантным радиусом

$$Z = \beta R = \text{const.} \quad (21)$$

5. Зависимость времени выхода нейтронной плотности на равновесную функцию от начальных условий задачи

Рассмотрим исходный шар из предыдущего параграфа. Изменим начальное условие задачи, исследуем два случая.

1. В начальный момент времени $\tau = 0$ все N_0 нейтронов находятся в центре шара, т. е. нейтронная плотность $n(\tau = 0, z) = N_0 \delta(z = 0)$.

2. При $\tau = 0$ все нейтроны локализованы на границе шара, т. е. $n(\tau = 0, z) = N_0 \delta(z = \beta R)$.

Эволюция нейтронной плотности для обоих случаев показана на следующих рис. 8, 9.

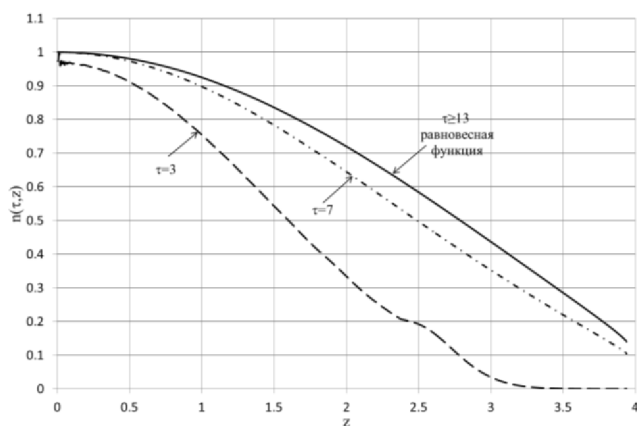


Рис. 8. Зависимости $n(\tau, z)$ при начальном условии $n(\tau = 0, z) = N_0\delta(z = 0)$

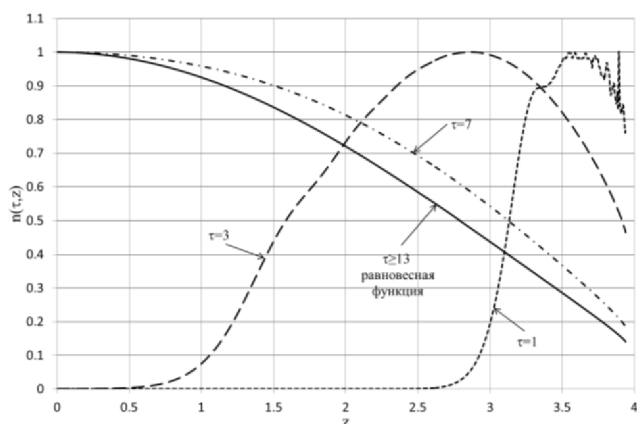


Рис. 9. Зависимости $n(\tau, z)$ при начальном условии $n(\tau = 0, z) = N_0\delta(z = \beta R)$

В обоих вариантах задания начального условия выход нейтронной плотности происходит на равновесную функцию примерно за одно и то же время $\tau \approx 13$, что почти в два раза дольше, чем при равномерном распределении нейтронов по шару в начальный момент времени (см. рис.7).

На рис. 10 представлены зависимости $L(\tau)$, полученные в расчетах при задании различных начальных условий.

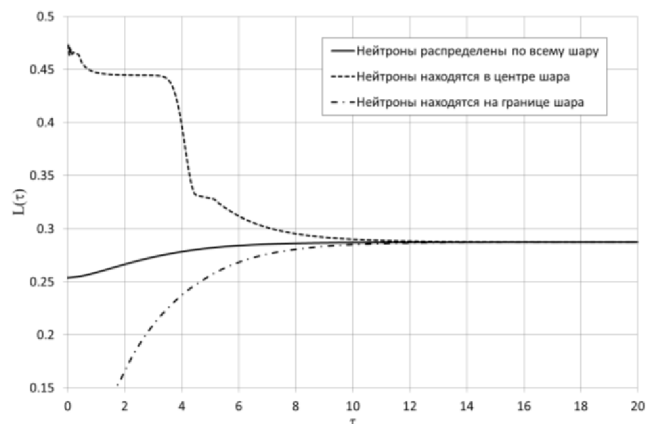


Рис. 10. Зависимости $L(\tau)$, полученные при различных начальных условиях задачи

Из рисунка видно, что для каждой рассмотренной постановки задачи выход логарифмической производной на главное собственное значение происходит примерно за то же время, что и выход нейтронной плотности на равновесную функцию.

6. Основные выводы

С помощью численных расчетов показано, что формулы подобия для собственных функций $m(\tau, z)$ и логарифмических производных $L(\tau) = \frac{1}{N(\tau)} \frac{dN(\tau)}{d\tau}$ справедливы.

Нейтронная плотность в шаре со временем выходит на одну и ту же равновесную функцию независимо от способа задания начального числа нейтронов в системе, который влияет только на время выхода. Это время соответствует времени выхода логарифмической производной от полного числа нейтронов в системе на главное собственное значение.

Список литературы

1. Бабичев Н. Б., Лутиков И. В., Севастьянов А. А. Элементы теории подобия нестационарных однородных систем в односкоростной нейтронной кинетике // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2008. Вып. 2. С. 18–20.

2. Бабичев Н. Б. Некоторые вопросы теоретической нейтронной кинетики // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2015. Вып.1. С. 41–52.

3. Шагалиев Р. М., Гребенников А. Н., Артемьев А. Ю., Будников В. И. Развитие основных методик и программ ИТМФ // Журнал Атом, 2011, № 50–51.

4. Бабичев Н. Б., Севастьянов А. А. Критические параметры однородных шаров, состоящих из плутония-238 и плутония-239 // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2014. Вып. 3. С. 28–35.

Статья поступила в редакцию 01.07.2015

ПРЯМОЕ 3D ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РОСТА ГОРЯЧИХ ТОЧЕК В ДЕТОНАЦИИ**Ю. В. Янилкин, В. Г. Морозов, И. И. Карпенко, О. Н. Чернышова**

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Представлены результаты 3D численного моделирования процесса роста горячих точек в детонации с учетом турбулентного перемешивания. Проведенные исследования показали, что в результате воздействия УВ, развития неустойчивости на границе ВВ/ПВ и вихревого течения крупномасштабные частицы ВВ перемешиваются и дробятся до мелких размеров, при которых за счет развитой поверхности контакта ВВ и ПВ успевает происходить прогрев ВВ (передача энергии от ПВ) и эффективно продолжается реакция разложения. Численное моделирование позволило рассчитать скорость роста горячих точек (порядка 100–200 м/с). Это подтверждает гипотезу о том, что турбулентность в зоне реакции при механическом переносе вещества играет важную роль и ее необходимо учитывать в теории детонации.

Ключевые слова: горячий очаг, детонация, турбулентное перемешивание, численное моделирование.

Введение

Твердые ВВ гетерогенны. В них имеются поры и трещины, границы зерен и границы раздела фаз. Дефекты структуры (поры, межфазные и межгранулярные границы, кристаллические дефекты, трещины) влияют на ударно-волновую чувствительность и динамику перехода ударной волны (УВ) в детонацию. Инициирование ВВ происходит и тогда, когда энергии УВ не хватает для гомогенного нагрева ВВ до температуры вспышки. Локализация энергии УВ на неоднородностях структуры приводит к локальному разогреву и инициированию реакции разложения в так называемых горячих точках (ГТ).

Концепция горячих точек и очаговой механизм инициирования и развития детонации – базовые представления современной физики взрыва [1–7]. В рамках этой теории многие явления естественно объясняются тем, что взаимодействие УВ с дефектами структуры приводит к локализации диссипации энергии в отдельных очагах.

Условно картину инициирования гетерогенных ВВ можно разделить на три этапа.

Первый этап – формирование горячих точек. Это стадия от момента сжатия ВВ ударной волной до начала химической реакции в локальных очагах. Этот этап протекает примерно 1 нс и включает образование локализованных разогретых очагов в непосредственной близости к порам и границам зерен за счет эффектов разогрева газа в порах, микрокумулятивных эффектов при схлопывании пор, трения между гранулами и пластических деформаций [3–6].

Второй этап – рост горячего очага (либо его затухание) в зависимости от давления в окружающем сжатом «холодном» ВВ до соприкосновения с соседними очагами. На этом этапе происходит развитие реакции разложения в окружающем ВВ. Характерное время этого процесса много больше и определяет время индукции детонации ~1 мкс. Если средние размеры гранул ВВ ~ 10–100 мкм, то скорость границы горения очага с учетом времени индукции должна быть порядка 100 м/с. Скорость обычного послыоного горения менее метра в секунду. В работах [8, 9] рассмотрена задача о росте ГТ в ВВ на основе ТАТБ в одномерном приближении и получена скорость роста ГТ менее 1 м/с.

Это указывает на необходимость более детального анализа физических процессов, определяющих скорость роста горячих очагов в ударно-сжатом ВВ.

Третий этап – взаимодействие и слияние очагов. На этом этапе происходит быстрое завершение реакции при высокой температуре и давлении в момент, когда реагирующие области начинают сливаться, что и обеспечивает быстрый переход к самоподдерживающемуся стационарному детонационному процессу (собственно взрыв).

Ключевым этапом для развития детонации является процесс роста горячих очагов, в результате которого происходит переход УВ в детонационную, и его зависимость от давления определяется процессом энергопереноса. Можно предположить, что в крупномасштабном горении ВВ зависимость скорости фронта горения от давления также определяется в первую очередь процессом энергопереноса. Существуют разные теории этого процесса, основная из них основана на молекулярной теплопроводности. Однако оценки скорости роста для ГТ дают величину не менее 100 м/с. Для получения такой скорости роста ГТ величина коэффициента теплопроводности для ПВ должна превосходить его значение в нормальных условиях на 3 порядка и более, что представляется физически не корректным.

В качестве такого механизма в настоящей работе рассматривается турбулентное перемешивание, идея возможности которого высказывалась ранее (см., например, [10–12]). Благодаря большой интенсивности турбулентного перемешивания турбулентные течения обладают повышенной способностью к передаче теплоты и ускоренному распространению химических реакций. Однако в этих работах турбулентность воспринималась как мелкомасштабный процесс, поэтому ее влиянием на процесс горения пренебрегалось. Более корректное исследование турбулентного механизма передачи энергии может быть проведено при помощи численного моделирования. Первое 2D численное исследование этого процесса было выполнено в работе авторов [13] с использованием k - ϵ модели.

Мы полагаем, что общая физическая картина процесса выглядит следующим образом. Турбулентность возникает из-за многомерности процесса горения и роста ГТ и вследствие газодинамической неустойчивости на фронте горения. Она перемешивает крупномасштабные частицы ВВ, при этом дробит их до таких мелких размеров, что в них за счет развитой поверхности контакта ВВ и ПВ успевают происходить прогрев (передача энергии

от ПВ к ВВ) и эффективно продолжается реакция разложения.

Настоящая работа является продолжением численных исследований работы [13]. В данной работе моделирование горения ВВ проводилось в 3D приближении по коду ЭГАК [14] без использования каких-либо моделей турбулентности, т. е. прямое численное моделирование (DNS). Для удобства читателей мы приводим также основные результаты работы [13], в которой 2D расчеты по коду ЭГАК проведены с использованием k - ϵ модели.

Обозначения основных величин и их размерности

В работе, если не оговорено особо, применяются следующие размерности величин: время $[t] = \text{мкс}$; длина $[L] = \text{см}$; массовая скорость и скорость звука $[u], [C_0] = \text{км/с}$; плотность $[\rho] = \text{г/см}^3$; калорийность $[Q] = \text{кДж/г}$; теплоемкость $[C_V] = \text{кДж/(г} \cdot \text{К)}$; коэффициент теплопроводности $[\chi] = \text{Дж/(м} \cdot \text{с} \cdot \text{К)}$; температура $[T] = \text{К}$; давление $[p] = 10^{-4} \text{ ГПа}$; удельная энергия $[e] = \text{кДж/г}$; параметр кинетики Аррениуса $[Z] = 1/\text{с}$.

1. 2D моделирование

Постановка расчетов. Начальная геометрия для 2D осесимметричных расчетов показана на рис. 1.

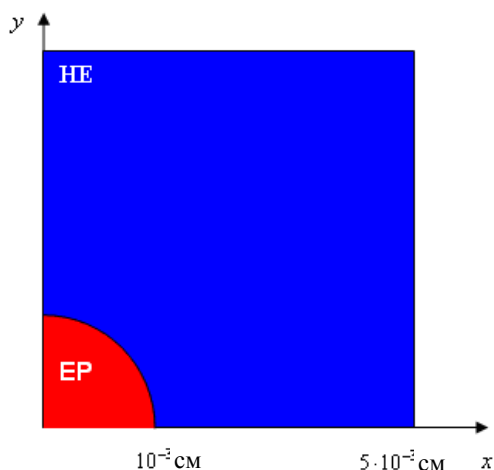


Рис. 1. Начальная геометрия 2D задачи

Рассматривается квадрат со стороной $5 \cdot 10^{-3}$. Четверть сферы радиусом $R = 10^{-3}$ (красный цвет)

Таблица 1

Различные комбинации физических процессов, учтенных в 2D расчетах (+ означает наличие процесса, – означает отсутствие процесса)

Вариант	Газодинамика	Кинетика	Теплопроводность	Турбулентность
1	+	+	–	–
2	+	+	+	–
3	+	+	–	+
4	+	+	+	+

занимают нагретые ПВ в соответствии с калорийностью и теплоемкостью ВВ. В остальной области (синий цвет) находится холодное ВВ. Таким образом, здесь не моделируются процессы появления и нагрева ПВ.

Уравнение кинетики горения ВВ имеет следующий вид (закон Аррениуса):

$$\frac{dW}{dt} = -Z \exp\left(-\frac{T_a}{T}\right)W.$$

Здесь W – массовая концентрация ВВ, T – температура ВВ, температура активации $T_a = 30000$, $Z = 5 \cdot 10^{13}$.

Для ВВ использовалось уравнение состояния типа Ми–Грюнайзена

$$P = P_1 + P_2, \quad E = E_1 + E_2,$$

где
$$P_1(\delta) = \frac{C_0^2 \rho_0}{n} (\delta^n - 1),$$

$$E(\delta) = \frac{C_0^2}{n} \left(\frac{\delta^{n-1}}{n-1} + \frac{1}{\delta} - 1 \right),$$

$$E_1(\delta) = \frac{1}{\rho_0} \int_1^\delta \frac{P_1(\tau)}{\tau^2} d\tau,$$

$$P_2 = \gamma \rho_0 \delta E_2.$$

Здесь $\delta = \rho / \rho_0$ – относительное сжатие, ρ_0 – плотность металла при нормальных условиях, ρ – текущая плотность металла, C_0 – скорость звука в сплошном несжатом холодном веществе, n – подгоночный параметр.

В расчетах были использованы следующие параметры УРС: $C_V = 0,00135$; $C_0 = 2,43$; $n = 6,2$; $\gamma = 2,1$; $\rho_0 = 1,93$. Калорийность ВВ $Q = 3,65$.

Для ПВ использовалось уравнение состояния Зубарева [15] со следующими параметрами: $C_V = 0,001018$; $A = 2,21547$; $F = 75,8018$; $n = 0,6$; $\xi = 4,38302$; $\gamma_0 = 0,5$.

Кроме газодинамики и кинетики горения ВВ в расчетах в различных сочетаниях включались теплопроводность и турбулентность по k - ϵ модели. Вариация физических процессов в расчетах приводится в табл. 1. Основные 2D расчеты проводились на равномерной эйлеровой сетке 100×100 .

Отметим, что в коде ЭГАК уравнение теплопроводности решается относительно средней энергии в ячейке [16]. После того как найдены новые средние энергии, в смешанных ячейках энергия распределяется между веществами исходя из определенных предположений. В данных расчетах использовалось предположение о мгновенном выравнивании температур компонентов. Данное предположение, не совсем корректное для смешанных ячеек, содержащих контактные границы между двумя сильно различными веществами, для перемешанных вследствие турбулентности веществ представляется вполне корректным. Это фактически означает, что в таких ячейках теплообмен между веществами осуществляется мгновенно, что соответствует предположению о гомогенном характере перемешивания вещества в ячейке.

Результаты расчетов. На рис. 2 показаны графики зависимости массы ПВ от времени для расчетов 1–4 с учетом теплопроводности и турбулентности в различных сочетаниях. Получен следующий основной результат: включение вместе турбулентности и теплопроводности обеспечивает физически разумную скорость роста горячего очага и передает в расчете характерные физические особенности процесса. В то же время учет каждого из процессов по отдельности (теплопроводности или турбулентности) не обеспечивает необходимой скорости роста горячего очага.

На рис. 3 приведен график зависимости радиуса ПВ от времени в расчете 4 с учетом всех процессов. Видно, что кривая достаточно быстро выходит на приблизительно линейный закон роста, на котором средняя скорость роста ГТ составляет: $\frac{\Delta R}{\Delta t} \approx 200$ м/с.

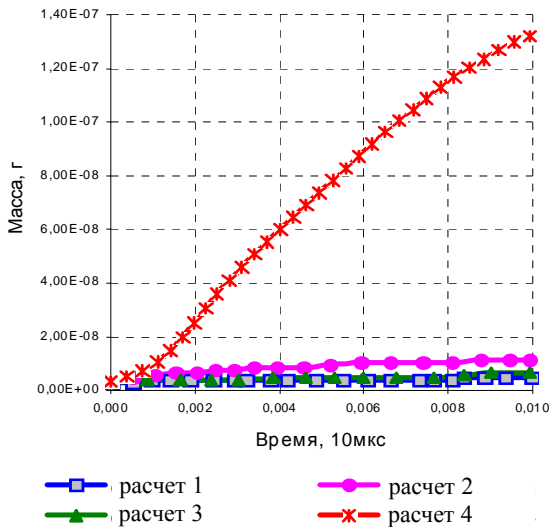


Рис. 2. Зависимости массы ПВ от времени в 2D расчетах

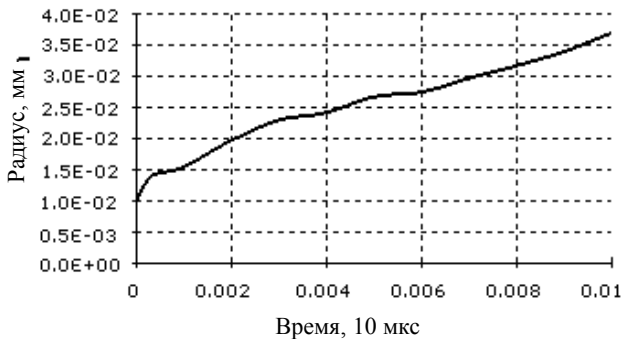


Рис. 3. Зависимость радиуса ПВ от времени в 2D расчете 4

2. 3D моделирование

3D расчеты проводились на неподвижных счетных сетках в эйлеровых переменных с разделением ВВ и ПВ на разные вещества с использованием метода концентраций для моделирования движения контактных границ [17], являющегося составной частью кода ЭГАК. В 3D расчетах модели турбулентности не использовались, с точки зрения турбулентности такие расчеты представляли собой прямое численное моделирование. Все 3D расчеты проводились с учетом процесса теплопроводности. Отметим, что в этих расчетах, как и выше в 2D расчетах, используется предположение о равенстве температур компонентов в смешанных ячейках, что соответствует предположению о гомогенном характере перемешивания веществ в ячейке.

В 3D расчетах, в отличие от 2D расчетов в предыдущем разделе, учитывалась конфигурация структуры ВВ с наличием газовых включений. Реальные конфигурации могут иметь различные формы (см., например, рис. 7,а), сложные для воспроизведения в расчетах. Поэтому задача была упрощена, а именно были выбраны две простейшие формы: в виде сферы и тетраэдра.

2.1 Моделирование формирования горячего очага вокруг разогретого газового включения

В этой серии расчетов моделировалось формирование горячего очага из ПВ после прохождения УВ через ВВ и сферическое газовое включение. Процесс прохождения УВ через ВВ в этой серии не моделируется, в начальный момент времени предполагается, что газовое включение уже разогрето УВ.

Постановка расчетов. Начальная геометрия представляет собой куб со стороной $5 \cdot 10^{-3}$. Восьмую часть сферы радиусом $R = 10^{-3}$ занимает газ с начальными данными $\rho_0 = 0,4$, $p_0 = 0,32$, $e_0 = 4$. УРС – «идеальный газ» со следующими параметрами: $\gamma = 1,2$, $C_V = 0,0004$. Таким образом, температура газа в начальный момент $T = e/C_V = 10000$. В остальной области находится ВВ с начальными данными $\rho_1 = 1,91$, $p_1 = 8$, $e_1 = 2,02349$. Уравнения состояния газа, ВВ и ПВ, а также параметры кинетики Аррениуса те же, что и в основных расчетах раздела 1.

Использовались следующие коэффициенты теплопроводности: $\chi_{\text{газ}} = 150$; $\chi_{\text{ВВ}} = 0,5016$; $\chi_{\text{ПВ}} = 1$, однако в одном из расчетов эти коэффициенты для всех веществ были увеличены в 10 раз.

Основные расчеты проводились на равномерной сетке $100 \times 100 \times 100$. Кроме того, был проведен один расчет на сетке $400 \times 400 \times 400$. В табл. 2 представлены варианты расчетов первой серии с вариацией количества ячеек, коэффициентов теплопроводности и параметра кинетики Z . На внешних границах куба задавалось граничное условие «жесткая стенка».

На границе между газом и ВВ для развития турбулентности задаются «затравочные» начальные возмущения: берется кубик со стороной в две ячейки и случайным образом в него заносится либо газ, либо ВВ. Начальная форма газа после задания возмущений показана на рис. 4. Отметим, что в расчете на более подробной сетке амплитуды начальных возмущений мельче в соответствии с размерами ячеек.

Т а б л и ц а 2

Варианты расчетов первой серии 3D расчетов

Номер расчета	Размер ячейки	Z	Форма газа	Коэффициенты теплопроводности
1	0,5	$5 \cdot 10^{13}$	Сфера	$\chi_{газ} = 150$; $\chi_{ВВ} = 0,5016$; $\chi_{ПВ} = 1$
2	0,5	$5 \cdot 10^{14}$	Сфера	$\chi_{газ} = 150$; $\chi_{ВВ} = 0,5016$; $\chi_{ПВ} = 1$
3	0,5	$5 \cdot 10^{13}$	Сфера	$\chi_{газ} = 1500$; $\chi_{ВВ} = 5,016$; $\chi_{ПВ} = 10$
4	0,125	$5 \cdot 10^{13}$	Сфера	$\chi_{газ} = 150$; $\chi_{ВВ} = 0,5016$; $\chi_{ПВ} = 1$
5	0,125	$5 \cdot 10^{13}$	Тетраэдр	$\chi_{газ} = 150$; $\chi_{ВВ} = 0,5016$; $\chi_{ПВ} = 1$

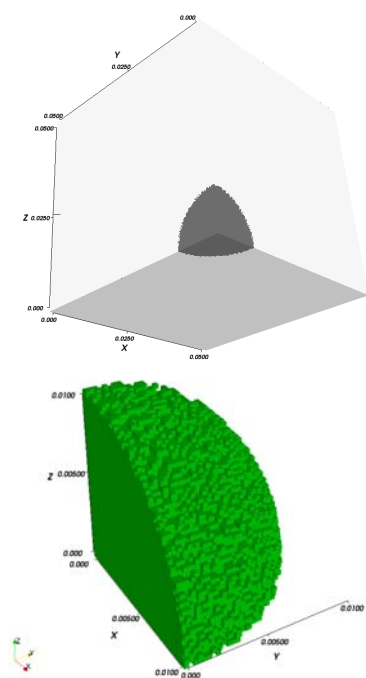


Рис. 4. Начальная геометрия 3D задачи

Параметры 3D расчетов были взяты в соответствии с аналитическими расчетами из [18, 19]. Вариация параметров теплопроводности в расчетах связана с отсутствием достоверных данных по коэффициентам теплопроводности для веществ, особенно ВВ, подвергнутых ударному сжатию. Что касается кинетики Аррениуса и ее параметров, то в данных расчетах она использовалась как некий индикатор или пороговый «включатель» реакции разложения при определенном нагреве ВВ, и ее параметры подбирались так, чтобы при заданных УРС реализовался критический режим роста единичного очага на фоне нереагирующего ВВ. Было проверено в расчете, что увеличение на поряд-

док значения предэкспоненты Z в кинетике Аррениуса приводит к гомогенной химической реакции в объеме, что соответствует физической логике.

Как уже отмечено выше, реальная форма газовых включений, которые образуются на стыке нескольких зерен ВВ, сложна и не является сферической [20] (рис. 5,а), поэтому был проведен расчет 5 (см. табл. 2) с формой газового включения в виде тетраэдра. При этом газовое включение располагается внутри кубической счетной области для уменьшения влияния внешних жестких стенок на развитие процесса, что потребовало увеличения размеров куба до $6 \cdot 10^{-3}$. В остальном постановка расчетов совпадает с постановкой расчета 4 для подробной сетки ($h = 1,25 \cdot 10^{-5}$), кроме УРС для ПВ, которое в этом расчете задавалось в форме идеального газа с $\gamma = 3$. На рис. 7,б, в показана начальная геометрия газа.

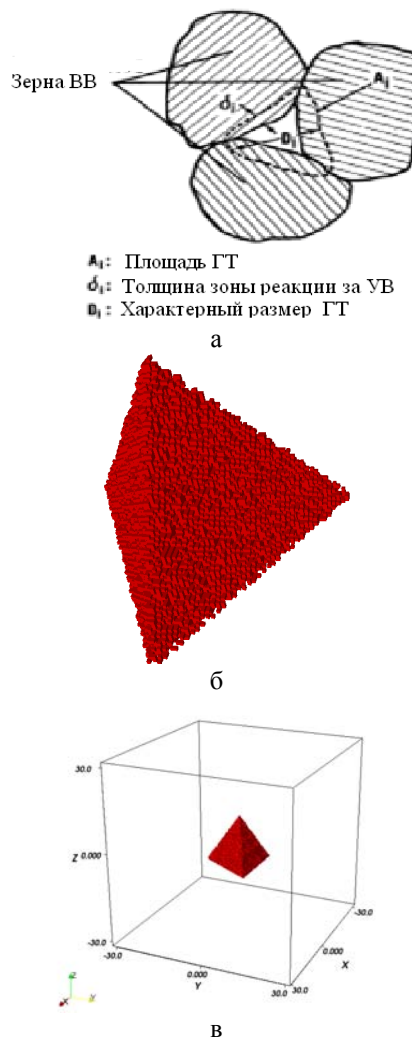


Рис. 5. Форма газовых включений и начальная геометрия для единичного горячего очага

Результаты расчетов. На рис. 6, 7 и 8 приводятся поля концентраций ПВ на три момента времени из расчетов 1, 4 и 2 соответственно.

На рис. 9 представлены объемные концентрации ПВ (в диапазоне от 0,001 до 1) для расчета 5. Очаг ПВ формируется там, где первоначально находился газ, и со временем увеличивается.

На рис. 10 представлены графики зависимости массы ПВ от времени в расчетах 1–5. Видно, что в расчете 2, в котором параметр кинетики Z был

увеличен в 10 раз, масса ПВ существенно больше, чем в других расчетах. Этот вариант досчитан только до времени 0,42 мкс, поскольку к этому моменту ВВ выгорело почти во всей области, и дальнейший счет уже не представляет интереса. Здесь происходит гомогенная химическая реакция в объеме ВВ и ускорение роста очага на фоне гомогенной реакции. Это логично, так как время индукции гомогенных реакций очень мало.

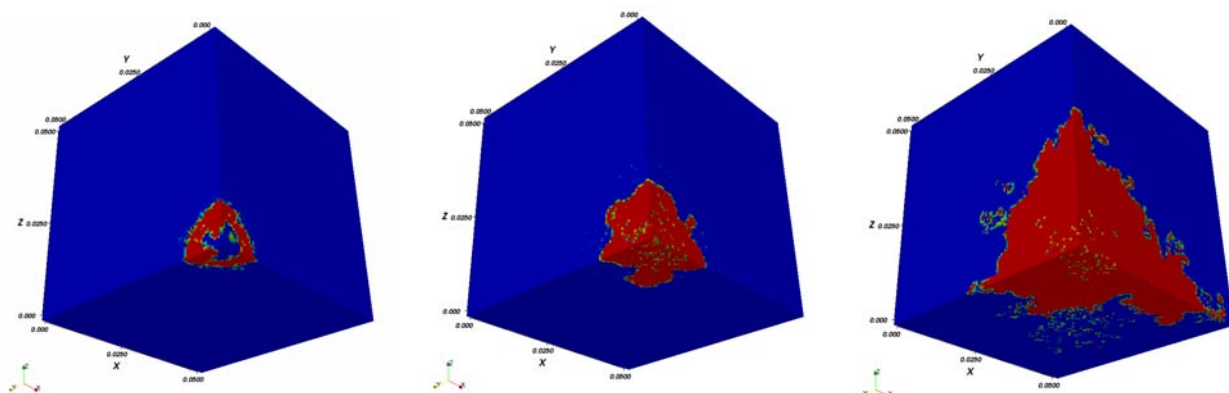


Рис. 6. Расчет 1. Концентрации ПВ (от 0 до 1) на $t = 10^{-8}, 10^{-7}, 10^{-6}$ (слева направо)

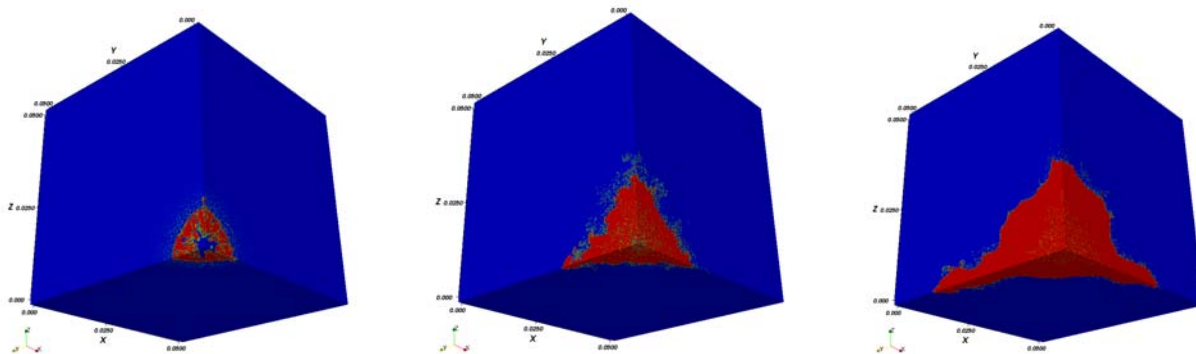


Рис. 7. Расчет 4. Концентрации ПВ (от 0 до 1) на $t = 10^{-8}, 10^{-7}, 10^{-6}$ (слева направо)

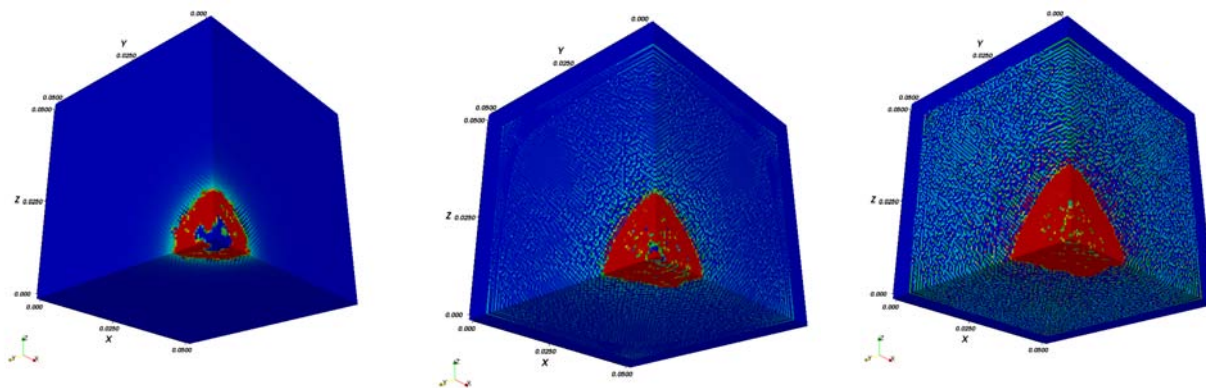


Рис. 8. Расчет 2. Концентрации ПВ (от 0 до 1) на $t = 10^{-8}, 5 \cdot 10^{-8}, 10^{-7}$ (слева направо)

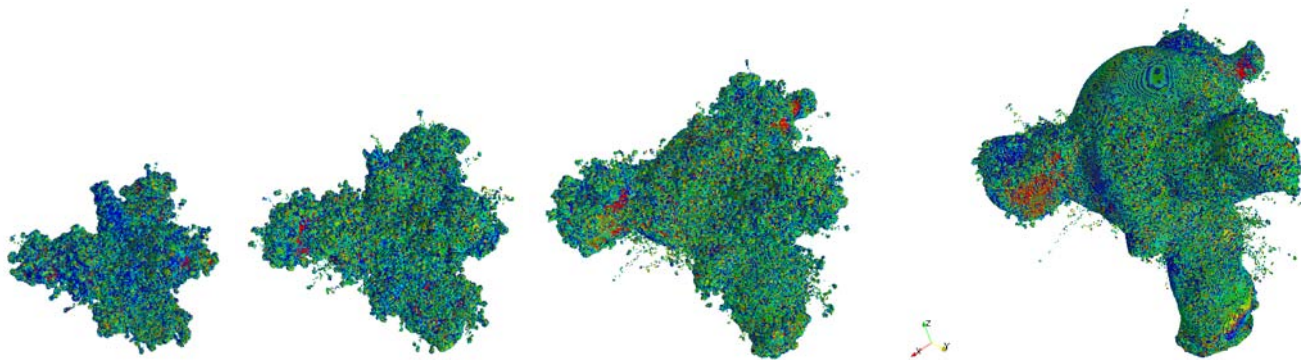


Рис. 9. Расчет 5. Концентрации ПВ (от 0 до 1) на $t = 5 \cdot 10^{-8}, 10^{-7}, 2 \cdot 10^{-7}, 4 \cdot 10^{-7}$ (слева направо)

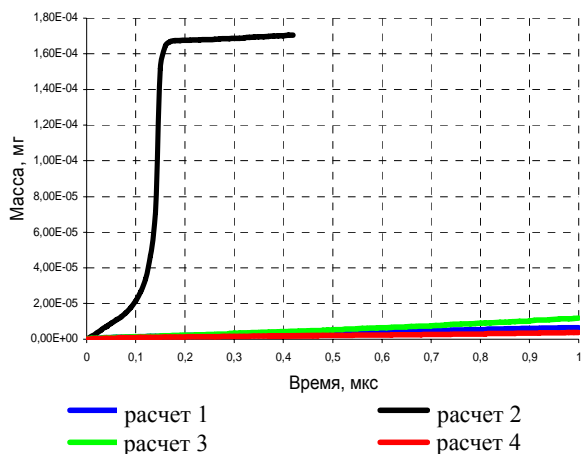


Рис. 10. Графики зависимости массы ПВ от времени в расчетах 1–4

Если сравнить между собой массы ПВ в остальных расчетах, то можно отметить, что при увеличении коэффициентов теплопроводности (расчет 3) масса ПВ увеличивается. В расчете 4 на подробной сетке масса ПВ несколько меньше, чем в расчете 1. Этому факту способствуют два обстоятельства. Во-первых, начальные возмущения на подробной сетке меньше по амплитуде, что приводит к замедленному развитию турбулентности на начальной стадии процесса, во-вторых, в этих расчетах сильно влияние внешних жестких стенок, по рисункам видно, что вдоль них происходит более интенсивное развитие процесса, которое опять-таки уменьшается с уменьшением размеров ячеек. Более сильное развитие возмущений вдоль стенок происходит вследствие двух обстоятельств, во-первых, практически в любой разностной схеме может иметь место так называемый осевой эффект, вследствие особого счета граничных ячеек, во-вторых, в данном случае наличие стенки уменьшает степень свободы для развития

турбулентных вихрей, что также способствует развитию возмущений вдоль стенок.

Определение скорости роста горячего очага.

Для определения скорости роста очага использовались два метода. Первый – визуально по рисункам. В этом случае скорость роста очага составила ~ 70 м/с в расчетах 1 и 5, т. е. независимо от постановки она фактически одна и та же.

Второй критерий основан на подсчете массы выгоревшего ВВ (масса образовавшихся ПВ), приведенной к сферическому очагу. В условиях развитой неустойчивости такой критерий является оценкой снизу для скорости роста очага. Радиус сферы за вычетом начальной области газа определяется по формуле

$$R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi} + R_0^3}, \quad (1)$$

где V – объем ПВ, а R_0 – начальный радиус газового включения (для тетраэдра – это радиус его объема, приведенного к сфере). На рис. 11 приводится график зависимости радиуса пятна ПВ от времени в расчете 5, полученный по второму критерию. В этом расчете скорость роста составила ~ 20 м/с.

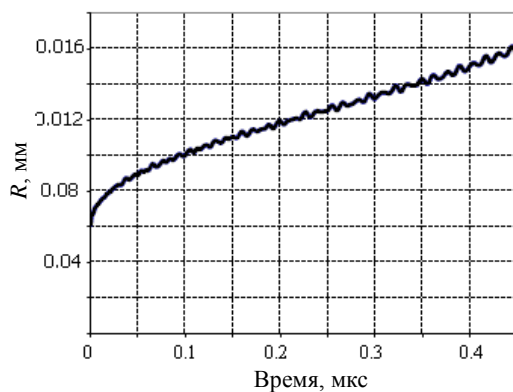


Рис. 11. График зависимости радиуса пятна ПВ от времени в 3D расчете 5

Таким образом, и при прямом моделировании задачи получаем подтверждение гипотезы о важной роли турбулентности в рассматриваемой задаче, в расчетах имеет место увеличение скорости роста отдельного горячего очага. Однако все же в этой серии расчетов необходимая скорость роста не достигается. Поэтому была проведена более реалистичная серия расчетов, описываемая в следующем разделе.

2.2. Моделирование формирования горячего очага вокруг газового включения за фронтом волны

Постановка расчетов. В данной серии из трех расчетов (расчеты 6–8) моделировалась более реальная задача, а именно рост очага при прохождении ударной волны. Геометрия представляет собой прямоугольный параллелепипед $60 \times 60 \times 180$ мкм, в котором находятся два газовых включения в форме тетраэдров (рис. 12), начальные размеры которых совпадают с размерами из раздела 2.1. На левой границе по x задается втекающий поток, соответствующий падающей УВ, на правой границе задано условие вытекания, остальные границы – жесткие стенки. В расчетах варьировались начальные данные для газа и ВВ и параметры УВ.

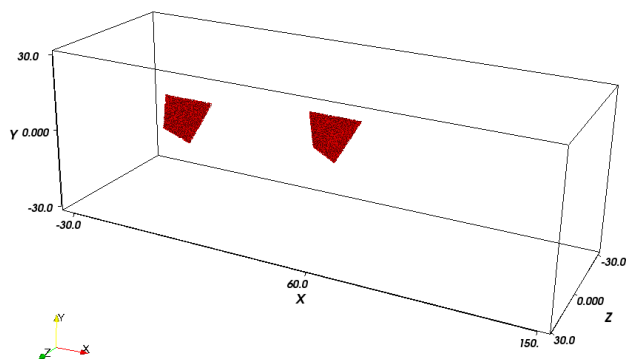


Рис. 12. Начальная геометрия 3D расчета с двумя газовыми включениями

Расчет 6. Параметры УРС для газа и ПВ такие же, что и для расчета 5 раздела 2.1, отличаются лишь параметры ВВ: $C_V = 0,001$; $C_0 = 2,9$; $n = 5,4$; $\Gamma = 1,25$; $\rho_{00} = 1,91$.

На втекающей границе задается поток с параметрами: $\rho = 2,37$; $p = 8$; $e = 0,745$; $u = 0,86$.

Расчет 7. Данный расчет отличается от расчета 6 лишь начальными данными: для газа $\rho = 0,4$;

$p = 10^{-4}$; $e = 0,00125$; $T = 3,125$; для ВВ $\rho = 1,91$; $p = 10^{-4}$; $e = 0,00004$; $T = 0,04188$; а также втекающим потоком $\rho = 2,485$; $p = 10$; $e = 0,61$; $u = 1,1$.

Расчет 8. В этом расчете были заданы следующие начальные данные: для газа $\rho = 0,001$; $p = 0$; $e = 0,3$; $T = 300$; для ВВ $\rho = 1,91$; $p = 0$; $e = 0,3$; $T = 300$; втекающий поток $\rho = 2,485$; $p = 10$; $e = 0,92$; $u = 1,1$.

Для того чтобы в начальный момент энергии и температуры были выровнены, к давлению для газа и ВВ, получаемым по УРС, добавлялась величина $\delta p = (\gamma - 1)\rho e$, где $e = C_V T$ выбрана таким образом, чтобы температура на $t = 0$ равнялась 300.

Результаты расчетов. На рис. 13 показаны объемные концентрации ПВ в одном из расчетов на несколько моментов времени (время отсчитывается от момента прихода УВ на первый очаг). Когда УВ достигает газовых включений, на их месте формируются очаги ПВ, которые движутся, растут и затем сливаются.

На рис. 14 приведены $R-t$ диаграммы размеров горячих очагов в этих расчетах, сосчитанных по формуле (1) без газового включения. Для всех трех расчетов происходит выход на примерно линейный участок роста радиуса от времени, то есть на постоянное значение скорости роста. В табл. 3 приведены скорости роста каждого пятна в расчетах, определенные на линейных участках. Видим, что скорости роста пятен во всех расчетах больше 100 м/с, при этом скорости роста второго пятна значительно больше по сравнению со скоростью первого пятна. Это следствие того, что на первое пятно действует идеализированная (невозмущенная) УВ, а на второе пятно – УВ, возмущенная при прохождении первого пятна. Это является дополнительным фактором, способствующим большей турбулизации течения.

Таблица 3

Скорости роста пятен на линейном участке (м/с)

Расчет	6	7	8
1-е пятно	112	122	200
2-е пятно	150	154	242

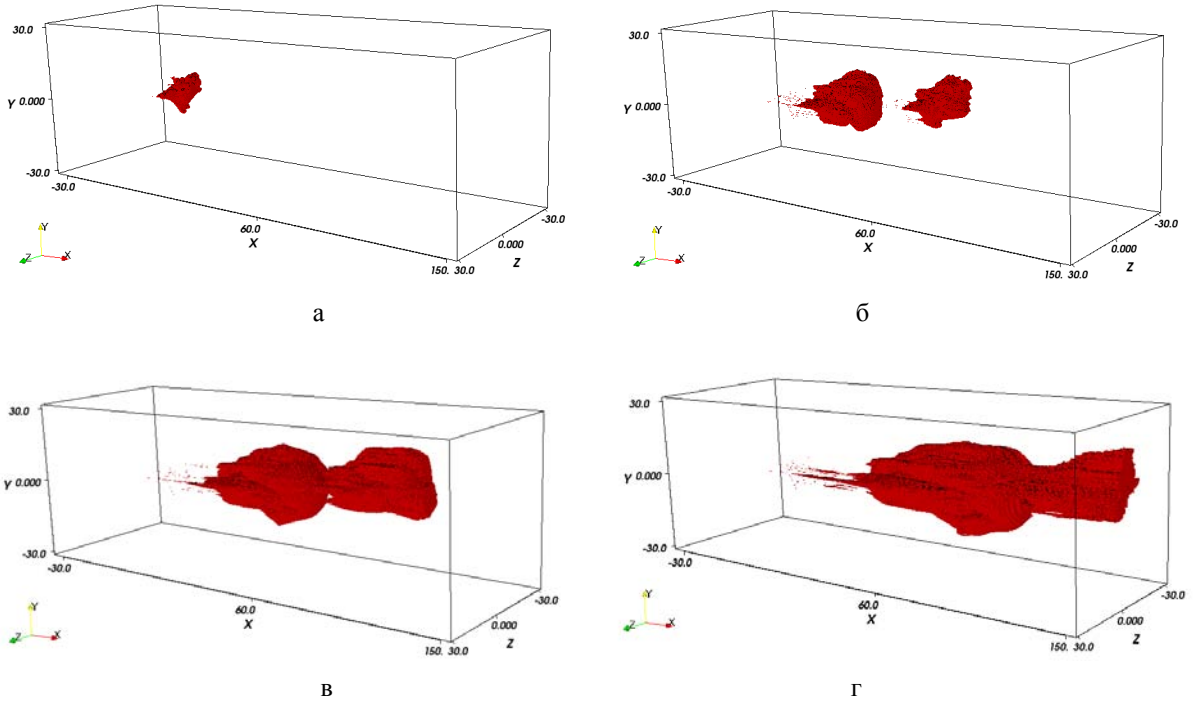


Рис. 13. Объемные концентрации ПВ в 3D расчете 8: а – $t = 1 \cdot 10^{-8}$; б – $3 \cdot 10^{-8}$; в – $5 \cdot 10^{-8}$; г – $7 \cdot 10^{-8}$

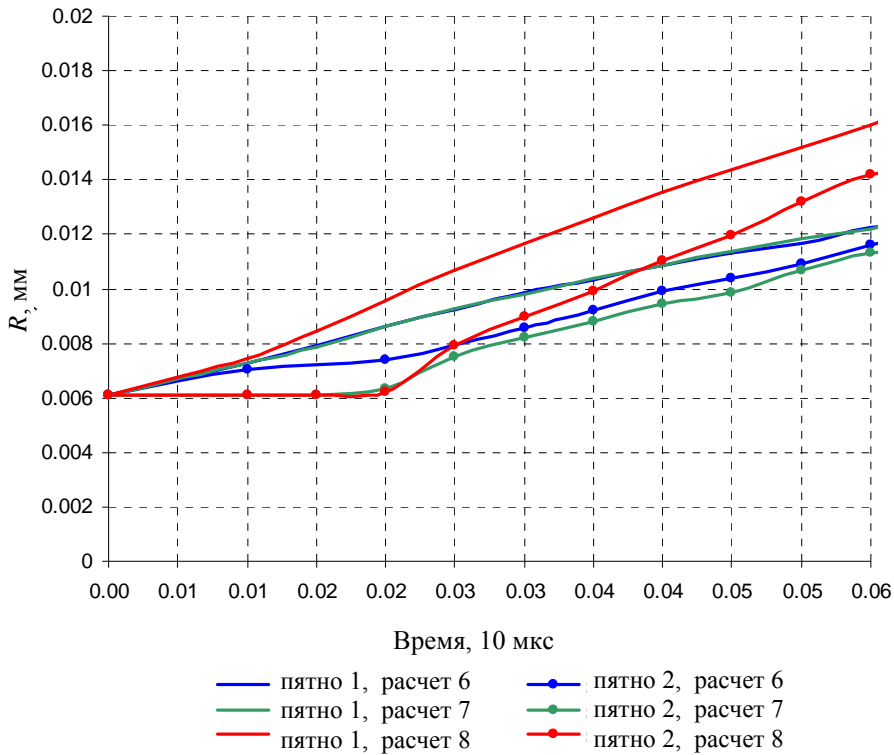


Рис. 14. Графики зависимости радиусов пятен ПВ от времени в 3D расчетах 6–8

Обсуждение результатов

При численном моделировании процесса горения ГТ с учетом турбулентного перемешивания

(как 3D DNS, так и 2D $k-\epsilon$) и теплопроводности получаются значительно большие скорости горения ГТ по сравнению с ламинарным послойным горением. Эффект увеличения скорости имеет ме-

сто при разных постановках задачи. При наиболее реальных постановках задачи скорость роста ГТ составляет ~100–200 м/с, что достаточно для детонационного режима роста ГТ. Таким образом, проведенное численное исследование подтверждает гипотезу о том, что турбулентность в зоне реакции является важным фактором при горении ГТ и ее необходимо учитывать как в численных расчетах, так и в теории детонации.

Физическая картина горения ГТ представляется следующей: УВ при сжатии нагревает газы до высокой температуры, при нагреве стенок начинается газофазная реакция разложения и развивается неустойчивость на границе ВВ/ПВ. Основной процесс энергопереноса в пространстве происходит турбулентно, в результате вихревого течения крупномасштабные частицы ВВ перемешиваются и дробятся до мелких размеров. Вследствие этого за счет развитой поверхности контактной границы между ВВ и ПВ успевает происходить прогрев ВВ (передача энергии от ПВ) и эффективно продолжается реакция разложения.

Таким образом, последовательно обосновывается турбулентная природа переноса энергии и роль теплопроводности для прогрева холодного ВВ при развитой поверхности контакта ВВ и ПВ при дроблении гранул. Экспериментальные исследования зоны реакции с высоким разрешением [21, 22] подтверждают сложную ячеистую структуру фронта детонации, период возмущения которого коррелирует с размером гранул ВВ.

Заключение

Проведенное численное моделирование носит качественный исследовательский характер и не претендует на безусловную точность при оценке количественных показателей развития процесса. Тем не менее, моделирование с учетом турбулентного перемешивания и теплопроводности позволило получить скорости роста ГТ, достаточные для детонационного режима роста ГТ. Тем самым получено подтверждение гипотезы о том, что турбулентность в зоне реакции ВВ является важным фактором при горении ГТ и ее необходимо учитывать в численных расчетах и теории детонации.

Авторы благодарят Глазырина С.И. за полезные обсуждения и критические замечания, а также Чиркину И.А. за помощь при оформлении статьи.

Список литературы

1. Андреев К. К., Харитон Ю. Б. Некоторые соображения о механизме самораспространяющихся реакций // Доклады АН СССР. 1934. Т. 1. С. 402–404.
2. Беляев А. Ф. Возникновение детонации взрывчатых веществ под действием теплового импульса // Доклады АН СССР. 1938. Т. 18. С. 267–270.
3. Харитон Ю. Б., Сухих В. А. Возникновение всплеска во взрывчатом веществе при кратковременных деформациях. 1947 г. // Харитон Ю. Б. Сборник научных трудов. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2003.
4. Bowden F. P., Stone M. A., Tudor G. K. // Proc. R. Soc. 1947. Vol. A. 188. P. 329.
5. Eyring H., Powel R. E., Duffrey G. H., Darlin R. B. // Chem. Rev. 1949. Vol. 45. P. 69.
6. Bowden F. P., Yoffe A. D. Initiation and Growth of Explosions in Liquids Solids. Cambridge, UK: Cambridge University Press., 1952.
7. Campbel A. W., Davis W. S., Ramsay J. B., Travis J. R. // Phys. Fluids. 1961. Vol. 4, N 4. P. 511.
8. Tarver C.M., Nichols A.L. III. Hot Spot Growth in a Thermal-Chemical-Reactive Flow Model for Shock Initiation of Solid Explosives // Proceedings of XIth Symposium on Detonation. P. 599–605.
9. Mazel P., Saurel R., Baudin G., Loraud J. C. Study of Pyrolysis and Gas Reaction Influence on the Explosive Ignition Mechanism by Viscoplastic Pore Collapse // HDP 1995 Congress, Tours, France.
10. Трофимов В. С., Дремин А. Н. К обоснованию правила отбора для скорости детонации // ФГВ. 1966, № 3. С. 19–30.
11. Рыбакин С. С. Турбулентность при детонации // ФГВ. 1966, № 1. С. 29–36.
12. Морозов В. Г., Карпенко И. И. Турбулентный механизм переноса энергии при росте горячих точек в процессе детонации // Междунар. конф. «Ударные волны в конденсированных средах»: С. Петербург, 1–6 сентября 2002 г.
13. Карпенко И. И., Морозов В. Г., Чернышова О. Н., Янилкин Ю. В. Расчет скорости роста горячих очагов в процессе детонации с учетом турбулентного механизма передачи энергии // Химическая физика. 2008. Т. 27, № 3. С. 16–20.
14. Янилкин Ю. В., Беляев С. П., Бондаренко Ю.А. и др. Эйлеровы численные методики ЭГАК и ТРЭК для моделирования многомерных течений многокомпонентной среды // Труды РФЯЦ-ВНИИЭФ. Научно-исследовательское издание. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ. 2008. Вып. 12. С. 54–65.

15. Жерноклетов М. В., Зубарев В. Н., Телегин Г. С. Изэнтропы расширения продуктов взрыва конденсированных ВВ // Журнал прикладной механики и технической физики. 1969. Вып. 4. С. 127–132.
16. Бахрах С. М., Глаголева Ю. П., Самигулин М. С., Фролов В. Д., Яненко Н. Н., Янилкин Ю. В. Расчет газодинамических течений на основе метода концентраций // ДАН СССР. 1981. Т. 257, N 3. С. 566–569.
17. Бондаренко Ю. А., Шагалиева А. Р., Янилкин Ю. В. Метод расчета теплопроводности с учетом теплообмена между веществами внутри смешанных ячеек // Математическое моделирование. 2002. Т. 14, № 7. С. 15–26.
18. Морозов В. Г., Карпенко И. И., Куратов С. Е., Соколов С. С., Шамраев Б. Н., Дмитриева Л. В. Теоретическое обоснование феноменологической модели ударноволновой чувствительности ВВ на основе ТАТБ // Химическая Физика. 1995. Т. 14, № 2–3. С. 32.
19. Морозов В. Г., Карпенко И. И., Ольхов О. В., Соколов С. С., Шамраев Б. Н., Дмитриева Л. В., Плаксин И. Е., Евстигнеев А. А., Ковтун А. Д., Герасименко В. Ф., Шуйкин А. Н., Комрачков В. А., Макаров Ю. М., Герасимов В. М., Шутов В. И. Расчетное моделирование с опорой на эксперименты инициирования и развития детонации ВВ на основе ТАТБ с учетом десенсибилизации при взаимодействии ударной и детонационной волн: Препринт № 37. Арзамас-16: РФЯЦ ВНИИЭФ, 1995.
20. Pier K. Tang. Initiation and Detonation of Heterogeneous High Explosive. A Unified Model. LASL Report, La-11352-MS, 1988.
21. Plaksin I., Campos J. etc. Micro-Ejecta from Detonation Front as an Ignored Negative Factor in Performance of Detonation. Proceeding of 36 International Conference of ICT-Energetic Materials. Germany, 2005.
22. Plaksin I., Campos J. etc. Coarse Explosive Particles of PBX as a Dominant Factor of Detonation Instability. SCCM-2003. Portland, USA. P. 887.

Статья поступила в редакцию 02.07.2015

ВОЗМОЖНОЕ ОБЪЯСНЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ СМЕЖНЫХ ВПАДИН ОСТРОВНЫХ ДУГ НА ОСНОВЕ КОНЦЕПЦИИ ТЕПЛОВЫХ МАНТИЙНЫХ ПЛЮМОВ

А. Б. Медведев

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

На основе предложенного ранее варианта концепции тепловых мантийных плюмов рассматривается гипотетическое объяснение возникновения островных дуг, их последующее погружение и образование расширяющихся со временем двух смежных с ними линейных впадин. В этой модели расположенный под корой вертикальный плюм, имеющий высоту порядка размера верхней мантии, в среднем плотнее (тяжелее) среды при умеренном перегреве относительно нее (в теплом состоянии). Его поведение нормализуется с увеличением средней температуры – сильноперегретый (горячий) плюм легче среды. Теми же свойствами плавучести, что и плюм, обладают вертикальные колонки перегретой среды верхней мантии. Немонотонное поведение средней плотности колонок плюма и среды при увеличении их средней температуры аналогично поведению плотности воды, которая в интервале $\approx 273\text{--}281$ К больше, чем при 273 К, и меньше последней при перегреве >281 К. При интерпретации возникновения островной дуги как следствия всплытия до уровня коры горячего плюма в форме вертикальной пластины, названная аномалия плотности приводит к тому, что при передаче тепла от плюма среде в двух плоских тепловых волнах, реализующихся на двух границах плюма-пластины со средой верхней мантии, он постепенно остывает и уплотняется (начиная с границ со средой), среда, нагреваясь до теплого состояния, также уплотняется. Подобное уплотнение может являться причиной погружения островов и образования и расширения со временем двух пограничных линейных впадин (впадин стыка), имеющих горизонтальный размер $\Delta x \sim (\chi t)^{0,5}$ ($\sim 10(t)^{0,5}$, Δx – км, t – время после всплытия плюма в млн. лет, $\chi \approx 0,01$ см²/с). На больших промежутках времени образуется общая впадина, отвечающая переходу вещества плюма и нагретой от него среды в теплое плотное состояние. Выполнено упрощенное моделирование этих процессов при решении одномерной задачи о горизонтальном остывании вертикальной пластины воды с начальной температурой >281 К, помещенной в водную среду при 273 К. Решение подтвердило ожидаемый рельеф поверхности в районе всплытия плюма-пластины. Рассмотренные модельные варианты показали возможность реализации различных режимов движения (центробежный, центростремительный, с нулевой скоростью) границы поверхностного поднятия со впадиной стыка и максимума впадины стыка (аналог оси глубоководного желоба) по отношению к центральной плоскости пластины в зависимости от исходных параметров задачи. При моделировании выявлено, что при общем опускании поверхности ее ограниченный участок, прилегающий к максимуму впадины стыка, после погружения до максимальной глубины может испытывать относительный подъем. Сделана попытка приложения полученных модельных результатов к интерпретации Курильской островодужной системы.

Ключевые слова: тепловой плюм, отрицательный коэффициент теплового расширения, островная дуга, смежные впадины, мантия Земли.

Введение

На дне океанов и их границ с континентами выделяются контрастные формы рельефа, представленные поднятиями различной формы и окружающими их впадинами. К образованиям подоб-

ного вида относятся линейные системы островных дуг (ОД) и смежных впадин, расположенных по обе стороны от ОД (иногда опущенной ниже уровня моря). ОД-системы можно разделить на относительно симметричные и асимметричные [1]. В первом случае смежные впадины приблизительно

одинаковы. К симметричным относятся системы, связанные с хребтами Маккуори, Императорским, Соломоновыми островами (рис. 1). В асимметричном случае между геометрическими параметрами впадин имеются количественные отличия. Впадина наибольшей глубины называется глубоководным желобом (ГЖ; глубина до ≈ 10 км), наименьшей – задуговой (ее глубина, за вычетом осадочного слоя, нередко не сильно уступает ГЖ). Типичным примером является Курильская ОД-система (рис. 2). Профиль ГЖ ОД типа Курильской имеет относительно небольшое отклонение от симметрии за счет большей крутизны островного склона по сравнению с океаническим. В некоторых случаях ГЖ полностью симметричен. Ширина ОД – до ~ 100 км, длина – до ~ 1000 км, возраст – до ~ 100 млн лет (иногда современные ОД наложены на более древние). Для ОД-систем характерны высокие (в неск. раз больше нормы) значения среднего теплового потока, магматическая и вулканическая активность и, как правило, повышенная сейсмичность (в отдельных случаях с глубиной землетрясений до ≈ 850 км). Представляется, что основная причина происхождения симметричных и асимметричных ОД-систем одинакова. Далее в основном рассматриваются образования первого вида.

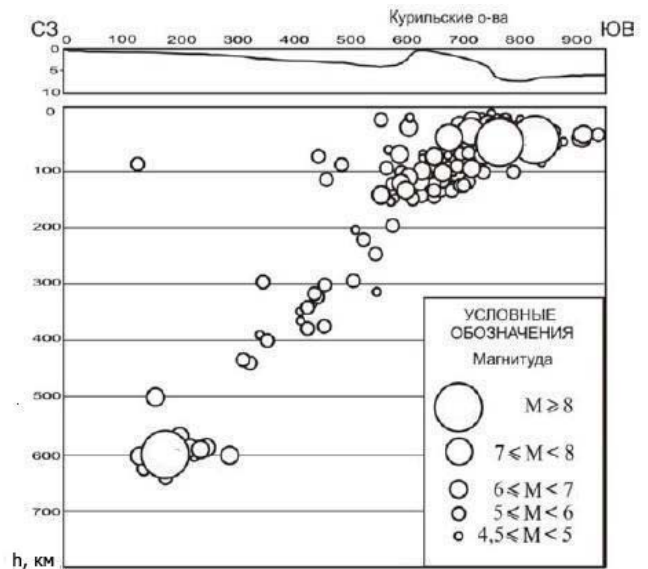


Рис. 2. Рельеф и сейсмичность Курильской ОД [3]. Кружки – проекция гипоцентров землетрясений на вертикальную плоскость, перпендикулярную ОД

На настоящем этапе при формировании рельефа дна океанов, в том числе в районах расположения ОД, определяющими являются вертикальные движения, сопровождающиеся многокилометровым опусканием верхней поверхности коры [4–6]. При этом ОД тонут в основном за счет погружения их обоих склонов: «Эти склоны еще «вчера» были шельфами, а еще ранее – участками палеостровной суши» [7, 8]. В двух последних работах также отмечается (обобщение данных ряда авторов), что одновременно с процессом уменьшения объема поднятия ОД идет процесс увеличения площади (ширины) и глубины смежных впадин. Эти процессы происходят в основном путем сбросов. В случае Курильской ОД-системы сбросы характерны для островов и склонов ОД [9] и ярко выражены на океаническом борту ГЖ [4]. Вместе с тем, несмотря на преобладание в целом процесса погружения, отдельные элементы ОД-систем могут испытывать относительный подъем. По сейсмическим данным для Курильской и ряда других ОД делают вывод о взбросо-надвиговой природе перемещений вещества в островной части склона ОД, примыкающей к оси ГЖ [10, 11] (данная часть склона в случае Курил ~ 50 км). Для Курильской ОД это согласуется с заключением о смене механизма землетрясений со сбросов на взбросы при переходе с океанического на островной борту ГЖ [12, 13].

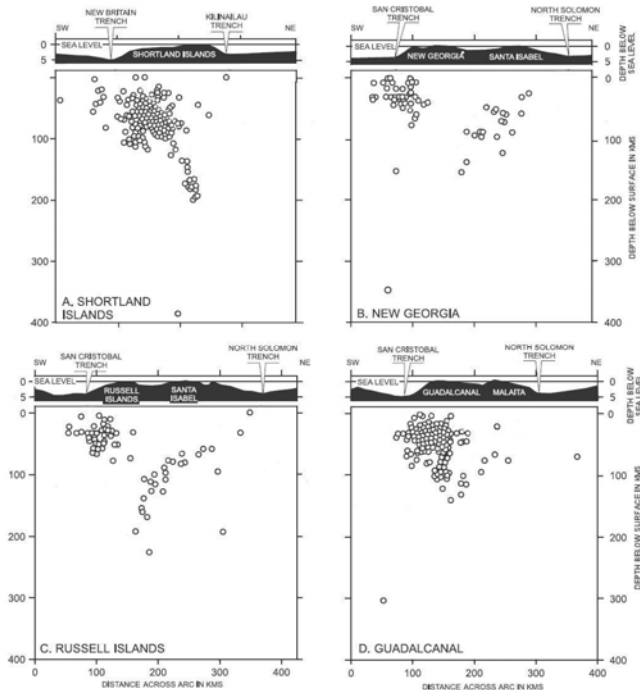


Рис. 1. Рельеф поверхности и сейсмичность в четырех (А, В, С, D) вертикальных сечениях вкост Соломоновой ОД [2]. Кружки – гипоцентры землетрясений

В [4, 5] опускание океанического дна связывается с процессами, сопутствующими внедрению в верхнюю мантию (ВМ) до уровня коры тепловых глубинных диапиров [14, 15] или, в другой терминологии, тепловых мантийных плюмов [16, 17], зарождающихся в глубинах мантии, возможно на границе нижней мантии (НМ) с ядром. Эта концепция в данной работе принимается за основу. Для теплового плюма в настоящее время нет устойчивого определения. Ниже под ним понимается перегретое по отношению к среде мантии (рассматриваемой как однородная) вещество близкого к ней состава (возможным влиянием состава на плавучесть пренебрегается). Форма плюма может быть различной – параллелепипед (пластина), цилиндр и др. Далее рассматривается плюм в виде вертикальной пластины (плюм-пластина), характеризующейся высотой H порядка размера ВМ (≈ 1000 км), шириной $2x_0$ и длиной L порядка горизонтальных размеров островной части ОД. Значение x_0 мало по сравнению с H и L . Предполагается, что вещество среды, коры и плюма (в целом) обладает реологическими характеристиками (прочность, вязкость) твердотельного типа (у перегретого плюма они понижены). Перемещение вещества среды, сопутствующее внедрению плюма в мантию, не учитывается, так как оно для рассматриваемых далее процессов уплотнения и разуплотнения вещества ВМ при теплообмене плюма со средой не имеет определяющего значения.

Обычно считается, что коэффициент теплового расширения $\beta = (\partial V / \partial T)_P / V = -(\partial \rho / \partial T)_P / \rho$ (V – удельный объем, $\rho = 1/V$ – плотность, T – абсолютная температура, P – давление) вещества среды мантии и теплового плюма является положительным. В этом случае перегретый плюм-пластина имеет меньшую среднюю плотность, чем среда (является более легким) и всплывает в ней до коры. После всплытия (чему далее отвечает время $t = t^0 = 0$) он выталкивается из ВМ и над ним реализуется поднятие верхней поверхности коры $\Delta H_2 > 0$ (нижний индекс «2» у величины ΔH , определяющей относительное изменение уровня поверхности, использован потому, что далее им помечается температура только что вслывшего до коры горячего плюма). В предположении, что ОД образована подобным плюмом, можно объяснить формирование первоначального поднятия островной части ОД-системы. Далее рассматривается упрощенная ситуация, когда исходная ($t^0 = 0$) плавучесть всех H -слоев плюма (из которых состоит

расположенная под корой пластина плюма; H -слои имеют малую фиксированную толщину $dx \ll x_0$) одинакова, что отвечает $\Delta H_2 = \text{const} > 0$ по всей ширине плюма $2x_0$. Подобный случай схематически отражен на рис. 3,а. В последующем ($t > 0$) плюм-пластина будет остывать. Линейные размеры области существенного изменения температуры (и как следствие плотности, обуславливающей плавучесть) по горизонтали Δx (в направлении x , перпендикулярном пластине) и вертикали Δz определяются величиной $\sim (\chi t)^{0,5}$, где χ – коэффициент температуропроводности. При $t \approx 100$ млн лет значения $\Delta x, \Delta z \sim 100$ км (при ориентировочном для ВМ значении $\chi \approx 0,01 \text{ см}^2/\text{с}$ [18]). Если $t \leq 100$ млн лет (время существования ОД), то Δz значительно меньше H (~ 1000 км), вследствие чего влияние изменения плотности при вертикальном остывании (в частности, через кору) на исходную плавучесть всех вертикальных H -слоев плюма мало. Она, однако, существенно изменяется в двух областях шириной Δx при горизонтальном теплообмене плюма-пластины со средой, влияющем на температуру и плотность H -слоев по всей их высоте H . При $\Delta x \sim x_0$ этот процесс изменяет исходную плавучесть всех H -слоев плюма. Горизонтальный теплообмен является также определяющим для изменения плавучести вертикальных H -слоев среды (идентичны H -слоям плюма-пластины), нагретых от всплывшего плюма в двух областях шириной Δx . Поэтому далее рассматривается только этот вид теплообмена (см. рис. 3,а и рис. 3,б). В последующем, в качестве упрощения, предполагается, что в исходном ($t^0 = 0$) состоянии разница температур H -слоев плюма и среды ΔT слабо меняется с глубиной h ($\Delta T(h) \approx \text{const}$). Считается также, что $\chi(h) \approx \text{const}$. В этом случае с учетом $x_0 \ll H, L$ горизонтальный теплообмен плюма-пластины со средой будет осуществляться посредством двух плоских тепловых волн (если ΔT и χ значительно изменяется по высоте H , то эти волны являются плоскими усреднено). В них со временем будут изменяться средние (по h от уровня коры до глубины H) значения температуры $\bar{T}_H(x, t)$ и плотности $\bar{\rho}_H(\bar{T}_H(x, t))$ различных (имеющих координату x в направлении, перпендикулярном пластине) вертикальных H -слоев плюма и среды (они характеризуются одной $\bar{\rho}_H(\bar{T}_H)$ -зависимостью и обладают одинаковым качеством плавучести).

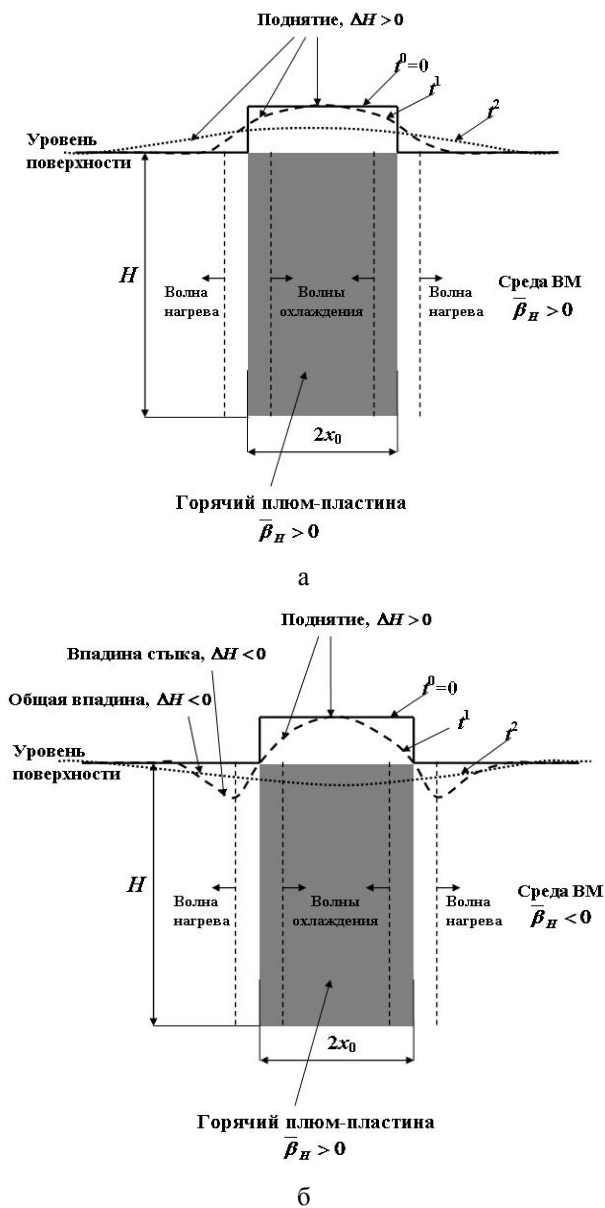


Рис. 3. Схема изменения уровня поверхности со временем в окрестности вертикального плюма-пластины, расположенного в нормальной (а) и аномальной (б) среде ВМ, вследствие горизонтального теплообмена плюма со средой. Пояснения в тексте

В каждой из двух тепловых волн можно выделить два участка – волну охлаждения, распространяющуюся к центральной плоскости пластины плюма от ее границы со средой, и волну нагрева среды (рис. 3,а). В волнах охлаждения реализуется постепенное уменьшение (начиная с границ) температуры H -слоев плюма от определенной начальной $\bar{T}_{H,2}$ (характеризующей H -слой плюма в момент $t^0 = 0$) до некоторой текущей $\bar{T}_H(x,t)$. При $\beta > 0$ усредненное (по h от коры до H) значение

$\bar{\beta}_H > 0$, вследствие чего $\bar{\rho}_H(\bar{T}_H)$ -зависимость монотонно убывает с увеличением \bar{T}_H . Поэтому при $\bar{T}_H(x,t) < \bar{T}_{H,2}$ плотность $\bar{\rho}_H(\bar{T}_H(x,t)) > \bar{\rho}_{H,2} = \bar{\rho}_H(\bar{T}_{H,2})$, вследствие чего исходное поднятие $\Delta H_2 = \text{const}$ над остывающими H -слоями плюма со временем уменьшается (возможное влияние изменения плотности и толщины коры на ΔH не рассматривается). Плоские волны нагрева будут изменять среднюю температуру H -слоев среды от исходного ($t^0 = 0$) значения $\bar{T}_{H,0}$ (исходная среда далее помечается нижним индексом «0») до более высокого значения $\bar{T}_H(x,t)$. При $\bar{\beta}_H > 0$ это соответствует поднятию $\Delta H(x,t) > 0$ (разного уровня) в двух областях среды, нагретых от плюма-пластины (при изостатическом равновесии $\Delta H = (1 - \bar{\rho}_H(\bar{T}_H(x,t)) / \bar{\rho}_H(\bar{T}_{H,0}))H$). Реализуемый в волнах охлаждения и нагрева рельеф $\Delta H(x,t)$ для сравнительно малого момента времени t^1 и большего t^2 схематически показан на рис. 3,а. Модельная ОД-система является куполообразной – $\Delta H(x,t) > 0$ над плюмом и над соседними с ним областями среды пока привнесенное плюмом тепло полностью не рассеется. Наклонное положение плюма в ВМ может лишь модифицировать купол.

В рассмотренном модельном случае ($\beta > 0$, $\bar{\beta}_H > 0$) смежные впадины ОД-систем отсутствуют. Для объяснения впадинообразования в рамках плюмовой концепции обычно привлекается гипотеза о понижении уровня поверхности вследствие преобразования коры (ее базификации; обзор моделей базификации выполнен в [10]) под воздействием тепла снизу. Считается, что в результате этого процесса толщина коры уменьшается. При этом можно ожидать, что чем тоньше кора, тем глубже впадина. Однако, например, для Курильской ОД кора при удалении от оси ГЖ в сторону океана не становится тоньше [19, 20] (согласно последней работе толщина коры изменяется от 12–14 км под осью ГЖ до 8–9 км под абиссальной равниной), но уровень верхней поверхности коры при этом существенно (на несколько километров) повышается. Для многих других ОД, судя по данным, приводимым в [21], также нет четкой связи максимальных глубин смежных впадин с минимальными толщинами коры. Поэтому представляется, что основным источником этих впадин являются не параметры коры, а глубинные свойства вещества мантии под ними.

1. Гипотеза об аномалии плотности верхней мантии

В [22–24] высказана гипотеза, отличающаяся от вышеизложенной («стандартной») тем, что поведение средней плотности $\bar{\rho}_H(\bar{T}_H)$ перегретых вертикальных H -слоев плюма и среды (которые рассматривались выше при обсуждении рис. 3,а) является немонотонным. При увеличении \bar{T}_H в интервале от $\bar{T}_{H,0}$ (исходная среда) до $\bar{T}_{H,MAX}$ она возрастает от $\bar{\rho}_{H,0} = \bar{\rho}_H(\bar{T}_{H,0})$ до максимальной плотности $\bar{\rho}_{H,MAX} = \bar{\rho}_H(\bar{T}_{H,MAX})$ и далее убывает в интервале $\bar{T}_H > \bar{T}_{H,MAX}$ (так же как и в рассмотренной выше стандартной ситуации, когда $\bar{\beta}_H > 0$). При некотором значении $\bar{T}_{H,1}$ ($> \bar{T}_{H,MAX}$) реализуется равенство $\bar{\rho}_{H,1} = \bar{\rho}_H(\bar{T}_{H,1}) = \bar{\rho}_{H,0}$, что отвечает нейтральной плавучести в исходной среде перегретого H -слоя, характеризуемого $\bar{T}_{H,1}$.

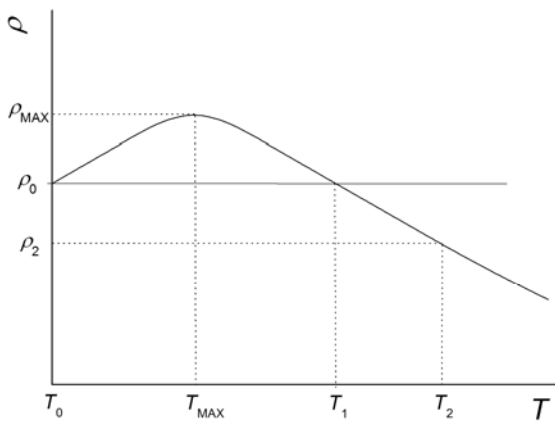


Рис. 4. Качественная зависимость плотности ρ от температуры T для аномального вещества типа воды. ρ_0 – плотность, реализуемая при T_0 и T_1 , $\rho_{MAX} > \rho_0$ – максимальная плотность, отвечающая T_{MAX} , $\rho_2 < \rho_0$ – плотность, отвечающая $T_2 > T_1$. Для воды при атмосферном давлении: $T_0 = 273$ К, $T_{MAX} = 277$ К, $T_1 = 281$ К

Рассматриваемое немонотонное поведение $\bar{\rho}_H(\bar{T}_H)$ -зависимости подобно немонотонному поведению $\rho(T)$ -зависимости воды при $P \approx 1$ атм, схематично изображенной на рис. 4, где плотность $\rho_0 = \rho(T_0)$ является аналогом $\bar{\rho}_{H,0}$, максимальная плотность ρ_{MAX} – аналогом $\bar{\rho}_{H,MAX}$, плотность $\rho_1 = \rho(T_1)$ ($= \rho_0$) – аналогом $\bar{\rho}_{H,1}$ ($= \bar{\rho}_{H,0}$). Анома-

лия $\bar{\beta}_H < 0$ в диапазоне $\bar{T}_{H,0} < \bar{T}_H < \bar{T}_{H,MAX}$ аналогична аномалии $\beta < 0$ воды в диапазоне $T_0 < T < T_{MAX}$, нормальное свойство $\bar{\beta}_H > 0$ при $\bar{T}_H > \bar{T}_{H,MAX}$ – нормальному свойству $\beta > 0$ воды при $T > T_{MAX}$.

На возможность наличия аномалии $\beta < 0$, $\bar{\beta}_H < 0$ в ВМ указывают особенности экспериментальных данных по ударному сжатию различных мантийных силикатов (кварц, форстерит, фаялит, энстатит и др.). Они состоят во взаимном пересечении в P - V координатах ударных адиабат, отвечающих различной начальной плотности образцов, в широком (\sim несколько 10 ГПа) интервале давления, террасовидном ходе ударных $P(V)$ -зависимостей (на «террасе» величина $|dP(V)/dV|$ относительно мала) и др. [25]. Их отличительной чертой является плавный характер. Изломы, которые имели бы место при фазовом превращении первого рода (со скачком объема), на ударных $P(V)$ -зависимостях силикатов отсутствуют. Последние качественно похожи на плавную террасовидную $P(V)$ -кривую сжатия плавленого (аморфного) кварца, выявленную в статических экспериментах при $T = 300$ К до $P \approx 60$ ГПа [26]. Участок $dP(V)/dV = 0$, отвечающий фазовому переходу первого рода, на ней не реализуется («терраса», как и в случае ударных $P(V)$ -зависимостей, является наклонной). В этой работе дополнительно исследовалось также поведение координационного числа, которое на «террасе» изменяется постепенно, без скачка. При объяснении полученных результатов авторы [26] склоняются к мысли о непрерывном уплотнении аморфного кварца в однофазном состоянии (сжимающемся подобно однокомпонентной жидкости).

Поскольку ударные нагрузки способствуют аморфизации исходно кристаллических силикатов (а исходно аморфные в нем и остаются), то плавное поведение ударных $P(V)$ -зависимостей можно объяснить непрерывным характером уплотнения силикатов (которое протекает более интенсивно на «террасе») в однофазном аморфном состоянии. Ударное сжатие может также сопровождаться плавной диссоциацией аморфизированного вещества. При этом взаимопересечение ударных адиабат, отвечающих различной начальной плотности образцов, а также другие экспериментальные особенности объяснимы проявлением аморфизированным веществом свойства $\beta < 0$ [25]. Область

$\beta < 0$ на основе ударных данных является ограниченной (отвечающие ей P, T -параметры по порядку величины соответствуют условиям в ВМ). За ее пределами ударные $P(V)$ -зависимости не пересекаются друг с другом (как и у большинства других исследованных веществ), что объясняется восстановлением здесь нормального свойства $\beta > 0$.

В [27] было построено модельное уравнение состояния плавленого кварца, воспроизводящее названные выше особенности ударного эксперимента. Приложение этого уравнения к мантии [24] показало возможность проявления рассматриваемой здесь немонотонности $\bar{\rho}_H(\bar{T}_H)$ -зависимости в ВМ.

Можно отметить, что качественно те же, что и силикаты, плавные особенности ударного сжатия, свидетельствующие о $\beta < 0$, имеют некоторые другие вещества в жидком (беспорядочном как и аморфное) состоянии, в частности, исходно молекулярные азот [28] (в этой работе возможность проявления аномалии $\beta < 0$ ударно-сжатым веществом экспериментально обнаружена впервые) и двуокись углерода [29].

В пользу проявления свойств $\beta < 0$, $\bar{\rho}_H < 0$ в среде ВМ говорят также геофизические модели, в которых распределения по глубине h плотности $\rho(h)$ и скорости звука $C(h) = (C = ((\partial P / \partial \rho)_S)^{0,5}$, S – энтропия) в мантии являются плавными (поскольку восстановление этих характеристик по сейсмическим данным не однозначно, то возможно их представление как разрывными, так и плавными функциями [30, 31]). Особенностью таких моделей (например, А' Буллена [32], I Ванга [33], В497 [34]) является наличие на $\rho(h)$ -зависимости в ВМ участка Δh ускоренного возрастания плотности с выполнением на нем неравенства $d\rho/dh > \rho g / C^2$ (g – ускорение силы тяжести). В предположении однородности вещества мантии реализация этого неравенства объяснима проявлением веществом среды (при $dT/dh > 0$ в ней) на участке Δh свойства $\beta < 0$ [25]. Это качественно согласуется с выводом о $\beta < 0$ на основе результатов опытов по ударному сжатию силикатов. Как и плавный характер ударных $P(V)$ -зависимостей силикатов, плавное поведение $\rho(h)$ -распределения объяснимо аморфностью мантийного вещества (с возможным проявлением диссоциации).

Предполагаемая здесь аморфность мантии допускается также в ряде других работ. О значительной аморфизации ВМ говорится в [35]. Для сложных силикатов она не исключается в [36].

Важная роль аморфизации (которой способствует водород и гелий, присутствующие в геологических материалах) в мантийных процессах отмечается в [37], что поддержано в [38].

В [25] выполнена оценка среднего значения $\bar{\beta}_{\Delta h}$ на участке Δh с использованием $\rho(h)$ -и $C(h)$ -распределений плавной модели Земли В497 [34], данные о которых взяты из книги [31] (ее автор известный геофизик К. Буллен считал модель В497 близкой к оптимальной). В этой модели неравенство $d\rho/dh > \rho g / C^2$ и, как следствие, аномалия $\beta < 0$, $\bar{\beta}_{\Delta h} < 0$, реализуются в диапазоне $h \approx 200 - 1000$ км ($\Delta h = 800$ км; соответствующий диапазон $P \approx 6 - 40$ ГПа). При оценке использовались ориентировочные для среды ВМ граничные значения температуры $T = 1500$ К при $h = 200$ км и $T = 3000$ К при $h = 1000$ км. Расчет дает $\bar{\beta}_{800} = -7 \cdot 10^{-5}$ 1/К. Далее это значение $\bar{\beta}_{800}$ и интервал $h \approx 200 - 1000$ км используются в качестве ориентировочных (из-за некоторой неопределенности параметров, входящих в формулу для $\bar{\beta}_{800}$, и приближенности границ 200 и 1000 км) характеристик аномалии $\beta < 0$ в среде ВМ.

Для верхних 200 км среды ВМ значение $\bar{\beta}_{200} \leq 3 \cdot 10^{-5}$ 1/К [18]. Оно ощутимо меньше $|\bar{\beta}_{800}|$, уже и диапазон его реализации по h . С учетом этого для среды ВМ величина $\bar{\beta}_{1000} < 0$. Конкретные значения $\bar{\beta}_{200}$ и $\bar{\beta}_{800}$ таковы, что при перегреве H -слоя высотой $H = 1000$ км на $\Delta T = 100$ К, его нижней части высотой 800 км отвечает впадина глубиной 5,6 км ($\approx -7 \cdot 10^{-5} \cdot 100 \cdot 800$ км), а верхней части высотой 200 км – выпуклость $< 0,6$ км, что суммарно дает поверхностную депрессию $\Delta H \approx -5$ км.

В рассматриваемой модели сравнительно слабо (сотни К) перегретым H -слоям плюма и среды отвечает многокилометровая впадина. Ожидаемые перегревы, соответствующие рассмотренным выше характеристикам $\bar{T}_{1000, \text{MAX}}$ (этой температуре, на основе вышеприведенной оценки $\Delta H \approx -5$ км при $\Delta T = 100$ К, отвечает модельная впадина глубиной \sim несколько первых десятков километров) и $\bar{T}_{1000, 1}$ ($\Delta H \approx 0$), составляют ~ 1000 К и ~ 2000 К соответственно. При этих оценках, имеющих полуколичественный характер, использованы результаты уравнения состояния [27] в приложении к ВМ.

Аномалия $\bar{\beta}_H < 0$ в среде ВМ проявляется также и при величинах H ощутимо меньших 1000 км (ориентировочно до $H \approx 400$ км), пока свойство $\bar{\beta}_{200} > 0$ в верхних 200 км не компенсирует свойство $\bar{\beta}_{H-200} < 0$ в нижней части высотой $H-200$. То есть интервал проявления по H рассматриваемого немонотонного поведения $\bar{\rho}_H(\bar{T}_H)$ -зависимости весьма значителен. Следует отметить, что, несмотря на свойство $\bar{\beta}_{200} > 0$ и вследствие этого положительную плавучесть плюма высотой $H < 200$ км в подкоровом положении при относительно небольшом перегреве ΔT (сотни кельвинов), подобный плюм не может подняться из НМ в ВМ до коры. Это связано с тем, что при внедрении снизу в ВМ он попадает в область h , где средой проявляется свойство $\beta < 0$. Нейтральная плавучесть плюма с высотой $H = 1000$ км ($\bar{T}_{1000} = \bar{T}_{1000,1}$) реализуется при положительной плавучести его отдельных участков. Как показывает уравнение состояния [27], такой участок размером $h_L \sim$ несколько сотен километров расположен в нижней части плюма (примыкает к границе НМ–ВМ). Если высоту $H = 1000$ км уменьшить за счет уменьшения h_L , то плавучесть плюма понизится (тем больше, чем меньше h_L). Для всплытия до коры укороченный плюм должен быть дополнительно нагрет.

Неравенство $d\rho/dh > \rho g/C^2$, выполняющееся в однородной среде при $\beta < 0$ и $dT/dP > 0$ [25], является условием отсутствия конвекции в подобной среде [39]. В модели В497 данное неравенство реализуется в диапазоне $h \approx 200 - 1000$ км. Это совместно с наличием под корой литосферы (толщиной ~ 100 км), в которой пластические течения затруднены, как представляется, исключает конвекцию во всей ВМ. Вследствие этого в рассматриваемой модели плюмы, внедренные из НМ в ВМ, неподвижны в последней (при наличии конвекции в ВМ, возможной при $\beta > 0$ и сверхадиабатическом подогреве в ВМ снизу, следует ожидать смещения и видоизменения плюмов).

В НМ ($1000 \leq h \leq 2900$ км) в модели В497 приближенно выполняется соотношение $d\rho/dh = \rho g/C^2$. Это, при восстановлении в однородной среде НМ свойства $\beta > 0$, говорит о выполнении в ней условия изэнтропичности $dS/dP \approx 0$. По общепринятому представлению наиболее вероятным механизмом, обеспечивающим изэнтропичность, является конвекция. Когда исходная высота под-

нявшегося до коры плюма $H > 1000$ км, конвекция в НМ, как представляется, за относительно короткое время «смоет» его основание, уменьшив высоту до размера ВМ. Поэтому здесь рассматривается случай подкоровых плюмов с $H \leq 1000$ км (но все же при не слишком малых значениях H пока сохраняется немонотонность функции $\bar{\rho}_H(\bar{T}_H)$).

Следует еще раз подчеркнуть приближенность основанного на модели В497 интервала $h \approx 200 - 1000$ км, где выполняется неравенство $d\rho/dh > \rho g/C^2$. Другие модели показывают для него несколько отличающиеся значения. В частности, в упомянутых выше моделях А' Буллена [32] и I Ванга [33] эти интервалы составляют $\approx 400 - 1000$ км и $\approx 0 - 700$ км соответственно. В моделях [40, 41] они равны $\approx 0 - 1080$ км и $\approx 180 - 730$ км. При более высоких h (в НМ) в названных моделях $d\rho/dh \approx \rho g/C^2$.

Можно отметить, что неравенство $d\rho/dh > \rho g/C^2$ является условием отсутствия конвекции как для однородной, так и неоднородной среды с плавной зависимостью ее состава от h [42]. В настоящей работе неоднородность не рассматривается, хотя и в случае ее наличия обсуждаемый далее механизм впадинообразования может работать (при $\bar{\beta}_H < 0$ в среде ВМ) в модифицированном виде.

Немонотонность поведения $\bar{\rho}_H(\bar{T}_H)$ -зависимости в ВМ приводит к следующему. Всплыть в среде ВМ до коры и выталкиваться из нее в подкоровом положении ($\Delta H_2 > 0$) может только горячий плюм, характеризуемый исходной ($t^0 = 0$) температурой $\bar{T}_{H,2} > \bar{T}_{H,1}$, поскольку тогда $\bar{\rho}_{H,2} = \bar{\rho}_H(\bar{T}_{H,2}) < \bar{\rho}_{H,1} = \bar{\rho}_{H,0}$. Аналогом этого является всплытие до поверхности водной среды, определяемой $T_0 = 273$ К, и выталкивание из нее вертикального элемента (H -столбика или H -слоя) воды, характеризуемого $T_2 > 281$ К (давление в системе ≈ 1 атм). При $\bar{T}_{H,2} \approx \bar{T}_{H,1}$ $\Delta H_2 \approx 0$, что аналогично нейтральной плавучести перегретого элемента воды при $T_2 \approx 281$ К. Если всплывший исходно горячий плюм остынет до теплого состояния, определяемого $\bar{T}_{H,0} < \bar{T}_H < \bar{T}_{H,1}$ (тогда $\bar{\rho}_H(\bar{T}_H) > \bar{\rho}_{H,0} = \bar{\rho}_{H,1}$), то ему будет отвечать впадина $\Delta H < 0$, максимальная глубина которой реализуется при $\bar{T}_H = \bar{T}_{H,\text{MAX}}$ (тогда $\bar{\rho}_H(\bar{T}_H) = \bar{\rho}_{H,\text{MAX}}$). Аналогом является остывание всплывшего исход-

но горячего ($T_2 > 281$ К) элемента воды до теплого состояния $273 \text{ К} < T < 281 \text{ К}$, в котором $\rho(T) > \rho_1 = \rho_0$ с максимальным значением ρ_{MAX} при $T = T_{\text{MAX}} = 277 \text{ К}$. Уровень подобного тепло-го элемента в водной среде понижен. В примере с водой предполагается, что вещество, характеризуемое $\rho(T)$ -зависимостью воды (рис. 4), обладает достаточными реологическими характеристиками для поддержания рельефа ΔH , определяемого формулой гидростатики $\Delta H = (1 - \rho/\rho_0)H$, где H – высота перегретого элемента. Роль реологии могла бы выполнить вертикальная трубка с открытыми концами, в которую помещен рассматриваемый элемент.

На рис. 3,б, аналогичном рис. 3,а, изображен ожидаемый рельеф поверхности $\Delta H(x, t)$ в районе всплытия плюма-пластины при немонотонной $\bar{\rho}_H(\bar{T}_H)$ -зависимости H -слоев в начальный момент времени $t^0 = 0$, промежуточный момент t^1 (активная стадия теплообмена плюма со средой ВМ при высоком градиенте температуры на границах) и большой t^2 (сильное остывание плюма, нагрев двух больших зон среды). Как и на рис. 3,а, предполагается, что исходная ($t^0 = 0$) плавучесть всех H -слоев плюма одинакова. Первоначальное значение $\Delta H_2 = \text{const}$ над плюмом тем больше, чем лучше выполняется условие $\bar{T}_{H,2} > \bar{T}_{H,1}$ (при $H = \text{const}$). В случае $\bar{T}_{H,2} \approx \bar{T}_{H,1}$ значение $\Delta H_2 \approx 0$. При $t \sim t^1$ распространяющиеся в плюм-пластину волны охлаждения приводят к постепенному, начиная с границ, уплотнению и проседанию H -слоев плюма (так как в это время уменьшение характеризующей их величины $\bar{T}_H(x, t)$ происходит в интервале $\bar{T}_H > \bar{T}_{H,\text{MAX}}$, где $\bar{\beta}_H > 0$), что сопровождается уменьшением исходного поднятия $\Delta H_2 = \text{const}$. Образование при $t \sim t^1$ двух показанных на рис. 3,б пограничных впадин, далее называемых впадинами стыка, связано с переходом в волнах нагрева H -слоев среды в теплое плотное состояние $\bar{T}_{H,0} < \bar{T}_H(x, t) < \bar{T}_{H,1}$. Максимум впадины стыка соответствует реализации в перегретом H -слое среды условия $\bar{T}_H(x, t) = \bar{T}_{H,\text{MAX}}$ (тогда $\bar{\rho}_H(\bar{T}_H(x, t)) = \bar{\rho}_{H,\text{MAX}}$). Ширина впадин стыка может дополнительно увеличиваться за счет перехода в волнах охлаждения приграничной части H -слоев плюма в теплое плотное состояние, условием чего является незначительное превышение $\bar{T}_{H,2}$ над $\bar{T}_{H,1}$. Возможно также некоторое суже-

ние этих впадин за счет нагрева приграничной части H -слоев среды до горячего состояния $\bar{T}_H > \bar{T}_{H,1}$, условием чего является сильное превышение $\bar{T}_{H,2}$ над $\bar{T}_{H,1}$. По мере распространения тепловых волн нагрева впадины стыка все более расширяются. Поскольку область распространения тепловых волн со временем увеличивается как $\Delta x \sim (\chi t)^{0.5} (\sim 10(t)^{0.5})$, Δx – км, t – млн лет, $\chi \approx 0,01 \text{ см}^2/\text{с}$, то расширение впадин стыка будет определяться примерно тем же соотношением. При большом времени $t \sim t^2$ все H -слои, как плюма, так прогретой от него среды, перейдут в теплое плотное состояние $\bar{T}_{H,0} < \bar{T}_H(x, t) < \bar{T}_{H,1}$, вследствие чего образуется показанная (упрощенно) на рис. 3,б общая впадина (вместо общего поднятия на рис. 3,а).

Две симметричные линейные модельные впадины стыка (рис. 3,б, $t \sim t^1$), возникающие при горизонтальном теплообмене вертикального плюма-пластины со средой из-за перехода части вещества (в основном – вещества среды) в теплое плотное состояние, можно трактовать как смежные впадины симметричных ОД-систем. Представляется, что для асимметричных ОД-систем смежные впадины обусловлены той же причиной, но искажены наклонным положением плюма-пластины под ОД. Наклонное положение плюма не устраняет образования общей впадины с переходом вещества при $t \sim t^2$ в теплое плотное состояние.

В модельной ситуации, когда ОД образована не единым плюмом-пластиной, а рядом примыкающих друг к другу отдельных разновременных всплывших плюмов с одинаковой исходной плавучестью, следует ожидать, что уменьшение исходного поднятия (опускание островов) и ширина впадин стыка будут больше в той части дуги, которая возникла раньше.

В случае относительно медленного достижения плюмом наивысшей точки подъема (момент $t^0 = 0$ на рис. 3,б) его горизонтальный теплообмен со средой проявится уже при $t < t^0 = 0$. Из-за этого возможно начало перехода пограничного вещества в теплое плотное состояние и, как следствие, начало образования двух впадин стыка, в то время как основная масса плюма (в первую очередь – его центральная часть) еще всплывает (на последней стадии – с увеличением ΔH).

Представляет интерес расчет модельного профиля $\Delta H(x, t)$, реализующегося при остывании вертикального плюма-пластины в случае немонотонной

тонной $\bar{\rho}_H(\bar{T}_H)$ -зависимости H -слоев. Далее эта задача решается в упрощенном виде на примере воды (точнее, твердого вещества, обладающего аналогичной воде аномальной $\rho(T)$ -зависимостью).

2. Модельный рельеф в случае плоской тепловой волны, распространяющейся в веществе с аномальной зависимостью плотности от температуры

Используется прямоугольная система координат с осями x и z , направленными по горизонтали и вертикали плоскости рис. 3. В начальный момент времени $t = 0$ в интервалах $x < -x_0$ и $x > x_0$ ($x_0 = \text{const}$) температура водной среды равна T_0 , в интервале $-x_0 \leq x \leq x_0$, где расположен перегретый вертикальный слой воды (пластина), она равна $T_2 (> T_0)$. Как и выше, рассматривается только горизонтальный теплообмен вдоль оси x (краевыми эффектами, обусловленными конечностью высоты H и длины L пластины, пренебрегается).

Считается, что зависимость температуры $T(x, t)$ вертикальных H -слоев определяется обычным уравнением Фурье

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (1)$$

где $\chi = \text{const}$. На границе $x = 0$ значение $\partial T / \partial x = 0$ (так как в силу симметрии задачи в этом сечении пластины поток тепла $q = -k \partial T / \partial x = 0$, k – коэффициент теплопроводности). Решение (1) соответствует интервалу $T_0 < T(x, t) < T_2$. Его результат приводится позже.

Если функция $\Delta H(T)$ в интервале $T_0 < T < T_2$ известна, то подстановка в нее $T(x, t)$ -распределения дает зависимость рельефа $\Delta H(x, t) = \Delta H(T(x, t))$ от x и t .

При определении функции $\Delta H(T)$ реализовалась следующая качественная процедура.

Полагается, что $\rho(T)$ -зависимость плотности вертикальных H -слоев имеет немонотонный, отраженный на рис. 4 вид. Температурам T_0 (среда), T_{MAX} , T_1 , T_2 (горячая пластина) соответствуют величины $\rho_0 = \rho(T_0)$, $\rho_{\text{MAX}} = \rho(T_{\text{MAX}}) > \rho_0$, $\rho_1 = \rho(T_1) = \rho_0$, $\rho_2 = \rho(T_2) < \rho_0$. Для воды $T_0 = 273$ К, $T_{\text{MAX}} = 277$ К, $T_1 = 281$ (хотя в общем случае это параметры). $T_2 (> T_1)$ – параметр, значения которого далее отвечают интервалу $\approx 281 - 293$ К.

Характеристики ρ_0 и ρ_{MAX} для воды известны, но в настоящем качественном подходе конкретные значения этих параметров не существенны. При увеличении T_2 (в интервале $T_2 > T_1$) значение $\rho_2 = \rho(T_2)$ уменьшается.

При определении ΔH над H -слоями используется формула гидростатики – $\Delta H = (1 - \rho / \rho_0)H$. В рассматриваемом случае $H = \text{const}$, но значение H не фиксировано. Поэтому далее учитывается только часть функции ΔH , зависящая от ρ . Эта зависимость определяется соотношением $\Delta H(\rho) = \Delta H_2'(\rho - \rho_0) / (\rho_2' - \rho_0)$, где $\rho_2' = \rho(T_2') = \text{const}$ – плотность H -слоя горячей воды при некотором избранном (опорном) значении $T_2 = T_2' = \text{const} > T_1$; $\Delta H_2' = \text{const} > 0$ – поднятие, отвечающее $\rho = \rho_2'$. Выбор значения T_2' произволен. Значение константы $\Delta H_2'$ также произвольно. При $\rho = \rho_0$ значение $\Delta H(\rho_0) = 0$. Так как $\rho_1 = \rho_0$, то также $\Delta H(\rho_1) = 0$. Определенному значению T_2 и соответствующему значению $\rho_2 = \rho(T_2)$ отвечает исходное поднятие $\Delta H_2(T_2) = \Delta H(\rho(T_2))$. С увеличением T_2 значение $\Delta H_2(T_2)$ увеличивается. Кроме интервала плотности $\rho_0 > \rho > \rho_2(T_2)$ (которому отвечает поднятие $\Delta H(\rho) > 0$), в рассматриваемом случае затрагивается также интервал $\rho_0 < \rho < \rho_{\text{MAX}}$ (рис. 4). Ему при условии $\Delta H(\rho_0) = 0$ соответствует впадина $\Delta H(\rho) < 0$. Значение $\Delta H_{\text{MIN}} = \Delta H(\rho_{\text{MAX}}) < 0$, достигаемое при плотности $\rho = \rho_{\text{MAX}}$ (реализуемой при $T = T_{\text{MAX}}$), является минимальным в этом интервале плотности ($|\Delta H_{\text{MIN}}|$ – максимальная глубина впадины).

Функциям $\rho(T)$ и $\Delta H(\rho)$ рассмотренного выше вида соответствует немонотонная $\Delta H(T) = \Delta H(\rho(T))$ -зависимость, которая при увеличении T от T_0 до T_2 ведет себя следующим образом – в интервале $T_0 - T_{\text{MAX}}$ (далее – температурная зона С) убывает от 0 до $\Delta H_{\text{MIN}} < 0$, в интервале $T_{\text{MAX}} - T_1$ (зона Б) возрастает от $\Delta H_{\text{MIN}} < 0$ до 0, в интервале $T_1 - T_2$ (зона А) возрастает от 0 до $\Delta H_2(T_2) > 0$. Спад и рост $\Delta H(T)$ -зависимости (с учетом поведения $\rho(T)$ -зависимости рис. 4 на отдельных участках и вида $\Delta H(\rho)$ -зависимости) происходят монотонно. Изменение T вблизи T_{MAX} не приводит к изменению $\rho(T)$ и $\Delta H(T)$ (так как $\beta = 0$). Совокупно интервалу $T_0 < T < T_1$ (где

$\rho_0 < \rho(T) < \rho_{\text{MAX}}$) отвечает впадина $\Delta H(T) < 0$ с максимальной глубиной $|\Delta H_{\text{MIN}}|$ (соответствующей $T = T_{\text{MAX}}$), диапазону $T_1 < T < T_2$ ($\rho_0 > \rho > \rho_2(T_2)$) – поднятие $\Delta H(T) > 0$ с максимальной высотой $\Delta H_2(T_2)$. На основе $\Delta H(T)$ -зависимости определяется модельный рельеф $\Delta H(x, t) = \Delta H(T(x, t))$.

Так как функции $\rho(T)$ и $\Delta H(\rho)$ определены только качественно (в частности, параметры ρ_0 , ρ_{MAX} , $\Delta H_2'(\rho_2')$ произвольны), то функция $\Delta H(T)$ также является качественной. Здесь, однако, важен только принципиальный вид ее поведения – наличие на участке $T_0 < T < T_2$ трех зон А (где $\Delta H(T) > 0$), Б ($\Delta H(T) < 0$) и С ($\Delta H(T) < 0$) и описанный выше характер изменения $\Delta H(T)$ -зависимости с увеличением T в каждой из этих зон. Пусть, например, функция $\Delta H(T)$ рассматриваемого вида задана неким вариантом $\Delta H_1(T)$. При $t = \text{const} \geq 0$ (значение константы произвольно) $T(x, t = \text{const})$ -распределение, соответствующее определенному начальному значению T_2 , расположено (в общем случае) в трех зонах А, Б и С, которым отвечают три фиксированных (при фиксированных значениях T_1 и T_{MAX}) x -интервала Δx^A , Δx^B и Δx^C . Вдоль каждого из них с изменением x рельеф $\Delta H_1(x, t = \text{const})$ изменяется в соответствии с поведением $\Delta H_1(T) = \Delta H_1(T(x, t = \text{const}))$ -зависимости в зонах А, Б и С. Пусть теперь вместо $\Delta H_1(T)$ -функции используется другая $\Delta H_2(T)$ -функция, которая по-прежнему в интервале $T_0 - T_{\text{MAX}}$ монотонно убывает от 0 до $\Delta H_{\text{MIN}} < 0$, в интервале $T_{\text{MAX}} - T_1$ монотонно возрастает от $\Delta H_{\text{MIN}} < 0$ до 0, в интервале $T_1 - T_2$ монотонно возрастает от 0 до $\Delta H_2(T_2) > 0$. При этом она по сравнению с $\Delta H_1(T)$ имеет, например, измененные значения $\Delta H_2(T_2) > 0$, $\Delta H_{\text{MIN}} < 0$ и отличается некоторыми «мелкими» деталями поведения в зонах А, Б, С (с сохранением монотонности). Такой переход от функции $\Delta H_1(T)$ к $\Delta H_2(T)$ не скажется на размерах А-, Б- и С-зон и соответственно на размерах x -интервалов Δx^A , Δx^B и Δx^C любого избранного для совместного рассмотрения $T(x, t = \text{const})$ -распределения. При этом качественный вид $\Delta H_2(x, t = \text{const})$ - и $\Delta H_1(x, t = \text{const})$ -распределений на x -интервалах

Δx^A , Δx^B и Δx^C рассматриваемой $T(x, t = \text{const})$ -кривой будет одинаков. Относительное положение двух произвольных $\Delta H_1(x, t = \text{const}_1)$ - и $\Delta H_1(x, t = \text{const}_2)$ -кривых также качественно воспроизведется относительным положением $\Delta H_2(x, t = \text{const}_1)$ - и $\Delta H_2(x, t = \text{const}_2)$ -кривых. То же самое относится к $\Delta H_2(x = \text{const}, t)$ - и $\Delta H_1(x = \text{const}, t)$ -распределениям, отвечающих определенному $T(x = \text{const}, t)$ -распределению. Переход к решению $T(x, t)$ при другом значении T_2 не изменяет этого вывода. Поэтому если, как далее, при решении задачи ограничиться вопросом о x -размерах поднятий и впадин при $t = \text{const}$, изменении x -размеров этих особенностей рельефа со временем t и их зависимостью от T_2 , рассматривая при этом рельеф в областях поднятия и впадины относительно принятых значений $\Delta H_2'(T_2') > 0$ и $\Delta H_{\text{MIN}} < 0$, то подобные отличия между $\Delta H_1(T)$ - и $\Delta H_2(T)$ -функциями не существенны. Ниже для определенности функция $\Delta H(T)$ считается заданной (например, графически).

Можно отметить, что если рассматриваемая здесь $\rho(T)$ -аномалия отсутствует (нет зон Б и С) и зона А (где $\beta > 0$) занимает весь интервал $T_0 < T < T_2$, то $T(x, t)$ -зависимости ($T_0 < T(x, t) < T_2$) соответствует $\Delta H(x, t) = \Delta H(T(x, t))$ -зависимость, которая при увеличении $T(x, t)$ от T_0 до T_2 монотонно возрастает от 0 до исходного значения $\Delta H_2(T_2) > 0$ (подобная ситуация отражена на рис. 3,а).

Далее вместо величин x, t, T используются безразмерные переменные $\xi = x/x_0$, $\tau = t/t_0$ ($t_0 = x_0^2/\chi$), $\theta = (T - T_0)/(T_2 - T_0)$. Функция $\theta(\xi, \tau)$ в момент $\tau = 0$ подчиняется начальному условию: $\theta = 1$ при $-1 \leq \xi \leq 1$ и $\theta = 0$ вне этого диапазона ξ . При $\xi = 0$ значение $\partial\theta/\partial\xi = 0$.

В безразмерных переменных решение (1), удовлетворяющее названным начальному и граничному условиям, имеет вид [39]

$$\theta(\xi, \tau) = \frac{1}{2} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{1 - \xi}{2(\tau)^{0,5}} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{1 + \xi}{2(\tau)^{0,5}} \right) \right], \quad (2)$$

где $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{(\pi)^{0,5}} \int_0^x \exp(-\varepsilon^2) d\varepsilon$ – интеграл ошибок. Выражение (2) определяет функцию $\theta(\xi, \tau)$ при $\xi \geq 0$. При $\xi \leq 0$ решение симметрично.

На рис. 5 и 6 показаны $\theta(\xi, \tau = \text{const})$ -зависимости (2) в фиксированные моменты времени τ , равные $\tau^1 = 0,01$, $\tau^2 = 0,05, \dots, \tau^{12} = 10$. Они монотонно уменьшаются с увеличением ξ . Далее эти зависимости для краткости иногда называются $\theta(\xi, \tau^n)$ - или θ^n -зависимостями или кривыми ($n = 0, 1, 2, \dots$; $\theta(\xi, \tau^2)$ -зависимость, θ^3 -кривая и т. д.). θ^n -кривые пересекаются друг с другом. Значения θ в точках пересечения обозначены как θ^{23} (пересечение $\theta(\xi, \tau^2)$ - и $\theta(\xi, \tau^3)$ -кривых), θ^{36} (пересечение τ^3 - и τ^6 -кривых) и т. д. Некоторые из них указаны на рисунках. Координаты ξ этих точек имеют обозначения ξ^{23} , ξ^{36} и т. д. На двух θ^n -кривых рис. 5 и 6 в точке их пересечения значение ρ одинаковое.

Функция $\theta(T)$ при увеличении T от T_0 до T_2 монотонно возрастает от 0 и 1. Температурным параметрам T_{MAX} и T_1 соответствуют безразмерные параметры $\theta_{\text{MAX}} = (T_{\text{MAX}} - T_0)/(T_2 - T_0)$ и $\theta_1 = (T_1 - T_0)/(T_2 - T_0)$. Отрезок $\Delta H(T)$ -зависимости, отвечающий интервалу $T_0 < T < T_2$, с помощью функции $T(\theta)$, обратной $\theta(T)$, преобразуется к виду $\Delta H(T) = \Delta H(T(\theta)) = \Delta H(\theta)$. Функция $\Delta H(\theta)$ схематично изображена на рис. 7. При увеличении θ от 0 до 1 она имеет следующее поведение – в интервале $0 - \theta_{\text{MAX}}$ (отмечен на рис. 7 как зона С) убывает от 0 до $\Delta H_{\text{MIN}} < 0$, в интервале $\theta_{\text{MAX}} - \theta_1$ (зона Б) возрастает от $\Delta H_{\text{MIN}} < 0$ до 0, в интервале $\theta_1 - 1$ (зона А) возрастает от 0 до $\Delta H_2(T_2) > 0$. Вблизи θ_{MAX} (слева и справа от него) при изменении θ величина $\Delta H(\theta) \approx \text{const} = \Delta H_{\text{MIN}}$ (так как $d\rho/d\theta = 0$).

На рис. 7 диапазону $0 < \theta < \theta_1$ (зоны Б+С) отвечает впадина $\Delta H(\theta) < 0$ с максимальной глубиной $|\Delta H_{\text{MIN}}|$ при $\theta = \theta_{\text{MAX}}$, диапазону $\theta_1 < \theta < 1$ (зона А) – поднятие $\Delta H(\theta) > 0$ с максимальной высотой $\Delta H_2(T_2) = \Delta H_2(\theta = 1)$.

На основе $\Delta H(\theta)$ -зависимости рис. 7 и функции $\theta(\xi, \tau)$ (2) определяется модельный рельеф $\Delta H(\xi, \tau) = \Delta H(\theta(\xi, \tau))$.

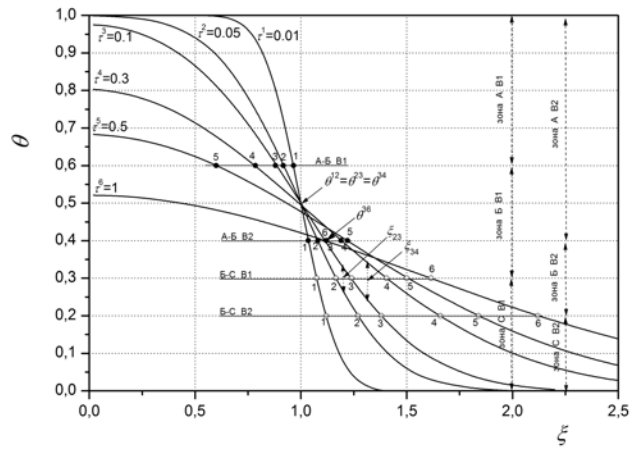


Рис. 5. Зависимости температуры θ от координаты ξ в моменты времени $\tau^1 - \tau^6$. Обозначения А–Б В1 и А–Б В2 указывают на соответствие черных кружков положению границы А–Б для В1- и В2-вариантов, обозначения Б–С В1 и Б–С В2 указывают на соответствие светлых кружков положению границы Б–С для В1- и В2-вариантов. Остальные пояснения в тексте

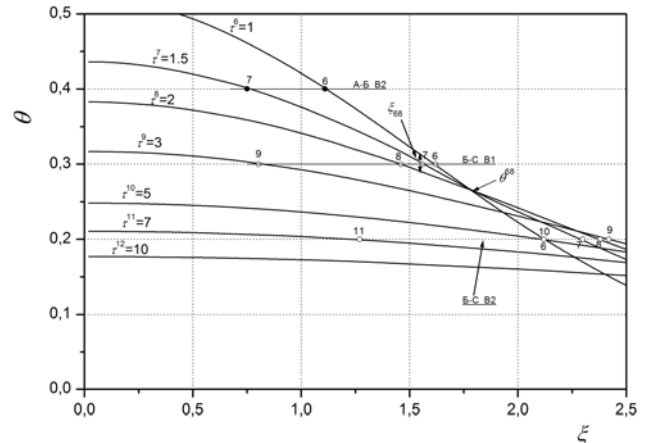


Рис. 6. Аналогично рис. 5 в моменты времени $\tau^6 - \tau^{12}$. Пояснения в тексте

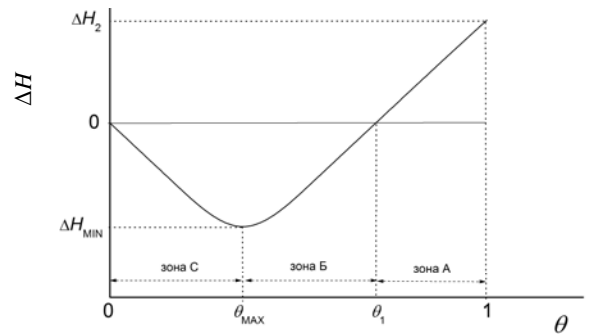


Рис. 7. Качественная зависимость уровня поверхности ΔH от температуры θ . Пояснения в тексте

Далее, при фиксированных параметрах $T_0 = 273$ К, $T_{MAX} = 277$ К, $T_1 = 281$ К, рассматриваются несколько модельных вариантов с разными значениями T_2 . Наиболее подробно анализируются два варианта при $T_2 = 286,3$ К (вариант В1; умеренная начальная плавучесть горячей пластины) и при $T_2 = 293$ К (вариант В2; повышенная плавучесть горячей пластины). В1-вариант характеризуют параметры $\theta_{MAX} = 0,3$ и $\theta_1 = 0,6$, В2-вариант – $\theta_{MAX} = 0,2$ и $\theta_1 = 0,4$.

При сохранении общего, отраженного на рис. 7, характера поведения $\Delta H(\theta)$ -зависимости, главные отличительные особенности отвечающих В1- и В2-вариантам $\Delta H_{В1}(\theta)$ - и $\Delta H_{В2}(\theta)$ -зависимостей определяются значениями параметров θ_{MAX} , θ_1 (при фиксированных значениях T_0 , T_{MAX} и T_1 они зависят только от T_2) и $\Delta H_2(\theta = 1) = \Delta H_2(T_2)$. Отвечающее им значение $\Delta H_{MIN} = \text{const}$, так как $T_{MAX} = \text{const}$.

Интервал $0 \leq \theta \leq 1$ рис. 5 и 6 состоит из трех температурных зон А, Б и С, выделенных на рис. 7. Для модельных вариантов В1 и В2 их размеры отражены на рис.5.

Как видно из рис. 5 и 6, при сравнительно малом времени $\tau < \tau_{AB}$ (значение $\tau_{AB} = \tau_{AB}(\theta_1)$ определяется размером зоны А) $\theta(\xi, \tau^n)$ -кривые содержат три отрезка А, Б и С, температура θ на которых отвечает зонам А, Б и С (соответствие θ на отрезке А зоне А может быть как полным, так и частичным, на отрезках Б и С охват зон Б и С полный). При промежуточном времени $\tau_{AB} < \tau < \tau_{BC}$ (значение $\tau_{BC} = \tau_{BC}(\theta_{MAX})$ определяется размером зоны С) $\theta(\xi, \tau^n)$ -кривые состоят из двух отрезков Б и С (на отрезке Б зона Б может быть охвачена полностью или частично, соответствие зоне С – полное). При $\tau > \tau_{BC}$ $\theta(\xi, \tau^n)$ -кривые содержат один отрезок С, с полным или частичным соответствием θ зоне С. Как видно из рис. 5 и 6, в В1-варианте ($\theta_1 = 0,6$, $\theta_{MAX} = 0,3$) – $\tau_{AB} \approx \tau^5 \div \tau^6$, $\tau_{BC} \approx \tau^9 \div \tau^{10}$, в В2-варианте ($\theta_1 = 0,4$, $\theta_{MAX} = 0,2$) – $\tau_{AB} \approx \tau^7 \div \tau^8$, $\tau_{BC} \approx \tau^{11} \div \tau^{12}$.

В конкретном варианте (В1, В2 и др.) при переходе от одной θ^n -кривой к другой (изменении τ^n) изменяется положение ξ -границ отрезков А и Б (граница А–Б) и отрезков Б и С (граница Б–С). Положение границы А–Б в моменты времени

$\tau = \tau^1, \tau^2, \tau^3 \dots$ для вариантов В1 и В2 изображено на рис. 5 и 6 черными кружками 1, 2, 3..., расположенными на горизонталях $\theta = \theta_1 = 0,6$ и $\theta = \theta_1 = 0,4$ соответственно. Перемещение границы Б–С для вариантов В1 и В2 отражено на этих рисунках светлыми кружками 1, 2, 3..., расположенными на горизонталях $\theta = \theta_{MAX} = 0,3$ и $\theta = \theta_{MAX} = 0,2$ соответственно. Вместе с положением границ А–Б и Б–С изменяются также размер ξ -интервала (проекция на ось ξ) отрезков А, Б и С (вплоть до нуля при исчезновении отрезков А и Б) и при частичном перекрытии отрезком зоны размер его θ -интервала (проекция на ось θ). Поскольку деление θ^n -кривых на А-, Б-, С-отрезки зависит от размера А-, Б-, С-зон, то в различных модельных вариантах (В1, В2 и др.) преобразование со временем размеров ξ - и θ -интервалов этих отрезков происходит по-разному.

Согласно рис. 7 в температурной зоне А величина $\Delta H(\theta) > 0$, в зонах Б и С – $\Delta H(\theta) < 0$, на стыке зон А и Б – $\Delta H(\theta_1) = 0$, на стыке зон Б и С – $\Delta H(\theta_{MAX}) = \Delta H_{MIN} < 0$. В соответствии с этим на определенной $\theta(\xi, \tau^n)$ -кривой рис. 5 и 6 ее отрезку А (на его ξ -интервале) отвечает поднятие $\Delta H(\xi, \tau^n) > 0$, ее отрезкам Б и С – впадины $\Delta H(\xi, \tau^n) < 0$, на границе А–Б – $\Delta H(\xi, \tau^n) = 0$, на границе Б–С – $\Delta H(\xi, \tau^n) = \Delta H_{MIN} < 0$.

При $\tau < \tau_{BC}$, когда на θ^n -кривых рис. 5 и 6 отрезки Б и С реализуются совместно (с А-отрезком или без него), соответствующие им впадины в сумме составляют одну из рассмотренных выше (рис. 3,б, $t \sim t^1$) модельных впадин стыка (вторая впадина стыка соответствует симметричному (2) решению при $\xi \leq 0$). Их граница Б–С, где реализуется минимум $\Delta H(\xi, \tau^n)$ -зависимости $\Delta H_{MIN} < 0$ (максимум впадины стыка глубиной $|\Delta H_{MIN}|$), является модельным аналогом оси ГЖ для симметричных ОД. При $\tau < \tau_{AB}$ на θ^n -кривых граница А–Б является границей поднятие-впадина стыка ($\Delta H(\xi, \tau^n) = 0$). При $\tau > \tau_{AB}$, когда А-отрезок на θ^n -кривых исчезает, две впадины стыка образуют общую впадину с двумя симметричными максимумами (глубиной $|\Delta H_{MIN}|$), каждый из которых соответствует границе Б–С. При $\tau > \tau_{BC}$, когда θ^n -кривые содержат один С-отрезок, минимум $\Delta H(\xi, \tau^n)$ -зависимости

расположен (см. далее) при $\xi = 0$, что соответствует реализации общей чашеподобной впадины (подобная ситуация отражена на рис. 3,б при $t \sim t^2$). Ее глубина ($\leq |\Delta H_{\text{MIN}}|$) уменьшается со временем τ .

Как видно из рис. 5 и 6, вдоль отрезков А, Б и С любой θ^n -кривой при увеличении ξ значение θ только уменьшается. Это с учетом отраженного на рис. 7 характера изменения величины $\Delta H(\theta)$ с уменьшением θ в температурных зонах А, Б и С отвечает следующему поведению $\Delta H(\xi, \tau^n)$ -зависимостей вдоль $\theta(\xi, \tau^n)$ -кривых рис. 5 и 6 с увеличением координаты ξ в диапазоне $\xi \geq 0$. При $\tau < \tau_{\text{AB}}$ вдоль А-отрезка значение $\Delta H(\xi, \tau^n)$ уменьшается от начального значения $\Delta H(\xi = 0, \tau^n) > 0$ (отвечающего значению $\theta(\xi = 0, \tau^n) > \theta_1$) до 0 (соответствует $\theta = \theta_1$ на границе А–Б), вдоль Б-отрезка значение $\Delta H(\xi, \tau^n)$ уменьшается от 0 до минимального значения $\Delta H_{\text{MIN}} < 0$ (отвечает $\theta = \theta_{\text{MAX}}$ на границе В–С), вдоль С-отрезка значение $\Delta H(\xi, \tau^n)$ увеличивается от $\Delta H_{\text{MIN}} < 0$ до ≈ 0 (ноль реализуется при конечном значении ξ , которое отвечает условию $\theta \approx 0$ на рассматриваемой θ^n -кривой). Вблизи границы Б–С $\Delta H(\xi, \tau^n) \approx \Delta H_{\text{MIN}} = \text{const}$. Например, в варианте В1 вдоль $\theta(\xi, \tau^2)$ -кривой рис. 5 $\Delta H(\xi)$ -зависимость уменьшается от значения $\Delta H_2(\theta = 1) = \Delta H_2(T_2)$ до 0 на ξ -участке, расположенном от $\xi = 0$ до значения координаты ξ черного кружка 2 на горизонтали $\theta = \theta_1 = 0,6$ рис. 5, далее она уменьшается от 0 до $\Delta H_{\text{MIN}} < 0$ при значении координаты ξ светлого кружка 2 на горизонтали $\theta = \theta_{\text{MAX}} = 0,3$ рис. 5, после чего увеличивается от $\Delta H_{\text{MIN}} < 0$ до 0. При $\tau_{\text{AB}} < \tau < \tau_{\text{BC}}$ вдоль Б-отрезка значение $\Delta H(\xi, \tau^n)$ уменьшается от $\Delta H(\xi = 0, \tau^n) < 0$ (отвечает значению $\theta(\xi = 0, \tau^n) < \theta_1$) до $\Delta H_{\text{MIN}} < 0$, затем вдоль С-отрезка значение $\Delta H(\xi, \tau^n)$ увеличивается от $\Delta H_{\text{MIN}} < 0$ до ≈ 0 . При $\tau > \tau_{\text{BC}}$ вдоль С-отрезка значение $\Delta H(\xi, \tau^n)$ увеличивается от $\Delta H(\xi = 0, \tau^n) < 0$ (отвечает $\theta(\xi = 0, \tau^n) < \theta_{\text{MAX}}$) до 0. Этот случай соответствует образованию упоминавшейся выше общей чашеподобной впадины. Граничные характеристики $\Delta H(\xi = 0, \tau^n)$ определяются на основе

$\Delta H(\theta)$ -зависимости ($\Delta H_{\text{B1}}(\theta)$ для В1- и $\Delta H_{\text{B2}}(\theta)$ для В2-варианта) рис. 7 по величинам $\theta(\xi = 0, \tau^n)$ на рис. 5 и 6.

При определенном значении $\xi = \text{const}$ взаимное расположение двух соседних $\Delta H(\xi, \tau^{n+1})$ - и $\Delta H(\xi, \tau^n)$ -зависимостей, отвечающих двум соседним $\theta(\xi, \tau^{n+1})$ - и $\theta(\xi, \tau^n)$ -кривым на рис. 5 и 6 (например, θ^3 - и θ^2 -кривым на рис. 5), определяется совместно двумя факторами. Первый – это знак разницы температур $\Delta \theta^{n+1, n}(\xi) = \theta(\xi, \tau^{n+1}) - \theta(\xi, \tau^n)$ при рассматриваемом значении $\xi = \text{const}$ на θ^{n+1} - и θ^n -кривой. Вторым фактором – то, в каком из трех температурных интервалов $\theta > \theta_{\text{MAX}}$, $\theta < \theta_{\text{MAX}}$, $\theta \approx \theta_{\text{MAX}}$ происходит данное изменение $\Delta \theta^{n+1, n}(\xi)$. От этого, как видно из рис. 7, зависит производная $d\Delta H(\theta)/d\theta$ (положительна при $\theta > \theta_{\text{MAX}}$, отрицательна при $\theta < \theta_{\text{MAX}}$ и ≈ 0 при $\theta \approx \theta_{\text{MAX}}$), примерно равная изменению величин в конечных разностях. Температурный интервал можно установить по соотношению средней температуры $\theta(\xi, \tau^{n+0,5}) \approx (\theta(\xi, \tau^{n+1}) + \theta(\xi, \tau^n))/2$ с температурным параметром θ_{MAX} . Если $\Delta \theta^{n+1, n}(\xi) < 0$ и $\theta(\xi, \tau^{n+0,5}) > \theta_{\text{MAX}}$, то $\Delta H(\xi, \tau^{n+1})$ -зависимость расположена ниже $\Delta H(\xi, \tau^n)$ -зависимости (опускание уровня поверхности на рассматриваемом ξ -участке за промежуток времени $\tau^{n+1} - \tau^n$). Такая ситуация реализуется, например, для В1-варианта на θ^3 - и θ^2 -кривых рис. 5 в интервале $0 < \xi < 1$. В случае $\Delta \theta^{n+1, n}(\xi) > 0$ и $\theta(\xi, \tau^{n+0,5}) > \theta_{\text{MAX}}$, $\Delta H(\xi, \tau^{n+1})$ -кривая проходит выше $\Delta H(\xi, \tau^n)$ -кривой (подъем поверхности за промежуток $\tau^{n+1} - \tau^n$). В В1-варианте на θ^3 - и θ^2 -кривых рис. 5 данный случай реализуется на участке ξ , левая граница которого определяется $\xi = 1$, правая – значением координаты ξ светлой точки 2 на горизонтали $\theta = \theta_{\text{MAX}} = 0,3$. При $\Delta \theta^{n+1, n}(\xi) > 0$ и $\theta(\xi, \tau^{n+0,5}) < \theta_{\text{MAX}}$, $\Delta H(\xi, \tau^{n+1})$ -зависимость расположена ниже $\Delta H(\xi, \tau^n)$ -зависимости (опускание участка за промежуток $\tau^{n+1} - \tau^n$). В В1-варианте на θ^3 - и θ^2 -кривых это имеет место на участке ξ , распо-

ложенном справа от значения ξ , соответствующего светлой точке 3 на горизонтали $\theta = \theta_{\text{MAX}} = 0,3$.

При $\Delta\theta^{n+1,n}(\xi) < 0$ и $\theta(\xi, \tau^{n+0,5}) < \theta_{\text{MAX}}$ соотношение $\Delta H(\xi)$ -зависимостей обратно последнему случаю. Когда $\Delta\theta^{n+1,n}(\xi) > 0$ и $\theta(\xi, \tau^{n+0,5}) \approx \theta_{\text{MAX}}$, значение $\Delta H(\xi, \tau^{n+1}) \approx \Delta H(\xi, \tau^n)$ (уровень поверхности постоянен). Такая ситуация в В1-варианте на θ^3 - и θ^2 -кривых имеет место при отмеченном на рис. 5 значении $\xi = \xi_{23}$ (обоюдоострая стрелка, концы которой упираются в эти кривые). Если $\Delta\theta^{n+1,n}(\xi) < 0$ и $\theta(\xi, \tau^{n+0,5}) \approx \theta_{\text{MAX}}$, то также $\Delta H(\xi, \tau^{n+1}) \approx \Delta H(\xi, \tau^n)$.

Далее, с учетом рассмотренных выше особенностей поведения $\Delta H(\xi, \tau^n)$ -зависимостей вдоль $\theta(\xi, \tau^n)$ -кривых (при различных соотношениях τ с τ_{AB} и τ_{BC}) и взаиморасположения соседних $\Delta H(\xi, \tau^{n+1})$ - и $\Delta H(\xi, \tau^n)$ -зависимостей при $\xi = \text{const}$, обсуждается рельеф $\Delta H(\xi)$ в различные моменты $\tau = \tau^1, \tau^2, \tau^3 \dots$ для В1- и В2-вариантов (и некоторых других).

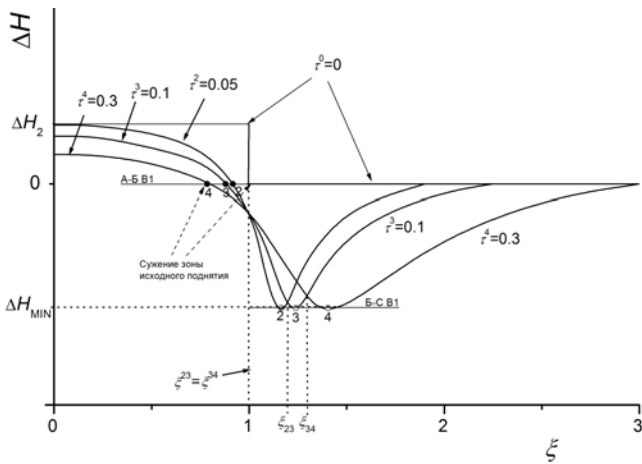


Рис. 8. Зависимости рельефа ΔH от координаты ξ для модельного В1-варианта (умеренная начальная плавучесть горячей пластины) в моменты времени $\tau^0, \tau^2, \tau^3, \tau^4$. Масштаб по вертикальной оси является качественным. Символами А-Б В1 и Б-С В1 отражено соответствие кружков 2, 3, 4 данного рисунка кружкам 2, 3, 4 на границах А-Б и Б-С для В1-варианта, показанных на рис. 5. Остальные пояснения в тексте

На рис. 8 показаны $\Delta H(\xi)$ -зависимости в исходный момент времени $\tau^0 = 0$ и моменты времени $\tau = \tau^2, \tau^3, \tau^4$ для В1-варианта. Отсутствующая

на нем зависимость при $\tau = \tau^1$ (и меньших) подобна трем последним. На рис. 8 черные кружки 2, 3, 4, расположенные на горизонтали $\Delta H = 0$, соответствуют черным кружкам 2, 3, 4 на горизонтали $\theta = \theta_1 = 0,6$ рис. 5 (граница А-Б), светлые кружки 2, 3, 4 в минимумах $\Delta H(\xi)$ -зависимостей – светлым кружкам 2, 3, 4 на горизонтали $\theta = \theta_{\text{MAX}} = 0,3$ рис. 5 (граница Б-С). $\Delta H(\xi)$ -кривые, отвечающие моментам $\tau = \tau^2, \tau^3, \tau^4$, пересекаются при значении $\xi \approx \xi_{23} \approx \xi_{34} \approx 1$, что является следствием пересечения при $\xi \approx 1$ на рис. 5 θ^n -кривых, соответствующих данным моментам τ . Поскольку пересечение имеет место при $\theta \approx 0,5 < \theta_1 = 0,6$ (θ отвечает Б-отрезкам θ^2 -, θ^3 - и θ^4 -кривых), то ему на рис. 8 отвечает значение $\Delta H(\xi = 1) < 0$. За промежуток времени $\Delta\tau = \tau^2 - \tau^0$ изменение $\Delta H(\xi)$ -профиля на рис.8 состоит в следующем. На первом участке $0 < \xi < 1$ величина $\Delta H(\xi)$ уменьшилась, что связано с уменьшением (при $\xi = \text{const}$) в волне охлаждения величины θ (оно разное для различных H -слоев), которое происходит в интервале $\theta > \theta_{\text{MAX}} = 0,3$. При этом в интервале от $\xi = 1$ до значения ξ , отвечающего черному кружку 2 (на горизонтали $\theta = \theta_1 = 0,6$ рис. 5 и на рис. 8), в волне охлаждения выполняется условие $0,5 < \theta < \theta_1 = 0,6$ (θ отвечает Б-отрезку θ^2 -кривой), вследствие чего в этом интервале ξ значение $\Delta H(\xi) < 0$. На втором участке $1 < \xi < 1,9$ (его правая граница отвечает $\theta \approx 0$ на θ^2 -кривой рис. 5) за время $\Delta\tau = \tau^2 - \tau^0$ уровень поверхности понизился из-за перевода волной нагрева H -слоев в теплое плотное состояние (на θ^2 -кривой рис. 5 значения $0 < \theta < 0,5 < \theta_1 = 0,6$, они отвечают Б- и С- отрезкам θ^2 -кривой). Максимальное понижение поверхности $\Delta H_{\text{MIN}} < 0$ реализуется при значении координаты ξ светлого кружка 2 на рис.8 (где $\theta = \theta_{\text{MAX}} = 0,3$). Преобразование $\Delta H(\xi)$ -зависимости за более короткое время, например $\Delta\tau = \tau^1 - \tau^0$, аналогично описанному в случае $\Delta\tau = \tau^2 - \tau^0$. За промежуток времени $\Delta\tau = \tau^3 - \tau^2$ изменение $\Delta H(\xi)$ -профиля на рис. 8 состоит в понижении уровня поверхности на участке $0 < \xi < 1$, его повышении на участке $1 < \xi < \xi_{23}$ и снова понижении на участке $\xi > \xi_{23}$. Указанная на рис. 8 координата ξ_{23} отвечает второму пересечению (первое – при $\xi \approx 1$)

$\Delta H(\xi)$ -зависимостей, относящихся к моментам τ^2 и τ^3 . Оно обусловлено равенством ρ на θ^2 - и θ^3 -кривых рис. 5, которое имеет место при выполнении обсуждавшегося выше условия $\theta(\xi, \tau^{2+0,5}) = \theta_{\text{MAX}} = 0,3$ (пометка ξ_{23} на рис. 5). Совокупное преобразование рельефа $\Delta H(\xi)$ на рис. 8 за время $\Delta\tau = \tau^3 - \tau^2$ состоит в уменьшении среднего поднятия (с некоторым сужением зоны поднятия $\Delta H(\xi) > 0$ из-за уменьшения размера ξ -интервала А-отрезка θ^3 -кривой по сравнению с его величиной на θ^2 -кривой – черный кружок 2 переходит в черный кружок 3) и общем расширении впадины стыка, которое происходит при увеличении размера ξ -интервала обоих Б- и С-отрезков (при $\tau = \tau^3$ правая граница впадины стыка расположена при $\xi \approx 2,2$). При сохранении максимальной глубины $|\Delta H_{\text{MIN}}|$ расширение впадины стыка сопровождается ее средним углублением. Граница Б–С (светлые кружки 2 и 3 на рис. 8) за $\Delta\tau = \tau^3 - \tau^2$ удалилась от центра системы $\xi = 0$ (максимум впадины стыка движется центробежно). Преобразование $\Delta H(\xi)$ -зависимости за время $\Delta\tau = \tau^4 - \tau^3$ подобно описанному выше за $\Delta\tau = \tau^3 - \tau^2$ (указанная на рис. 8 и 5 координата ξ_{34} аналогична ξ_{23} ; в момент τ^4 правая граница впадины стыка расположена при $\xi \approx 3,0$). Можно отметить, что если рассматривать дифференциальное изменение профиля $\Delta H(\xi)$ за короткий промежуток времени, например, $\Delta\tau = \tau^{3a} - \tau^3$ (τ^{3a} чуть больше τ^3), то оно будет состоять в опускании участка $0 < \xi < 1$ (следствие уменьшения при $\xi \approx \text{const}$ в волне охлаждения значения θ , происходящего в диапазоне $\theta > \theta_{\text{MAX}} = 0,3$), подъеме участка $1 < \xi < \xi_3$ (ξ_3 – координата светлого кружка 3 на рис. 8; подъем обусловлен увеличением при $\xi \approx \text{const}$ в волне нагрева значения θ при $\theta > \theta_{\text{MAX}} = 0,3$) и опускании участка $\xi > \xi_3$ (следствие увеличения при $\xi \approx \text{const}$ в волне нагрева θ при $\theta < \theta_{\text{MAX}} = 0,3$).

На рис. 9 изображены $\Delta H(\xi)$ -зависимости для В2-варианта в те же, что и на рис. 8, моменты τ . На нем черные кружки 2, 3, 4 соответствуют черным кружкам 2, 3, 4 на горизонтали $\theta = \theta_1 = 0,4$ рис. 5 (граница А–Б), светлые кружки 2, 3, 4 – светлым кружкам 2, 3, 4 на горизонтали $\theta = \theta_{\text{MAX}} = 0,2$ рис. 5 (граница Б–С). Поскольку во

значению T_2 В2-вариант является более высокотемпературным по сравнению с В1, то это качественно отражено более высоким ΔH_2 на рис. 9 по сравнению с рис. 8. На рис. 9 значения ξ_{23} и ξ_{34} соответствуют реализации условий $\theta(\xi, \tau^{2+0,5}) = \theta_{\text{MAX}} = 0,2$ и $\theta(\xi, \tau^{3+0,5}) = \theta_{\text{MAX}} = 0,2$. Преобразование $\Delta H(\xi)$ -зависимости за промежутки времени $\Delta\tau = \tau^3 - \tau^2$ и $\Delta\tau = \tau^4 - \tau^3$ на рис. 9 в основном подобно отраженному на рис. 8. Главное качественное отличие В2- от В1-варианта состоит в том, что в нем значение $\Delta H(\xi = 1) > 0$ и граница А–Б (черные кружки 2, 3, 4 на рис. 9) движется центробежно (в В1-варианте на рис. 8 – центростремительно), вследствие чего зона поднятия $\Delta H(\xi) > 0$ несколько расширяется со временем по сравнению с исходной при $0 < \xi < 1$ (из-за этого при одинаковых τ ξ -размер впадины стыка в В2-варианте меньше чем в В1). Эти две особенности обусловлены более низким значением $\theta_1 = 0,4$ (из-за повышенного T_2) в В2-варианте по сравнению со значением $\theta_1 = 0,6$ в В1-варианте, вследствие чего в небольшой части волны нагрева (несколько правее точки $\xi = 1$, где согласно рис. 5 $\theta \approx 0,5$) реализуется условие положительной плавучести $\theta > \theta_1 = 0,4$ (А-отрезки θ^2 -, θ^3 - и θ^4 - кривых на рис. 5). Можно отметить, что в промежуточном между В1 и В2 варианте В3, когда $\theta_1 = 0,5$, $\theta_{\text{MAX}} = 0,25$ ($T_2 = 289$ К), граница А–Б во время $\tau \approx \tau^0 \div \tau^4$ расположена при $\xi \approx 1$ (стоит на одном месте).

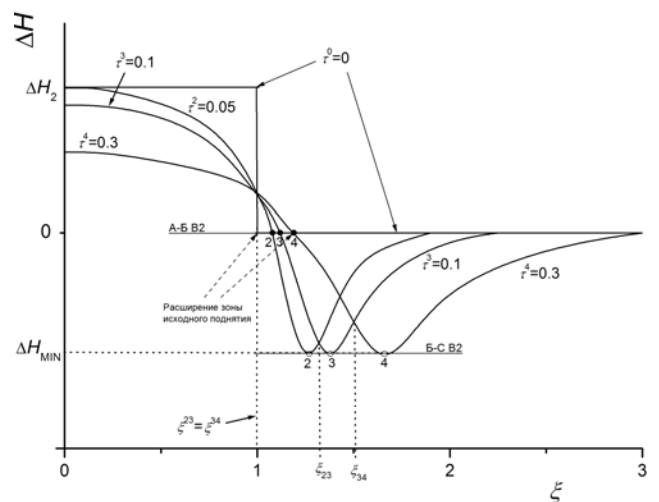


Рис. 9. Аналогично рис. 8 для В2-варианта (повышенная начальная плавучесть горячей пластины).
Пояснения в тексте

Как видно из рис. 5, 8 и 9 при $\tau \approx \tau^0 \div \tau^4$ в варианте В1 с относительно высоким $\theta_{\text{МАХ}} = 0,4$ (малое T_2) скорость перемещения границы Б–С меньше, чем в варианте В2. При фиксированном в указанном диапазоне значений τ , меньшую протяженность имеет и второй участок относительно подъема поверхности $\Delta\xi_{\text{УР}}$. Например, когда $\tau = \tau^3$, в В1-варианте согласно рис. 8 $\Delta\xi_{\text{УР}} = 0,24$, а в В2-варианте согласно рис. 9 $\Delta\xi_{\text{УР}} = 0,38$. При дополнительном увеличении $\theta_{\text{МАХ}}$ (уменьшении T_2) эти характеристики становятся еще меньше. В крайнем В4-варианте с $\theta_{\text{МАХ}} \approx 0,5$, $\theta_1 \approx 1$ (T_2 чуть больше $T_1 = 281$ К) пересечение $\theta^1 - \dots - \theta^4$ -кривых с горизонталью $\theta = \theta_{\text{МАХ}} \approx 0,5$ на рис. 5 имеет место при $\xi \approx 1$. То есть в данном случае во время $\tau \approx \tau^0 \div \tau^4$ граница Б–С неподвижна. При этом $\Delta\xi_{\text{УР}} \approx 0$. $\Delta H(\xi)$ -зависимости для этого варианта в моменты $\tau = \tau^0, \tau^2, \tau^3, \tau^4$ показаны на рис. 10. Исходное небольшое поднятие ΔH_2 исчезает очень быстро (при $\tau > \tau^3$ на всех θ^n -кривых рис. 5 значение θ ощутимо меньше 1). Впадина стыка расширяется и углубляется за счет опускания как левого $\xi < 1$ (следствие уменьшения в волне охлаждения при $\xi = \text{const}$ значения θ в диапазоне $\theta > \theta_{\text{МАХ}} \approx 0,5$), так и правого $\xi > 1$ (следствие возрастания в волне охлаждения при $\xi = \text{const}$ значения θ в диапазоне $\theta < \theta_{\text{МАХ}} \approx 0,5$) бортов.

При $\tau > \tau^4$ в В1-варианте рельеф $\Delta H(\xi)$ изменяется следующим образом. Как видно из рис. 5, до $\tau \approx \tau^5 \div \tau^6$ граница А–Б движется центростремительно, граница Б–С – центробежно. Среднее поднятие на А-отрезках и размер их ξ -интервала уменьшаются, впадина стыка расширяется. При $\tau = \tau_{\text{АБ}} \approx \tau^5 \div \tau^6$ А-отрезок исчезает и образуется, как уже отмечалось выше, одна общая впадина с двумя симметричными максимумами глубиной $|\Delta H_{\text{МИН}}|$. При $\tau \approx \tau^6$ центробежное движение границы Б–С сменяется на центростремительное (см. положение светлых кружков 6–9 на горизонтали $\theta = \theta_{\text{МАХ}} = 0,3$ рис. 6). Смена режима движения связана с тем, что в среде правее точки разворота границы Б–С условие наличия максимума впадины $\theta = \theta_{\text{МАХ}} = 0,3$ ($T = T_{\text{МАХ}}$) нигде не реализуется (из-за ограниченного количества тепла в исходной горячей пластине, она не может прогреть всю

среду до $T = T_{\text{МАХ}}$), в точке разворота оно осуществляется единожды, в интервале от точки разворота до $\xi = 1$ достигается повторно (теперь θ приходит к $\theta_{\text{МАХ}} = 0,3$ сверху), в интервале $0 < \xi < 1$ достигается однократно (при уменьшении θ от начального значения 1). В тепловой волне вблизи точки разворота скорость перемещения состояния, характеризуемого $\theta = \theta_{\text{МАХ}} = 0,3$, близка к нулю (так же как для состояния $\theta = \theta_{\text{МАХ}} = 0,5$ в точке $\xi \approx 1$ на рис. 10 для В4-варианта), состояния же с другими θ (большими и меньшими $\theta_{\text{МАХ}}$) распространяются с конечной (разной в зависимости от ξ) скоростью. Поэтому во время смены типа движения $\Delta H(\xi)$ -зависимость практически не изменяется вблизи точки разворота и значительно модифицируется на удалении (влево и вправо) от нее. При этом впадина стыка расширяется за счет опускания обоих ее бортов (качественно так же, как на рис. 10 в В4-варианте). На рис. 11 показаны $\Delta H(\xi)$ -зависимости при $\tau = \tau^6, \tau^8, \tau^{10}$ для рассматриваемого В1-варианта. Изменение рельефа $\Delta H(\xi)$ за промежутки времени $\Delta\tau = \tau^8 - \tau^6$ состоит в том, что уровень поверхности на участке $0 < \xi < \xi_{68}$ понизился (координата ξ_{68} на рис. 6 аналогична ξ_{23} на рис. 5), на участке $\xi_{68} < \xi < \xi^{68}$ повысился и на участке $\xi > \xi^{68}$ опять понизился. Общая впадина расширилась. В момент времени $\tau = \tau^{10}$ максимум этой впадины находится в точке $\xi = 0$ (на θ^{10} -кривой реализуется один С-отрезок). Общая впадина приобретает чашеобразный вид. В дальнейшем ($\tau > \tau^{10}$) она все более расширяется с уменьшением значения $|\Delta H(\xi = 0)|$ от $|\Delta H_{\text{МИН}}|$ до 0 (при $\tau \rightarrow \infty$).

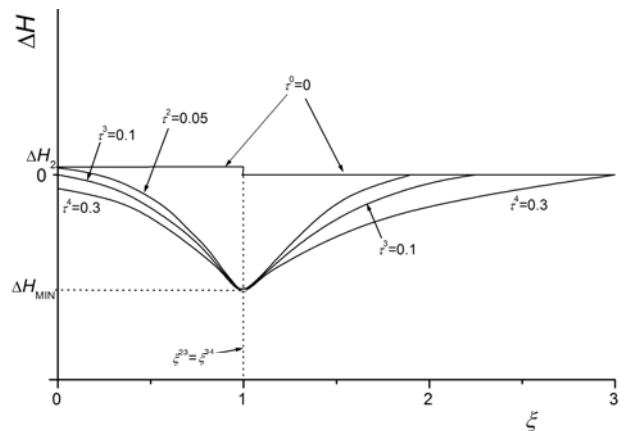


Рис. 10. Аналогично рис. 8 для В4-варианта (пониженная начальная плавучесть горячей пластины). Пояснения в тексте

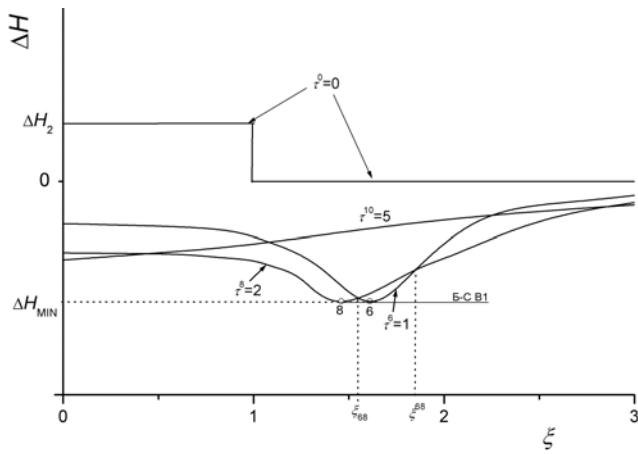


Рис. 11. Аналогично рис. 8 в моменты времени τ^0 , τ^6 , τ^8 , τ^{10} . Символом Б-С В1 отражено соответствие кружков 6, 8 данного рисунка кружкам 6, 8 на границе Б-С для В1-варианта, показанной на рис. 6. Остальные пояснения в тексте

В В2-варианте граница А-Б движется центростремительно до $\tau \approx \tau^5$, после этого – центростремительно (см. черные кружки 4–7 на горизонтали $\theta = \theta_1 = 0,4$ рис. 5 и 6). Ее разворот обусловлен невозможностью прогрева пластиной всей среды до $T = T_1$ (в В1-варианте среда вообще нигде не нагревается до $T = T_1$, вследствие чего граница А-Б сразу движется центростремительно). Центробежное движение границы Б-С в В2-варианте сменяется на центростремительное при $\tau \approx \tau^8 \div \tau^9$ (см. положение светлых кружков 7–11 на горизонтали $\theta = \theta_{MAX} = 0,2$ рис. 6). Координата ξ точки разворота границы Б-С больше координаты точки разворота границы А-Б, поскольку до значения $T = T_{MAX}$ прогревается более значительная область среды, чем до $T = T_1$. Время разворота границы Б-С и удаление ее точки разворота от границы $\xi = 1$ в В2-варианте больше, чем в В1. В нем также больше рассмотренное выше время исчезновения А-отрезка τ_{AB} и Б-отрезка τ_{BC} . Это связано с более низкими значениями θ_{MAX} и θ_1 (из-за высокого значения T_2), вследствие чего в В2-варианте волной нагрева до температуры T_{MAX} прогревается более значительная часть среды, а остывание центра ($\xi = 0$) пластины до температур T_1 и T_{MAX} , отвечающих нейтральной и минимальной отрицательной плавучести, происходит дольше.

Рассмотренные выше В-варианты исчерпывают все принципиально возможные для воды

($T_0 = 273$ К, $T_{MAX} = 277$ К, $T_1 = 281$ К) случаи изменения рельефа со временем при остывании перегретой пластины с исходной положительной плавучестью ($\Delta H_2 > 0$, $T_2 > T_1$).

Особенностью В-вариантов является их «симметричность» – значение T_{MAX} расположено ровно в середине интервала $T_0 - T_1$ рис. 4, что отвечает $\theta_{MAX} = \theta_1/2$. Данное свойство сказывается на виде $\Delta H(\xi)$ -зависимостей и их динамике. Следствием этого, в частности, является, приблизительно симметричность впадины стыка относительно ее максимума во время $\tau \leq \tau^4$. Для В1-, В2- и В4-вариантов это видно из рис. 8 – 10. При этом в двух первых вариантах левый борт впадины (от черной точки до светлой) несколько круче правого (от светлой точки до правой границы впадины стыка). Изменение θ_{MAX} по сравнению $\theta_1/2$ (что соответствует изменению T_{MAX} на рис. 4) при фиксированных остальных параметрах (T_0 , T_1 , T_2) приведет к изменению режима перемещения границы Б-С и нарушению симметрии впадины стыка. При уменьшении θ_{MAX} скорость движения границы Б-С увеличится. В пределе $\theta_{MAX} \rightarrow 0$ ($T_{MAX} \rightarrow T_0$) она будет двигаться так же, как правая граница впадины стыка (в этом случае на рис. 8 – 10 правый борт впадины стыка был бы бесконечно крут). Увеличение θ_{MAX} , наоборот, замедлит перемещение этой границы. В пределе $\theta_{MAX} \rightarrow \theta_1$ ($T_{MAX} \rightarrow T_1$) она будет двигаться как граница А-Б и исчезнет вместе с ней при исчезновении А-отрезка, что имеет место в В4-варианте при $\tau \approx \tau^3$ (тогда на рис. 8 – 10 был бы бесконечно крут левый борт впадины стыка).

В данном разделе в качестве примера рассматривалась вода. Однако настоящий подход применим и к другим веществам, обладающим немонотонной $\rho(T)$ -зависимостью H -слоев показанного на рис. 4 вида, с отличными (например, увеличенными) от воды характеристиками T_0 , T_{MAX} , T_1 , у которых условие положительной плавучести $\rho(T_2) < \rho_0$ реализуется при других значениях $T_2 (> T_1)$. Для них решение задачи об остывании горячей пластины в безразмерных переменных ξ , τ , $\theta = (T - T_0)/(T_2 - T_0)$ аналогично вышерассмотренному для воды. При анализе различных случаев главную роль имеют значения параметров θ_1 и θ_{MAX} . Определяя границы А-, Б- и С-отрезков

на $\theta(\xi, \tau^n)$ -кривых рис. 5 и 6, они тем самым определяют ξ -размер зоны поднятия $\Delta H(\xi) > 0$, ξ -координату границы поднятие-впадина стыка, ξ -размер впадины стыка $\Delta H(\xi) < 0$, ξ -координату положения максимума впадины стыка и ξ -размеры участков относительного подъема и опускания поверхности в различные моменты времени $\tau = \tau^1, \tau^2, \tau^3 \dots$. От их соотношения со значением 0,5 зависит динамика границ А-Б и Б-С – сразу центростремительное движение ($\theta_1 > 0,5$, $\theta_{MAX} > 0,5$), стояние продолжительное время (до $\tau \approx \tau^4$) в точке $\xi \approx 1$ и затем центростремительное движение ($\theta_1 \approx 0,5$, $\theta_{MAX} \approx 0,5$), или сначала центробежное, потом, после разворота, центростремительное движение ($\theta_1 < 0,5$, $\theta_{MAX} < 0,5$).

Суммируя данный раздел, можно сказать, что его основные результаты, полученные на примере воды (в частности, отраженные на рис. 8–11), подтвердили выводы раздела 1 о виде рельефа поверхности и его динамике в районе расположенного под корой вертикального плюма-пластины (рис. 3,б). При этом выявлена существенная особенность, состоящая в том, что при общем опускании поверхности ее ограниченный участок, примыкающий к максимуму впадины стыка, после погружения до максимальной глубины может испытывать относительный подъем. На сравнительно ранней стадии теплообмена ($\tau \leq \tau^4$), размер этого участка равен практически нулю в случае относительно небольшой исходной температуры пластины T_2 (небольшое ΔH_2 ; варианты типа В4, рис. 10) и возрастает с ее увеличением (увеличением ΔH_2 ; варианты В1 и В2, рис. 8 и 9).

3. Приложение модельных результатов к Курильской островной дуге

Была предпринята попытка приложения результатов раздела 2 к Курильской ОД. При этом считается, что распределение средней приведенной температуры $\bar{\theta}_H(\xi, \tau) = (\bar{T}_H - \bar{T}_{H,0}) / (\bar{T}_{H,2} - \bar{T}_{H,0})$ при остывании вертикального плюма-пластины в среде ВМ (рис. 3,б) эквивалентно распределению приведенной температуры $\theta(\xi, \tau) = (T - T_0) / (T_2 - T_0)$ в задаче о воде раздела 2 и определяется формулой (2). Параметры $\bar{\theta}_{H,1}$, $\bar{\theta}_{H,MAX}$ тождественны θ_1 , θ_{MAX} . Рассматривается случай $\bar{\theta}_{H,MAX} = \bar{\theta}_{H,1} / 2$

($\bar{T}_{H,MAX} = (\bar{T}_{H,0} + \bar{T}_{H,1}) / 2$), отвечающий симметричным В-вариантам. Эти варианты представляются более подходящими для интерпретации, так как в них до $\tau \leq \tau^4$ (приводимое чуть ниже оценочное значение τ для Курильской ОД относится к этому интервалу) модельные впадины стыка примерно симметричны (рис. 8 – 10), что отвечает отмеченной во введении приблизительной симметрии ГЖ. Предполагается, что наклонное положение плюма под ОД качественно не изменяет результата для вертикального случая.

При приложении модели необходимо определить соответствие реального времени t существования Курильской ОД приведенному времени $\tau = t / t_0$. Согласно [9,43–45] $t \approx 70$ млн лет. Если принять исходную полуширину поднятия ОД $x_0 \approx 100$ км, коэффициент $\chi \approx 0,01$ см²/с, то $t_0 = x_0^2 / \chi \approx 317$ млн лет и $\tau \approx 0,22$. Этому τ отвечает модельная $\theta(\xi, \tau \approx 0,22)$ -зависимость, расположенная на рис. 5 между θ^3 - и θ^4 -кривыми. ξ -характеристики особенностей соответствующего ей рельефа $\Delta H(\xi, \tau \approx 0,22)$ и его динамика (ξ -размеры участков относительного подъема и опускания) зависят от параметров θ_1 и θ_{MAX} В-варианта. Относительно низкотемпературные варианты типа В4 для интерпретации не подходят, так как к моменту $\tau \approx 0,22$ области поднятия $\Delta H(\xi, \tau \approx 0,22) > 0$ согласно рис. 10 в этих вариантах не остается. Также в них, как отмечалось выше, размер зоны относительного подъема поверхности мал или равен нулю ($\Delta \xi_{UP} \approx 0$). Как представляется, реальным показателям (в частности, описанной во введении динамике отдельных участков ОД) наиболее соответствуют $\Delta H(\xi, \tau \approx 0,22)$ -зависимости вариантов В1 (рис. 8) и В2 (рис. 9) или близкие к ним (например, для В3). При $x_0 = 100$ км в В1-варианте согласно данным рис. 8 при $\tau \approx 0,22$ поднятию $\Delta H(\xi, \tau \approx 0,22) > 0$ отвечает участок $0 < x < 83$ км, впадине стыка – $83 < x < 260$ км, относительный подъем поверхности происходит на участке $100 < x < 130$ км (вне этого интервала уровень поверхности понижается). При тех же значениях x_0 и τ , соответствующие участки в В2-варианте по данным рис. 9 имеют ширину $0 < x < 115$ км, $115 < x < 260$ км и $100 < x < 150$ км. В обоих вариантах первые две характеристики примерно совпадают с реальными размерами поднятия Курильской ОД над абиссальной равниной и восточной смежной впадины (ГЖ). Приблизительно такую

же среднюю ширину имеет и расположенная на западе Курильская глубоководная котловина (продолжающаяся на север Голыгинским грабеном), параллельная ОД. Модельные размеры участка относительного подъема, равные ≈ 30 км и ≈ 50 км соответственно, также по порядку величины отвечают зоне взбросо-надвига в восточной части склона ОД, примыкающей к оси ГЖ (~ 50 км). Автору не известно, выделяется ли аналогичный участок в западной части склона ОД. Модельная впадина(ы) стыка расширяется со временем. Средняя скорость ее расширения при $\tau \approx 0,22$, рассчитанная по данным рис. 8 и 9 для моментов времени τ^3 и τ^4 , составляет $\approx 1,4$ мм/год и $\approx 1,2$ мм/год соответственно. Максимум впадины стыка (ось ГЖ) при $\tau \approx 0,22$ движется центробежно. Его полное удаление от первоначальной границы плюм-среда $\xi = 1$ за время $\tau \approx 0,22$ в варианте В1 равно $\approx 0,3$ (≈ 30 км), в варианте В2 – $\approx 0,5$ (≈ 50 км). Проведение четкого выбора между В1- и В2-вариантами, в первом из которых ξ -размер реализованной на момент $\tau \approx 0,22$ зоны поднятия $\Delta H(\xi, \tau \approx 0,22) > 0$ уменьшается (рис. 8), а во втором увеличивается (за счет небольшого подъема поверхности при $1 < \xi < 1,15$ на рис. 9), в приложении к Курильской ОД затруднительно.

Заключение

Представляется, что рассмотренный вариант концепции тепловых плюмов, допускающий существование в верхней мантии немонотонной (по типу воды) зависимости средней плотности вертикальных слоев-колонок от их средней температуры, позволяет качественно понять причину возникновения островной дуги вследствие всплытия до коры горячего плюма-пластины высотой порядка размера верхней мантии, процесс ее последующего погружения при остывании плюма, образование и расширение линейных смежных впадин из-за перехода пограничного вещества в теплое плотное состояние при горизонтальном теплообмене плюма со средой. На больших промежутках времени система, состоящая из островной дуги и смежных впадин, превращается в одну общую впадину. Проведенное упрощенное моделирование на примере воды подтвердило эти выводы, показав различные способы преобразования со временем исходного поднятия и впадин стыка в зависимости от исходных параметров задачи. При моделировании выявлено, что возможна ситуация,

когда при общем опускании поверхности ее ограниченный участок, примыкающий к максимуму впадины, после погружения до максимальной глубины может испытывать последующий относительный подъем. Приложение некоторых из рассмотренных модельных вариантов к Курильской островной системе показывает, что они способны примерно воспроизвести ряд ее основных горизонтальных поверхностных характеристик.

Список литературы

1. Choi D. R. Deep earthquakes and deep-seated tectonic zones. Part 5. Discussion // *New Concepts in Global Tectonics Newsletter*. 2003. Vol. 27. P. 8–25 (www.ncgt.org)
2. Mann P., Taira B. Global tectonic significance of the Solomon Islands and Ontong Java Plateau convergent zone // *Tectonophysics*. 2004. Vol. 389. P. 137–190.
3. Тараканов Р. З. Уроки Симуширских землетрясений 15 ноября 2006 г. ($M_W = 8,3$) и 13 января 2007 г. ($M_W = 8,1$) // *Вулканология и сейсмология*. 2008, № 6. С. 40–55.
4. Удинцев Г. Б. Рельеф и строение океанов. М.: Недра. 1987.
5. Фролов В. Т. Фролова Т. И. Происхождение Тихого океана. М.: МАКС Пресс, 2011.
6. Блюман Б. А. Актуальные вопросы геологии океанов и геологии континентов. СПб.: Изд-во ВСЕГЕИ, 2013.
7. Ермаков В. А. Островные дуги и их роль в эволюции континентальной окраины (новый взгляд на известные факты) // *Вулканология и сейсмология*. 2005, № 5. С. 3–18.
8. Ермаков В. А. Тектоника островных дуг и образование континентальной коры // *Бюл. Моск. о-ва испытателей природы*. 2006. Т. 81. Вып. 5. С. 21–34.
9. Богданов Н. А. Тектоника глубоководных впадин окраинных морей. М.: Недра, 1988.
10. Васильев Б. И., Чой Д. Р. Геология глубоководных желобов и островных дуг Тихого океана. Владивосток. 2001.
11. Ермаков В. А. Особенности развития активной континентальной окраины: континентализация или океаногенез (на примере Курило-Камчатского региона). Спорные аспекты тектоники плит и возможные альтернативы: Сборник научных статей. Ин-т физ. Земли РАН. М.: Изд-во ОИФЗ РАН. 2002. С. 158–188.

12. Злобин Т. К., Софронов Д. А., Полец А. Ю. Распределение землетрясений по типам очаговых подвижек в Курило-Охотском регионе // ДАН. 2011. Т. 440, № 4. С. 527–529.
13. Андреева М. Ю., Родкин М. В. Сейсмо тектоническая обстановка в океанической области глубоководных желобов // Вестник ДВО РАН. 2013, № 3. С. 9–11.
14. Белоусов В. В. Основы геотектоники. М.: Недра, 1975.
15. Кэри У. В поисках закономерностей развития Земли и Вселенной. М.: Мир, 1991.
16. Morgan W. J. Convection plumes in the Lower Mantle // Nature. 1971. Vol. 230. P. 42–43.
17. Грачев А. Ф. Мантийные плюмы и проблемы геодинамики // Физика Земли. 2000, № 4. С. 3–37.
18. Ботт М. Внутреннее строение Земли. М.: Мир, 1974.
19. Zlobin T. K., Polets A. Yu. Investigations of regularities in distribution of tectonic stresses in the Kuril-Kamchatka zone // Geodynamics & Tectonophysics. 2010. Vol. 1, N. 1. P. 36–54.
20. Верба М. Л., Иванов Г. И., Тихонова И. М. Отсутствие признаков субдукции в строении Курильского глубоководного желоба. Современное состояние наук о Земле. Материалы международной конференции, посвященной памяти Виктора Ефимовича Хаина М.: Геологический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова. 2011. С. 318–323.
21. Эрлих Э. Н. Современная структура и четвертичный вулканизм западной части Тихоокеанского кольца. Новосибирск: Наука, 1973.
22. Медведев А. Б. О возможных причинах образования впадин и гор. Н. Новгород: Университетская книга, 2004.
23. Медведев А. Б. О возможности кратерообразования при всплытии плюма // Физика Земли. 2008, № 4. С. 48–61.
24. Medvedev A. B. Crater formation possibly associated with an ascending thermal plume // New Concepts in Global Tectonics Newsletter. 2010. Vol. 56. P. 86–98 (www.ncgt.org) (Русский текст – www.vniief.ru/публикации/публикации_в_зарубежных_журналах/2010/)
25. Медведев А. Б., Трунин Р. Ф. Ударное сжатие пористых металлов и силикатов // УФН. 2012, Т. 182. Вып. 8. С. 829–846.
26. Sato T., Funamori N. Sixfold-coordinated amorphous polymorph of SiO₂ under high pressure // Phys. Rev. Lett. 2008. Vol. 101. P. 255502.
27. Zhernokletov M. V., Lebedeva T. S., Medvedev A. B., Mochalov M. A., Shuykin A. N., Fortov V. E. Thermodynamic parameters and equation of state of low-density SiO₂ aerogel. In: Shock Compression of Condensed Matter-2001 / Ed. Furnish M. D., Thadhahi N. N., Horie Y. American Institute of Physics. 2002. P. 763–766.
28. Nellis W. J., Radousky H. B., Hamilton D. C., Mitchell A. C., Holmes N. C., Christianson K. B., van Thiel M. Equation of state, shock-temperature and electrical conductivity data of dense fluid nitrogen in the region of the dissociative phase transition // J. Chem. Phys. 1991. Vol. 94, N. 3. P. 2244–2256.
29. Медведев А. Б. О наличии состояний с отрицательным коэффициентом Грюнайзена в пересжатых продуктах взрыва // ФГВ. 2014. Т. 50, № 4. С. 102–109.
30. Магницкий В. А., Артюшков Е. В. Некоторые общие вопросы динамики Земли. Тектоносфера Земли / Под ред. Белоусова В. В. М.: Наука, 1978.
31. Буллен К. Е. Плотность Земли. М.: Мир, 1978.
32. Буллен К. Е. Введение в теоретическую сейсмологию. М.: Мир, 1966. 256 с.
33. Wang C. Y. Density and constitution of the mantle // J. Geoph. Res. 1970. Vol. 75, № 17. P. 3264–3284.
34. Dziewonsky A. M., Gilbert F. Observation of normal modes from 84 recordings of the Alaskan earthquakes of 1964 March 28, II. Further remarks based on new spheroidal overtone data // Geophys. J. Roy. Astr. Soc. 1973. Vol. 35. P. 401–437.
35. Кедров О. К. Сейсмические методы контроля ядерных испытаний. М.; Саранск: Тип. «Крас. Окт.», 2005.
36. Бражкин В. В. «Трудности перевода»: что означают отрицательные эффективные коэффициенты Грюнайзена в ударно-волновых экспериментах? // УФН. 2012. Т. 182. Вып. 8. С. 847–853.
37. Gufeld I. L. Geological consequences of amorphization of the lithosphere and upper mantle structures caused by hydrogen degassing // Geodynamics & Tectonophysics 2012. Vol. 3, N. 4. P. 417–435.
38. Nikolaev A. V. On the article «Geological consequences of amorphization of the lithosphere and upper mantle structures caused by hydrogen degassing» by I. L. Gufeld // Geodynamics & Tectonophysics 2012. Vol. 3, N. 4. P. 437–439.
39. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
40. Молоденский С. М. Модели распределения плотности и параметров механической добротности по новым данным о нутации и собственных колебаниях Земли. II. Сравнение с аст-

рометрическими данными // Физика Земли. 2011, № 7. С. 3–18.

41. Молоденский С. М., Молоденский М. С., Молоденская М. С. Модели распределений плотности и параметров механической добротности по новым данным о нутации и обертонах собственных колебаний Земли. 2. Результаты численного решения обратной задачи // Физика Земли. 2014, № 5. С. 22–32.

42. Калинин В. А. Об уравнении, определяющем изменение плотности с глубиной в неоднородной Земле // Физика Земли. 1972, № 3. С. 3–10.

43. Леликов Е. П. Геологическое строение фронтальной зоны Курильской островной дуги.

Современное состояние наук о Земле. Материалы международной конференции, посвященной памяти Виктора Ефимовича Хаина. М.: Геологический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова. 2011. С. 2215–2218.

44. Леликов Е. П., Емельянова Т. А. Строение фундамента и гранитоидный магматизм Курильской островодужной системы. Материалы 45-го Тектонического совещания / Отв. ред. Кузнецов Н. Б. М.: ГЕОС, 2013. С. 112–115.

45. Прокудин В. Г. Скоростная модель земной коры и возраст Курильской котловины Охотского моря. Материалы 45-го Тектонического совещания / Отв. ред. Кузнецов Н. Б. М.: ГЕОС, 2013. С. 172–176.

Статья поступила в редакцию 15.07.2015

Бабичев Н. Б., Севастьянов А. А. О приближенных аналитических решениях спектральной задачи на главные собственные значения	3
Бабичев Н. Б., Севастьянов А. А. О формулах подобия, полученных на основе свойства инвариантности уравнения Шредингера	9
Горбатенко М. В. Регулярное центрально-симметричное статическое решение уравнений конформной геометродинамики	12
Горбатенко М. В., Незнамов В. П., Попов Е. Ю. О регулярных решениях уравнения Дирака в экстремальном поле Райсснера-Нордстрёма	23
Севастьянов А. А. Эволюция во времени нейтронных характеристик однородных шаров из делящихся материалов ...	31
Янилкин Ю. В., Морозов В. Г., Карпенко И. И., Чернышова О. Н. Прямое 3D численное моделирование роста горячих точек в детонации	37
Медведев А. Б. Возможное объяснение образования смежных впадин островных дуг на основе концепции тепловых мантийных плюмов.	48

Babichev N. B., Sevastyanov A. A. On approximate analytical solutions of principal eigenvalue spectral problem.	3
Babichev N. B., Sevastyanov A. A. On similarity correlations derived based on Schrodinger equation invariance property	9
Gorbatenko M. V. The regular centrally symmetric static solution of equations of the conformally invariant geometrodynamics	12
Gorbatenko M. V., Neznamov V. P., Popov E. Yu. On regular solutions of the Dirac equation in the Reissner-Nordström extreme field	23
Sevastyanov A. A. Time evolution of neutron characteristics in uniform spheres of fissile materials	31
Yanilkin Y. V., Morozov V. G., Karpenko I. I., Chernyshova O. N. Direct 3D numerical simulation of the hot spot growth in detonation	37
Medvedev A. B. Possible explanation for formation of adjacent depressions of island arcs based on concept of thermal mantle plumes	48

Редактор *Н. П. Мишкина*

Компьютерная подготовка оригинала-макета *Н. В. Мишкина*

Подписано в печать 23.09.2015 Формат 60 × 84 1/8
 Оффсетн. печ. Усл. печ. л. 6,6 Уч.-изд. л. 5,6
 Тираж 1000 экз. Зак. тип. 34-2015 7 статей Индекс 3657

Отпечатано в ИПК ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ»
 607188, г. Саров Нижегородской области

РЕФЕРАТЫ

УДК 539.17

О ПРИБЛИЖЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ НА ГЛАВНЫЕ СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ / Н. Б. Бабичев, А. А. Севастьянов // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2015. Вып. 3. С. 3–8.

Отработан алгоритм приближенного решения спектрального кинетического уравнения.

УДК 539.17

О ФОРМУЛАХ ПОДОБИЯ, ПОЛУЧЕННЫХ НА ОСНОВЕ СВОЙСТВА ИНВАРИАНТНОСТИ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА / Н. Б. Бабичев, А. А. Севастьянов // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2015. Вып. 3. С. 9–11.

Получены формулы подобия некоторых квантово-механических процессов.

УДК 530.12:531.51

РЕГУЛЯРНОЕ ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОЕ СТАТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ КОНФОРМНОЙ ГЕОМЕТРОДИНАМИКИ / М. В. Горбатенко // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2015. Вып. 3. С. 12–22.

Находится регулярное центрально-симметричное статическое решение уравнений общей теории относительности, обобщенных таким образом, чтобы они удовлетворяли условию конформной инвариантности. Решение состоит из двух частей, разделенных поверхностью ветвления. Во внешней части решение совпадает с решением Шварцшильда в пространстве де Ситтера. Внутренняя ветвь отличается от внешней тем, что в ней не равен нулю инвариант, построенный из вектора Вейля. На поверхности ветвления выполняются все условия, выполнение которых требуется в релятивистской гидродинамике при рассмотрении поверхностей разрыва: непрерывность компонент метрики и равенство нулю радиальной компоненты силы, действующей на объект. Видимый радиус объекта определяется его гравитационным радиусом и кривизной пространства в месте размещения объекта. Построенное решение позволяет избежать концептуальных трудностей, возникающих в ОТО (сингулярности, горизонты событий и др.). В то же время построенное решение приводит к уравнению состояния материи внутри объекта, относящееся к категории смеси обычной материи и темной энергии.

УДК 530.145.7; 514.764.2

О РЕГУЛЯРНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА В ЭКСТРЕМАЛЬНОМ ПОЛЕ РАЙССНЕРА-НОРДСТРЁМА / М. В. Горбатенко, В. П. Незнамов, Е. Ю. Попов // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2015. Вып. 3. С. 23–30.

В работе анализируются эффективные потенциалы квадрированных уравнений Дирака в статических полях Шварцшильда и Райсснера–Нордстрёма.

Показано, что во всех рассмотренных случаях реализуются условия «падения» частиц на соответствующие горизонты событий.

Исключение составляет одно из решений для экстремального поля Райсснера–Нордстрёма с единственным горизонтом событий.

Голая сингулярность Райсснера–Нордстрёма, как и сингулярности в центре для рассматриваемых метрик с горизонтами событий, прикрыта для квантово-механических частиц бесконечно большим отталкивающим потенциальным барьером.

УДК 539.17

ЭВОЛЮЦИЯ ВО ВРЕМЕНИ НЕЙТРОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ОДНОРОДНЫХ ШАРОВ ИЗ ДЕЛЯЩИХСЯ МАТЕРИАЛОВ / А. А. Севастьянов // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2015. Вып. 3. С. 31–36.

С помощью аналитических вычислений и численных расчетов исследовано изменение нейтронных характеристик активных шаров с течением времени.

УДК 536.36-541.12

ПРЯМОЕ 3D ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РОСТА ГОРЯЧИХ ТОЧЕК В ДЕТОНАЦИИ / Ю. В. Янилкин, В. Г. Морозов, И. И. Карпенко, О. Н. Чернышова // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2015. Вып. 3. С. 37–47.

Представлены результаты 3D численного моделирования процесса роста горячих точек в детонации с учетом турбулентного перемешивания. Проведенные исследования показали, что в результате воздействия УВ, развития неустойчивости на границе ВВ/ПВ и вихревого течения крупномасштабные частицы ВВ перемешиваются и дробятся до мелких размеров, при которых за счет развитой поверхности контакта ВВ и ПВ успевает происходить прогрев ВВ (передача энергии от ПВ) и эффективно продолжается реакция разложения. Численное моделирование позволило рассчитать скорость роста горячих точек (порядка 100–200 м/с). Это подтверждает гипотезу о том, что турбулентность в зоне реакции при механическом переносе вещества играет важную роль и ее необходимо учитывать в теории детонации.

ВОЗМОЖНОЕ ОБЪЯСНЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ СМЕЖНЫХ ВПАДИН ОСТРОВНЫХ ДУГ НА ОСНОВЕ КОНЦЕПЦИИ ТЕПЛОВЫХ МАНТИЙНЫХ ПЛЮМОВ / А. Б. Медведев // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2015. Вып. 3. С. 48–68.

На основе предложенного ранее варианта концепции тепловых мантийных плюмов рассматривается гипотетическое объяснение возникновения островных дуг, их последующее погружение и образование расширяющихся со временем двух смежных с ними линейных впадин. В этой модели расположенный под корой вертикальный плюм, имеющий высоту порядка размера верхней мантии, в среднем плотнее (тяжелее) среды при умеренном перегреве относительно нее (в теплом состоянии). Его поведение нормализуется с увеличением средней температуры – сильноперегретый (горячий) плюм легче среды. Теми же свойствами плавучести, что и плюм, обладают вертикальные колонки перегретой среды верхней мантии. Немонотонное поведение средней плотности колонок плюма и среды при увеличении их средней температуры аналогично поведению плотности воды, которая в интервале $\approx 273\text{--}281$ К больше, чем при 273 К, и меньше последней при перегреве >281 К. При интерпретации возникновения островной дуги как следствия всплытия до уровня коры горячего плюма в форме вертикальной пластины, названная аномалия плотности приводит к тому, что при передаче тепла от плюма среде в двух плоских тепловых волнах, реализующихся на двух границах плюма-пластины со средой верхней мантии, он постепенно остывает и уплотняется (начиная с границ со средой), среда, нагреваясь до теплого состояния, также уплотняется. Подобное уплотнение может являться причиной погружения островов и образования и расширения со временем двух пограничных линейных впадин (впадин стыка), имеющих горизонтальный размер $\Delta x \sim (\chi t)^{0,5}$ ($\sim 10(t)^{0,5}$, Δx – км, t – время после всплытия плюма в млн. лет, $\chi \approx 0,01$ см²/с). На больших промежутках времени образуется общая впадина, отвечающая переходу вещества плюма и нагретой от него среды в теплое плотное состояние. Выполнено упрощенное моделирование этих процессов при решении одномерной задачи о горизонтальном остывании вертикальной пластины воды с начальной температурой >281 К, помещенной в водную среду при 273 К. Решение подтвердило ожидаемый рельеф поверхности в районе всплытия плюма-пластины. Рассмотренные модельные варианты показали возможность реализации различных режимов движения (центробежный, центростремительный, с нулевой скоростью) границы поверхностного поднятия со впадиной стыка и максимума впадины стыка (аналог оси глубоководного желоба) по отношению к центральной плоскости пластины в зависимости от исходных параметров задачи. При моделировании выявлено, что при общем опускании поверхности ее ограниченный участок, примыкающий к максимуму впадины стыка, после погружения до максимальной глубины может испытывать относительный подъем. Сделана попытка приложения полученных модельных результатов к интерпретации Курильской островодужной системы.

ABSTRACT

ON APPROXIMATE ANALYTICAL SOLUTIONS OF PRINCIPAL EIGENVALUE SPECTRAL PROBLEM / N. B. Babichev, A. A. Sevastyanov // VANT. Ser.: Theoret. i prikl. fizika. 2015, N 3. P. 3–8.

An algorithm of approximate solution of spectral kinetic equation has been verified.

SIMILARITY CORRELATIONS ARE DEVELOPED FOR SEVERAL QUANTUM-MECHANICAL PROCESSES / N. B. Babichev, A. A. Sevastyanov // VANT. Ser.: Theoret. i prikl. fizika. 2015, N 3. P. 9–11.

Similarity correlations are developed for several quantum-mechanical processes.

THE REGULAR CENTRALLY SYMMETRIC STATIC SOLUTION OF EQUATIONS OF THE CONFORMALLY INVARIANT GEOMETRODYNAMICS / M. V. Gorbatenko // VANT. Ser.: Theoret. i prikl. fizika. 2015, N 3. P. 12–22.

Here is found the regular centrally symmetric static solution of the equations of General Relativity generalized such manner that they satisfy the condition of the conformal invariance. The solution consists of two parts separated by bifurcation surface. In remote part the solution coincides with Schwarzschild solution in de Sitter space. The internal part differs from the remote part so much the invariant constructed from the Weyl vector is not equals zero. All the conditions fulfillment of that is demanded in relativistic hydrodynamics perform on the bifurcation surface: continuity of the metric components and zero equality of radial force acted on the internal object. The watched radius is defined by the gravitational radius and the space curvature in the object location.

The constructed solution permits to avoid conceptual difficulties arised in General Relativity (singularities, event horizons and others). In that times the constructed solution leads to state equations in the internal object that belong to a mix of the usual matter and the dark matter.

ON REGULAR SOLUTIONS OF THE DIRAC EQUATION IN THE REISSNER-NORDSTRÖM EXTREME FIELD / M. V. Gorbatenko, V. P. Neznamov, E. Yu. Popov // VANT. Ser.: Theoret. i prikl. fizika. 2015, N 3. P. 23–30.

In the paper, the effective potentials of the Dirac equation are analyzed in static centrally symmetric gravitational fields.

It is shown that for all examined metrics, allowing existence of event horizons, the condition of particle “fall” onto all appropriate event horizons is met.

The exception is one of the solutions for the Reissner-Nordström extreme field with the single event horizon. In this case, while fulfilling the condition found by V. I. Dokuchaev, Yu. N. Eroshenko, the normalization integral is convergent and the wave functions turn into zero on the event horizon. This corresponds to the Hilbert causality condition.

In our paper, with the same signs of particle charges and a field source, the impossibility of the extreme field existence off the event horizon is shown for the stationary bound states of Dirac particles.

Under the event horizon, such states with the uncompensated electrical charge are possible with the unlimited energy of a bound particle determined by the ratio between the gravitational and the electromagnetic coupling constants. With opposite charges of a particle and a field source, stationary bound states off the event horizon are possible only for particles with negative energy.

The event horizon for the regular solution of the Dirac equation in the Reissner-Nordström extreme field is separated from the rest of the space by infinitely high potential barriers. The quantum-mechanical particle with zero values of wave functions on the event horizon cannot cross it in any direction.

The source mass of the extreme field is comparable with the Planck mass. The use of charged particles of the standard model as a Dirac particle leads to extremely high values of their energy. The use of such bound structures as carriers of the dark matter seems difficult because of the uncompensated electrical charge.

TIME EVOLUTION OF NEUTRON CHARACTERISTICS IN UNIFORM SPHERES OF FISSILE MATERIALS / A. A. Sevastyanov // VANT. Ser.: Theoret. i prikl. fizika. 2015, N 3. P. 31–36.

The changing in time of neutron characteristics of active spheres has been studied using analytical calculations and numerical simulations.

DIRECT 3D NUMERICAL SIMULATION OF THE HOT SPOT GROWTH IN DETONATION / Y. V. Yanilkin, V. G. Morozov, I. I. Karpenko, O. N. Chernyshova // VANT. Ser.: Theoret. i prikl. fizika. 2015, N 3. P. 37–47.

The paper presents the results of 3D direct numerical simulations of the process of hot spot growth during detonation. The studies have demonstrated that the shock wave, the instability at the high-explosive/explosion-products (HE/EP) interface and the eddy flow cause large-size HE particles to mix and break down to small-size fragments, and due to the developed HE/EP interface, the explosive has enough time to get heated (energy is transferred from EP) and the decomposition reaction continues effectively. The numerical modeling allowed us to calculate the growth rate of hot spots (on the order of 100–200m/s). This proves the hypothesis that turbulence in the reaction zone plays an important role under mechanical material transport conditions and that it should be taken into account in the detonation theory.

POSSIBLE EXPLANATION FOR FORMATION OF ADJACENT DEPRESSIONS OF ISLAND ARCS BASED ON CONCEPT OF THERMAL MANTLE PLUMES / A. B. Medvedev // VANT. Ser.: Theoret. i prikl. fizika. 2015, N 3. P. 48–68.

A hypothetical explanation for the occurrence of island arcs, their subsequent submersion and formation of two adjacent linear depressions expanding with time is discussed on the strength of the early version of the concept of thermal mantle plumes. In this model the vertical plum having a height of a size of upper mantle and located under the crust, is denser (heavier) than the environment in the average under mild overheating relative to the environment (in a warm state). The plum behavior comes to normal with increasing the average temperature— the strongly overheated (hot) plum is easier than the medium. Vertical columns of the overheated environment of the upper mantle possess the same properties of buoyancy as plum. The nonmonotonic behaviour of the average density of plum columns and the environment with the increase of their average temperature is similar to the behaviour of the density of water, which is larger in the range of $\approx 273\text{--}281$ K than at 273 K, and smaller than the latter at overheating >281 K. When interpreting an arising island arc as a consequence of the ascent up to a level of the crust of hot plum in a form of a vertical plate, a named anomaly of density brings about the fact that in the course of heat transfer from plum to a medium in two flat thermal waves existing at two boundaries between plume-plate and a medium of an upper mantle, plum cools gradually and is being compacted (starting from boundaries with a medium), the medium is being compacted as well by heating up to a warm state. Such compaction can account for submerging of islands and formation and expansion of two boundary linear depressions (depressions of a junction) having the horizontal size $\Delta x \sim (\chi t)^{0,5}$ ($\sim 10(t)^{0,5}$, Δx – km, t is the time after plum ascent in mln. years, $\chi \approx 0,01$ cm²/s). A common depression is formed at long time intervals, which corresponds to the transition of a plum substance and a medium heated by plum into a warm dense state. Simplified modeling of these processes has been fulfilled for solving a one-dimensional task regarding horizontal cooling of a vertical water plate having the initial temperature of >281 K that is placed in an aqueous medium at 273 K. A solution has confirmed an expected surface relief in a zone of the ascent of a plume-plate. The considered model versions showed the possibilities of various modes of motion (a centrifugal mode, a centripetal mode, a mode with a zero speed) of a boundary of a surface ascent and a depression of a junction and a maximum of a depression of a junction (an analog of an axis of a deep-water gutter) with respect to a central plate plane depending on initial task parameters. In modeling it was revealed that while a total descent of a surface occurs, a restricted area of a surface adjacent to a maximum of a depression of a junction can be subjected to a relative ascent following immersion up to a maximum depth. An effort was made to use obtained model results for interpretation of an arc system of Kurile Islands.

ISSN 0234-0763 **ВОПРОСЫ АТОМНОЙ НАУКИ И ТЕХНИКИ**

С е р и я :

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ ФИЗИКА

2015. Вып. 3. 1–69

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ

К авторским оригиналам, передаваемым для издания, предъявляются следующие требования:

1. Экземпляр статьи должен быть отпечатан на одной стороне листа формата А4 шрифтом Times New Roman 12 пунктов через 2 интервала, левое поле 3 см. Статья сопровождается дискетой 3,5' (zip100, zip250, cd-r/rw, USB Flash Drive) с электронным вариантом текста (шрифт 11 пунктов через 1 интервал) в редакторе Word for Windows версии 97. Статья должна быть составлена в следующем порядке: УДК; название статьи; инициалы и фамилии авторов; аннотация (не более 10 строк); ключевые слова – все вышперечисленное на русском и английском языках; текст; список литературы; пронумерованные рисунки и подписи (на отдельном листе); таблицы с нумерационным и тематическим заголовками, каждая таблица на отдельном листе, а в электронном виде представляется отдельным файлом. Кавычки в тексте ставятся при английской раскладке клавиатуры («...»). Название файла должно состоять из фамилии первого автора и краткого названия статьи.

2. Файлы иллюстраций должны быть представлены отдельно – в виде файлов, в формате TIFF (.TIF) или JPEG (.JPG) (максимальное качество) с разрешением не менее 250 точек на дюйм (dpi или inch). Название файла иллюстрации должно включать фамилию первого автора и порядковый номер рисунка в статье, например: Dzyuba_03.tif. Не допускается представлять иллюстрации, созданные с использованием внутренних инструментов Word.

3. При написании статьи следует использовать общепринятые термины, единицы измерения и условные обозначения. Все употребляемые авторами обозначения должны быть определены при их первом появлении в тексте. Необходимо обращать внимание на написание прописных и строчных букв: латинские буквы (*A, I, d, h* и т. п.) набираются курсивом, греческие буквы (α, β, γ), названия функций (\sin, \cos, \exp), химических элементов (H_2O, H_2C_5OH) и единиц измерения (см, МВт/см², с) – прямым (обычным) шрифтом. Символы ($\Re, \varnothing, \otimes \in$ и т. п.) следует оговаривать на полях рукописи. Обозначения матриц и векторов набираются полужирным шрифтом прямо.

4. Формулы создаются в виде целых математических выражений в формульном редакторе Word или редакторе Math Type 5.2 и нумеруются в круглых скобках. Нумерация формул должна быть сплошной по статье (не по разделам), нумерация типа (2а), (2б) нежелательна. Нумеровать следует только те формулы и уравнения, на которые есть ссылка в последующем изложении.

5. Ссылки на литературу в тексте даются по порядку, арабскими цифрами в квадратных скобках. Список литературы составляется в той же последовательности, в которой приводятся ссылки на литературу в тексте. Библиографические ссылки оформляются по следующим правилам:

– для книг: фамилии и инициалы авторов, название книги, место издания, издательство (без кавычек), год (для трудов конференций – город, страна, год);

– для статей в журнале: фамилии и инициалы авторов, название статьи, название журнала (без кавычек), год, том, выпуск, страницы;

– для авторефератов диссертаций: фамилия и инициалы автора, название автореферата диссертации, степень, место защиты (город) и год;

– для препринтов: фамилии и инициалы авторов, название препринта, место издания, год и номер;

– для патентов: вид патентного документа (А.с. или Пат.), его номер, название страны, выдавшей документ, индекс международной классификации изобретения, название издания, в котором опубликована формула изобретения, год и номер издания;

– для электронных источников – полный электронный адрес (включая дату обращения к источнику), позволяющий обратиться к публикации.

При необходимости в заголовке библиографической ссылки на работу четырех и более авторов могут быть указаны имена всех авторов или первых трех с добавлением слов «и др.». В списке литературы инициалы должны стоять после фамилий.

6. В конце текста (перед списком литературы) указывается контактная информация обо всех авторах статьи: фамилия, имя, отчество (полностью), место работы, должность, телефон, e-mail и по желанию автора – домашний почтовый адрес.

Все материалы по статьям должны направляться по адресу:

607188, г. Саров Нижегородской обл., пр. Мира, 37, РФЯЦ-ВНИИЭФ, ИТМФ, в редакцию журнала ВАНТ, сер. «Теоретическая и прикладная физика». Тел. (83130) 2-77-01. E-mail: Nadykto@vniief.ru