

**РЕШЕТКА ЛИЧА И РАСПРОСТРАНЕННОСТЬ СТАБИЛЬНЫХ НУКЛИДОВ ВО ВСЕЛЕННОЙ****М. В. Горбатенко, Г. Г. Кочемасов**

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Анализируются обнаруженные корреляции между распространенностью 284 стабильных нуклидов во Вселенной и статистическими весами 284 мелких дыр решетки Лича. Корреляции, по-видимому, могут быть объяснены в рамках формализма, в котором внутреннее пространство 7-мерно, а спиноры в этом пространстве имеют 24 компоненты.

Предлагается модель первичного нуклеосинтеза, в которой стабильные элементы последовательно возникают в инфляционной стадии: вначале уран-238, в конце водород H. Все элементы, включая углерод и обойденные ядра, создаются по единой схеме. На второй стадии распространенность меняется по классической схеме: в недрах сверхновых и при их взрывах.

*Ключевые слова:* распространенности стабильных нуклидов, решетка Лича, мелкие дыры, первичный нуклеосинтез, космологическая модель.

**Введение**

В данной работе мы исследуем корреляции между двумя функциями. Одна из них относится к ядерной физике и астрофизике и имеет смысл распространенности  $R^{\text{exp}}(Z, A)$  стабильных нуклидов (СН) во Вселенной [1, 2]. Другая функция характеризует математический объект – 24-мерную решетку Лича [3]. С этой решеткой связаны мелкие дыры\*, которым можно сопоставить масштабированные объемы, характеризующие относительную «рыхлость» дырочных решеток. Симметрия дырочных решеток приводит к их вырожденности, которая характеризуется статистическими весами. Вторая функция есть зависимость  $\Sigma^{\text{Leech}}(V_j)$  статистических весов мелких дыр от их масштабированных объемов. Области определения обеих функций  $R^{\text{exp}}(Z, A)$  и  $\Sigma^{\text{Leech}}(V_j)$  состоят из 284 точек. Именно этому числу равно количество как СН, так и мелких дыр.

Насколько нам известно, первым высказал предположение о возможной глубокой связи меж-

ду этими, на первый взгляд, не связанными областями физики и математики, был наш коллега А. В. Пушкин [4]. Однако, до сих не изучался вопрос: являются ли связи случайными или за ними стоит какая-то физика?

Ориентируясь на концепции современной теоретической физики (многомерное пространство внутренних степеней свободы, представление группы симметрии мелких дыр решетки Лича), мы предлагаем теоретическую конструкцию (дырочную космологическую модель), показывающую закономерность корреляций (при некоторых дополнительных предположениях о процессе преддозвездного ядерного синтеза).

В работе вначале описываются объекты исследования: экспериментальная кривая распространенности СН во Вселенной  $R^{\text{exp}}(Z, A)$ , решетка Лича и ее дыры. Приводятся масштабированные объемы дырочных решеток  $V_j$ , характеризующие их рыхлость. Вычисляются статистические веса мелких дыр  $\Sigma^{\text{Leech}}(V_j)$ , характеризующие симметрию соответствующих решеток. Формулируется правило соответствия между СН и мелкими дырами. Анализируются корреляции между  $R^{\text{exp}}(Z)$

\* Термины «мелкие дыры» и «глубокие дыры» приняты в теории решеток [3].

и  $\Sigma^{Leech}(V_j)$ . Обсуждается сценарий первичного нуклеосинтеза. Он основывается на решении типа Фридмана, которое используется в космологии для объяснения разлета Вселенной с ускорением. Приводится сравнение экспериментальных значений распространенности и расчетных значений статистических весов.

### 1. Перечень стабильных нуклидов

Под нуклидами мы понимаем атомные ядра с определенными значениями заряда  $Z$  и массового числа  $A$ . Два нуклида являются различными, если они отличаются либо зарядом, либо массовым числом, либо как зарядом, так и массой. Далее используется также термин химические элементы. Под химическим элементом понимается совокупность всех его изотопов, т. е. нуклидов, соответствующих одному значению  $Z$ .

Стабильными будем называть нуклиды, периоды полураспада  $\tau_{1/2}$  которых больше или порядка времени жизни Вселенной. По данным справочников [1, 2] составлен полный перечень стабильных нуклидов. В табл. 1 этот перечень приведен для 78 стабильных изотопов 31 элемента начала таблицы Менделеева. Перечень может быть продолжен вплоть до тория-232 и урана-238, у которых значения  $\tau_{1/2}$  составляют  $1,41 \cdot 10^{10}$  и  $4,51 \cdot 10^9$  лет соответственно. Общее количество стабильных нуклидов равно 284.

В табл. 1 десять столбцов. В столбце 2 указаны обозначения СН, в столбце 3 – значения заряда  $Z$ , в столбце 4 – атомные массы, в столбце 5 – время полураспада. Для каждого элемента стабильные изотопы расположены в порядке возрастания их атомной массы, т. е. так, как и в справочниках [1, 2]. В остальных столбцах таблицы приведена информация, которая поясняется далее.

Таблица 1

Список упорядоченных по  $Z$  стабильных нуклидов и упорядоченных по масштабированному объему мелких дыр

Номер п/п	Нуклид	$Z$	$A$	$\tau_{1/2}, c$	Алгебраическая структура дыр	Масштабированный объем	Статистические веса		
							дыр	кластеров	элементов
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	H	1	1	$\infty$	$e_8^3 a_1$	61	$1.600 \cdot 10^{38}$	$1.624 \cdot 10^{38}$	$1.624 \cdot 10^{38}$
2			2	$\infty$	$d_9 e_8^2$	76	$2.371 \cdot 10^{36}$		
3	He	2	3	$\infty$	$d_{17} e_8$	92	$3.513 \cdot 10^{34}$	$8.038 \cdot 10^{36}$	$8.038 \cdot 10^{36}$
4			4	$\infty$	$e_8^2 e_7 a_2$	93	$8.003 \cdot 10^{36}$		
5	Li	3	6	$\infty$	$d_{10} e_8 e_7$	94	$1.581 \cdot 10^{35}$	$1.686 \cdot 10^{36}$	$1.686 \cdot 10^{36}$
6			7	$\infty$	$d_{11} e_7^2$	112	$1.054 \cdot 10^{34}$		
7	Be	4	9	$\infty$	$d_{11} e_8 e_6$	114	$3.952 \cdot 10^{34}$	$3.952 \cdot 10^{34}$	$3.952 \cdot 10^{34}$
8	B	5	10	$\infty$	$a_9 e_8^2$	115	$4.631 \cdot 10^{34}$	$8.144 \cdot 10^{34}$	$8.144 \cdot 10^{34}$
9			11	$\infty$	$d_{16} e_8 a_1$	122	$3.513 \cdot 10^{34}$		
10	C	6	12	$\infty$	$d_{18} e_7$	126	$1.334 \cdot 10^{36}$	$1.336 \cdot 10^{36}$	$1.336 \cdot 10^{36}$
11			13	$\infty$	$e_8^2 e_6 a_3$		$2.342 \cdot 10^{33}$		
12	N	7	14	$\infty$	$e_8 e_7^2 a_3$	128	$3.557 \cdot 10^{35}$	$4.39 \cdot 10^{35}$	$1.756 \cdot 10^{35}$
13			15	$\infty$	$d_{13} d_{12}$	136	$5.205 \cdot 10^{32}$		
14	O	8	16	$\infty$	$d_{12} e_8 d_5$		140		$3.513 \cdot 10^{34}$
15			17	$\infty$	$e_7^3 d_4$	140	$4.743 \cdot 10^{34}$		
16			18	$\infty$	$d_{25}$	140	$5.205 \cdot 10^{32}$		
17	F	9	19	$\infty$	$a_{17} e_8$	141	$5.36 \cdot 10^{29}$	$4.824 \cdot 10^{30}$	$4.824 \cdot 10^{30}$
18	Ne	10	20	$\infty$	$a_{10} e_8 e_7$	143	$1.698 \cdot 10^{33}$	$1.276 \cdot 10^{34}$	$1.276 \cdot 10^{34}$

Номер п/п	Нуклид	Z	A	$\tau_{1/2}, c$	Алгебраическая структура дыр	Масштабированный объем	Статистические веса		
							дыр	кластеров	элементов
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
19			21	$\infty$	$d_{10}e_7^2a_1$	148	$1.054 \cdot 10^{34}$		
20			22	$\infty$	$d_{16}d_9$	152	$5.204 \cdot 10^{32}$		
21	Na	11	23	$\infty$	$e_7e_6^3$	153	$3.335 \cdot 10^{33}$	$1.009 \cdot 10^{35}$	$2.523 \cdot 10^{34}$
22			24	$\infty$	$e_8^2a_8a_1$		$8.337 \cdot 10^{34}$		
23	Mg	12	25	$\infty$	$e_7^2e_6d_5$	156	$1.186 \cdot 10^{34}$		$7.568 \cdot 10^{34}$
24			26	$\infty$	$d_{12}e_7d_6$		$2.342 \cdot 10^{33}$		
25	Al	13	27	$\infty$	$d_{13}e_8a_4$	160	$1.098 \cdot 10^{34}$	$8.081 \cdot 10^{35}$	$2.020 \cdot 10^{35}$
26			28	$\infty$	$e_8^2d_5a_4$		$7.410 \cdot 10^{35}$		
27	Si	14	29	$\infty$	$d_{19}e_6$	162	$5.856 \cdot 10^{32}$		$6.061 \cdot 10^{35}$
28			30	$\infty$	$e_8e_7e_6a_4$	165	$5.558 \cdot 10^{34}$		
29	P	15	31	$\infty$	$a_{18}e_7$	171	$1.697 \cdot 10^{29}$	$1.697 \cdot 10^{29}$	$1.697 \cdot 10^{29}$
30			32	$\infty$	$a_{11}e_8e_6$	174	$2.316 \cdot 10^{32}$	$4.102 \cdot 10^{34}$	$1.823 \cdot 10^{34}$
31	S	16	33	$\infty$	$e_7^2d_6d_5$	176	$1.054 \cdot 10^{34}$		
32			34	$\infty$	$d_9d_8^2$		$5.203 \cdot 10^{32}$		
33			36	$\infty$	$d_{12}^2a_1$	180	$5.203 \cdot 10^{32}$		$9.117 \cdot 10^{33}$
34	Cl	17	35	$\infty$	$d_{12}d_7e_6$		$5.855 \cdot 10^{32}$		
35			37	$\infty$	$d_{24}a_1$	186	$5.205 \cdot 10^{32}$		
36			36	$\infty$	$d_{14}e_8a_2a_1$	186	$2.634 \cdot 10^{34}$	$1.367 \cdot 10^{34}$	
37	Ar	18	38	$\infty$	$d_{16}e_7a_2$		$1.756 \cdot 10^{33}$		
38			40	$\infty$	$a_{16}e_8a_1$	187	$9.113 \cdot 10^{30}$		
39			39	$\infty$	$d_{14}d_{10}a_1$	188	$5.204 \cdot 10^{32}$	$3.608 \cdot 10^{33}$	$3.608 \cdot 10^{33}$
40	K	19	41	$\infty$	$a_9e_8e_7a_1$	190	$3.088 \cdot 10^{33}$		
41			40	$\infty$	$d_{10}e_7d_7a_1$	192	$2.342 \cdot 10^{33}$	$1.468 \cdot 10^{35}$	$1.258 \cdot 10^{35}$
42			42	$\infty$	$e_8^2a_5a_4$	195	$1.389 \cdot 10^{35}$	$1.468 \cdot 10^{35}$	
43	Ca	20	43	$\infty$	$a_{25}$		$4.033 \cdot 10^{26}$		
44			44	$\infty$	$a_{10}e_8e_7$	198	$1.698 \cdot 10^{33}$		
45			46	$\infty$	$d_{20}d_5$	200	$5.205 \cdot 10^{32}$		
46			48	$\infty$	$a_{15}d_{10}$		$2.541 \cdot 10^{29}$		
47	Sc	21	45	$\infty$	$e_7^2d_7a_4$	204	$3.293 \cdot 10^{33}$		
48			46	$\infty$	$a_{16}d_9$	204	$1.350 \cdot 10^{29}$	$3.843 \cdot 10^{34}$	$3.843 \cdot 10^{34}$
49			47	$\infty$	$d_{13}e_7a_5$	207	$4.391 \cdot 10^{32}$	$1.270 \cdot 10^{33}$	
50	Ti	22	48	$\infty$	$a_{11}e_7d_7$		$1.372 \cdot 10^{31}$		
51			49	$\infty$	$e_8e_7d_5a_5$		$2.964 \cdot 10^{34}$		
52			50	$\infty$	$e_8e_6^2a_5$	207	$8.337 \cdot 10^{33}$		
53			50	6.0E15	$d_{13}a_{12}$	208	$1.652 \cdot 10^{30}$	$3.810 \cdot 10^{33}$	$1.270 \cdot 10^{33}$
54	V	23	51	$\infty$	$d_{12}d_8d_5$	208	$5.204 \cdot 10^{32}$		

Номер п/п	Нуклид	Z	A	$\tau_{1/2}, \text{с}$	Алгебраическая структура дыр	Масштабированный объем	Статистические веса		
							дыр	кластеров	элементов
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
55	Cr	24	50	$\infty$	$a_{12}e_8d_5$		$1.115 \cdot 10^{32}$	$2.540 \cdot 10^{33}$	
56			52	$\infty$	$e_7d_6^3$	216	$2.342 \cdot 10^{33}$		
57			53	$\infty$	$a_{17}e_7a_1$	222	$3.216 \cdot 10^{29}$		
58			54	$\infty$	$e_6^4a_1$	225	$8.337 \cdot 10^{32}$		
59	Mn	25	55	$\infty$	$d_{10}e_7d_6a_2$		$1.757 \cdot 10^{33}$	$2.046 \cdot 10^{35}$	$3.410 \cdot 10^{34}$
60	Fe	26	54	$\infty$	$a_{11}d_8e_6$	228	$3.430 \cdot 10^{30}$	$1.364 \cdot 10^{35}$	
61			56	$\infty$	$d_8e_7^2a_2a_1$		$7.903 \cdot 10^{33}$		
62			57	$\infty$	$d_{16}a_9$	230	$1.016 \cdot 10^{31}$		
63			58	$\infty$	$e_8^2a_6a_2a_1$	231	$1.945 \cdot 10^{35}$		
64	Co	27	59	$\infty$	$a_{10}e_8e_6a_1$		$4.246 \cdot 10^{32}$		$3.410 \cdot 10^{34}$
65	Ni	28	58	$\infty$	$d_3^3a_1$	232	$5.202 \cdot 10^{32}$	$1.386 \cdot 10^{34}$	$4.950 \cdot 10^{33}$
66			60	$\infty$	$a_{12}d_7e_6$	234	$1.858 \cdot 10^{30}$	$1.980 \cdot 10^{33}$	
67			61	$\infty$	$d_{21}a_4$	240	$1.626 \cdot 10^{32}$		
68			62	$\infty$	$a_{19}d_6$		$1.986 \cdot 10^{28}$		
69			64	$\infty$	$d_{12}d_9a_4$		$1.626 \cdot 10^{32}$		
70	Cu	29	63	$\infty$	$d_9^2a_7$		$3.253 \cdot 10^{31}$		
71			65	$\infty$	$a_{13}e_8a_4$	245	$1.876 \cdot 10^{31}$		
72	Zn	30	64	$\infty$	$e_8e_7a_6a_4$		$5.403 \cdot 10^{33}$	$4.950 \cdot 10^{33}$	
73			66	$\infty$	$a_{15}e_8a_1^2$		$1.715 \cdot 10^{31}$		
74			67	$\infty$	$d_{10}d_8d_6a_1$	248	$5.204 \cdot 10^{32}$		
75			68	$\infty$	$d_8^2e_7a_1a_1$		$2.341 \cdot 10^{33}$		
76			70	$\infty$	$d_{16}e_6a_3$		$2.927 \cdot 10^{32}$	$1.980 \cdot 10^{33}$	
77	Ga	31	69	$\infty$	$d_{13}e_6a_6$	252	$6.404 \cdot 10^{31}$		
78			71	$\infty$	$e_8e_6a_6d_5$		$4.323 \cdot 10^{33}$		

### Экспериментальные данные по распространённости стабильных нуклидов

Экспериментальные данные по распространённости СН приводятся в различных источниках (см., например, [4–9]). Эти данные определяются по данным анализа вещества для различных типов космологических объектов (Солнца, подобных звезд главной последовательности, галактических лучей и т. п.) и характеризуются достаточно большим разнообразием. Для примера, на рис. 1 показано, что зависимости относительной распространённости нуклидов от порядкового номера элементов  $Z$  в галактических лучах и в Солнечной системе заметно различаются [10].

Обычно экспериментальные данные по распространённости СН приводятся в двух формах. В одной форме распространённости приводятся в зависимости от порядкового номера элемента, в другой форме – в зависимости от атомной массы нуклида. На рис. 1 данные приведены в первой форме, а на рис. 2 – во второй.

К наиболее существенным и устойчивым особенностям экспериментальной распространённости элементов  $R^{\text{exp}}(Z)$  относятся:

- 1) Элементное вещество Вселенной в основном состоит из водорода – 91 % всех атомов.
- 2) По распространённости гелий занимает второе место, составляя ~8,9 % всех атомов.
- 3) Имеет место немонотонный характер зависимости распространённости элементов как от их порядкового номера, так и от атомной массы.

4) В большинстве экспериментальных данных отмечается глубокий минимум распространённости, соответствующих литию, бериллию и бору.

5) Сразу за этими минимумами следует резкий подъем распространённости углерода и кислорода.

6) За кислородным максимумом идет падение вплоть до скандия ( $Z = 21, A = 40$ ).

7) Наблюдается повышенная распространённость элементов в районе железа («железный пик»).

8) К наиболее устойчивым экспериментальным данным можно отнести также данные по так называемым обойденным ядрам (ОЯ), число которых составляет 36. На рис. 2 наряду со сплошной кривой имеется нижняя пунктирная кривая, которая как раз относится к ОЯ, т. е. к таким нуклидам, распространённости которых ниже распространённости соседних нуклидов на два и более порядков. Особенность ОЯ состоит в том, что они лежат в стороне от всех возможных путей образования тяжелых ядер из более легких в процессе последовательного захвата последними нейтронов и бета-распада, т. е. в  $s$ -процессах [9]. В литературе отмечается трудность с объяснением происхождения ОЯ. Полагают, что они возникали в неравновесных  $r$ -процессах [11]. Можно ожидать, что влияние ядерных реакций, которые происходили в недрах звезд различных поколений, в наименьшей мере коснулось распространённости ОЯ. К обойденным ядрам относятся [11]:

$^{74}\text{Se}, ^{78}\text{Kr}, ^{80}\text{Kr}, ^{84}\text{Sr}, ^{92}\text{Mo}, ^{94}\text{Mo}, ^{96}\text{Ru}, ^{98}\text{Ru}, ^{102}\text{Pd}, ^{106}\text{Cd}, ^{108}\text{Cd}, ^{113}\text{In}, ^{112}\text{Sn}, ^{114}\text{Sn}, ^{115}\text{Sn}, ^{120}\text{Te}, ^{124}\text{Xe}, ^{126}\text{Xe}, ^{130}\text{Ba}, ^{132}\text{Ba}, ^{136}\text{Ce}, ^{138}\text{Ce}, ^{138}\text{La}, ^{144}\text{Sm}, ^{152}\text{Gd}, ^{152}\text{Dy}, ^{158}\text{Dy}, ^{162}\text{Er}, ^{164}\text{Er}, ^{168}\text{Yb}, ^{174}\text{Hf}, ^{180}\text{W}, ^{180}\text{Ta}, ^{184}\text{Os}, ^{190}\text{Pt}, ^{196}\text{Hg}$ .

(1)

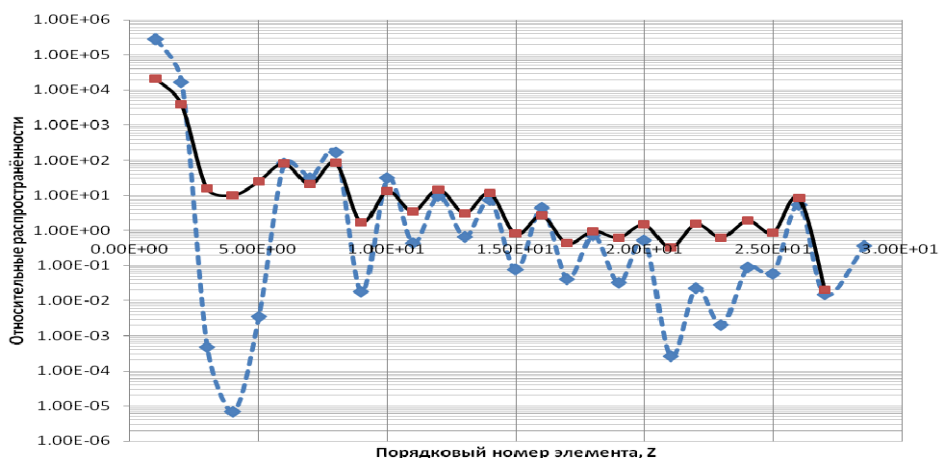


Рис. 1. Сравнение кривых относительных распространённости элементов (представленностей элементов) в галактических лучах (сплошная кривая) и в Солнечной системе (пунктирная кривая). Видно, что относительное содержание лития, бериллия и бора в Солнечной системе на 4–5 порядков ниже, чем в галактических лучах.

Различия на порядки имеются и по другим элементам

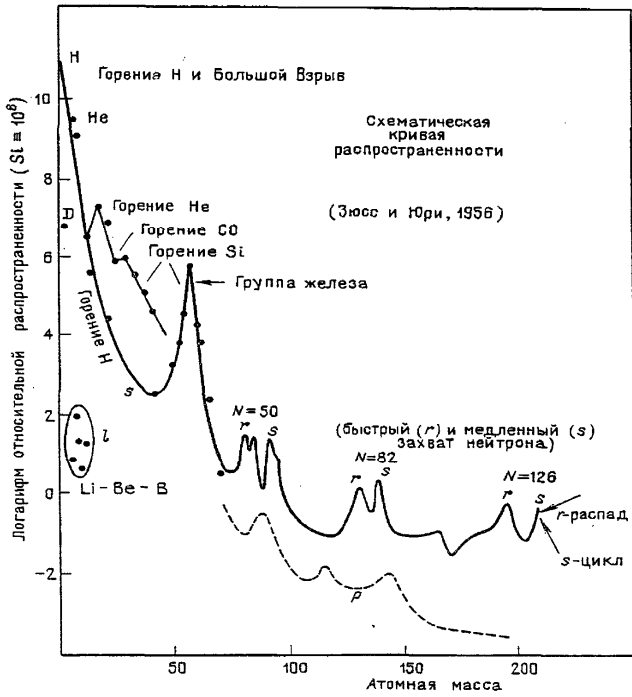


Рис. 2. Схематическая кривая распространённости нуклидов относительно  $Si = 10^6$  в зависимости от относительной атомной массы для Солнца и подобных звезд главной последовательности

Данные по  $R^{exp}(Z)$ , приведенные на рис. 1, и данные по  $R^{exp}(A)$ , приведенные на рис. 2, конечно, нельзя считать относящимися к первичному нуклеосинтезу. Эти данные — результат длительной многообразной эволюции материи и излучений с участием большого количества каналов реакций между ядрами и частицами. Неудивительно, что значения  $R^{exp}(A)$ , например, для метеоритов, Земли, Луны и Солнца далеко не идентичны. Так, на Солнце гелий является вторым по распространённости элементом, а на Земле его практически нет.

### 3. Решетка Лича. Ее мелкие дыры

Уникальные свойства решетки Лича, открытые в 1960-х годах, проще всего пояснить с помощью классической проблемы упаковки шаров. Проблема заключается в следующем: насколько плотно можно уложить большое количество одинаковых шаров в  $N$ -мерном евклидовом пространстве. При любой упаковке, очевидно, останутся пустоты. Как бы мы не укладывали шары в трехмерном пространстве, около четверти пространства останется незаполненным. Особый интерес вы-

зывают решетчатые упаковки. В трехмерном пространстве, как известно из кристаллографии, наиболее плотной является гранецентрированная кубическая решетка. Основными приложениями теории решеток являются задача кодирования в канале связи и многомерные теоретические конструкции решетчатой квантовой теории поля [12]. Во многих случаях требуется рассмотрение решеток в пространствах с размерностью большей трех.

При изучении плотности решетчатых упаковок выяснилось, что размерности 8 и 24 являются выделенными [3]. В размерности 8 существует косоугольная решетка  $E_8$ , на которой реализуется локальный максимум в зависимости плотности упаковки от размерности пространства. Уникальная решетка в 24-мерном пространстве  $\Lambda_{24}$  реализует абсолютный максимум плотности упаковки. Она также является косоугольной и называется решеткой Лича.

Решетка Лича может быть задана в 25-мерном гиперболическом пространстве с сигнатурой  $1(-) \& 24(+)$  с помощью времениподобного вектора

$$t = -(4, 5, 7, 9, \dots, 45, 47, 51 | 145). \quad (3)$$

Этот способ удобен для исследования симметрии решетки Лича. Компоненты фундаментальных векторов для этого случая приведены в табл. 2 [3].

Таблица 2

Задание фундаментальных векторов решетки Лича в 25-мерном псевдоевклидовом пространстве

Номер п/п	Структура векторов
1	$(1, -1, 0^{22}   0)$
2	$(0, 1, -1, 0^{21}   0)$
⋮	⋮
21	$(0^{20}, 1, -1, 0^2   0)$
22	$(0^{22}, 1, -1, 0   0)$
23	$(0^{21}, 1^3   1)$
24	$(1, 3, 4, 5, \dots, 23, 24, 27   75)$
25	$-(4, 5, 7, 9, \dots, 45, 47, 51   145)$

Примечания: 1. Символ типа  $0^{21}$  означает подряд стоящее число 0 в количестве 21.  
2. Вертикальной чертой отделена времениподобная компонента векторов.

Напомним, что понимается под мелкими и глубокими дырами в решетках.

Как известно, вокруг каждого узла решетки расположен ее многогранник Вороного (зона Бриллюэна)  $V(P_i)$ , состоящий из точек пространства, которые, по меньшей мере, так же близки к данному узлу, как к любому другому узлу решетки. Многогранники Вороного – это выпуклые многогранники, объединение которых совпадает со всем пространством  $R^n$ . Внутренности многогранников не пересекаются, но у них имеются общие грани. Для двумерного пространства  $R^2$  (плоскости) многогранник Вороного изображен на рис. 3. Все многогранники Вороного конгруэнтны.

Вершины многогранников Вороного представляют особый интерес. Среди них находятся точки пространства  $R^n$ , расстояние от которых до узлов решетки реализует локальный максимум: эти точки называют дырами решетки. Точка, которая реализует глобальный максимум, называется глубокой дырой решетки. Для рассматриваемой двумерной решетки список исчерпывается дырами одного типа (на рис. 3 одна из таких дыр помечена как глубокая дыра). В решетках  $A_{24}$  и  $E_8$  имеются дыры двух типов. Одни из них (мелкие) переходят сами в себя при движении решетки по времениподобной координате, а другие (глубокие) – нет.

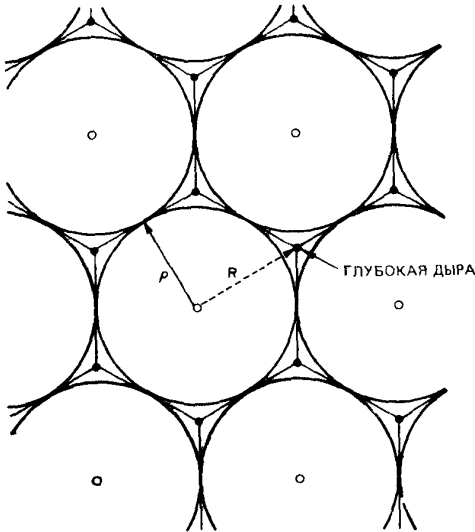


Рис. 3. Гексагональная решетка на плоскости. Показаны многогранники Вороного – правильные шестиугольники. Показан радиус упаковки  $r$  для этой решетки и радиус покрытия  $R$  – расстояние от точки решетки до единственной дыры, которая существует в этой решетке.

$$\text{Для этой решетки } R = 2r/\sqrt{3}$$

Дыры не являются узлами исходной решетки. Совокупность однотипных дыр образует самостоятельную решетку, узлами которой они являются. Математиками установлено [3], что решетка Лича имеет 23 типа решеток глубоких дыр и 284 типа решеток мелких дыр.

#### 4. Статистическая физика мелких дыр

Для развиваемого нами подхода важными являются понятия масштабированного объема и статистического веса мелких дыр. Величина масштабированного объема  $V_j$  равна отношению объема элементарной ячейки, построенной на базисных векторах дырочной решетки с номером  $j$ , к объему элементарной ячейки решетки Лича. Он характеризует «рыхлость» дырочной решетки по сравнению с «рыхлостью» решетки Лича.

В табл. 1 значения масштабированных объемов для всех мелких дыр приведены в столбце 7 в порядке их неубывания.

Дырочную решетку характеризует также ее симметрия. Количественно симметрия решетки (с номером  $j$ ) описывается статистическим весом  $\Sigma_j^{Leech}$ . Можно сказать также, что статистический вес характеризует степень вырождения состояния, соответствующего решетке мелкой дыры с номером  $j$ .

Имеются в виду такие температуры, когда различие экспоненциальных (больцмановских) факторов, зависящих от температуры, можно пренебречь. При вычислении статистических весов используется предположение о равной вероятности всех способов возникновения алгебраической структуры 24-мерной дыры в 25-мерном пространстве с одним выделенным времениподобным направлением.

Статистический вес решетки мелкой дыры с номером  $j$  равен произведению двух сомножителей:

$$\Sigma_j^{Leech} = S_j W_j. \quad (4)$$

Величина  $S_j$  равна числу способов реализации базисных векторов, соответствующих мелкой дыре, в 25-мерном спиновом пространстве.  $S_j$  вычисляется из комбинаторных соображений. Величина  $W_j$  равна произведению порядков групп Вейля всех подалгебр, содержащихся в алгебре решетки мелкой дыры с номером  $j$ :  $W_j = \prod_i w_{j(i)}$ , где  $w_{j(i)}$  – порядок группы Вейля подалгебры  $i$ ,

содержащейся в алгебре  $j$ . Алгебраическая структура первых 78 мелких дыр приведена в табл. 1 (столбец 6). В столбце 8 табл. 1 приведены значения  $\Sigma_j^{Leech}$ , вычисленные по формуле (4).

Отметим важное обстоятельство. С самого начала было сказано, что мелкие дыры располагаются в порядке неубывания их масштабированных объемов. Но как их располагать в случае, когда масштабированные объемы совпадают, но различаются статистические веса? Пока мы не имеем ответа на этот вопрос и считаем, что в таких случаях порядок расположения мелких дыр в табл. 1 не определен. Эту неопределенность мы отмечаем тем, что соответствующие ячейки объединяем. Примером такой неопределенности являются, например, мелкие дыры с номерами 10 и 11, 13 и 14, 21 и 22, 23 и 24 и т. д.

Более сложные случаи неопределенности – это когда несколько дыр с одинаковыми масштабированными объемами перекрываются с СН разных элементов. В таких случаях будем говорить о соответствии не между элементами и дырами, а между кластером элементов и кластером дыр. Статистические веса кластеров равны сумме статистических весов дыр, входящих в кластер. Они приведены в столбце 9 табл. 1. Суммарный статистический вес кластера распределяется поровну по всем входящим в кластер СН. Статистический вес элемента находится как сумма статистических

весов его стабильных изотопов. Найденные таким образом статистические веса элементов приведены в столбце 10 табл. 1.

### 5. Сравнение кривых $R^{exp}(Z)$ и $\Sigma_j^{Leech}$

Приведем прямое сравнение величин  $\Sigma_j^{Leech}$  и  $R^{exp}(Z)$  для первых 30 стабильных нуклидов, положив  $\Sigma_j^{Leech}$  и  $R^{exp}(Z)$  для углерода обеих кривых равными. Результаты сравнения представлены на рис. 4.

Отметим прежде всего немонотонный характер как  $\Sigma_j^{Leech}$ , так и  $R^{exp}(j)$ . Последний факт не тривиален, он указывает, по-видимому, на оболочечную структуру мелких дыр.

Сравним теперь распространенности водорода и гелия. Во всех источниках информации отмечается, что основными элементами в межзвездном газе являются водород и гелий. Элементное вещество Вселенной в основном состоит из водорода – 91 % всех атомов. Количество ядер водорода превышает количество ядер гелия примерно в 10–20 раз [4–9]. Согласно  $\Sigma_j^{Leech}$  статистический вес водорода превышает статистический вес гелия примерно в 20 раз.

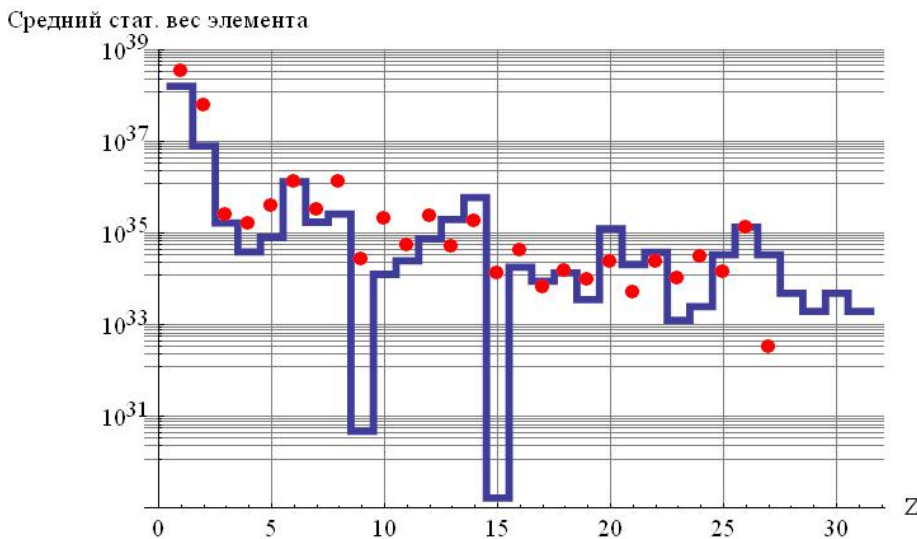


Рис. 4. Сравнение статистических весов  $\Sigma_j^{Leech}$  для 30 нуклидов (сплошная кривая соответствует данным табл. 1) с распространенностями нуклидов  $R^{exp}(j)$  (жирные точки – данные заимствованы из [10]). Данные приведены к одному значению для водорода



Как в случае кривой  $R^{\text{exp}}(j)$ , так и  $\Sigma_j^{\text{Leech}}$  статистический вес гелия превосходит статистический вес любого другого нуклида (кроме водорода) более чем в 5 раз.

Литию, бериллию и бору соответствуют на кривых  $R^{\text{exp}}(j)$  и  $\Sigma_j^{\text{Leech}}$  глубокие минимумы.

Сразу за этими минимумами следует резкий подъем повышенной распространенности углерода и кислорода.

За кислородным максимумом следует скачкообразное падение вплоть до скандия ( $Z=21, A=45$ ).

На кривых  $R^{\text{exp}}(j)$  и  $\Sigma_j^{\text{Leech}}$  наблюдается повышенная распространенность элементов в районе железа («железный пик») – см. рис. 4.

Представленная модель воспроизводит часть характерных особенностей этих данных. Имеются и различия. При сравнении кривых обращают на себя внимание непонятно аномально низкие значения  $\Sigma_j^{\text{Leech}}$  для  $Z=9$  (фтора) и  $Z=15$  (фосфора).

## 6. 24-компонентные спиноры

Обращение к решетке Лича влечет за собой следующее обязательное следствие: пространство из 4-мерного с сигнатурой  $1(-) \& 3(+)$  становится 11-мерным с сигнатурой  $1(-) \& 10(+)$ , а спиновые степени свободы описываются 24-компонентными спинорами. Мы не будем останавливаться на доказательствах этих утверждений – они содержатся в работе [13]. Заметим лишь, что многомерные конструкции рассматриваются в теоретической физике начиная с Калуцы [14] и Клейна [15].

Полагаем, что риманово пространство является 11-мерным прямым произведением наблюдаемого 4-мерного пространства-времени и внутреннего 7-мерного компактифицированного евклидова пространства постоянной кривизны с метрическим тензором  $g_{AB}$  ( $A, B=1, 2, \dots, 7$ ). Наличие метрики позволяет ввести во внутреннем пространстве матрицы Дирака (ДМ)  $g_A$ , удовлетворяющие соотношениям  $g_A g_B + g_B g_A = 2g_{AB} E$ . Волновые функции в компактифицированном пространстве, т. е. в торе, можно рассматривать как функции в 7-мерном евклидовом пространстве с решеткой  $Z_{24}$ . Косоугольный спинорный базис в 24- мерном пространстве, соответствующий решетке  $\Lambda_{24}$ , получается из ортонормированного

базиса путем преобразования с помощью так называемой порождающей матрицы. Аналогичным образом получают и ДМ в косоугольном базисе из ДМ в ортонормированном базисе. ДМ  $g_A$  имеют один векторный индекс и два спинорных индекса. С помощью ДМ  $g_A$  появляется возможность находить наблюдаемые характеристики внутреннего пространства, т. е. характеристики, связанные с 24-компонентными спинорами. Явный вид ДМ  $24 \times 24$  приведен в [13].

Решеткам  $Z_{24}$  и  $\Lambda_{24}$  можно сопоставить волновые функции среды, квадраты амплитуды которых максимальны в узлах решеток. В класс этих функций входят ступенчатые функции, отличные от нуля в областях, занимаемых шарами, вписанными в решетку. Распределение плотности вероятности в пространстве решетки изоморфно распределению материала шаров. Естественно считать, что основному, т. е. вакуумному состоянию соответствует решетка с наиболее плотной упаковкой. Другими словами, плотность вакуумной энергии пропорциональна плотности упаковки шаров.

В 7-мерном пространстве, и только в нем, возможны, по меньшей мере, три принципиально различные реализации вакуумной системы: 1) с помощью ортонормированного базиса (т. е. базиса кубической решетки  $Z_8$ ); 2) с помощью косоугольного базиса, орты которого совпадают с фундаментальными корнями 8-мерной решетки  $E_8$ ; 3) с помощью косоугольного базиса, орты которого совпадают с фундаментальными векторами 24-мерной решетки Лича  $\Lambda_{24}$ . В третьем случае реализуется самая плотная упаковка, т. е. вакуумная система ДМ имеет максимальную по сравнению с другими вакуумными системами ДМ плотность вакуумной энергии. Существенно, что 24-компонентные спиноры реализуют представление группы симметрии мелких дыр решетки Лича и подчиняются уравнению Дирака в 24-мерном спиновом пространстве.

Решетки, построенные на мелких дырах как на узлах, являются по существу дефектами идеальной решетки Лича. Если узлы решетки Лича перегруппировались таким образом, что образовали в некоторой области 24-мерного пространства дефектную решетку, соответствующую совокупности однотипных мелких дыр, будем говорить, что возникло возбужденное состояние решетки Лича. Решетка однотипных мелких дыр имеет более рыхлую пространственную структуру (т. е. больший объем фундаментальной ячейки) и группу симметрии, меньшую группы симметрии решетки Лича.

Алгебраическая структура решетки из однопородных мелких дыр (для краткости просто мелкой дыры) приведена в столбце 6 табл. 1.

### 7. Космологическое «сотворение» стабильных нуклидов на инфляционной стадии

В стандартной космологической модели (СКМ) рассматривается несколько сценариев возникновения СН. Ни в одном из этих сценариев, конечно, не используются понятия решетчатого вакуума Лича и возбужденных состояний решетки Лича, соответствующих мелким дырам. Возникает вопрос, каким образом решетка  $\Lambda_{24}$  могла бы быть введена в космологическую модель?

Ниже приводится вариант ответа на этот вопрос. Он носит качественный характер и относится к той стадии эволюции Вселенной, которая в СКМ называется инфляционной. Мы рассматриваем решение, соответствующее модели типа де Ситтера. Характер изменения плотности энергии  $U(t)$  как функции времени показан на рис. 5. Именно к этой стадии, на которой происходит экспоненциальный разлет Вселенной с уменьшением плотности энергии, относятся приведенные ниже рассуждения.

Будем предполагать, что до начала инфляционной стадии Вселенная находилась в вакуумном состоянии, описываемом решеткой Лича. При  $t \geq 0$  радиус Вселенной растет, плотность энергии уменьшается, оставаясь положительной. Асимптотически по времени Вселенная стремится к состоянию, описываемому прямоугольной решеткой  $Z_{24}$  в плоском 24-мерном пространстве. Кроме того, состояние Вселенной в начале инфляционной стадии, является хаотическим с флуктуациями относительно некоторых средних значений плотности энергии и давления  $U, P$ , и других термодинамических величин. На этом этапе в результате флуктуаций в условиях ультравысоких температур возникали и исчезали различные состояния ядер и других частиц, в том числе нестабильных нуклидов. Но стабильные нуклиды возникнуть не могли. В СКМ принимается, что именно на этой стадии возникают и распадаются переносчики сильных взаимодействий, а также  $Z$  и  $W^\pm$  бозоны [16].

Уменьшаясь, в какой-то момент плотность энергии Вселенной достигает значения, равного плотности энергии ядра урана-238:

$$U(t_{U238}) = \frac{M_{U238}c^2}{(l_C^{U238})^3} = \frac{M_{U238}c^2}{(\hbar/M_{U238}c)^3}. \quad (5)$$

Здесь  $M_{U238}c^2$  – энергия ядра урана-238. Считаем, что характерный радиус ядра урана-238 равен его комптоновской длине волны  $l_C^{U238}$ . Из соотношения (5) находим момент времени  $t_{U238}$ , начиная с которого плотность энергии во Вселенной становится меньше плотности энергии внутри ядра урана-238. Величина  $l_C^{U238}$  порядка  $10^{-16}$  см, что соответствует плотности энергии во Вселенной порядка  $\sim 10^{47}$  эрг/см<sup>3</sup>. Эта величина на несколько порядков превышает плотность энергии внутри нейтронных звезд.

Ситуация до, в момент и после момента  $t_{U238}$  выглядит так, как показано на рис. 5.

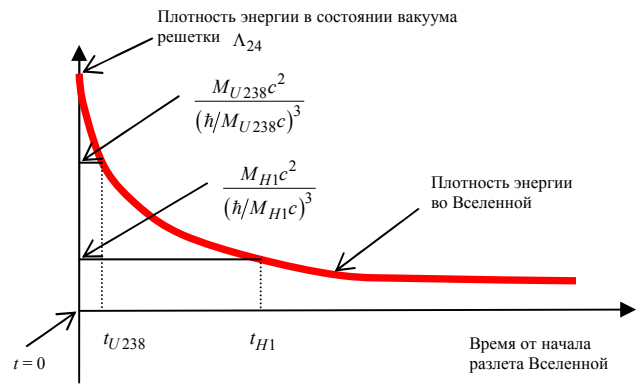


Рис. 5. Плотности энергии во Вселенной в различные моменты времени: момент  $t = 0$  – момент начала разлета Вселенной; момент  $t_{U238}$  – плотность энергии сравнивается с плотностью энергии ядра урана-238; момент  $t_{H1}$  – плотность энергии сравнивается с плотностью энергии протона

Момент  $t = t_{U238}$  является выделенным с точки зрения возникновения самого массивного СН – урана-238. Начиная с этого момента, плотность энергии в ядре урана-238 с характерными размерами  $l_C^{U238}$  оказывается больше плотности энергии

во Вселенной. Возникают множественные потенциальные ямы с размерами порядка  $l_C^{U238}$ , внутри которых появляются связанные состояния. Волновая функция связанного состояния отлична от нуля в узлах решетки, соответствующей мелкой дыре. По принятому алгоритму соответствия между дырами и СН наиболее глубокий уровень соответствует урану-238. Возникновение нуклида происходит аналогично тому, как в перенасыщенном растворе возникают зерна-зародыши в результате кристаллизации. После возникновения связанное состояние уже не распадается, поскольку возникает не равная нулю энергия связи. Вблизи поверхности нуклида находятся электроны, что приводит к электронейтральности нуклида в «шубе».

Позднее по времени по тому же механизму возникают остальные СН. В этом сценарии протон (водород) образуется позже всех. Весь промежуток времени первичного нуклеосинтеза определяется из решения (6) и аналогичного решения для водорода. Описанный сценарий относится, конечно, к синтезу СН на раннем, дозвездном этапе эволюции Вселенной.

## 8. Различие между $R^{\text{exp}}(Z)$ и $R^{\text{initial}}(Z)$

Концентрации СН после окончания процесса первичного нуклеосинтеза будем называть первичным распределением СН. Концентрации элементов относительно водорода будем обозначать как  $R^{\text{initial}}(Z)$ . Эти величины не совпадают с  $R^{\text{exp}}(Z)$ , поскольку  $R^{\text{exp}}(Z)$  претерпевает в последующем изменения в силу ядерных реакций различного происхождения и зависит от условий регистрации.

Для нахождения  $R^{\text{initial}}(Z)$ , строго говоря, необходимо решить задачу, в которой учитываются скорости образования и распада СН при меняющейся плотности энергии окружающего пространства, а также ядерных реакций, которые влияют на баланс СН. При этом темп изменения плотности энергии со временем вытекает из решения космологической задачи о разлете Вселенной. В данной работе не решается задача о нахождении  $R^{\text{initial}}(Z)$  в общей постановке. Рассмотрение ограничивается нахождением относительных распространенностей СН с близкими атомными массами, т. е. таких СН, возникновение которых произошло примерно в близких условиях. Близость

зависит от температуры, чем выше температура, тем для большего числа нуклидов отношение бoльцмановских факторов близко к единице: Например, можно потребовать, чтобы для водорода и нуклида с атомным номером  $n$  это отношение было больше 0,8:

$$1 \geq \exp\left[\frac{(M_H - M_n)c^2}{kT}\right] \geq 0,8.$$

К таким СН мы относим, например, СН из начала таблицы Менделеева.

Согласно предложенному механизму первичного синтеза СН сначала происходит образование СН с большими массовыми числами, а затем последовательно всех других СН с меньшими атомными массами и заканчивается формированием протонов. С возникновением водорода заканчивается первичный нуклеосинтез. После этого наступает просветление для излучения, количества всех СН замораживаются.

На более поздних стадиях эволюции Вселенной, когда начинается фрагментация вещества, распределения концентраций нуклидов может претерпевать локальные (с точки зрения Вселенной в целом) флуктуации из-за ядерных превращений внутри звезд. На этой стадии стандартные представления СКМ (см., например, [17, 18]) в данной работе не подвергаются ревизии. Так, одна часть межзвездного газа служит затравочным материалом при образовании флуктуаций, ведущих к образованию звезд второго поколения. Другая часть испытывает влияние разлетающихся продуктов от взрывов сверхновых. Распространенности третьей части испытывают деформации под действием космического излучения. И, наконец, четвертая часть в большей степени сохраняет тот состав элементов, который возник в конце стадии первичного нуклеосинтеза.

## Заключение

Сформулирована модель, в которой волновые функции СН, содержащие в качестве сомножителей 24-компонентные спиноры, реализуют представление группы симметрии мелких дыр решетки Лича. На ее основе развита «дырочная» модель первичного нуклеосинтеза, которая учитывает факт равенства 284 как числа мелких дыр решетки Лича, так и количества стабильных нуклидов. Модель относится к инфляционной стадии эволюции Вселенной. Получена теоретическая функция рас-

пространности СН во Вселенной на этой стадии. В первом приближении она зависит от степени симметрии внутреннего состояния нуклида и от объема фундаментальной ячейки соответствующей мелко дырочной решетки. Несмотря на ограниченные возможности дырочная модель приводит к удовлетворительному согласию с большим набором экспериментальных данных.

Согласно дырочной модели тяжелые СН образуются из кварк-глюонной плазмы при уменьшении плотности энергии Вселенной. Возникают они на инфляционной стадии, т. е. до того, как согласно СКМ начинается первичный дозвездный нуклеосинтез. Возникнув, тяжелые СН присутствуют в межзвездном газе с самого начала, т. е. еще до возникновения звезд первого поколения. Их распространенности в этот момент являются начальными данными для последующей кинетики ядерных превращений, рассматриваемой в СКМ. Отметим также, что механизм первичного образования обойденных ядер ничем не отличается от механизма первичного образования других СН. Просто статистические веса тех дыр, которые соответствуют ОЯ, меньше, чем для соседних СН.

Как и в СКМ в дырочной модели предполагается, что в момент наибольшего сжатия Вселенная находилась в состоянии кварк-глюонной плазмы с высокой плотностью энергии. В дырочной модели в начальный момент величина максимальной плотности энергии должна быть равной плотности энергии решетки Лича. После начала разлета одновременно сосуществовали возбужденные состояния, соответствующие решеткам, построенным на узлах различных мелких дыр решетки Лича. По мере разлета Вселенной возникали условия для множественной кристаллизации зерен таких состояний, плотности энергии в которых становились сравнимыми с плотностью энергии во Вселенной. Процесс первичного синтеза СН выглядит так, что сначала происходит образование СН с большими массовыми числами, а затем последовательно – всех других СН с меньшими атомными массами и заканчивается окончательным формированием протонов. Таким образом, в дырочной модели образование тяжелых СН происходит не только за счет ядерных реакций внутри сверхновых и при взрывах сверхновых, но и за счет нуклеосинтеза на инфляционной стадии.

Для астрофизиков, измеряющих распространенности СН, авторы рекомендовали бы более тщательно измерить распространенности фтора и фосфора в галактических космических лучах. По

этим элементам имеются большие расхождения между предсказаниями модели и экспериментальными данными. Более точные измерения могли бы уточнить статус дырочной модели.

Результаты данной работы можно рассматривать как аргумент в пользу 11-мерности физического пространства-времени. Представляется также, что в теоретической физике может быть развита конструктивная квантовая теория поля на решетке Лича, подобная той, что была развита для объяснения конфайнмента и асимптотической свободы кварков внутри барионов [19, 20].

Авторы благодарят своих коллег В. А. Щербакова, С. С. Жихарева, Б. А. Надыкто за полезные обсуждения.

## Приложение

### 1. Порядки вейлевских групп алгебр

Для вычисления статистических весов мелких дыр необходимо знать порядки вейлевских групп алгебр, входящих в алгебраические структуры мелких дыр (см. [21]). Эти данные приводятся в табл. 3.

Таблица 3

Порядки вейлевских групп подалгебр, входящих в алгебраическую структуру дыр

Исключительные алгебры		Алгебры из серии $a_N$		Алгебры из серии $d_N$	
Подалгебра	Порядок вейлевской группы	Подалгебра	Порядок вейлевской группы	Подалгебра	Порядок вейлевской группы
$e_8$	$6.967 \cdot 10^8$	$a_N$	$(N+1)!$	$d_N$	$2^N N!$
$e_7$	$2.903 \cdot 10^6$				
$e_6$	$5.184 \cdot 10^4$				

### 2. Вычисление статистических весов мелких дыр

Каждая мелкая дыра характеризуется двумя величинами:

1) Величиной  $S_j$ , равной числу способов реализации базисных векторов, соответствующих мелкой дыре, в 25-мерном спиновом пространстве. Величина  $S_j$  вычисляется из комбинаторных соображений.

Например, число способов реализации дыры  $e_2^8 e_7 a_2$  в 25-мерном пространстве равно произведению следующих сомножителей:

• числа способов выделения 8 измерений, необходимых для реализации алгебры  $e_8$ , из 25 измерений исходного гиперболического 25-мерного пространства; это число равно  $\binom{25}{8}$ ;

• числа способов выделения 8 измерений для реализации второй алгебры  $e_8$  из оставшихся 17 измерений, т. е.  $\binom{17}{8}$ ;

• числа способов выделения 7 измерений из оставшихся 9 измерений, т. е.  $\binom{9}{7}$ ;

• числа способов выделения 2 измерений из оставшихся 2 измерений, т. е.  $\binom{2}{2}$ .

Получающееся в результате число  $\binom{25}{8} \binom{17}{8} \binom{9}{7} \binom{2}{2}$  может быть записано и иными способами, например как

$$\binom{25}{2} \binom{23}{8} \binom{15}{8} \binom{7}{7}.$$

Другие способы записи соответствуют другим порядкам выделения алгебр.

2) Величиной  $W_j$ , равной произведению порядков групп Вейля всех подалгебр, содержащихся в алгебре  $\langle j \rangle$ . Величина  $W_j$  равна

$$W_j = \prod_i w_{j(i)}, \quad (6)$$

где  $w_{j(i)}$  – порядок группы Вейля подалгебры  $\langle i \rangle$ , содержащейся в алгебре  $\langle j \rangle$ . Алгебраическая структура всех мелких дыр приведена в табл. 1.

Величину  $\Sigma^{Leech}(V_j)$ , равную произведению двух сомножителей,

$$\Sigma^{Leech}(V_j) = S_j W_j, \quad (7)$$

будем называть статистическим весом мелкой дыры  $\langle j \rangle$ .

### Список литературы

1. Физические величины: Справочник / Под ред. И. К. Кикоина. М.: Энергоатомиздат, 1976.
2. Физические величины: Справочник / Под ред. И. С. Григорьева, Е. З. Мейлихова. М.: Энергоатомиздат, 1991.

3. Conway J. H., Sloane N. J. A. Sphere Packings, Lattices and Groups. Springer-Verlag. New York (1988). [Перевод на русский: Дж. Конвей, Н. Слоэн. Упаковка шаров, решетки и группы. М.: Мир, 1990].

4. Пушкин А. В. Унимодулярные решетки и невозмущенческие методы для описания свойств нуклидов. (Некоторые следствия для атомов с  $f$ -электронами, включая атомы плутония) // Тезисы докладов на международном семинаре «Фундаментальные свойства плутония». Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2004.

5. Тейлер Р. Дж. Происхождение химических элементов. М.: Мир, 1975.

6. Крамаровский Я. М., Чечев В. П. Синтез элементов во Вселенной. М.: Наука, 1987.

7. Франк-Каменецкий Д. А., Надежин Д. К. Распространенность элементов // Маленькая энциклопедия по космосу. М.: Советская энциклопедия, 1986.

8. Зигель Ф. Ю. Вещество Вселенной. М.: Химия, 1982.

9. Ишханов Б. С., Капитонов И. М., Юдин Н. П. Частицы и атомные ядра. М.: Изд-во ЛКИ, 2007.

10. Калмыков Н. Н., Куликов Г. В., Роганова Т. М. Галактические космические лучи // Модель космоса. М.: Изд-во КДУ. Т. 1. С. 62/ 2007.

11. Франк-Каменецкий Д. А., Надежин Д. К. Обойденные ядра // Маленькая энциклопедия по космосу. М.: Советская энциклопедия, 1986.

12. Садовский М. В. Лекции по квантовой теории поля. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.

13. Gorbatenko M. V., Pushkin A. V. Physical vacuum properties and internal space dimension // General relativity and gravitation. 2005. Vol. 37, No. 10. P. 1705–1718. arXiv gr-qc/0409095.

14. Kaluza Th. Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Phys. Mat. 1921. Vol. K1. P. 966.

15. Klein O. // Z. Phys. 1926. Vol. 37. P. 895.

16. Горбунов Д. С., Рубаков В. А. Введение в теорию ранней Вселенной. Теория горячего большого взрыва. М.: Изд-во ЛКИ, 2008.

17. Andrew Liddle. An Introduction to Modern Cosmology. Wiley, 2003.

18. Mauro D’Onofrio, Carlo Burigana. Questions of modern cosmology. Springer, 2009.

19. Кройц М. Кварки, глюоны и решетки. М.: Мир, 1987.

20. Ченг Т., Ли Л. Калибровочные теории в физике элементарных частиц. М.: Мир, 1987.

21. Желобенко Д. П. Компактные группы Ли и их представления. М.: Наука, 1970.