

## КОСМИЧЕСКАЯ ЦЕНзуРА И СТАЦИОНАРНЫЕ СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ ЧАСТИЦ СО СПИНОМ $\frac{1}{2}$ В ПОЛЕ ГОЛОЙ СИНГУЛЯРНОСТИ РАЙССНЕРА–НОРДСТРЕМА

М. В. Горбатенко<sup>1</sup>, В. П. Незнамов<sup>1,2\*</sup>, Е. Ю. Попов<sup>1</sup>, И. И. Сафронов<sup>1</sup>

<sup>1</sup>ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

<sup>2</sup>Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, Россия

Рассмотрена квантовая механика движения частиц со спином  $\frac{1}{2}$  в поле голой сингулярности Райсснера–Нордстрёма (RN). Показано, что для любой квантово-механической дираковской частицы независимо от наличия и знака ее электрического заряда голая сингулярность RN отделена бесконечно большим эффективным отталкивающим барьером. При одноименных зарядах частицы и источника поля голой сингулярности RN на некотором расстоянии от голой сингулярности существует второй эффективный полностью непроницаемый потенциальный барьер.

Доказано, что в поле голой сингулярности RN могут существовать связанные состояния частиц со спином  $\frac{1}{2}$ , выявлены условия для возникновения таких состояний и проведены расчёты по нахождению собственных значений энергии и волновых функций.

*Ключевые слова:* голая сингулярность Райсснера–Нордстрёма, метод эффективных потенциалов, дираковские частицы в поле голой сингулярности, космическая цензура, связанные состояния.

### Введение

Среди сингулярных решений общей теории относительности (ОТО) существуют черные дыры с горизонтами событий и голые сингулярности. Гипотеза космической цензуры, предложенная более 40 лет назад [1], запрещает существование в Природе сингулярностей, не прикрытых горизонтами событий. Однако полное доказательство этой гипотезы отсутствует до сих пор. Многие исследователи наряду с черными дырами рассматривают образование голых сингулярностей, их стабильность и отличительные особенности при экспериментальном наблюдении [2–7].

Horowitz and Marolf в [8] показали, что существуют статические метрики с времениподобными сингулярностями, которые проявляют себя полностью несингулярными при рассмотрении квантовой механики бесспиновых частиц. В нашей работе мы получили подтверждение результатов [8] применительно к движению квантово-механических частиц

со спином  $\frac{1}{2}$  в поле голой сингулярности Райсснера–Нордстрёма (RN). В работе мы также исследуем для этого случая возможность существования стационарных связанных состояний частиц со спином  $\frac{1}{2}$ . Анализ проводится как с помощью эффективных потенциалов в одномерном уравнении типа Шредингера, так и путем непосредственного решения уравнения Дирака в поле голой сингулярности RN. Метод эффективных потенциалов применительно к движению частицы со спином  $\frac{1}{2}$  в полях Шварцшильда и RN более подробно рассмотрен в [9]. Кроме того, в работе обсуждаются физические характеристики взаимодействия частиц со спином  $\frac{1}{2}$  с источником поля голой сингулярности RN.

Ранее С.L.Pekeris, К.Frankowski в [10] изучали решение уравнения Дирака в поле голой сингулярности RN с феноменологическим введением в окрестности начала координат геометрии Керра–Ньюмена. Целью их работы являлось определение чрезвычайно малого гравитационного сдвига

\* E-mail: neznamov@vniief.ru

энергетических уровней атома водорода. В нашей работе мы использовали их граничные условия для волновых функций в начале координат.

Качественный вывод о существовании стационарных связанных состояний дираковских частиц в поле голой сингулярности RN был сделан ранее В. Джунушалиевым в работе [11]. Однако отсутствие однозначности в граничном условии для волновых функций в начале координат и используемые уравнения для радиальных функций, предложенные в [11], не позволили использовать предлагаемый автором метод расчета дискретного энергетического спектра дираковских частиц.

В разделе 1 для связности изложения приводятся метрика Райсснера–Нордстрёма, самосопряженный дираковский гамильтониан в поле RN, система уравнений для радиальных волновых функций.

В разделе 2 анализируются полученные эффективные потенциалы одномерного уравнения типа Шредингера для поля голой сингулярности RN.

В разделе 3 обсуждаются физические характеристики взаимодействия частиц со спином  $\frac{1}{2}$  с источником поля голой сингулярности RN.

В разделе 4 определяются стационарные связанные состояния дираковских частиц в поле голой сингулярности RN.

В разделе 5 проводится обсуждение полученных результатов.

В работе, как правило, используется система единиц  $\hbar = c = 1$ ; сигнатура пространства выбрана равной

$$g_{\alpha\beta} = \text{diag}[1, -1, -1, -1]. \quad (1)$$

## 1. Метрика Райсснера–Нордстрёма

Статическая метрика Райсснера–Нордстрёма характеризуется точечным сферически-симметричным источником гравитационного поля с массой  $M$  и электрического поля с зарядом  $Q$ .

Квадрат интервала равен

$$ds^2 = f_{R-N} dt^2 - \frac{dr^2}{f_{R-N}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (2)$$

где  $f_{R-N} = \left(1 - \frac{r_0}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)$ ,  $r_0 = \frac{2GM}{c^2}$  – гравитационный радиус поля Шварцшильда,  $r_Q = \frac{\sqrt{GQ}}{c^2}$  – «зарядовый» радиус,  $G$  – гравитационная постоянная,  $c$  – скорость света.

онный радиус поля Шварцшильда,  $r_Q = \frac{\sqrt{GQ}}{c^2}$  – «зарядовый» радиус,  $G$  – гравитационная постоянная,  $c$  – скорость света.

1. Если  $r_0 > 2r_Q$ , то

$$f_{R-N} = \left(1 - \frac{r_+}{r}\right) \left(1 - \frac{r_-}{r}\right), \quad (3)$$

где  $r_{\pm}$  – радиусы внешнего и внутреннего горизонтов событий

$$r_{\pm} = \frac{r_0}{2} \pm \sqrt{\frac{r_0^2}{4} - r_Q^2}. \quad (4)$$

2. Случай  $r_0 = 2r_Q$  соответствует экстремальному полю Райсснера–Нордстрёма.

3. Случай  $r_0 < 2r_Q$  соответствует «голому» сингулярности. В этом случае всегда  $f_{R-N} > 0$ , и областью определения волновых функций является вся область  $r \in [0, \infty)$ .

Ниже мы будем анализировать поведение эффективных потенциалов уравнения Дирака в поле голой сингулярности RN. При квадрировании уравнения Дирака для получения уравнения типа Шредингера с самосопряженным гамильтонианом исходный дираковский гамильтониан должен быть также самосопряженным.

Алгоритмы получения самосопряженных дираковских гамильтонианов во внешних гравитационных полях с помощью методов псевдоэрмитовой квантовой механики представлены в [12–14].

Ранее самосопряженный гамильтониан частицы со спином  $\frac{1}{2}$ , массой  $m$  и зарядом  $e$  для метрики Райсснера–Нордстрёма получен в [15]:

$$H_{\eta} = \sqrt{f_{R-N}} \beta m - i\alpha^1 \left( f_{R-N} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} - \frac{r_0}{2r^2} \right) - i\sqrt{f_{R-N}} \frac{1}{r} \left[ \alpha^2 \left( \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \text{ctg} \theta \right) + \alpha^3 \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] + \frac{eQ}{r}. \quad (5)$$

В (5)  $\alpha^k, \beta$  – матрицы Дирака.

После разделения переменных (см., например, [15]) система уравнений для радиальных функций  $F_{R-N}(\rho), G_{R-N}(\rho)$  принимает вид:

$$f_{R-N} \frac{dF_{R-N}(\rho)}{d\rho} + \left( \frac{1 + \kappa \sqrt{f_{R-N}}}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right) F_{R-N}(\rho) - \left( \varepsilon - \frac{\alpha_{em}}{\rho} + \sqrt{f_{R-N}} \right) G_{R-N}(\rho) = 0, \quad (6)$$

$$f_{R-N} \frac{dG_{R-N}(\rho)}{d\rho} + \left( \frac{1 - \kappa \sqrt{f_{R-N}}}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right) G_{R-N}(\rho) + \left( \varepsilon - \frac{\alpha_{em}}{\rho} - \sqrt{f_{R-N}} \right) F_{R-N}(\rho) = 0,$$

В (6) введены безразмерные переменные

$$\rho = \frac{r}{l_c}; \quad \varepsilon = \frac{E}{m}; \quad \alpha = \frac{r_0}{2l_c} = \frac{GMm}{\hbar c} = \frac{Mm}{M_P^2},$$

$$\alpha_Q = \frac{r_Q}{l_c} = \frac{\sqrt{GQm}}{\hbar c} = \frac{\sqrt{\alpha_{ts}}}{M_P} m \frac{Q}{|e|}; \quad \alpha_{em} = \frac{eQ}{\hbar c} = \alpha_{ts} \frac{Q}{e} \quad (7)$$

где  $l_c = \frac{\hbar}{mc}$  – комптоновская длина волны дираковской частицы;  $E$  – энергия дираковской частицы;  $M_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}$  – планковская масса;  $\alpha_{ts}$  – электромагнитная постоянная тонкой структуры;  $\alpha, \alpha_{em}$  – гравитационная и электромагнитная константы связи;  $\alpha_Q$  – безразмерная константа, характеризующая источник электромагнитного поля в метрике Райсснера–Нордстрёма;  $M_P = 2,2 \cdot 10^{-5} \Gamma(1,2 \cdot 10^{19} \text{ ГэВ})$ ;  $\alpha_{ts} \approx \frac{1}{137}$ ;

В (6) константа разделения  $\kappa = \mp \left( j + \frac{1}{2} \right) =$

$$= \begin{cases} -(l+1), & j = l + \frac{1}{2}; \\ l, & j = l - \frac{1}{2}; \end{cases} \quad l, j - \text{квантовые числа ор-}$$

битального и полного момента дираковской частицы.

## 2. Эффективные потенциалы для поля голой сингулярности Райсснера–Нордстрёма

Из системы уравнений (6) получим уравнение второго порядка для функции  $\psi(\rho)$ , пропорциональной либо  $F(\rho)$ , либо  $G(\rho)$ .

В первом случае

$$\psi(\rho) = F(\rho) \exp\left(\frac{1}{2} \int A_1(\rho') d\rho'\right). \quad (8)$$

Уравнение для  $\psi(\rho)$  имеет вид уравнения Шредингера

$$\frac{d^2 \psi(\rho)}{d\rho^2} + 2(E_{schr} - U_{\text{эф}}(\rho))\psi(\rho) = 0. \quad (9)$$

В уравнении (9)

$$E_{schr} = \frac{1}{2}(\varepsilon^2 - 1), \quad (10)$$

$$U_{\text{эф}}(\rho) = E_{schr} + \frac{1}{4} \frac{dA_1(\rho)}{d\rho} + \frac{1}{8} A_1^2(\rho) - \frac{1}{2} B_1(\rho).$$

В выражениях (8), (10)

$$A_1(\rho) = -\frac{1}{B(\rho)} \frac{dB(\rho)}{d\rho} - A(\rho) - D(\rho),$$

$$B_1(\rho) = -B(\rho) \frac{d}{d\rho} \left( \frac{A(\rho)}{B(\rho)} \right) - C(\rho)B(\rho) + A(\rho)D(\rho). \quad (11)$$

В выражениях (11)

$$A(\rho) = -\frac{1}{f_{R-N}} \left( \frac{1 + \kappa \sqrt{f_{R-N}}}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right),$$

$$B(\rho) = \frac{1}{f_{R-N}} \left( \varepsilon - \frac{\alpha_{em}}{\rho} + \sqrt{f_{R-N}} \right), \quad (12)$$

$$C(\rho) = -\frac{1}{f_{R-N}} \left( \varepsilon - \frac{\alpha_{em}}{\rho} - \sqrt{f_{R-N}} \right),$$

$$D(\rho) = -\frac{1}{f_{R-N}} \left( \frac{1 - \kappa \sqrt{f_{R-N}}}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} \right).$$

Эффективные потенциалы  $U_{\text{эф}}(\rho, \kappa, \alpha, \alpha_Q, \alpha_{em}, \varepsilon)$ , определяемые выражениями (10)–(12), имеют достаточно громоздкий вид и определялись в данной работе с помощью «Maple». Отметим, что энергия дираковской частицы в выражении  $U_{\text{эф}}$  является одним из параметров. Значение  $\varepsilon < 1$  соответствует связанным состояниям частицы со спином  $\frac{1}{2}$ . Рассмотрим некоторые особенности выражений  $U_{\text{эф}}(\rho, \kappa, \alpha, \alpha_Q, \alpha_{em}, \varepsilon)$ .

2.1. Независимо от знаков зарядов  $Q$ ,  $e$  ведущая особенность эффективного потенциала вблизи начала координат равна

$$U_{\text{эф}} = \frac{3}{8\rho^2} + O\left(\frac{1}{\rho}\right) \text{ при } \rho \rightarrow 0, \quad (13)$$

т. е. сингулярность Райсснера–Нордстрёма отделена от дираковских частиц бесконечно большим эффективным положительным барьером, что согласуется с результатами [8] применительно к движению бесспиновых частиц в поле некоторых сингулярных метрик.

2.2. При одноименных знаках зарядов  $Q$ ,  $e$  на некотором расстоянии от начала координат существует еще один потенциальный барьер вида

$$U_{\text{эф}}|_{\rho \rightarrow \rho_{cl}} = \frac{1}{4} \frac{1}{\left( \varepsilon - \frac{\alpha_{em}}{\rho} + \sqrt{1 - \frac{2\alpha}{\rho} + \frac{\alpha_Q^2}{\rho^2}} \right)^2} \left( \frac{\alpha_{em}}{\rho^2} + \frac{\frac{\alpha}{\rho^2} - \frac{\alpha_Q^2}{\rho^3}}{\sqrt{1 - \frac{2\alpha}{\rho} + \frac{\alpha_Q^2}{\rho^2}}} \right)^2 + O \left( \frac{1}{\left( \varepsilon - \frac{\alpha_{em}}{\rho} + \sqrt{1 - \frac{2\alpha}{\rho} + \frac{\alpha_Q^2}{\rho^2}} \right)} \right). \quad (14)$$

Радиус  $\rho_{cl}$ , при достижении которого выражение в знаменателе первого слагаемого в (14) равно нулю, определяется следующим равенством:

$$\rho_{cl} = \frac{\alpha_{em}\varepsilon - \alpha - \sqrt{(\alpha_{em}\varepsilon - \alpha)^2 - (\alpha_{em}^2 - \alpha_Q^2)(\varepsilon^2 - 1)}}{\varepsilon^2 - 1}. \quad (15)$$

Для всех рассмотренных авторами случаев (см. далее раздел 3) коэффициент при ведущей особенности в (14)

$$A = \frac{1}{4} \left( \frac{\alpha_{em}}{\rho_{cl}^2} + \frac{\frac{\alpha}{\rho_{cl}^2} - \frac{\alpha_Q^2}{\rho_{cl}^3}}{\sqrt{1 - \frac{2\alpha}{\rho_{cl}} + \frac{\alpha_Q^2}{\rho_{cl}^2}}} \right)^2 > \frac{3}{8}. \quad (16)$$

Известно, что такие потенциальные барьеры являются непроницаемыми для квантово-механических частиц [16].

Если  $\alpha_{em} \gg \alpha$  и  $\alpha_{em} \gg |\alpha_Q|$ , то выражение (15) становится равным

$$\rho_{cl} = \frac{\alpha_{em}}{\varepsilon + 1}. \quad (17)$$

В этом случае величина  $r_{cl} = l_c \rho_{cl}$  пропорциональна значению классического радиуса частицы с массой  $m$  и зарядом  $e$ , взаимодействующей с потенциалом  $\frac{Q}{r}$ ,

$$r_{cl} = \frac{eQ}{mc^2} \frac{1}{1 + \frac{E}{mc^2}}. \quad (18)$$

На рис.1 приведен характерный вид  $U_{\text{эф}}(\rho)$  для случая одноименных знаков зарядов  $Q$ ,  $e$  и  $\varepsilon > 1$ .

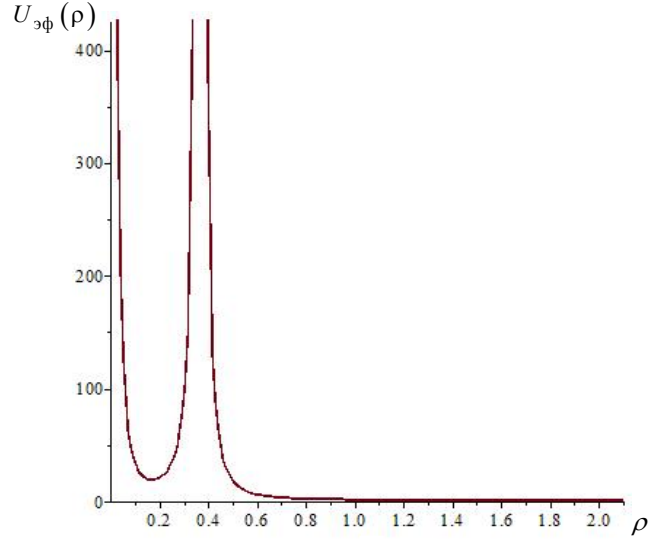


Рис. 1. Поведение эффективного потенциала уравнения Дирака в поле голой сингулярности RN при  $\alpha = 0,25$ ,  $\alpha_Q = 0,5$ ,  $\alpha_{em} = 1$ ,  $\kappa = -1$ ,  $\varepsilon = 1,5$ ,  $\rho_{cl} = 0,3675$

Видны две области  $\rho < \rho_{cl}$  и  $\rho > \rho_{cl}$ , отделенные непроницаемым для частиц потенциальным барьером. Во внешней области стационарные состояния дираковских частиц отсутствуют. Во внутренней области  $0 < \rho < \rho_{cl}$  возможно существование стационарных связанных состояний частиц со спином  $\frac{1}{2}$ .

2.3. Для разноименных знаков зарядов  $Q$ ,  $e$  при определенных значениях начальных параметров характерный вид потенциала  $U_{\text{эф}}(\rho)$  приведен на рис. 2. Вид потенциала не изменяется и для случая незаряженной дираковской частицы (рис. 3). Такие зависимости  $U_{\text{эф}}(\rho)$  свидетельствуют о возможности существования в том и в другом случаях стационарных связанных состояний частиц со спином  $\frac{1}{2}$ .

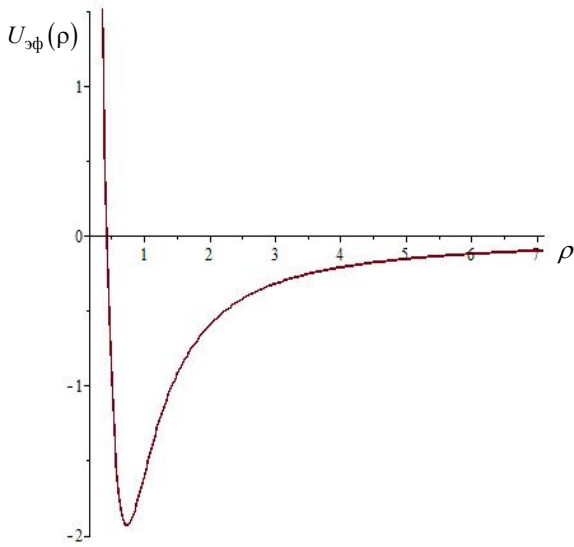


Рис. 2. Поведение эффективного потенциала уравнения Дирака в поле голой сингулярности RN при  $\alpha = 0,25$ ,  $\alpha_Q = 0,5$ ,  $\alpha_{em} = -1$ ,  $\kappa = -1$ ,  $\varepsilon = 0,6$

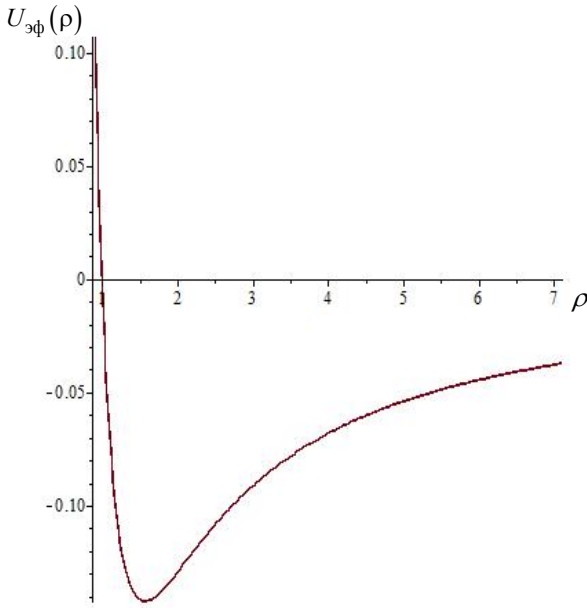


Рис. 3. Поведение эффективного потенциала уравнения Дирака в поле голой сингулярности RN при  $\alpha = 0,25$ ,  $\alpha_Q = 0,5$ ,  $\alpha_{em} = 0$ ,  $\kappa = -1$ ,  $\varepsilon = 0,98$

### 3. Физические характеристики взаимодействия частиц со спином $\frac{1}{2}$ с источником поля голой сингулярности Райсснера–Нордстрёма

В рассматриваемом нами случае  $\alpha_Q^2 > \alpha^2$ . Тогда из соотношений (7) следует

$$M < \sqrt{\alpha_{ts}} M_P \left| \frac{Q}{e} \right|, \quad (19)$$

$$m > \frac{M_P}{\sqrt{\alpha_{ts}}} \left| \frac{e}{Q} \right| \alpha. \quad (20)$$

Для заряженных дираковских частиц Стандартной модели интервал изменения масс частиц составляет от  $\sim 0,5$  МэВ (масса электрона) до 170 ГэВ (масса  $t$ -кварка). Из неравенства (20) видно, что константа гравитационного взаимодействия в этом случае чрезвычайно мала по сравнению с константой электромагнитного взаимодействия  $\alpha_{em} = \alpha_{ts} \left| \frac{Q}{e} \right|$

$$\alpha < \left( 3 \cdot 10^{-24} \div 10^{-18} \right) \left| \frac{Q}{e} \right|. \quad (21)$$

Энергетические спектры связанных состояний дираковских частиц Стандартной модели в поле голой сингулярности RN будут с огромной точностью совпадать с электромагнитными спектрами соответствующих водородоподобных атомов.

В [10] гравитационный сдвиг основного состояния атома водорода с геометрией поля голой сингулярности RN оценен величиной  $\sim 10^{-36}$  МН.

Ниже для демонстрации существования связанных состояний частиц со спином  $\frac{1}{2}$  в численных расчетах будут рассмотрены три варианта атомных систем.

Первый вариант:

$$\alpha = 0,0018; \quad \left| \frac{\alpha_Q}{\alpha} \right| = 2; \quad \alpha_{em} = \frac{1}{137}. \quad (22)$$

Вариант соответствует существованию источника поля RN с  $M = \frac{M_P}{2\sqrt{\alpha_{ts}}}$  и с элементарным зарядом  $+e$ ;

в качестве дираковской частицы выбрана частица с  $m = M$  и с зарядом  $-e$ .

Второй вариант:

$$\alpha = 0,025; \quad \left| \frac{\alpha_Q}{\alpha} \right| = 2; \quad \alpha_{em} = 0,1. \quad (23)$$

Источником поля RN является частица с  $M = 0,585M_P$  и суммарным зарядом  $+13,7e$ ; в качестве дираковской частицы выбрана частица с  $m = 0,042M_P$  и зарядом  $-e$ .

Третий вариант:

$$\alpha = 0,25; \quad \left| \frac{\alpha_Q}{\alpha} \right| = 2; \quad \alpha_{em} = 1. \quad (24)$$

Источником поля RN является частица с  $M = 5,85M_p$  и суммарным зарядом  $+137e$ .

В качестве дираковской частицы выбрана частица с  $m = 0,042M_p$  и зарядом  $-e$ . Во всех вариантах рассматривались также незаряженные дираковские частицы.

#### 4. Определение стационарных связанных состояний частиц со спином $\frac{1}{2}$ в поле голой сингулярности Райсснера-Нордстрёма

Для решения проблемы будем использовать систему уравнений (6).

Определим

$$\operatorname{tg}\Phi(\rho) = \frac{F(\rho)}{G(\rho)}, \quad (25)$$

$$A^2(\rho) = F^2(\rho) + G^2(\rho). \quad (26)$$

Тогда

$$\begin{aligned} F(\rho) &= A(\rho) \sin \Phi(\rho), \\ G(\rho) &= A(\rho) \cos \Phi(\rho). \end{aligned} \quad (27)$$

Из уравнений (6) можно получить уравнение для фазы  $\Phi(\rho)$  в форме М. А. Вронского [17] и уравнение для  $A(\rho)$ .

$$\frac{d\Phi}{d\rho} = \frac{1}{f_{R-N}} \left( \varepsilon - \frac{\alpha_{em}}{\rho} \right) + \frac{\cos(2\Phi)}{\sqrt{f_{R-N}}} - \frac{\kappa}{\rho\sqrt{f_{R-N}}} \sin(2\Phi), \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \frac{d(\ln A)}{d\rho} &= -\frac{1}{\rho f_{R-N}} + \frac{\alpha}{\rho^2 f_{R-N}} + \\ &+ \frac{\kappa}{\rho\sqrt{f_{R-N}}} \cos(2\Phi) + \frac{1}{\sqrt{f_{R-N}}} \sin(2\Phi). \end{aligned} \quad (29)$$

##### 4.1. Граничные условия

Для решения уравнений (28), (29) необходимо установить для волновых функций  $F(\rho)$ ,  $G(\rho)$  граничные условия при  $\rho \rightarrow \infty$  и  $\rho \rightarrow 0$ .

При  $\rho \rightarrow \infty$  асимптотическое поведение волновых функций для финитного движения является стандартным для центрально-симметричных гравитационных полей [15, 17, 18].

Для  $\rho \rightarrow \infty$  ведущие члены асимптотик равны

$$\begin{aligned} F &= C e^{-\rho\sqrt{1-\varepsilon^2}}, \\ G &= -\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}} F, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\operatorname{tg}\Phi = -\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}. \quad (31)$$

При  $\rho \rightarrow \infty$  асимптотическое поведение волновых функций установлено в [10]. В наших обозначениях

$$\begin{aligned} F(\rho) &= f_0 \rho^{3/2} + f_1 \rho^{5/2} + f_2 \rho^{7/2} + \dots \\ G(\rho) &= g_0 \frac{1}{\rho^{1/2}} + g_1 \rho^{1/2} + g_2 \rho^{3/2} + \dots \end{aligned} \quad (32)$$

Подставляя (32) в уравнения (6), можно получить рекуррентные соотношения для коэффициентов  $f_n, g_n$ , в том числе соотношение между  $f_0$  и  $g_0$ , отсутствующее в [11],

$$\frac{f_0}{g_0} = \frac{|\alpha_Q| - \alpha_{em}}{2\alpha_Q^2}. \quad (33)$$

Из (32), (33) следует

$$\operatorname{tg}\Phi = \frac{F(\rho)}{G(\rho)} \Big|_{\rho \rightarrow 0} = \frac{|\alpha_Q| - \alpha_{em}}{2\alpha_Q^2} \rho^2 = 0, \quad (34)$$

$$\Phi(\rho = 0) = k\pi, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (35)$$

##### 4.2. Численный метод решения уравнений (28), (29)

В данной работе применен следующий численный способ решения краевой задачи (28), (31), (35). Для набора значений  $\varepsilon_i$  численно решается задача Коши с начальным контролируемым условием при  $\rho \rightarrow \infty$  (31). Искомое решение краевой задачи соответствует тому значению  $\varepsilon_i$  для которого выполняется условие в нуле (35). Применяемый способ по получаемым результатам согласуется с альтернативным численным способом: сначала решается задача Коши с начальным условием в нуле (35), а затем среди чисел  $\varepsilon_i$  отбираются те, для которых выполняется условие на бесконечности (31).

Уравнение (28) имеет в нуле особенность, поэтому численно оно решалось до контролируемого малого значения  $\rho_0 = 10^{-4} \div 10^{-8}$ .

Для решения задачи Коши используется неявный метод Рунге–Кутты пятого порядка с контролем размера шага (схема Ила трехстадийного метода Радо ПА[19, 20]).

По известной функции  $\Phi(\rho)$  функция  $A(\rho)$  получается из уравнения (29) прямым численным интегрированием. Такой способ приводит

к правильному результату для решения краевой задачи (28), (31), (35).

### 4.3. Определение дискретного энергетического спектра

Для трех вариантов значений  $\alpha, \alpha_Q, \alpha_{em}$ , приведенных в п.4, с граничными условиями (30)–(35) решением уравнения (28) были определены дискретные спектры состояний дираковских частиц в

поле голой сингулярности RN. Результаты расчетов приведены в табл. 1,2. Расчетные величины  $(1 - \epsilon_n)$  определены с точностью до первого знака после запятой. Численные величины во вторых знаках после запятой могут изменяться после проведения специальных расчетов на сходимость математических результатов. В данной работе дискретные спектры приведены для качественных оценок без проведения прецизионных расчетов.

Таблица 1

Численные значения  $1 - \epsilon_n$  при разноименных знаках зарядов  $Q, e$  для трех вариантов величин  $\alpha, \alpha_Q, \alpha_{em}$

	$n = 1$ $\kappa = -1$ $j = 1/2$ $l = 0$	$n = 2$ $\kappa = -1$ $j = 1/2$ $l = 0$	$n = 3$ $\kappa = -1$ $j = 1/2$ $l = 0$	$n = 2$ $\kappa = +1$ $j = 1/2$ $l = 1$	$n = 3$ $\kappa = +1$ $j = 1/2$ $l = 1$
$\alpha = 0,0018$ $\alpha_Q = 0,0036$ $\alpha_{em} = -1/137$	$4,14 \cdot 10^{-5}$	$1,03 \cdot 10^{-5}$	$4,53 \cdot 10^{-6}$	$1,04 \cdot 10^{-5}$	$4,58 \cdot 10^{-6}$
$\alpha = 0,025$ $\alpha_Q = 0,05$ $\alpha_{em} = -0,1$	$7,85 \cdot 10^{-3}$	$1,96 \cdot 10^{-3}$	$8,61 \cdot 10^{-4}$	$1,97 \cdot 10^{-3}$	$8,71 \cdot 10^{-4}$
$\alpha = 0,25$ $\alpha_Q = 0,5$ $\alpha_{em} = -1$	$5,17 \cdot 10^{-1}$	$1,96 \cdot 10^{-1}$	$9,5 \cdot 10^{-2}$	$3,18 \cdot 10^{-1}$	$1,31 \cdot 10^{-1}$

	$n = 2$ $\kappa = -2$ $j = 3/2$ $l = 1$	$n = 3$ $\kappa = -2$ $j = 3/2$ $l = 1$	$n = 3$ $\kappa = +2$ $j = 3/2$ $l = 2$	$n = 3$ $\kappa = -3$ $j = 5/2$ $l = 2$
$\alpha = 0,0018$ $\alpha_Q = 0,0036$ $\alpha_{em} = -1/137$	$1,03 \cdot 10^{-5}$	$4,53 \cdot 10^{-5}$	$4,58 \cdot 10^{-6}$	$4,53 \cdot 10^{-6}$
$\alpha = 0,025$ $\alpha_Q = 0,05$ $\alpha_{em} = -0,1$	$1,94 \cdot 10^{-3}$	$8,61 \cdot 10^{-4}$	$8,7 \cdot 10^{-4}$	$8,61 \cdot 10^{-4}$
$\alpha = 0,25$ $\alpha_Q = 0,5$ $\alpha_{em} = -1$	$2,19 \cdot 10^{-1}$	$1,05 \cdot 10^{-1}$	$1,09 \cdot 10^{-1}$	$9,2 \cdot 10^{-2}$

Таблица 2

Численные значения  $1 - \varepsilon_n$  для незаряженной дираковской частицы  
для трех вариантов величин  $\alpha, \alpha_Q$

	$n = 1$ $\kappa = -1$ $j = 1/2$ $l = 0$	$n = 2$ $\kappa = -1$ $j = 1/2$ $l = 0$	$n = 3$ $\kappa = -1$ $j = 1/2$ $l = 0$	$n = 2$ $\kappa = +1$ $j = 1/2$ $l = 1$	$n = 3$ $\kappa = +1$ $j = 1/2$ $l = 1$
$\alpha = 0,0018$ $\alpha_Q = 0,0036$ $\alpha_{em} = 0$	$1,62 \cdot 10^{-6}$	$4,04 \cdot 10^{-7}$	$1,7 \cdot 10^{-7}$	$4,04 \cdot 10^{-7}$	$1,75 \cdot 10^{-7}$
$\alpha = 0,025$ $\alpha_Q = 0,05$ $\alpha_{em} = 0$	$3,1 \cdot 10^{-4}$	$7,76 \cdot 10^{-5}$	$3,45 \cdot 10^{-5}$	$7,81 \cdot 10^{-5}$	$3,5 \cdot 10^{-5}$
$\alpha = 0,25$ $\alpha_Q = 0,5$ $\alpha_{em} = 0$	$2,3 \cdot 10^{-2}$	$6,94 \cdot 10^{-3}$	$3,23 \cdot 10^{-3}$	$7,81 \cdot 10^{-3}$	$3,5 \cdot 10^{-3}$

	$n = 2$ $\kappa = -2$ $j = 3/2$ $l = 1$	$n = 3$ $\kappa = -2$ $j = 3/2$ $l = 1$	$n = 3$ $\kappa = +2$ $j = 3/2$ $l = 2$	$n = 3$ $\kappa = -3$ $j = 5/2$ $l = 2$
$\alpha = 0,0018$ $\alpha_Q = 0,0036$ $\alpha_{em} = 0$	$3,99 \cdot 10^{-7}$	$1,7 \cdot 10^{-7}$	$1,75 \cdot 10^{-7}$	$1,8 \cdot 10^{-7}$
$\alpha = 0,025$ $\alpha_Q = 0,05$ $\alpha_{em} = 0$	$7,76 \cdot 10^{-5}$	$3,45 \cdot 10^{-5}$	$3,5 \cdot 10^{-5}$	$3,45 \cdot 10^{-5}$
$\alpha = 0,25$ $\alpha_Q = 0,5$ $\alpha_{em} = 0$	$7,47 \cdot 10^{-3}$	$3,35 \cdot 10^{-3}$	$3,5 \cdot 10^{-3}$	$3,35 \cdot 10^{-3}$

По результатам расчетов отметим существование стационарных связанных состояний незаряженных дираковских частиц, возникающих за счет только гравитационного взаимодействия. В целом, при малых значениях  $\alpha, \alpha_Q, \alpha_{em}$  (первый и второй варианты) дискретные спектры подобны спектрам водородоподобных атомов со слабовыраженной зависимостью энергии связи  $1 - \varepsilon_n$  от величины орбитального и полного моментов частицы. В третьем варианте обеспечивается достаточно сильная связь дираковских частиц с полем голой сингулярности RN.

#### 4.4. Радиальные волновые функции

На рис. 4 – 7 в качестве иллюстрации приведены нормированные плотности вероятности

$p(\rho) = \rho^2 (F^2(\rho) + G^2(\rho))$ , полученные численным решением уравнения (29) для собственных функций состояний  $S_{1/2}(\kappa = -1, l = 0, j = 1/2)$ ,  $P_{1/2}(\kappa = 1, l = 1, j = 1/2)$ . Зависимости получены для трех вариантов атомных систем, приведенных в п. 4.

Для всех вариантов рассматривались как заряженные, так и незаряженные дираковские частицы.

В целом, поведение плотностей вероятности носит такой же характер, как и при рассмотрении атомных систем в пространстве Минковского. Можно отметить, что для  $S_{1/2}$  – состояний бор-

овский радиус  $r_B = \frac{\hbar^2}{me^2}$  (в безразмерных единицах



$\rho_B = \frac{1}{\alpha_{em}}$ ) для всех вариантов близок к соответствующим максимумам плотности вероятности.

1 вариант:  $\rho_B = 137$ ;  $\rho_{p_{max}} = 110$  (рис. 4);

2 вариант:  $\rho_B = 10$ ;  $\rho_{p_{max}} = 7,7$  (рис. 6);

3 вариант:  $\rho_B = 1$ ;  $\rho_{p_{max}} = 1,18$  (рис. 7).

Во всех вариантах для незаряженных дираковских частиц (чисто гравитационное взаимодействие) максимумы плотности вероятности смещаются в сторону больших значений радиусов  $\rho$ .

Для  $P_{1/2}$ -состояний соответствующие максимумы плотностей вероятности по сравнению с  $S_{1/2}$ -состояниями расположены в области больших значений  $\rho$ .

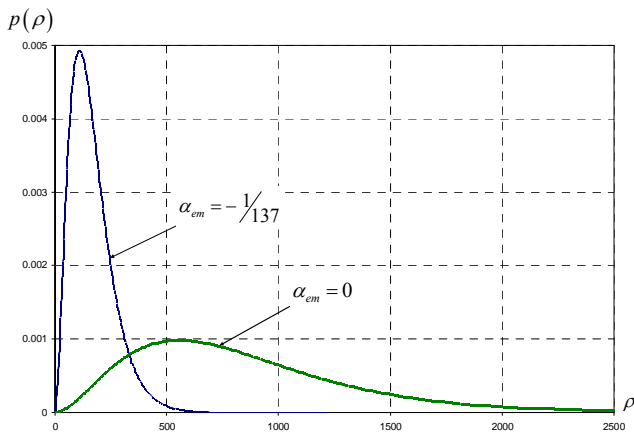


Рис. 4. Нормированная плотность вероятности для  $S_{1/2}$ -состояний заряженных и незаряженных дираковских частиц при  $\alpha = 0,0018$ ,  $\alpha_Q = 0,0036$

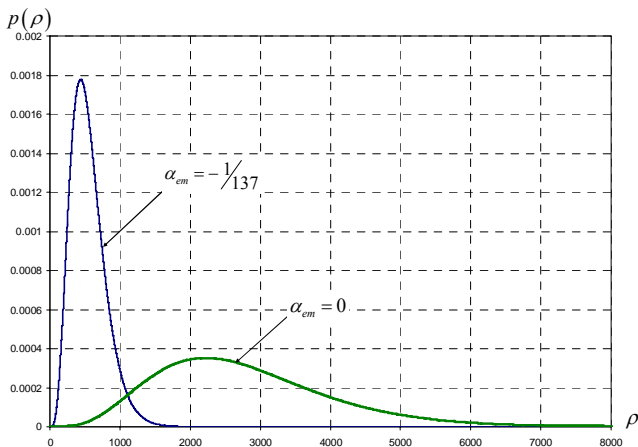


Рис. 5. Нормированная плотность вероятности для  $P_{1/2}$ -состояний заряженных и незаряженных дираковских частиц при  $\alpha = 0,0018$ ,  $\alpha_Q = 0,0036$

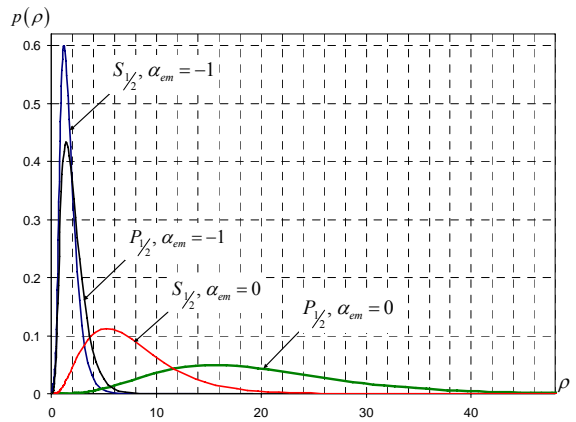


Рис. 6. Нормированная плотность вероятности для  $S_{1/2}$ ,  $P_{1/2}$ -состояний заряженных и незаряженных дираковских частиц при  $\alpha = 0,025$ ,  $\alpha_Q = 0,05$

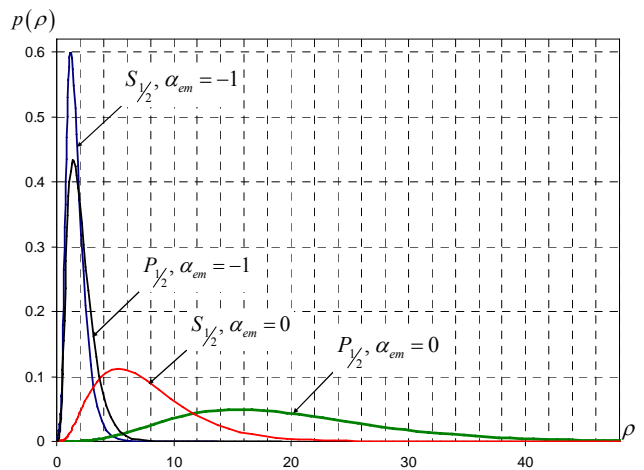


Рис. 7. Нормированная плотность вероятности для  $S_{1/2}$ ,  $P_{1/2}$ -состояний заряженных и незаряженных дираковских частиц при  $\alpha = 0,25$ ,  $\alpha_Q = 0,5$

## 5. Обсуждение результатов

В результате рассмотрения квантовой механики движения частиц со спином  $\frac{1}{2}$  в поле голой сингулярности Райсснера–Нордстрёма (RN) получены следующие результаты:

– для любой квантово-механической частицы со спином  $\frac{1}{2}$  независимо от наличия и знака электрического заряда голая сингулярность RN отделена бесконечно большим положительным потенциальным барьером  $\sim \frac{3}{8}r^{-2}$ , что согласуется с выводами [8] применительно к движению бесспиновых частиц в поле некоторых сингулярных метрик.

Как отмечено в [8], наличие отталкивающего барьера, прикрывающего сингулярность, не несет угрозы космической цензуре;

– при одноименных зарядах дираковской частицы и источника поля голой сингулярности RN на некотором расстоянии от начала координат  $r_{cl}$  существует второй полностью непроницаемый положительный потенциальный барьер  $\sim \frac{A}{(r - r_{cl})^2}$ .

Для элементарных зарядов частицы и источника поля голой сингулярности RN при  $\alpha_{em} \gg \alpha$ ,  $\alpha_{em} \gg \alpha_Q$  и при энергиях частицы  $E \sim mc^2$  величина  $r_{cl}$  близка к половине классического радиуса заряженной частицы  $r_e = \frac{e^2}{mc^2}$ . При значениях

энергии частицы  $E \gg mc^2$  радиус  $r_{cl}$  уменьшается обратно пропорционально  $E \left( r_{cl} = \frac{r_e}{E} \right)$ ;

– анализ эффективных потенциалов и прямые численные решения уравнения Дирака показали, что стационарные связанные состояния частиц со спином  $\frac{1}{2}$  в поле голой сингулярности RN могут существовать в случае разноименных зарядов частицы и источника поля RN. В случае одноименных зарядов связанные состояния дираковской частицы могут существовать под потенциальным барьером в области  $0 \leq r \leq r_{cl}$ . В области  $r > r_{cl}$  при рассмотренных значениях начальных параметров связанные состояния частиц со спином  $\frac{1}{2}$  отсутствуют;

– прямыми расчетами уравнения Дирака в поле голой сингулярности RN получены стационарные связанные состояния электрически незаряженных дираковских частиц, реализующиеся только за счет сил гравитационного взаимодействия.

Обратим внимание на различия в динамике классических и квантовых частиц со спином  $\frac{1}{2}$ . Известно, что при классическом рассмотрении имеет место геодезическая неполнота поля голой сингулярности RN. Геодезические не могут пройти через поверхность, радиус которой равен половине классического радиуса источника поля голой

сингулярности RN:  $r_{cl} = \frac{Q^2}{2Mc^2}$ . Однако в квантовой механике дираковская частица в зависимости от знаков зарядов может либо отражаться от отталкивающего барьера (14), либо находиться в одном из стационарных связанных состояний.

## Список литературы

1. Penrose R. Rivista del Nuovo Cimento, Serie I, 1, Numero Speciale: 252 (1969).
2. Virbhadra R. S., Narasimha D. and Chitre S. M. // Astron. Astrophys. 1998. Vol. 337. P. 1–8.
3. Virbhadra K. S. and Ellis G. F. R. // Phys. Rev. 2002. D65, 103004.
4. Virbhadra K. S., Keeton C. R. // Phys. Rev. 2008. D77, 124014.
5. Dey D., Bhattacharya K. and Sarkar N. // Phys. Rev. 2013. D88, 083532.
6. Joshi P. S., Malafaxina D. and Maragan // Class. Quant. Grav. 2014. 31, 015002.
7. Goel A., Maity R., Roy P., Tsarkar, arxiv: 1504.01302 [gr-qc].
8. Horowitz G. T. and Marolf D. // Phys. Rev. 1995. D, 52, 5670.
9. Горбатенко М. В., Незнамов В. П., Попов Е. Ю. О регулярных решениях уравнения Дирака в экстремальном поле Райсснера–Нордстрёма // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2015. Вып. 3. С. 23–30.
10. Pekeris C. L. and Frankowski K. // Proc. Natl. Acad. Sei. USA. 1986. Vol. 83. P. 1978–1982.
11. Dzhunushaliev V., arxiv:1202.5100 [gr-qc].
12. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. // Phys. Rev.D. 2010. 82. 104056; arxiv:1007.4631 [gr-qc].
13. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. // Phys. Rev.D. 2011. 83, 105002; arxiv:1102.4067v1 [gr-qc].
14. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. // Journal of Modern Physics. 2015. 6, 303-326; arxiv:1107.0844 [gr-qc].
15. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P., arxiv: 1302.2557 [gr-qc].
16. Dittrich J., Exner P. // J. Math. Phys. 1985. 26 (8). 2000–2008.
17. Vronsky M. A., Gorbatenko M. V., Kolesnikov N. S., Neznamov V. P., Popov E. Yu., Safronov I. I., arxiv: 1301.7595 [gr-qc].
18. Dolan S. R. Trinity Hall and Astrophysics Group, Cavendish Laboratory. Dissertation, 2006.
19. Хайпер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М.: Мир, 1999.
20. Hairer E., Wanner G. Solving ordinary differential equations II. Stiff and Differential-Algebraic Problems. Second Revised Edition, Springer-Verlag 1991, 1996.