УДК 533.7

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА И МНОГОКОМПОНЕНТНАЯ НЕРАВНОВЕСНАЯ ГАЗОВАЯ ДИНАМИКА

С. А. Серов[1], С. С. Серова
[1]ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Сформулирован корректный метод асимптотического решения кинетического уравнения Больцмана, обсуждаются метод Гильберта и метод Энскога. Получена система уравнений многокомпонентной неравновесной газовой динамики, соответствующая первому порядку в приближенном (асимптотическом) методе решения системы кинетических уравнений Больцмана.

Ключевые слова: асимптотические решения, кинетическое уравнение Больцмана, многокомпонентная неравновесная газовая динамика.

1. Введение

В 1912 году Гильберт в [1], гл. XXII как пример интегрального уравнения рассмотрел кинетическое уравнение Больцмана для однокомпонентного газа и предложил «рецепт» его приближенного (асимптотического) решения. «Рецепт» Гильберта был неудобен для практического применения, поскольку пять произвольных функциональных параметров первого и следующих приближений функции распределения скоростей нужно было находить, решая дифференциальные уравнения в частных производных (уравнения газовой динамики первого и более высоких порядков). Пять лет спустя Энског в своей диссертации предложил использовать нулевые условия, условия (25)-(27) ниже с нулевыми правыми частями, для определения пяти произвольных функциональных параметров первого и следующих приближений функции распределения скоростей. Наложение нулевых условий фактически приводит к использованию различных шкал сравнения в асимптотическом разложении функции распределения скоростей и в асимптотических разложениях плотности числа частиц, средней (массовой) скорости и температуры, получающимся из асимптотического разложения функции распределения скоростей интегрированием по скоростям с различными весовыми функциями. Нарушение логики метода последовательных приближений (приравнивать нужно переменные коэффициенты при одинаковых членах единой шкалы сравнения) проявилось в том, что, в результате, временные производные в необходимых условиях существования решений интегральных уравнений высших порядков, см. ниже, оказываются равными нулю, а с ними оказались бы равными нулю члены газодинамических уравнений, соответствующие вязкости, теплопроводности, ... Энског «улучшил» положение введением (см., например, [2], гл. 7, § 1, п. 5) необоснованного разложения частной производной по времени:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \sum_{r=0}^{\infty} \theta^r \frac{\partial_r}{\partial t}. \tag{1}$$

Подход Струминского, предложившего в 1974 году в [3] свой метод приближенного (асимптотического) решения системы кинетических уравнений Больцмана для многокомпонентного газа, отличается от подхода Энскога к асимптотическому решению системы уравнений Больцмана для газовой смеси тем, как вводится параметр малости в систему уравнений Больцмана для газовой смеси, т.е. решение строится в другом асимптотическом пределе. Метод же решения системы кинетических уравнений у Струминского, по существу, тот же, что и у Энскога (как и Энског, Струминский использует разложение частной производной по времени).

В разделе 2, для подхода, объединяющего подходы Энскога и Струминского, *предложен корректный метод асимптотического решения системы кинетических уравнений Больцмана для многокомпонентного газа*; в частности, показано, как необходимо изменить метод Энскога — нужно вместе с асимптотическим разложением функции распределения скоростей частиц i-й компоненты газовой смеси определить и использовать разложения для плотности числа частиц n_i i-й компоненты, средней массовой скорости $\boldsymbol{u}$ и температуры T смеси.

Далее, в разделе 3, рассмотрена подробнее *система уравнений многокомпонентной неравновесной газовой динамики первого порядка малости*, появляющаяся в процессе решения системы уравнений Больцмана методом последовательных приближений в разделе 2приближенного (асимптотического) решения системы интегральных уравнений.

Эта статья является сокращенной версией нашей статьи `arXiv:1303.6275`. Использованные ниже обозначения близки к обозначениям в [2]; предполагается, что все рассматриваемые функции непрерывны и, если рассматриваются их производные, нужное число раз непрерывно дифференцируемы, а все рассматриваемые интегралы сходятся.

2. Корректный метод решения системы кинетических уравнений Больцмана

Систему уравнений Больцмана, описывающую изменение зависящих от времени t и пространственных координат, задаваемых радиус-вектором $\boldsymbol{r}$, функций $f_i\left(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{c}_i\right)$ распределения скоростей $\boldsymbol{c}_i$ частиц i-й компоненты смеси разреженных одноатомных газов за счет столкновения с частицами других компонент смеси {см. [2], гл. 8, (1.1); обсуждение вывода системы уравнений Больцмана и области ее применимости см., например, в [2], гл. 3 и 18 и [4], гл. 7, § 1; ниже рассматриваются только *центральные взаимодействия* молекул, когда сила, с которой каждая из них действует на другую, направлена вдоль линии, соединяющей центры молекул}, можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_i}{\partial t} + \boldsymbol{c}_i \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \boldsymbol{r}} + \frac{\boldsymbol{X}_i}{m_i} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \boldsymbol{c}_i} &= \sum_{j \in N} \iiint \left(f_i' f_j' - f_i f_j\right) g_{ij}\, b\, db\, d\varepsilon\, d\boldsymbol{c}_j = \\ &= \sum_{j \in N} \iint \left(f_i' f_j' - f_i f_j\right) k_{ij}\, d\mathbf{k}\, d\boldsymbol{c}_j \qquad (i \in N); \end{aligned} \tag{2}$$

в (2) N — множество индексов, нумерующих компоненты смеси; $\boldsymbol{X}_i$ — внешняя сила, действующая на молекулу i-го сорта; m_i — масса молекулы i-го сорта; g_{ij} — модуль относительной скорости $\boldsymbol{g}_{ij} = \boldsymbol{c}_i - \boldsymbol{c}_j$ сталкивающихся частиц; b — прицельное расстояние, ε — азимутальный угол, $\mathbf{k}$ — вектор единичной длины, направленный в центр масс сталкивающихся частиц из точки их наибольшего сближения — см. [2], гл. 3, рисунок 3; скалярная функция $k_{ij}\left(\boldsymbol{g}_{ij}, \mathbf{k}\right)$ определяется равенством

$$g_{ij}\, b\, db\, d\varepsilon \overset{\text{def}}{=} k_{ij}\, d\mathbf{k}; \tag{3}$$

штрихом в (2) и ниже обозначаются скорости и функции скоростей после столкновения.

Введем обозначения:

$$J_i\left(f_i, f\right) = \iint \left(f_i f - f_i' f'\right) k_i\, d\mathbf{k}\, d\boldsymbol{c}, \tag{4}$$

$$J_{ij}\left(f_i, f_j\right) = \iint \left(f_i f_j - f_i' f_j'\right) k_{ij}\, d\mathbf{k}\, d\boldsymbol{c}_j; \tag{5}$$

чтобы различать скорости сталкивающихся молекул одного сорта, в (4) одна скорость обозначается через $\boldsymbol{c}_j$, а другая — через $\boldsymbol{c}$ (без индекса) и опущен индекс у соответствующей функции распределения скоростей f.

В подходе Энскога малыми считаются дифференциальные части уравнений Больцмана (2), обозначаемые ниже $\mathcal{D}_i f_i$, по сравнению с правыми частями уравнений (2) — см. [2], гл. 7, § 1, п. 5, — поэтому в систему уравнений Больцмана формально вводится индикатор малости θ следующим образом:

$$\theta \mathcal{D}_i f_i = -\sum_j J_{ij}\left(f_i, f_j\right) \qquad (i \in N). \tag{6}$$

В подходе Струминского к асимптотическому решению системы уравнений Больцмана малыми предполагаются дифференциальные части уравнений Больцмана (2) и интегралы столкновений частиц i-й компоненты с частицами других компонент по сравнению с интегралом столкновений частиц i-й компоненты между собой, поэтому в систему уравнений Больцмана индикатор малости θ вводится иначе:

$$\theta \mathcal{D}_i f_i = -J_i\left(f_i, f\right) - \theta \sum_{j \neq i} J_{ij}\left(f_i, f_j\right) \qquad (i \in N). \tag{7}$$

Можно объединить подходы Энскога и Струминского. Для этого разобьем множество компонент смеси N на два подмножества: подмножество компонент, которые условно назовем *внутренними* (можно было бы рассмотреть случай, когда подмножеств внутренних компонент несколько, но такой случай ничем принципиально не отличается от рассматриваемого ниже, только обозначения становятся еще более громоздкими), и подмножество компонент, которые назовем *внешними*. Чтобы различать эти две группы компонент смеси, подмножество индексов внутренних компонент $\hat{N}$ и сами индексы внутренних компонент $\hat{i} \in \hat{N}$ будем отмечать значком «ˆ», а подмножество индексов внешних компонент $\check{N}$ и сами индексы внешних компонент $\check{i} \in \check{N}$ будем отмечать значком «ˇ»; пересечение множеств $\hat{N}$ и $\check{N}$ пусто — $\hat{N} \cap \check{N} = \emptyset$, а объединение этих множеств есть множество индексов всех компонент смеси $\hat{N} \cup \check{N} = N$; если некоторое утверждение относится как к внутренним, так и внешним компонентам, то значки «ˆ» и «ˇ» будут опускаться. В новых обозначениях система уравнений Больцмана может быть записана в виде:

$$\theta \mathcal{D}_{\hat{i}} f_{\hat{i}} = -\sum_{\hat{j} \in \hat{N}} J_{\hat{i}\hat{j}}\left(f_{\hat{i}}, f_{\hat{j}}\right) - \theta \sum_{\check{j} \in \check{N}} J_{\hat{i}\check{j}}\left(f_{\hat{i}}, f_{\check{j}}\right) \qquad \left(\hat{i} \in \hat{N}\right), \tag{8a}$$

$$\theta \mathcal{D}_{\check{i}} f_{\check{i}} = -J_{\check{i}}\left(f_{\check{i}}, f\right) - \theta \sum_{j \neq \check{i}} J_{\check{i}j}\left(f_{\check{i}}, f_j\right) \qquad \left(\check{i} \in \check{N}\right). \tag{8b}$$

Запишем асимптотическое разложение функции распределения скоростей частиц i-й компоненты f_i в виде формального ряда последовательных приближений по степеням θ:

$$f_i = f_i^{(0)} + \theta f_i^{(1)} + \theta^2 f_i^{(2)} + \cdots . \tag{9}$$

Дифференциальные части уравнений (8) запишем в виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_i f_i &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{c}_i \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} + \frac{\boldsymbol{X}_i}{m_i} \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{c}_i}\right)\left(f_i^{(0)} + \theta f_i^{(1)} + \cdots\right) = \\ &= \mathcal{D}_i^{(0)} + \theta \mathcal{D}_i^{(1)} + \theta^2 \mathcal{D}_i^{(2)} + \cdots , \end{aligned} \tag{10}$$

где

$$\mathcal{D}_i^{(r)} = \frac{\partial f_i^{(r)}}{\partial t} + \boldsymbol{c}_i \cdot \frac{\partial f_i^{(r)}}{\partial \boldsymbol{r}} + \frac{\boldsymbol{X}_i}{m_i} \cdot \frac{\partial f_i^{(r)}}{\partial \boldsymbol{c}_i} \qquad (r = 0, 1, 2 \ldots), \tag{11}$$

— ср. с [2], гл. 7, § 1, п.п. 4, 5 и [3]. В (10)-(11) не используется разложение частной производной по времени (1), как это было сделано Энскогом, а вслед за ним Струминским. В результате описываемый ниже метод решения системы уравнений Больцмана принципиально отличается от методов Энскога и Струминского.

Подставляя (9) и (10) в (8a) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях θ, получаем систему уравнений метода последовательных приближений для нахождения функций распределения скоростей частиц внутренних компонент смеси $f_{\hat{i}}^{(r)}$, которую с учетом обозначений (4), (5) и (11) можно записать в виде:

$$\sum_{\hat{j}\in\hat{N}} J_{\hat{i}\hat{j}}\left(f_{\hat{i}}^{(0)}, f_{\hat{j}}^{(0)}\right) = 0 \qquad \left(\hat{i}\in\hat{N}\right), \tag{12}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\hat{i}}^{(r-1)} \quad + \quad & \sum_{\hat{j}\in\hat{N}} J_{\hat{i}\hat{j}}\left(f_{\hat{i}}^{(r)}, f_{\hat{j}}^{(0)}\right) + \sum_{\hat{j}\in\hat{N}}\sum_{s=1}^{r-1} J_{\hat{i}\hat{j}}\left(f_{\hat{i}}^{(r-s)}, f_{\hat{j}}^{(s)}\right) + \sum_{\hat{j}\in\hat{N}} J_{\hat{i}\hat{j}}\left(f_{\hat{i}}^{(0)}, f_{\hat{j}}^{(r)}\right) + \\ & + \sum_{\check{j}\in\check{N}}\sum_{s=0}^{r-1} J_{\hat{i}\check{j}}\left(f_{\hat{i}}^{(r-1-s)}, f_{\check{j}}^{(s)}\right) = 0 \qquad \left(\hat{i}\in\hat{N},\ r=1,2\ldots\right). \end{aligned} \tag{13}$$

Аналогично, подставляя (9) и (10) в (8b) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях θ, получаем систему уравнений метода последовательных приближений для нахождения функций распределения скоростей частиц внешних компонент смеси $f_{\check{i}}^{(r)}$:

$$J_{\check{i}}\left(f_{\check{i}}^{(0)}, f^{(0)}\right) = 0 \qquad \left(\check{i}\in\check{N}\right), \tag{14}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\check{i}}^{(r-1)} \quad + \quad & J_{\check{i}}\left(f_{\check{i}}^{(r)}, f^{(0)}\right) + \sum_{s=1}^{r-1} J_{\check{i}}\left(f_{\check{i}}^{(r-s)}, f^{(s)}\right) + J_{\check{i}}\left(f_{\check{i}}^{(0)}, f^{(r)}\right) + \\ & + \sum_{j\neq\check{i}}\sum_{s=0}^{r-1} J_{\check{i}j}\left(f_{\check{i}}^{(r-1-s)}, f_{j}^{(s)}\right) = 0 \qquad \left(\check{i}\in\check{N},\ r=1,2\ldots\right). \end{aligned} \tag{15}$$

Ниже, говоря о порядке приближения, будем считать порядок приближения равным значению индекса r в (13), (15). В нулевом приближении, согласно (5), (12), имеем следующую систему интегральных уравнений для нахождения функций распределения скоростей частиц внутренних компонент смеси $f_{\hat{i}}^{(0)}$:

$$\sum_{\hat{j}\in\hat{N}} J_{\hat{i}\hat{j}}\left(f_{\hat{i}}^{(0)}, f_{\hat{j}}^{(0)}\right) = \sum_{\hat{j}\in\hat{N}} \iint \left(f_{\hat{i}}^{(0)} f_{\hat{j}}^{(0)} - f_{\hat{i}}^{(0)\prime} f_{\hat{j}}^{(0)\prime}\right) k_{\hat{i}\hat{j}}\, d\mathbf{k}\, d\boldsymbol{c}_{\hat{j}} = 0 \qquad \left(\hat{i}\in\hat{N}\right). \tag{16}$$

Общее решение системы уравнений (16) можно записать в виде множества функций Максвелла:

$$f_{\hat{i}}^{(0)} = \beta_{\hat{i}}^{(1,0)} \left(\frac{m_{\hat{i}}}{2\pi k \beta^{(3,0)}_{\hat{}}}\right)^{3/2} e^{-\frac{m_{\hat{i}}\left(\boldsymbol{c}_{\hat{i}} - \boldsymbol{\beta}^{(2,0)}_{\hat{}}\right)^2}{2k\beta^{(3,0)}_{\hat{}}}} \qquad \left(\hat{i}\in\hat{N}\right), \tag{17}$$

где k — постоянная Больцмана.

По определению вводим плотность числа частиц i-й компоненты n_i, среднюю массовую скорость $\boldsymbol{u}_{\hat{}}$ и температуру $T_{\hat{}}$ внутренних компонент смеси:

$$n_i \overset{\text{def}}{=} \int f_i \, d\boldsymbol{c}_i, \tag{18}$$

$$\boldsymbol{u}_{\hat{}} \sum_{\hat{i}\in\hat{N}} n_{\hat{i}} m_{\hat{i}} \overset{\text{def}}{=} \sum_{\hat{i}\in\hat{N}} \int m_{\hat{i}} \, \boldsymbol{c}_{\hat{i}} f_{\hat{i}} \, d\boldsymbol{c}_{\hat{i}}, \tag{19}$$

$$\frac{3}{2}\, kT_{\hat{}} \sum_{\hat{i}\in\hat{N}} n_{\hat{i}} \overset{\text{def}}{=} \sum_{\hat{i}\in\hat{N}} \int \frac{1}{2}\, m_{\hat{i}} \left(\boldsymbol{c}_{\hat{i}} - \boldsymbol{u}_{\hat{}}\right)^2 f_{\hat{i}} \, d\boldsymbol{c}_{\hat{i}}, \tag{20}$$

в (20) k — постоянная Больцмана. Из (18)-(20) получаем равенство:

$$\frac{3}{2}\, kT_{\hat{}} \sum_{\hat{i}\in\hat{N}} n_{\hat{i}} + \frac{1}{2}\, u^2_{\hat{}} \sum_{\hat{i}\in\hat{N}} n_{\hat{i}} m_{\hat{i}} = \sum_{\hat{i}\in\hat{N}} \int \frac{1}{2}\, m_{\hat{i}} c^2_{\hat{i}} f_{\hat{i}} \, d\boldsymbol{c}_{\hat{i}}, \tag{21}$$

которое удобно использовать в дальнейшем вместо определения (20).

Вместе с асимптотическим разложением (9) в соответствии с определениями (18), (19), (21) *необходимо* определить асимптотические разложения для плотности числа частиц n_i i-й компоненты

$$n_i = n_i^{(0)} + \theta n_i^{(1)} + \theta^2 n_i^{(2)} + \cdots, \tag{22}$$

средней массовой скорости $\boldsymbol{u}_{\hat{}}$

$$\boldsymbol{u}_{\hat{}} = \boldsymbol{u}_{\hat{}}^{(0)} + \theta \boldsymbol{u}_{\hat{}}^{(1)} + \theta^2 \boldsymbol{u}_{\hat{}}^{(2)} + \cdots \tag{23}$$

и температуры $T_{\hat{}}$ внутренних компонент смеси

$$T_{\hat{}} = T_{\hat{}}^{(0)} + \theta T_{\hat{}}^{(1)} + \theta^2 T_{\hat{}}^{(2)} + \cdots. \tag{24}$$

Подставляя (9) и (22)-(24) в (18), (19), (21) и приравнивая члены одного порядка малости, получаем $\mathrm{Card}\left(\hat{N}\right) + 4$ скалярных соотношений, связывающих асимптотические разложения (9) и (22)-(24):

$$\int f_{\hat{i}}^{(r)} d\boldsymbol{c}_{\hat{i}} = n_{\hat{i}}^{(r)} \qquad \left(\hat{i} \in \hat{N}\right), \tag{25}$$

$$\sum_{\hat{i}\in\hat{N}} \int m_{\hat{i}} \boldsymbol{c}_{\hat{i}} f_{\hat{i}}^{(r)} d\boldsymbol{c}_{\hat{i}} = \sum_{\hat{i}\in\hat{N}} m_{\hat{i}} \left(n_{\hat{i}} \boldsymbol{u}_{\hat{}}\right)^{(r)} = \sum_{\hat{i}\in\hat{N}} m_{\hat{i}} \sum_{s=0}^{r} n_{\hat{i}}^{(r-s)} \boldsymbol{u}_{\hat{}}^{(s)} = \sum_{s=0}^{r} \hat{\rho}^{(r-s)} \boldsymbol{u}_{\hat{}}^{(s)}, \tag{26}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{\hat{i}\in\hat{N}} \int \frac{1}{2}\, m_{\hat{i}} c^2_{\hat{i}} f_{\hat{i}}^{(r)} d\boldsymbol{c}_{\hat{i}} &= \frac{3}{2}\, k \sum_{\hat{i}\in\hat{N}} \left(n_{\hat{i}} T_{\hat{}}\right)^{(r)} + \frac{1}{2} \sum_{\hat{i}\in\hat{N}} m_{\hat{i}} \Big(n_{\hat{i}} u^2_{\hat{}}\Big)^{(r)} = \\
&= \frac{3}{2}\, k \sum_{\hat{i}\in\hat{N}} \sum_{s=0}^{r} n_{\hat{i}}^{(r-s)} T_{\hat{}}^{(s)} + \frac{1}{2} \sum_{\hat{i}\in\hat{N}} m_{\hat{i}} \sum_{s=0}^{r} \sum_{q=0}^{s} n_{\hat{i}}^{(r-s)} \boldsymbol{u}_{\hat{}}^{(s-q)} \cdot \boldsymbol{u}_{\hat{}}^{(q)} = \\
&= \frac{3}{2}\, k \sum_{s=0}^{r} \hat{n}^{(r-s)} T_{\hat{}}^{(s)} + \frac{1}{2} \sum_{s=0}^{r} \sum_{q=0}^{s} \hat{\rho}^{(r-s)} \boldsymbol{u}_{\hat{}}^{(s-q)} \cdot \boldsymbol{u}_{\hat{}}^{(q)}.
\end{aligned} \tag{27}$$

В (26), (27) введены обозначения

$$\hat{\rho}^{(r-s)} = \sum_{\hat{i}\in\hat{N}} m_{\hat{i}} n_{\hat{i}}^{(r-s)}, \tag{28}$$

$$\hat{n}^{(r-s)} = \sum_{\hat{i}\in\hat{N}} n_{\hat{i}}^{(r-s)}. \tag{29}$$

В частности, для $r = 0$ из (25)-(27) получаем выражения фигурирующих в (17) произвольных функций $\beta_{\hat{i}}^{(1,0)}(\boldsymbol{r}, t)$, $\boldsymbol{\beta}_{\hat{}}^{(2,0)}(\boldsymbol{r}, t)$ и $\beta_{\hat{}}^{(3,0)}(\boldsymbol{r}, t)$ через нулевые приближения к локальным значениям плотности числа частиц $\hat{i}$-й компоненты, средней массовой скорости и температуры внутренних компонент смеси:

$$\beta_{\hat{i}}^{(1,0)}(\boldsymbol{r}, t) = n_{\hat{i}}^{(0)}(\boldsymbol{r}, t), \tag{30a}$$

$$\boldsymbol{\beta}_{\hat{}}^{(2,0)}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{u}_{\hat{}}^{(0)}(\boldsymbol{r}, t), \tag{30b}$$

$$\beta_{\hat{}}^{(3,0)}(\boldsymbol{r}, t) = T_{\hat{}}^{(0)}(\boldsymbol{r}, t). \tag{30c}$$

Согласно (4), (14), интегральные уравнения нулевого приближения, из которых находятся функции распределения скоростей частиц внешних компонент смеси $f_{\check{i}}^{(0)}$:

$$J_{\check{i}}\left(f_{\check{i}}^{(0)}, f^{(0)}\right) = \iint \left(f_{\check{i}}^{(0)} f^{(0)} - f_{\check{i}}^{(0)\prime} f^{(0)\prime}\right) k_i \, d\mathbf{k} \, d\boldsymbol{c} = 0 \qquad \left(\check{i} \in \check{N}\right), \tag{31}$$

— проще уравнений (16) и фактически отличаются от (16) только отсутствием суммирования по компонентам. Поэтому, аналогично (17), общее решение системы уравнений (31) можно записать в виде множества функций Максвелла:

$$f_{\check{i}}^{(0)} = \beta_{\check{i}}^{(1,0)} \left(\frac{m_{\check{i}}}{2\pi k \beta_{\check{i}}^{(3,0)}}\right)^{3/2} e^{-\frac{m_{\check{i}}\left(\boldsymbol{c}_{\check{i}} - \boldsymbol{\beta}_{\check{i}}^{(2,0)}\right)^2}{2k\beta_{\check{i}}^{(3,0)}}} \qquad \left(\check{i} \in \check{N}\right), \tag{32}$$

где $\beta_{\check{i}}^{(1,0)}$ и $\beta_{\check{i}}^{(3,0)}$ — некоторые, не зависящие от $\boldsymbol{c}_{\check{i}}$, скалярные функции пространственных координат, задаваемых радиус-вектором $\boldsymbol{r}$, и времени t, а $\boldsymbol{\beta}_{\check{i}}^{(2,0)}$ — векторная функция $\boldsymbol{r}$ и t.

Дополним определение плотности числа частиц i-й компоненты (18) определениями средней скорости $\boldsymbol{u}_{\check{i}}$ и температуры $T_{\check{i}}$ внешней компоненты смеси:

$$\boldsymbol{u}_{\check{i}} n_{\check{i}} m_{\check{i}} \overset{\text{def}}{=} \int m_{\check{i}} \boldsymbol{c}_{\check{i}} f_{\check{i}} \, d\boldsymbol{c}_{\check{i}}, \tag{33}$$

$$\frac{3}{2} k T_{\check{i}} n_{\check{i}} \overset{\text{def}}{=} \int \frac{1}{2} m_{\check{i}} \left(\boldsymbol{c}_{\check{i}} - \boldsymbol{u}_{\check{i}}\right)^2 f_{\check{i}} \, d\boldsymbol{c}_{\check{i}}; \tag{34}$$

из (18), (33), (34) получаем равенство:

$$\frac{3}{2} k T_{\check{i}} n_{\check{i}} + \frac{1}{2} u_{\check{i}}^2 n_{\check{i}} m_{\check{i}} = \int \frac{1}{2} m_{\check{i}} c_{\check{i}}^2 f_{\check{i}} \, d\boldsymbol{c}_{\check{i}}, \tag{35}$$

которое удобно использовать в дальнейшем вместо определения (34).

Введем аналогичные (23)-(24) асимптотические разложения средней скорости $\boldsymbol{u}_{\check{i}}$ $\check{i}$-й внешней компоненты

$$\boldsymbol{u}_{\check{i}} = \boldsymbol{u}_{\check{i}}^{(0)} + \theta \boldsymbol{u}_{\check{i}}^{(1)} + \theta^2 \boldsymbol{u}_{\check{i}}^{(2)} + \cdots \tag{36}$$

и температуры $T_{\check{i}}$ $\check{i}$-й внешней компоненты

$$T_{\check{i}} = T_{\check{i}}^{(0)} + \theta T_{\check{i}}^{(1)} + \theta^2 T_{\check{i}}^{(2)} + \cdots . \tag{37}$$

Подставляя (9), (22), (36), (37) в (18), (33), (35) и приравнивая члены одного порядка малости, получаем для каждого значения индекса $\check{i}$ 5 (скалярных) соотношений, связывающих асимптотические разложения (9), (22), (36), (37):

$$\int f_{\check{i}}^{(r)} d\boldsymbol{c}_{\check{i}} \quad = \quad n_{\check{i}}^{(r)}, \tag{38}$$

$$\int m_{\check{i}} \boldsymbol{c}_{\check{i}} f_{\check{i}}^{(r)} d\boldsymbol{c}_{\check{i}} \quad = \quad m_{\check{i}} (n_{\check{i}} \boldsymbol{u}_{\check{i}})^{(r)} = m_{\check{i}} \sum_{s=0}^{r} n_{\check{i}}^{(r-s)} \boldsymbol{u}_{\check{i}}^{(s)} = \sum_{s=0}^{r} \rho_{\check{i}}^{(r-s)} \boldsymbol{u}_{\check{i}}^{(s)}, \tag{39}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{2} m_{\check{i}} c_{\check{i}}^2 f_{\check{i}}^{(r)} d\boldsymbol{c}_{\check{i}} \quad &= \quad \frac{3}{2} k (n_{\check{i}} T_{\check{i}})^{(r)} + \frac{1}{2} m_{\check{i}} \big(n_{\check{i}} u_{\check{i}}^2\big)^{(r)} = \\
&= \quad \frac{3}{2} k \sum_{s=0}^{r} n_{\check{i}}^{(r-s)} T_{\check{i}}^{(s)} + \frac{1}{2} m_{\check{i}} \sum_{s=0}^{r} \sum_{q=0}^{s} n_{\check{i}}^{(r-s)} \boldsymbol{u}_{\check{i}}^{(s-q)} \cdot \boldsymbol{u}_{\check{i}}^{(q)} = \\
&= \quad \frac{3}{2} k \sum_{s=0}^{r} n_{\check{i}}^{(r-s)} T_{\check{i}}^{(s)} + \frac{1}{2} \sum_{s=0}^{r} \sum_{q=0}^{s} \rho_{\check{i}}^{(r-s)} \boldsymbol{u}_{\check{i}}^{(s-q)} \cdot \boldsymbol{u}_{\check{i}}^{(q)},
\end{aligned} \tag{40}$$

ср. с (25)-(27). В (39), (40) использовано обозначение

$$\rho_{\check{i}}^{(r-s)} = m_{\check{i}} n_{\check{i}}^{(r-s)}. \tag{41}$$

Для $r = 0$ из (38)-(40) получаем выражения фигурирующих в (32) произвольных функций $\beta_{\check{i}}^{(1,0)}(\boldsymbol{r}, t)$, $\boldsymbol{\beta}_{\check{i}}^{(2,0)}(\boldsymbol{r}, t)$ и $\beta_{\check{i}}^{(3,0)}(\boldsymbol{r}, t)$ через нулевые приближения к локальным значениям плотности числа частиц, средней скорости и температуры $\check{i}$-й внешней компоненты смеси:

$$\beta_{\check{i}}^{(1,0)}(\boldsymbol{r}, t) \quad = \quad n_{\check{i}}^{(0)}(\boldsymbol{r}, t), \tag{42a}$$

$$\boldsymbol{\beta}_{\check{i}}^{(2,0)}(\boldsymbol{r}, t) \quad = \quad \boldsymbol{u}_{\check{i}}^{(0)}(\boldsymbol{r}, t), \tag{42b}$$

$$\beta_{\check{i}}^{(3,0)}(\boldsymbol{r}, t) \quad = \quad T_{\check{i}}^{(0)}(\boldsymbol{r}, t). \tag{42c}$$

Для $r \geq 1$ функции распределения скоростей частиц внутренних компонент смеси $f_{\hat{i}}^{(r)}$ находятся из системы интегральных уравнений (13), которую с учетом (5) и равенства

$$f_{\hat{i}}^{(0)\prime} f_{\hat{j}}^{(0)\prime} \equiv f_{\hat{i}}^{(0)} f_{\hat{j}}^{(0)} \tag{43}$$

можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{\hat{i}}^{(r-1)} \quad &+ \quad \sum_{\hat{j} \in \hat{N}} \sum_{s=1}^{r-1} J_{\hat{i}\hat{j}} \left(f_{\hat{i}}^{(r-s)}, f_{\hat{j}}^{(s)} \right) + \sum_{\check{j} \in \check{N}} \sum_{s=0}^{r-1} J_{\hat{i}\check{j}} \left(f_{\hat{i}}^{(r-1-s)}, f_{\check{j}}^{(s)} \right) = \\
&= \quad - \sum_{\hat{j} \in \hat{N}} J_{\hat{i}\hat{j}} \left(f_{\hat{i}}^{(0)} \chi_{\hat{i}}^{(r)}, f_{\hat{j}}^{(0)} \right) - \sum_{\hat{j} \in \hat{N}} J_{\hat{i}\hat{j}} \left(f_{\hat{i}}^{(0)}, f_{\hat{j}}^{(0)} \chi_{\hat{j}}^{(r)} \right) = \\
&= \quad - \sum_{\hat{j} \in \hat{N}} \iint f_{\hat{i}}^{(0)} f_{\hat{j}}^{(0)} \left(\chi_{\hat{i}}^{(r)} + \chi_{\hat{j}}^{(r)} - \chi_{\hat{i}}^{(r)\prime} - \chi_{\hat{j}}^{(r)\prime} \right) k_{\hat{i}\hat{j}} \, d\mathbf{k} \, d\boldsymbol{c}_{\hat{j}} \qquad \left(\hat{i} \in \hat{N} \right),
\end{aligned} \tag{44}$$

в (44) функции $f_{\hat{i}}^{(r)}$ записаны как $f_{\hat{i}}^{(r)} = f_{\hat{i}}^{(0)} \chi_{\hat{i}}^{(r)}$, где $\chi_{\hat{i}}^{(r)}$ — новые неизвестные функции.

Левые части уравнений (44) содержат функции, известные с предыдущего шага метода последовательных приближений. Неизвестные функции $\chi_{\hat{i}}^{(r)}$ входят, линейно, только в правую часть уравнений (44). Поэтому общее решение системы уравнений (13) есть семейство функций вида $\{f_{\hat{i}}^{(r)} = \Xi_{\hat{i}}^{(r)} + \xi_{\hat{i}}^{(r)}\}_{\hat{i}\in\hat{N}}$, где $\{\Xi_{\hat{i}}^{(r)} = f_{\hat{i}}^{(0)} \varPhi_{\hat{i}}^{(r)}\}_{\hat{i}\in\hat{N}}$, $\{\xi_{\hat{i}}^{(r)} = f_{\hat{i}}^{(0)} \phi_{\hat{i}}^{(r)}\}_{\hat{i}\in\hat{N}}$, семейство функций $\{\varPhi_{\hat{i}}^{(r)}\}_{\hat{i}\in\hat{N}}$ — некоторое частное решение системы неоднородных уравнений (44), а семейство функций $\{\phi_{\hat{i}}^{(r)}\}_{\hat{i}\in\hat{N}}$ — общее решение системы однородных интегральных уравнений

$$0 = \sum_{\hat{j}\in\hat{N}} \iint f_{\hat{i}}^{(0)} f_{\hat{j}}^{(0)} \left(\phi_{\hat{i}}^{(r)} + \phi_{\hat{j}}^{(r)} - \phi_{\hat{i}}^{(r)\prime} - \phi_{\hat{j}}^{(r)\prime}\right) k_{\hat{i}\hat{j}}\, d\mathbf{k}\, d\boldsymbol{c}_{\hat{j}} \qquad \left(\hat{i} \in \hat{N}\right). \tag{45}$$

Если умножить уравнения (45) на $\phi_{\hat{i}}^{(r)}$, проинтегрировать по всем значениям $\boldsymbol{c}_{\hat{i}}$, просуммировать по $\hat{i}$ и преобразовать интегралы, то получим:

$$\frac{1}{4} \sum_{\hat{i},\hat{j}\in\hat{N}} \iiint f_{\hat{i}}^{(0)} f_{\hat{j}}^{(0)} \left(\phi_{\hat{i}}^{(r)} + \phi_{\hat{j}}^{(r)} - \phi_{\hat{i}}^{(r)\prime} - \phi_{\hat{j}}^{(r)\prime}\right)^2 k_{\hat{i}\hat{j}}\, d\mathbf{k}\, d\boldsymbol{c}_{\hat{i}}\, d\boldsymbol{c}_{\hat{j}} = 0. \tag{46}$$

Из (46) заключаем, что $\phi_{\hat{i}}^{(r)}$ являются линейными комбинациями аддитивных инвариантов столкновения $\psi_{i}^{(l)}$ $(l = 1, 2, 3)$:

$$\phi_{\hat{i}}^{(r)} = \alpha_{\hat{i}}^{(1,r)} + \boldsymbol{\alpha}_{\hat{}}^{(2,r)} \cdot m_{\hat{i}} \boldsymbol{c}_{\hat{i}} + \alpha_{\hat{}}^{(3,r)} \frac{1}{2} m_{\hat{i}} c_{\hat{i}}^2, \tag{47}$$

где $\alpha_{\hat{i}}^{(1,r)}$ и $\alpha_{\hat{}}^{(3,r)}$ — некоторые, не зависящие от $\boldsymbol{c}_{\hat{i}}$, скалярные функции пространственных координат, задаваемых радиус-вектором $\boldsymbol{r}$, и времени t, а $\boldsymbol{\alpha}_{\hat{}}^{(2,r)}$ — векторная функция $\boldsymbol{r}$ и t (как и выше, произвольные функции $\boldsymbol{\alpha}_{\hat{}}^{(2,r)}$ и $\alpha_{\hat{}}^{(3,r)}$ одинаковы для всех внутренних компонент смеси), и, следовательно,

$$\xi_{\hat{i}}^{(r)} = f_{\hat{i}}^{(0)} \left(\alpha_{\hat{i}}^{(1,r)} + \boldsymbol{\alpha}_{\hat{}}^{(2,r)} \cdot m_{\hat{i}} \boldsymbol{c}_{\hat{i}} + \alpha_{\hat{}}^{(3,r)} \frac{1}{2} m_{\hat{i}} c_{\hat{i}}^2\right) \qquad \left(\hat{i} \in \hat{N}\right). \tag{48}$$

Чтобы упростить дальнейшие вычисления в соответствии с выражением для $f_{\hat{i}}^{(0)}$, см. (17) и (30), перепишем (48) в виде

$$\xi_{\hat{i}}^{(r)} = f_{\hat{i}}^{(0)} \left[\beta_{\hat{i}}^{(1,r)} + \boldsymbol{\beta}_{\hat{}}^{(2,r)} \cdot m_{\hat{i}} \left(\boldsymbol{c}_{\hat{i}} - \boldsymbol{u}_{\hat{}}^{(0)}\right) + \beta_{\hat{}}^{(3,r)} \frac{1}{2} m_{\hat{i}} \left(\boldsymbol{c}_{\hat{i}} - \boldsymbol{u}_{\hat{}}^{(0)}\right)^2\right] \qquad \left(\hat{i} \in \hat{N}\right), \tag{49}$$

где $\beta_{\hat{i}}^{(1,r)}$, $\boldsymbol{\beta}_{\hat{}}^{(2,r)}$ и $\beta_{\hat{}}^{(3,r)}$ — новые функции $\boldsymbol{r}$ и t.

Семейство функций $\{\chi_{\hat{i}}^{(r)}\}_{\hat{i}\in\hat{N}}$ является решением системы неоднородных интегральных уравнений

$$F_{\hat{i}}^{(r)} = \sum_{\hat{j}\in\hat{N}} \iint f_{\hat{i}}^{(0)} f_{\hat{j}}^{(0)} \left(\chi_{\hat{i}}^{(r)} + \chi_{\hat{j}}^{(r)} - \chi_{\hat{i}}^{(r)\prime} - \chi_{\hat{j}}^{(r)\prime}\right) k_{\hat{i}\hat{j}}\, d\mathbf{k}\, d\boldsymbol{c}_{\hat{j}} \qquad \left(\hat{i} \in \hat{N}\right), \tag{50}$$

где $F_{\hat{i}}^{(r)}$ обозначают взятые с обратным знаком левые части уравнений (44).

Умножая уравнения (50) на $\psi_{\hat{i}}^{(l)}$ $(l=1,2,3)$, интегрируя по всем значениям $\boldsymbol{c}_{\hat{i}}$ и преобразуя интегралы аналогично тому, что выше, мы получим, как необходимое условие существования решений системы интегральных уравнений (50), необходимость выполнения равенств:

$$\int \psi_{\hat{i}}^{(1)} F_{\hat{i}}^{(r)} d\boldsymbol{c}_{\hat{i}} \;=\; 0 \qquad \left(\hat{i}\in\hat{N}\right), \tag{51a}$$

$$\sum_{\hat{i}\in\hat{N}} \int \psi_{\hat{i}}^{(l)} F_{\hat{i}}^{(r)} d\boldsymbol{c}_{\hat{i}} \;=\; 0 \qquad (l=2,3). \tag{51b}$$

Среди (бесконечного) множества частных решений системы уравнений (50), отличающихся друг от друга на некоторое решение системы однородных уравнений (45), можно выделить единственное решение $\{\varPhi_{\hat{i}}^{(r)}\}_{\hat{i}\in\hat{N}}$ такое, что

$$\int \psi_{\hat{i}}^{(1)} f_{\hat{i}}^{(0)} \varPhi_{\hat{i}}^{(r)} d\boldsymbol{c}_{\hat{i}} \;=\; 0 \qquad \left(\hat{i}\in\hat{N}\right), \tag{52a}$$

$$\sum_{\hat{i}\in\hat{N}} \int \psi_{\hat{i}}^{(l)} f_{\hat{i}}^{(0)} \varPhi_{\hat{i}}^{(r)} d\boldsymbol{c}_{\hat{i}} \;=\; 0 \qquad (l=2,3). \tag{52b}$$

Подставив выражение для $f_{\hat{i}}^{(r)}$ $\left(\hat{i}\in\hat{N}\right)$

$$\begin{aligned} f_{\hat{i}}^{(r)} &= \Xi_{\hat{i}}^{(r)} + \xi_{\hat{i}}^{(r)} = \\ &= f_{\hat{i}}^{(0)} \varPhi_{\hat{i}}^{(r)} + f_{\hat{i}}^{(0)} \left[\beta_{\hat{i}}^{(1,r)} + \boldsymbol{\beta}_{\hat{\ }}^{(2,r)} \cdot m_{\hat{i}} \left(\boldsymbol{c}_{\hat{i}} - \boldsymbol{u}_{\hat{\ }}^{(0)}\right) + \beta_{\hat{\ }}^{(3,r)} \frac{1}{2} m_{\hat{i}} \left(\boldsymbol{c}_{\hat{i}} - \boldsymbol{u}_{\hat{\ }}^{(0)}\right)^2\right] \end{aligned} \tag{53}$$

в (25)-(27), с учетом (17), (28)-(30) и (52) получим систему $\mathrm{Card}\left(\hat{N}\right)+4$ алгебраических уравнений [уравнений связи асимптотических разложений (9) и (22)-(24)]:

$$n_{\hat{i}}^{(0)} \beta_{\hat{i}}^{(1,r)} + \frac{3}{2} n_{\hat{i}}^{(0)} k T_{\hat{\ }}^{(0)} \beta_{\hat{\ }}^{(3,r)} = n_{\hat{i}}^{(r)} \qquad \left(\hat{i}\in\hat{N}\right), \tag{54}$$

$$\boldsymbol{u}_{\hat{\ }}^{(0)} \sum_{\hat{i}\in\hat{N}} m_{\hat{i}} n_{\hat{i}}^{(0)} \beta_{\hat{i}}^{(1,r)} + \hat{\rho}^{(0)} k T_{\hat{\ }}^{(0)} \boldsymbol{\beta}_{\hat{\ }}^{(2,r)} + \frac{3}{2} \hat{\rho}^{(0)} k T_{\hat{\ }}^{(0)} \boldsymbol{u}_{\hat{\ }}^{(0)} \beta_{\hat{\ }}^{(3,r)} = \sum_{s=0}^{r} \hat{\rho}^{(r-s)} \boldsymbol{u}_{\hat{\ }}^{(s)}, \tag{55}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \sum_{\hat{i}\in\hat{N}} n_{\hat{i}}^{(0)} \left[3kT_{\hat{\ }}^{(0)} + m_{\hat{i}} \left(u_{\hat{\ }}^{(0)}\right)^2\right] \beta_{\hat{i}}^{(1,r)} + \\ &\quad + \hat{\rho}^{(0)} k T_{\hat{\ }}^{(0)} \boldsymbol{u}_{\hat{\ }}^{(0)} \cdot \boldsymbol{\beta}_{\hat{\ }}^{(2,r)} + \\ &\quad + \frac{3}{4} k T_{\hat{\ }}^{(0)} \left[5\hat{n}^{(0)} k T_{\hat{\ }}^{(0)} + \hat{\rho}^{(0)} \left(u_{\hat{\ }}^{(0)}\right)^2\right] \beta_{\hat{\ }}^{(3,r)} = \\ &= \frac{3}{2} k \sum_{s=0}^{r} \hat{n}^{(r-s)} T_{\hat{\ }}^{(s)} + \frac{1}{2} \sum_{s=0}^{r} \sum_{q=0}^{s} \hat{\rho}^{(r-s)} \boldsymbol{u}_{\hat{\ }}^{(s-q)} \cdot \boldsymbol{u}_{\hat{\ }}^{(q)}, \end{aligned} \tag{56}$$

из которой находим выражения функций $\beta_{\hat{i}}^{(1,r)}(\boldsymbol{r},t)$, $\boldsymbol{\beta}_{\hat{\ }}^{(2,r)}(\boldsymbol{r},t)$ и $\beta_{\hat{\ }}^{(3,r)}(\boldsymbol{r},t)$ через (переменные) коэффициенты асимптотических разложений плотности числа частиц $\hat{i}$-й компоненты, средней массовой скорости и температуры внутренних компонент смеси

$$
\begin{aligned}
\beta_{\hat{i}}^{(1,r)} &= \frac{n_{\hat{i}}^{(r)}}{n_{\hat{i}}^{(0)}} - \frac{3}{2}\,\frac{1}{\hat{n}^{(0)}T_{\hat{}}^{(0)}} \left[\sum_{s=0}^{r}\left(\hat{n}^{(r-s)}T_{\hat{}}^{(s)}\right) - \hat{n}^{(r)}T_{\hat{}}^{(0)}\right] - \\
&-\frac{1}{2}\,\frac{1}{\hat{n}^{(0)}kT_{\hat{}}^{(0)}} \left[\sum_{s=0}^{r}\sum_{q=0}^{s}\hat{\rho}^{(r-s)}\boldsymbol{u}_{\hat{}}^{(s-q)}\cdot\boldsymbol{u}_{\hat{}}^{(q)} - \hat{\rho}^{(r)}\left(u_{\hat{}}^{(0)}\right)^2\right] + \\
&+\frac{1}{\hat{n}^{(0)}kT_{\hat{}}^{(0)}}\;\boldsymbol{u}_{\hat{}}^{(0)}\cdot\left[\sum_{s=0}^{r}\left(\hat{\rho}^{(r-s)}\boldsymbol{u}_{\hat{}}^{(s)}\right) - \hat{\rho}^{(r)}\boldsymbol{u}_{\hat{}}^{(0)}\right],
\end{aligned}
\tag{57}
$$

$$
\boldsymbol{\beta}_{\hat{}}^{(2,r)} = \frac{1}{\hat{\rho}^{(0)}kT_{\hat{}}^{(0)}}\left[\sum_{s=0}^{r}\left(\hat{\rho}^{(r-s)}\boldsymbol{u}_{\hat{}}^{(s)}\right) - \hat{\rho}^{(r)}\boldsymbol{u}_{\hat{}}^{(0)}\right],
\tag{58}
$$

$$
\begin{aligned}
\beta_{\hat{}}^{(3,r)} &= \frac{k}{\hat{n}^{(0)}\left(kT_{\hat{}}^{(0)}\right)^2}\left[\sum_{s=0}^{r}\left(\hat{n}^{(r-s)}T_{\hat{}}^{(s)}\right) - \hat{n}^{(r)}T_{\hat{}}^{(0)}\right] + \\
&+\frac{1}{3}\,\frac{1}{\hat{n}^{(0)}\left(kT_{\hat{}}^{(0)}\right)^2}\left[\sum_{s=0}^{r}\sum_{q=0}^{s}\hat{\rho}^{(r-s)}\boldsymbol{u}_{\hat{}}^{(s-q)}\cdot\boldsymbol{u}_{\hat{}}^{(q)} - \hat{\rho}^{(r)}\left(u_{\hat{}}^{(0)}\right)^2\right] - \\
&-\frac{2}{3}\,\frac{1}{\hat{n}^{(0)}\left(kT_{\hat{}}^{(0)}\right)^2}\;\boldsymbol{u}_{\hat{}}^{(0)}\cdot\left[\sum_{s=0}^{r}\left(\hat{\rho}^{(r-s)}\boldsymbol{u}_{\hat{}}^{(s)}\right) - \hat{\rho}^{(r)}\boldsymbol{u}_{\hat{}}^{(0)}\right].
\end{aligned}
\tag{59}
$$

Выполнение равенств (51) тогда можно рассматривать как дифференциальные уравнения, уравнения газовой динамики r-го порядка, для нахождения $n_{\hat{i}}^{(r-1)}$, $\boldsymbol{u}_{\hat{i}}^{(r-1)}$, $T_{\hat{i}}^{(r-1)}$ $(r = 1, 2\ldots)$.

Частное решение системы неоднородных интегральных уравнений (50) $\{\mathit{\Phi}_{\hat{i}}^{(r)}\}_{\hat{i}\in\hat{N}}$, удовлетворяющее (52), можно построить, например, с помощью разложения $\mathit{\Phi}_{\hat{i}}^{(r)}\left(\boldsymbol{c}_{\hat{i}}\right)$ в ряд по полиномам Сонина с зависящими от $\boldsymbol{r}$ и t коэффициентами разложения (см. [2] или [4]); такое построение доказывает существование решений системы интегральных уравнений (44).

Функции распределения скоростей частиц внешних компонент смеси $f_{\breve{i}}^{(r)}$ для $r \geq 1$ находятся из системы интегральных уравнений (15):

$$
\begin{aligned}
f_{\breve{i}}^{(r)} &= \Xi_{\breve{i}}^{(r)} + \xi_{\breve{i}}^{(r)} = \\
&= f_{\breve{i}}^{(0)}\mathit{\Phi}_{\breve{i}}^{(r)} + f_{\breve{i}}^{(0)}\left[\beta_{\breve{i}}^{(1,r)} + \boldsymbol{\beta}_{\breve{i}}^{(2,r)}\cdot m_{\breve{i}}\left(\boldsymbol{c}_{\breve{i}} - \boldsymbol{u}_{\breve{i}}^{(0)}\right) + \beta_{\breve{i}}^{(3,r)}\frac{1}{2}\,m_{\breve{i}}\left(\boldsymbol{c}_{\breve{i}} - \boldsymbol{u}_{\breve{i}}^{(0)}\right)^2\right],
\end{aligned}
\tag{60}
$$

где

$$
\begin{aligned}
\beta_{\breve{i}}^{(1,r)} &= \frac{n_{\breve{i}}^{(r)}}{n_{\breve{i}}^{(0)}} - \frac{3}{2}\,\frac{1}{n_{\breve{i}}^{(0)}T_{\breve{i}}^{(0)}}\left[\sum_{s=0}^{r}\left(n_{\breve{i}}^{(r-s)}T_{\breve{i}}^{(s)}\right) - n_{\breve{i}}^{(r)}T_{\breve{i}}^{(0)}\right] - \\
&-\frac{1}{2}\,\frac{1}{n_{\breve{i}}^{(0)}kT_{\breve{i}}^{(0)}}\left[\sum_{s=0}^{r}\sum_{q=0}^{s}\rho_{\breve{i}}^{(r-s)}\boldsymbol{u}_{\breve{i}}^{(s-q)}\cdot\boldsymbol{u}_{\breve{i}}^{(q)} - \rho_{\breve{i}}^{(r)}\left(u_{\breve{i}}^{(0)}\right)^2\right] + \\
&+\frac{1}{n_{\breve{i}}^{(0)}kT_{\breve{i}}^{(0)}}\;\boldsymbol{u}_{\breve{i}}^{(0)}\cdot\left[\sum_{s=0}^{r}\left(\rho_{\breve{i}}^{(r-s)}\boldsymbol{u}_{\breve{i}}^{(s)}\right) - \rho_{\breve{i}}^{(r)}\boldsymbol{u}_{\breve{i}}^{(0)}\right],
\end{aligned}
\tag{61}
$$

$$\boldsymbol{\beta}_{\check{i}}^{(2,r)} = \frac{1}{\rho_{\check{i}}^{(0)} k T_{\check{i}}^{(0)}} \left[\sum_{s=0}^{r} \left(\rho_{\check{i}}^{(r-s)} \boldsymbol{u}_{\check{i}}^{(s)} \right) - \rho_{\check{i}}^{(r)} \boldsymbol{u}_{\check{i}}^{(0)} \right], \tag{62}$$

$$\begin{aligned} \beta_{\check{i}}^{(3,r)} = {} & \frac{k}{n_{\check{i}}^{(0)} \left(k T_{\check{i}}^{(0)} \right)^2} \left[\sum_{s=0}^{r} \left(n_{\check{i}}^{(r-s)} T_{\check{i}}^{(s)} \right) - n_{\check{i}}^{(r)} T_{\check{i}}^{(0)} \right] + \\ & + \frac{1}{3} \frac{1}{n_{\check{i}}^{(0)} \left(k T_{\check{i}}^{(0)} \right)^2} \left[\sum_{s=0}^{r} \sum_{q=0}^{s} \rho_{\check{i}}^{(r-s)} \boldsymbol{u}_{\check{i}}^{(s-q)} \cdot \boldsymbol{u}_{\check{i}}^{(q)} - \rho_{\check{i}}^{(r)} \left(u_{\check{i}}^{(0)} \right)^2 \right] - \\ & - \frac{2}{3} \frac{1}{n_{\check{i}}^{(0)} \left(k T_{\check{i}}^{(0)} \right)^2} \, \boldsymbol{u}_{\check{i}}^{(0)} \cdot \left[\sum_{s=0}^{r} \left(\rho_{\check{i}}^{(r-s)} \boldsymbol{u}_{\check{i}}^{(s)} \right) - \rho_{\check{i}}^{(r)} \boldsymbol{u}_{\check{i}}^{(0)} \right]. \end{aligned} \tag{63}$$

Выполнение аналогичных (51) равенств

$$\int \psi_{\check{i}}^{(l)} F_{\check{i}}^{(r)} d\boldsymbol{c}_{\check{i}} = 0 \qquad \left(\check{i} \in \check{N},\ l = 1, 2, 3 \right), \tag{64}$$

можно рассматривать как дифференциальные уравнения, уравнения газовой динамики r-го порядка, для нахождения $n_{\check{i}}^{(r-1)}$, $\boldsymbol{u}_{\check{i}}^{(r-1)}$, $T_{\check{i}}^{(r-1)}$ $(r = 1, 2 \ldots)$.

3. Система уравнений первого порядка многокомпонентной неравновесной газовой динамики

Рассмотрим подробнее систему газодинамических уравнений первого порядка малости (51), (64) $(r = 1)$, полученную выше, как необходимое (и достаточное) условие существования асимптотического решения системы интегральных уравнений первого порядка.

Для упрощения преобразований в соответствии с выражениями для функций распределения скоростей частиц нулевого порядка малости (17), (32) вместо функций $\psi_{\hat{i}}^{(l)}$, $\psi_{\check{i}}^{(l)}$ в (51) и (64) $(r = 1)$ можно использовать соответственно $\Psi_{\hat{i}}^{(l)}$, $\Psi_{\check{i}}^{(l)}$:

$$\Psi_i^{(1)} = m_i, \tag{65a}$$

$$\boldsymbol{\Psi}_i^{(2)} = m_i \boldsymbol{C}_i, \tag{65b}$$

$$\Psi_i^{(3)} = \frac{1}{2} m_i C_i^2, \tag{65c}$$

для внутренних компонент $\boldsymbol{C}_{\hat{i}} = \boldsymbol{c}_{\hat{i}} - \boldsymbol{u}_{\hat{}}^{(0)}$, для внешних компонент $\boldsymbol{C}_{\check{i}} = \boldsymbol{c}_{\check{i}} - \boldsymbol{u}_{\check{i}}^{(0)}$.

При преобразовании дифференциальных частей уравнений (51) и (64) используем равенства:

$$\begin{aligned} \int \Psi_i^{(l)} \frac{\partial f_i^{(0)}}{\partial t} d\boldsymbol{c}_i & = \frac{\partial}{\partial t} \int \Psi_i^{(l)} f_i^{(0)} d\boldsymbol{c}_i - \int \frac{\partial \Psi_i^{(l)}}{\partial t} f_i^{(0)} d\boldsymbol{c}_i = \\ & = \frac{\partial \left(n_i \overline{\Psi_i^{(l)}}^{(0)} \right)}{\partial t} - n_i \overline{\frac{\partial \Psi_i^{(l)}}{\partial t}}^{(0)}, \end{aligned} \tag{66}$$

$$\begin{aligned} \int \Psi_i^{(l)} \boldsymbol{c}_i \cdot \frac{\partial f_i^{(0)}}{\partial \boldsymbol{r}} d\boldsymbol{c}_i & = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot \int \Psi_i^{(l)} \boldsymbol{c}_i f_i^{(0)} d\boldsymbol{c}_i - \int \boldsymbol{c}_i \cdot \frac{\partial \Psi_i^{(l)}}{\partial \boldsymbol{r}} f_i^{(0)} d\boldsymbol{c}_i = \\ & = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot n_i \overline{\Psi_i^{(l)} \boldsymbol{c}_i}^{(0)} - n_i \overline{\boldsymbol{c}_i \cdot \frac{\partial \Psi_i^{(l)}}{\partial \boldsymbol{r}}}^{(0)}, \end{aligned} \tag{67}$$

$$\begin{aligned}\int \Psi_i^{(l)} \frac{\boldsymbol{X}_i}{m_i} \cdot \frac{\partial f_i^{(0)}}{\partial \boldsymbol{c}_i}\, d\boldsymbol{c}_i &= -\int \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{c}_i} \cdot \Psi_i^{(l)} \frac{\boldsymbol{X}_i}{m_i} \right) f_i^{(0)}\, d\boldsymbol{c}_i = \\ &= -n_i\, \overline{\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{c}_i} \cdot \Psi_i^{(l)} \frac{\boldsymbol{X}_i}{m_i}}^{(0)} . \end{aligned} \tag{68}$$

В (66)-(68) чертой сверху с индексом $^{(0)}$ обозначается среднее значение величины:

$$\overline{V}^{(0)} = \frac{1}{n_i} \int V f_i^{(0)}\, d\boldsymbol{c}_i; \tag{69}$$

$\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{c}_i$ рассматриваются как независимые переменные; в (68) при усреднении предполагается, что внешняя сила $\boldsymbol{X}_i$, действующая на частицу i-го сорта, не зависит от скорости частицы, предполагается также, что интегралы, зависящие от внешних сил $\boldsymbol{X}_i$, сходятся, и произведение $\Psi_i^{(l)} \boldsymbol{X}_i f_i^{(0)}$ стремится к нулю, когда $\boldsymbol{c}_i$ стремится к бесконечности.

После несложных преобразований из (51) и (64) ($r = 1$) получаем следующую *систему уравнений многокомпонентной неравновесной газовой динамики первого порядка малости*:

$$\frac{\partial n_{\hat{i}}^{(0)}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot n_{\hat{i}}^{(0)} \boldsymbol{u}_{\hat{}}^{(0)} \qquad \left(\hat{i} \in \hat{N}\right), \tag{70}$$

$$\hat{\rho}^{(0)} \frac{\partial \boldsymbol{u}_{\hat{}}^{(0)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot \hat{\mathrm{p}}^{(0)} + \sum_{\hat{i} \in \hat{N},\, \check{j} \in \check{N}} \boldsymbol{J}_{p,\,\hat{i}\check{j}}^{(0)} = \sum_{\hat{i} \in \hat{N}} n_{\hat{i}}^{(0)} \boldsymbol{X}_{\hat{i}} - \hat{\rho}^{(0)} \boldsymbol{u}_{\hat{}}^{(0)} \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\, \boldsymbol{u}_{\hat{}}^{(0)}, \tag{71}$$

$$\frac{\partial \hat{E}^{(0)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot \hat{\boldsymbol{q}}^{(0)} + \hat{\mathrm{p}}^{(0)} : \frac{\partial \boldsymbol{u}_{\hat{}}^{(0)}}{\partial \boldsymbol{r}} + \sum_{\hat{i} \in \hat{N},\, \check{j} \in \check{N}} J_{E,\,\hat{i}\check{j}}^{(0)} = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot \hat{E}^{(0)} \boldsymbol{u}_{\hat{}}^{(0)}, \tag{72}$$

$$\frac{\partial n_{\check{i}}^{(0)}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot n_{\check{i}}^{(0)} \boldsymbol{u}_{\check{i}}^{(0)} \qquad \left(\check{i} \in \check{N}\right), \tag{73}$$

$$n_{\check{i}}^{(0)} m_{\check{i}} \frac{\partial \boldsymbol{u}_{\check{i}}^{(0)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot \mathrm{p}_{\check{i}}^{(0)} + \sum_{j \neq \check{i}} \boldsymbol{J}_{p,\,\check{i}j}^{(0)} = n_{\check{i}}^{(0)} \boldsymbol{X}_{\check{i}} - n_{\check{i}}^{(0)} m_{\check{i}} \boldsymbol{u}_{\check{i}}^{(0)} \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\, \boldsymbol{u}_{\check{i}}^{(0)} \qquad \left(\check{i} \in \check{N}\right), \tag{74}$$

$$\frac{\partial E_{\check{i}}^{(0)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{q}_{\check{i}}^{(0)} + \mathrm{p}_{\check{i}}^{(0)} : \frac{\partial \boldsymbol{u}_{\check{i}}^{(0)}}{\partial \boldsymbol{r}} + \sum_{j \neq \check{i}} J_{E,\,\check{i}j}^{(0)} = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot E_{\check{i}}^{(0)} \boldsymbol{u}_{\check{i}}^{(0)} \qquad \left(\check{i} \in \check{N}\right). \tag{75}$$

В соответствии с общими определениями тензора давления i-й компоненты газовой смеси

$$\mathrm{p}_i \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int m_i (\boldsymbol{c}_i - \boldsymbol{u}_i)\, (\boldsymbol{c}_i - \boldsymbol{u}_i) f_i\, d\boldsymbol{c}_i \tag{76}$$

и вектора потока тепла i-й компоненты

$$\boldsymbol{q}_i \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int \frac{1}{2}\, m_i (\boldsymbol{c}_i - \boldsymbol{u}_i)^2\, (\boldsymbol{c}_i - \boldsymbol{u}_i) f_i\, d\boldsymbol{c}_i \tag{77}$$

(ср. с [2], гл. 2, §§ 3, 4) в (70)-(75)

$$\hat{\mathrm{p}}^{(0)} = \sum_{\hat{i}\in\hat{N}} n_{\hat{i}}^{(0)} m_{\hat{i}} \overline{\left(\boldsymbol{c}_{\hat{i}} - \boldsymbol{u}_{\hat{}}^{(0)}\right)\left(\boldsymbol{c}_{\hat{i}} - \boldsymbol{u}_{\hat{}}^{(0)}\right)}^{(0)} = \hat{n}^{(0)} k T_{\hat{}}^{(0)} \mathrm{U} = \hat{p}^{(0)} \mathrm{U} \tag{78}$$

— тензор давления внутренних компонент нулевого порядка, $\hat{p}^{(0)}$ — гидростатическое давление внутренних компонент нулевого порядка, U — единичный тензор, *двойное произведение* двух тензоров w и w′ ранга 2 ([2], гл. 1, § 3) есть скаляр $\mathrm{w} : \mathrm{w}' = \sum_\alpha \sum_\beta w_{\alpha\beta} w'_{\beta\alpha} = \mathrm{w}' : \mathrm{w}$,

$$\hat{\boldsymbol{q}}^{(0)} = \frac{1}{2} \sum_{\hat{i}\in\hat{N}} n_{\hat{i}}^{(0)} m_{\hat{i}} \overline{\left(\boldsymbol{c}_{\hat{i}} - \boldsymbol{u}_{\hat{}}^{(0)}\right)^2 \left(\boldsymbol{c}_{\hat{i}} - \boldsymbol{u}_{\hat{}}^{(0)}\right)}^{(0)} = 0 \tag{79}$$

— вектор потока тепла внутренних компонент нулевого порядка,

$$\hat{E}^{(0)} = \frac{1}{2} \sum_{\hat{i}\in\hat{N}} n_{\hat{i}}^{(0)} m_{\hat{i}} \overline{\left(\boldsymbol{c}_{\hat{i}} - \boldsymbol{u}_{\hat{}}^{(0)}\right)^2}^{(0)} = \frac{3}{2} \hat{n}^{(0)} k T_{\hat{}}^{(0)} \tag{80}$$

— внутренняя энергия частиц внутренних компонент в единице объема нулевого порядка, равная в данном случае энергии их поступательного хаотического движения, однако уравнения переноса энергии, записанные в виде (72) и (75), можно использовать и в более общих случаях (ср. с [4], гл. 7, § 6), в (78)-(80) усреднение (69) производится с функцией Максвелла $f_{\hat{i}}^{(0)}$ из (17);

$$\mathrm{p}_{\check{i}}^{(0)} = n_{\check{i}}^{(0)} m_{\check{i}} \overline{\left(\boldsymbol{c}_{\check{i}} - \boldsymbol{u}_{\check{i}}^{(0)}\right)\left(\boldsymbol{c}_{\check{i}} - \boldsymbol{u}_{\check{i}}^{(0)}\right)}^{(0)} = n_{\check{i}}^{(0)} k T_{\check{i}}^{(0)} \mathrm{U} = p_{\check{i}}^{(0)} \mathrm{U} \tag{81}$$

— тензор давления $\check{i}$-й компоненты нулевого порядка, $p_{\check{i}}^{(0)}$ — гидростатическое давление $\check{i}$-й компоненты нулевого порядка,

$$\boldsymbol{q}_{\check{i}}^{(0)} = \frac{1}{2} n_{\check{i}}^{(0)} m_{\check{i}} \overline{\left(\boldsymbol{c}_{\check{i}} - \boldsymbol{u}_{\check{i}}^{(0)}\right)^2 \left(\boldsymbol{c}_{\check{i}} - \boldsymbol{u}_{\check{i}}^{(0)}\right)}^{(0)} = 0 \tag{82}$$

— вектор потока тепла $\check{i}$-й компоненты нулевого порядка,

$$E_{\check{i}}^{(0)} = \frac{1}{2} n_{\check{i}}^{(0)} m_{\check{i}} \overline{\left(\boldsymbol{c}_{\check{i}} - \boldsymbol{u}_{\check{i}}^{(0)}\right)^2}^{(0)} = \frac{3}{2} n_{\check{i}}^{(0)} k T_{\check{i}}^{(0)} \tag{83}$$

— внутренняя энергия частиц $\check{i}$-й компоненты в единице объема нулевого порядка, в (81)-(83) усреднение (69) делается с функцией Максвелла $f_{\check{i}}^{(0)}$ из (32).

Аналитические выражения для интегралов $\boldsymbol{J}_{p,ij}^{(0)}$, $J_{E,ij}^{(0)}$ из (71), (72) и (74), (75) приведены ниже — см. (110), (114) и (118), (119).

Уравнения многокомпонентной неравновесной газовой динамики (70)-(75) предлагается для описания турбулентных течений газов (подробнее см. в нашей статье `arXiv:1303.6275`).

A. Вычисление интегралов столкновений

В этом разделе речь пойдет о вычислении многомерных интегралов вида

$$\iiiint \Psi_i^{(l)} \left(f_i^{(0)\prime} f_j^{(0)\prime} - f_i^{(0)} f_j^{(0)}\right) g_{ij}\, b\, db\, d\varepsilon\, d\boldsymbol{c}_i\, d\boldsymbol{c}_j. \tag{84}$$

В (84) $\Psi_i^{(1)} = m_i$, $\boldsymbol{\Psi}_i^{(2)} = m_i \boldsymbol{C}_i$, $\Psi_i^{(3)} = \frac{1}{2}\, m_i C_i^2$, $\boldsymbol{C}_i = \boldsymbol{c}_i - \boldsymbol{u}_i$;

$$f_i^{(0)} = n_i \left(\frac{m_i}{2\pi k T_i}\right)^{3/2} e^{-\frac{m_i(\boldsymbol{c}_i - \boldsymbol{u}_i)^2}{2kT_i}} \tag{85}$$

— функция Максвелла распределения скоростей частиц i-й компоненты, штрих у функции распределения означает, что рассматривается распределение скоростей частиц после столкновения — $\boldsymbol{c}_i'$; чтобы несколько уменьшить громоздкость обозначений, опущен верхний индекс «$^{(0)}$» у n_i, $\boldsymbol{u}_i$, T_i. По поводу других обозначений — см. выше.

В кинетической теории газов часто используется равенство:

$$\iiiint \phi_i f_i' f_j'\, g_{ij}\, b\, db\, d\varepsilon\, d\boldsymbol{c}_i\, d\boldsymbol{c}_j = \iiiint \phi_i' f_i f_j\, g_{ij}\, b\, db\, d\varepsilon\, d\boldsymbol{c}_i\, d\boldsymbol{c}_j \tag{86}$$

— в (86), как и в (2), штрихом обозначаются скорости и функции скоростей после столкновения. Всякому процессу столкновения двух молекул газа, переводящему скорости этих молекул до столкновения $\boldsymbol{c}_i$, $\boldsymbol{c}_j$ в $\boldsymbol{c}_i'$, $\boldsymbol{c}_j'$ взаимно однозначно соответствует процесс столкновения, переводящий $\boldsymbol{c}_i', \boldsymbol{c}_j' \to -\boldsymbol{c}_i', -\boldsymbol{c}_j' \to -\boldsymbol{c}_i, -\boldsymbol{c}_j \to \boldsymbol{c}_i, \boldsymbol{c}_j$, причем для рассматриваемых здесь центральных взаимодействий из закона сохранения энергии следует, что модули относительных скоростей молекул до и после столкновения равны

$$g_{ij} = g_{ij}', \tag{87}$$

а из закона сохранения момента импульса следует, что равны также и прицельные расстояния

$$b = b' \tag{88}$$

для этих процессов столкновений; поэтому равенство (86) непосредственно следует из равенства единице якобиана преобразования нештрихованных скоростей в штрихованные, оно не зависит от вида функций ϕ, f, необходимо только, чтобы интегралы были определены и сходились (ср. с [2], гл. 3, § 5, п. 3).

В соответствии с (86) интеграл (84) можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\iiiint \Psi_i^{(l)} \left(f_i^{(0)\prime} f_j^{(0)\prime} - f_i^{(0)} f_j^{(0)}\right) g_{ij}\, b\, db\, d\varepsilon\, d\boldsymbol{c}_i\, d\boldsymbol{c}_j = \\
&= \iiiint \Psi_i^{(l)} f_i^{(0)\prime} f_j^{(0)\prime} g_{ij}'\, b'\, db'\, d\varepsilon'\, d\boldsymbol{c}_i'\, d\boldsymbol{c}_j' - \\
&\quad - \iiiint \Psi_i^{(l)} f_i^{(0)} f_j^{(0)} g_{ij}\, b\, db\, d\varepsilon\, d\boldsymbol{c}_i\, d\boldsymbol{c}_j = \\
&= \iiiint \left(\Psi_i^{(l)\prime} - \Psi_i^{(l)}\right) f_i^{(0)} f_j^{(0)} g_{ij}\, b\, db\, d\varepsilon\, d\boldsymbol{c}_i\, d\boldsymbol{c}_j.
\end{aligned} \tag{89}$$

Поскольку масса частицы в столкновении сохраняется, для $\Psi_i^{(1)} = m_i$ интеграл (89) обращается в нуль. В двух других случаях, вообще говоря, это не так.

В дальнейшем несколько раз используются утверждения следующих двух простых предложений. Предложение 2 взято из [5], гл. II, § 1, п. 5. Свойство линейчатости функций (см. [5], гл. II, § 1, п. 3) в формулировках предложений можно заменить на более известное свойство непрерывности (всякая непрерывная функция на $\boldsymbol{R}$ является линейчатой). В качестве полных нормированных векторных пространств над полем действительных чисел $\boldsymbol{R}$ далее в статье рассматриваются векторные пространства $\boldsymbol{R}$ или $\boldsymbol{R}^3$ над $\boldsymbol{R}$, с обычным модулем действительного числа или трехмерного вектора в качестве нормы.

Предложение 1. *Пусть f — линейчатая функция на $\boldsymbol{R}$ со значениями в $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{R}^3$ — фиксированный ненулевой вектор, $\boldsymbol{n} \in \boldsymbol{R}^3$ — вектор единичной длины. Тогда*

$$\int\limits_{\Omega_{\boldsymbol{n}}} f\left(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{n}\right)\boldsymbol{n}\,d\Omega_{\boldsymbol{n}} = \frac{2\pi\boldsymbol{w}}{w}\int\limits_0^{\pi} f\left(w\cos\left(\theta\right)\right)\cos\left(\theta\right)\sin\left(\theta\right)d\theta. \tag{90}$$

Интеграл в левой части (90) берется по всем направлениям вектора $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{n}$ — скалярное произведение векторов $\boldsymbol{w}$ и $\boldsymbol{n}$.

Замечание. *Если $\boldsymbol{w}$ — нулевой вектор, то правую часть (90) можно полагать равной 0.*

Доказательство. Выберем систему сферических координат так, чтобы направление полярной оси совпадало с направлением вектора $\boldsymbol{w}$. Разложим вектор $\boldsymbol{n}$ на две составляющие: параллельную $\boldsymbol{n}_{\parallel}$ и перпендикулярную $\boldsymbol{n}_{\perp}$ вектору $\boldsymbol{w}$, —

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}_{\parallel} + \boldsymbol{n}_{\perp} = \frac{\left(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{n}\right)\boldsymbol{w}}{w^2} + \boldsymbol{n}_{\perp}. \tag{91}$$

Подставляя выражение (91) для вектора $\boldsymbol{n}$ в левую часть (90) и интегрируя по азимутальному углу, получаем требуемое равенство, так как при интегрировании по азимутальному углу слагаемое, содержащее $\boldsymbol{n}_{\perp}$, обращается в нуль. □

Предложение 2. *Пусть E и F — два полных нормированных пространства над телом $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{u}$ — непрерывное линейное отображение E в F. Если $\boldsymbol{f}$ — линейчатая функция на интервале $I \subset \boldsymbol{R}$ со значениями в E, то $\boldsymbol{u}\circ\boldsymbol{f}$ есть линейчатая функция на I со значениями в F и*

$$\int\limits_a^b \boldsymbol{u}\left(\boldsymbol{f}\left(t\right)\right)dt = \boldsymbol{u}\left(\int\limits_a^b \boldsymbol{f}\left(t\right)dt\right). \tag{92}$$

Доказательство. Равенство (92) непосредственно следует из выражения для производной сложной функции $\boldsymbol{u}\circ\boldsymbol{f}$; по поводу деталей доказательства см. [5], гл. II, § 1, п. 5. □

Основные трудности вычисления интеграла (89) связаны с тем, что параметры функций Максвелла для i-й и j-й компонент не равны:

$$\boldsymbol{u}_i \neq \boldsymbol{u}_j, \qquad T_i \neq T_j. \tag{93}$$

В результате не просто избавиться от скалярных произведений векторов в показателе экспоненты (желательно иметь максимально простое выражение для показателя экспоненты).

Так как угол рассеяния зависит от модуля относительной скорости сталкивающихся частиц (см., например, [2], гл. 3, § 4, п. 2 или [4], гл. 1, (5.26)), естественно в (89) перейти к новым переменным — скорости центра масс сталкивающихся частиц $\boldsymbol{G}_{ij}$ и относительной скорости сталкивающихся частиц $\boldsymbol{g}_{ij}$, связанными со скоростями частиц $\boldsymbol{c}_i$ и $\boldsymbol{c}_j$ соотношениями:

$$\boldsymbol{c}_i = \boldsymbol{G}_{ij} + \frac{m_j}{m_i+m_j}\boldsymbol{g}_{ij}, \tag{94}$$

$$\boldsymbol{c}_j = \boldsymbol{G}_{ij} - \frac{m_i}{m_i+m_j}\boldsymbol{g}_{ij}, \tag{95}$$

— ср. с [2], гл. 9, § 2. Для дальнейшего упрощения показателя экспоненты можно заменить вектор $\boldsymbol{G}_{ij}$ на вектор $\widetilde{\boldsymbol{G}}_{ij}$, получающийся из $\boldsymbol{G}_{ij}$ в результате произвольного аффинного преобразования, являющегося композицией сдвига, гомотетии (умножения на скаляр) и вращения. Произвольность вращения сводится к свободе выбора направления полярной оси при переходе к сферической системе координат. Аналогично вектор $\boldsymbol{g}_{ij}$ можно заменить на вектор $\tilde{\boldsymbol{g}}_{ij}$, получающийся из $\boldsymbol{g}_{ij}$ в результате композиции произвольной гомотетии и произвольного вращения. Сдвиг начала отсчета вектора $\boldsymbol{g}_{ij}$ привел бы к параметрической зависимости конечного интеграла от *векторов* $\boldsymbol{u}_i$ и $\boldsymbol{u}_j$ (ср. с [6], гл. 3), что нежелательно, так как предполагается интеграл (89) свести к интегралу типа интеграла Чепмена-Каулинга $\Omega_{ij}^{(l,s)}$ (см. [2], гл. 9, § 3, (3.29) и [4], гл. 7, (4.34)), зависящего только от модуля относительной скорости сталкивающихся частиц g_{ij}.

С учетом сказанного сделаем следующую замену переменных $\boldsymbol{G}_{ij}$ и $\boldsymbol{g}_{ij}$:

$$\boldsymbol{g}_{ij} = z_1 \, \tilde{\boldsymbol{g}}_{ij}, \tag{96}$$

$$\boldsymbol{G}_{ij} = z_2 \, \widetilde{\boldsymbol{G}}_{ij} + z_3 \, \tilde{\boldsymbol{g}}_{ij} + \frac{\boldsymbol{u}_i + \boldsymbol{u}_j}{2}. \tag{97}$$

Скалярные множители z_1, z_2, и z_3 в (96), (97) выбираем из условия, чтобы коэффициенты при $\tilde{\boldsymbol{g}}_{ij}^2$ и $\widetilde{\boldsymbol{G}}_{ij}^2$ в показателе экспоненты были равны 1, а коэффициент при скалярном произведении $\tilde{\boldsymbol{g}}_{ij} \cdot \widetilde{\boldsymbol{G}}_{ij}$ был равен 0 (ср. с методом разделения переменных):

$$z_1 = \sqrt{\frac{2\,(m_i T_j + m_j T_i)}{m_i m_j}}, \tag{98}$$

$$z_2 = \sqrt{\frac{2 T_i T_j}{m_i T_j + m_j T_i}}, \tag{99}$$

$$z_3 = \frac{2\,(T_i - T_j)}{m_i + m_j} \sqrt{\frac{m_i m_j}{2\,(m_i T_j + m_j T_i)}}. \tag{100}$$

Аналогичные замены переменных могут быть использованы в более сложных ситуациях, например, рассматриваемых в [6], гл. 3.

В новых переменных показатель экспоненты можно записать в виде:

$$-\left\{ \tilde{g}_{ij}^2 + \widetilde{G}_{ij}^2 + a_0 \, w^2 + a_1 \tilde{\boldsymbol{g}}_{ij} \cdot \boldsymbol{w} + a_2 \widetilde{\boldsymbol{G}}_{ij} \cdot \boldsymbol{w} \right\}, \tag{101}$$

где

$$\boldsymbol{w} = \frac{\boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{u}_j}{2}, \tag{102}$$

$$a_0 = \frac{m_i}{2T_i} + \frac{m_j}{2T_j}, \tag{103}$$

$$a_1 = -2 \sqrt{\frac{2 m_i m_j}{m_i T_j + m_j T_i}}, \tag{104}$$

$$a_2 = \left(\frac{m_j}{T_j} - \frac{m_i}{T_i} \right) \sqrt{\frac{2 T_i T_j}{m_i T_j + m_j T_i}}. \tag{105}$$

Нетрудно заметить, что при помощи только указанных выше преобразований переменных (без использования сдвига начала отсчета вектора $\boldsymbol{g}_{ij}$) не удастся избавиться от постоянного слагаемого в показателе экспоненты (101) и, следовательно, от постоянного экспоненциального множителя, который войдет далее во все выражения, содержащие интегралы вида (84), (89). У Струминского в [3], (8) такого рода множители отсутствуют.

Найдем якобиан преобразования переменных $(\boldsymbol{c}_i, \boldsymbol{c}_j) \longrightarrow \left(\tilde{\boldsymbol{g}}_{ij}, \widetilde{\boldsymbol{G}}_{ij}\right)$ (см. (96), (97)):

$$\begin{aligned} \frac{\partial\left(\boldsymbol{c}_i, \boldsymbol{c}_j\right)}{\partial\left(\tilde{\boldsymbol{g}}_{ij}, \widetilde{\boldsymbol{G}}_{ij}\right)} &= \frac{\partial\left(\boldsymbol{c}_i, \boldsymbol{c}_j\right)}{\partial\left(\boldsymbol{g}_{ij}, \boldsymbol{G}_{ij}\right)} \frac{\partial\left(\boldsymbol{g}_{ij}, \boldsymbol{G}_{ij}\right)}{\partial\left(\tilde{\boldsymbol{g}}_{ij}, \widetilde{\boldsymbol{G}}_{ij}\right)} = z_1^3\, z_2^3\, \frac{\partial\left(\boldsymbol{c}_i, \boldsymbol{c}_j\right)}{\partial\left(\boldsymbol{g}_{ij}, \boldsymbol{c}_j + \frac{m_i}{m_i+m_j}\,\boldsymbol{g}_{ij}\right)} = \\ &= z_1^3\, z_2^3\, \frac{\partial\left(\boldsymbol{c}_i, \boldsymbol{c}_j\right)}{\partial\left(\boldsymbol{g}_{ij}, \boldsymbol{c}_j\right)} = z_1^3\, z_2^3\, \frac{\partial\left(\boldsymbol{c}_i, \boldsymbol{c}_j\right)}{\partial\left(\boldsymbol{c}_i - \boldsymbol{c}_j, \boldsymbol{c}_j\right)} = z_1^3\, z_2^3. \end{aligned} \tag{106}$$

Рассмотрим теперь случай, когда $\Psi_i^{(l)} = \boldsymbol{\Psi}_i^{(2)} = m_i\left(\boldsymbol{c}_i - \boldsymbol{u}_i\right)$. С учетом (96), (97), (101), (106) и равенства, вытекающего из определения $\mathbf{k}$ выше,

$$m_i\left(\boldsymbol{c}_i' - \boldsymbol{c}_i\right) = \frac{m_i m_j}{m_i + m_j}\left(\boldsymbol{g}_{ij}' - \boldsymbol{g}_{ij}\right) = -2\,\frac{m_i m_j}{m_i + m_j}\left(\boldsymbol{g}_{ij} \cdot \mathbf{k}\right)\mathbf{k} \tag{107}$$

интеграл (89) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} &\iiiint m_i\left(\boldsymbol{c}_i' - \boldsymbol{c}_i\right) f_i^{(0)} f_j^{(0)} g_{ij}\, b\, db\, d\varepsilon\, d\boldsymbol{c}_i\, d\boldsymbol{c}_j = \\ &= -2\,\frac{m_i m_j}{m_i + m_j}\, z_1^5\, z_2^3\, n_i\left(\frac{m_i}{2\pi k T_i}\right)^{3/2} n_j\left(\frac{m_j}{2\pi k T_j}\right)^{3/2} \iiiint\left(\tilde{\boldsymbol{g}}_{ij} \cdot \mathbf{k}\right)\mathbf{k}\, \times \\ &\quad\times \exp\left(-\left\{\tilde{g}_{ij}^2 + \widetilde{G}_{ij}^2 + a_0\, w^2 + a_1 \tilde{\boldsymbol{g}}_{ij} \cdot \boldsymbol{w} + a_2 \widetilde{\boldsymbol{G}}_{ij} \cdot \boldsymbol{w}\right\}\right) \times \\ &\quad\times \tilde{g}_{ij}\, b\, db\, d\varepsilon\, d\widetilde{\boldsymbol{G}}_{ij}\, d\tilde{\boldsymbol{g}}_{ij}. \end{aligned} \tag{108}$$

Интегрируя по ε в (108) (при фиксированных $\tilde{\boldsymbol{g}}_{ij}$ и $\widetilde{\boldsymbol{G}}_{ij}$), вектор $\mathbf{k}$ разлагаем на две составляющие: параллельную и перпендикулярную вектору $\tilde{\boldsymbol{g}}_{ij}$ — ср. с доказательством предложения 1:

$$\int\left(\tilde{\boldsymbol{g}}_{ij} \cdot \mathbf{k}\right)\mathbf{k}\, d\varepsilon = 2\pi \cos^2\left(\frac{\pi - \chi}{2}\right)\tilde{\boldsymbol{g}}_{ij} = \pi\left(1 - \cos\chi\right)\tilde{\boldsymbol{g}}_{ij}. \tag{109}$$

При интегрировании по $\widetilde{\boldsymbol{G}}_{ij}$ и направлениям вектора $\tilde{\boldsymbol{g}}_{ij}$ используем предложение 1. В результате получаем:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{J}_{p,ij}^{(0)} &= -\iiiint m_i \boldsymbol{C}_i\left(f_i^{(0)\prime} f_j^{(0)\prime} - f_i^{(0)} f_j^{(0)}\right) g_{ij}\, b\, db\, d\varepsilon\, d\boldsymbol{c}_i\, d\boldsymbol{c}_j = \\ &= -\iiiint m_i\left(\boldsymbol{c}_i' - \boldsymbol{c}_i\right) f_i^{(0)} f_j^{(0)} g_{ij}\, b\, db\, d\varepsilon\, d\boldsymbol{c}_i\, d\boldsymbol{c}_j = \\ &= -16 n_i n_j\, \frac{m_i T_j + m_j T_i}{(m_i + m_j)}\, \frac{\boldsymbol{w}}{w}\, \frac{\sqrt{\pi}}{\xi^2}\, e^{-\frac{2 m_i m_j w^2}{m_i T_j + m_j T_i}} \times \\ &\quad \times \iint e^{-\tilde{g}_{ij}^2}\left[\tilde{g}_{ij}\xi\, \mathrm{ch}\left(\tilde{g}_{ij}\xi\right) - \mathrm{sh}\left(\tilde{g}_{ij}\xi\right)\right] \tilde{g}_{ij}^2\left(1 - \cos\chi\right) b\, db\, d\tilde{g}_{ij}. \end{aligned} \tag{110}$$

В (110)

$$\xi = a_1 w, \tag{111}$$

коэффициент a_1 определен формулой (104). Как нетрудно убедиться, особенность при $\xi = 0$, что возможно, когда $w = 0$, в правой части, в действительности отсутствует. Выражение (110) существенно отличается от выражения Струминского [3], (8).

Случай, когда $\Psi_i^{(l)} = \Psi_i^{(3)} = \frac{1}{2}\, m_i \left(\boldsymbol{c}_i - \boldsymbol{u}_i\right)^2$ отличается от только что рассмотренного множителем перед экспонентой в правой части (108). Преобразуем разность $\Psi_i^{(l)\prime} - \Psi_i^{(l)}$ в соответствии с (96), (97) и [2], гл. 3, (4.9) и с учетом того, что в процессе столкновения меняется только направление относительной скорости частиц ($g_{ij} = g'_{ij}$):

$$\begin{aligned}
\Psi_i^{(3)\prime} \quad - \quad \Psi_i^{(3)} &= \frac{m_i}{2}\left[\left(\boldsymbol{c}'_i - \boldsymbol{u}_i\right)^2 - \left(\boldsymbol{c}_i - \boldsymbol{u}_i\right)^2\right] = \frac{m_i}{2}\left(\boldsymbol{c}'_i - \boldsymbol{c}_i\right)\cdot\left(\boldsymbol{c}'_i + \boldsymbol{c}_i - 2\boldsymbol{u}_i\right) = \\
&= \frac{m_i m_j}{m_i + m_j}\left(\boldsymbol{g}'_{ij} - \boldsymbol{g}_{ij}\right)\cdot\left(\boldsymbol{G}_{ij} - \boldsymbol{u}_i\right) = \\
&= -2\, z_1\, \frac{m_i m_j}{m_i + m_j}\left(\tilde{\boldsymbol{g}}_{ij}\cdot\mathbf{k}\right)\left(\mathbf{k}\cdot\left\{z_2\, \widetilde{\boldsymbol{G}}_{ij} + z_3\, \tilde{\boldsymbol{g}}_{ij} - \frac{\boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{u}_j}{2}\right\}\right). \qquad (112)
\end{aligned}$$

Скалярное произведение по отношению к своим аргументам является билинейной непрерывной функцией, поэтому можно применить предложение 2. После интегрирования по ε аналогично (109) получаем:

$$\begin{aligned}
-2\, z_1\, \frac{m_i m_j}{m_i + m_j}&\int\left(\tilde{\boldsymbol{g}}_{ij}\cdot\mathbf{k}\right)\left(\mathbf{k}\cdot\left\{z_2\, \widetilde{\boldsymbol{G}}_{ij} + z_3\, \tilde{\boldsymbol{g}}_{ij} - \frac{\boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{u}_j}{2}\right\}\right) d\varepsilon = \\
&= -2\pi\, z_1\, \frac{m_i m_j}{m_i + m_j}\left(1 - \cos\chi\right)\left(\tilde{\boldsymbol{g}}_{ij}\cdot\left\{z_2\, \widetilde{\boldsymbol{G}}_{ij} + z_3\, \tilde{\boldsymbol{g}}_{ij} - \frac{\boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{u}_j}{2}\right\}\right). \qquad (113)
\end{aligned}$$

По $\widetilde{\boldsymbol{G}}_{ij}$ и направлениям вектора $\tilde{\boldsymbol{g}}_{ij}$ интегрируем, используя предложение 1:

$$\begin{aligned}
J_{E,\,ij}^{(0)} \quad &= \quad -\iiiint \frac{1}{2}\, m_i C_i^2 \left(f_i^{(0)\prime} f_j^{(0)\prime} - f_i^{(0)} f_j^{(0)}\right) g_{ij}\, b\, db\, d\varepsilon\, d\boldsymbol{c}_i\, d\boldsymbol{c}_j = \\
&= \quad -\iiiint \frac{m_i}{2}\left[\left(\boldsymbol{c}'_i - \boldsymbol{u}_i\right)^2 - \left(\boldsymbol{c}_i - \boldsymbol{u}_i\right)^2\right] f_i^{(0)} f_j^{(0)} g_{ij}\, b\, db\, d\varepsilon\, d\boldsymbol{c}_i\, d\boldsymbol{c}_j = \\
&= \quad J_{e,\,ij}^{(0)} - \boldsymbol{u}_i\cdot\boldsymbol{J}_{p,\,ij}^{(0)} = \\
&= \quad 16 n_i n_j \frac{\sqrt{\pi}}{\xi}\, e^{-\frac{2 m_i m_j w^2}{m_i T_j + m_j T_i}} \times \\
&\quad \times \iint e^{-\tilde{g}_{ij}^2}\left\{D_{1,\,ij}\frac{w}{\xi}\left[\tilde{g}_{ij}\xi\, \mathrm{ch}\left(\tilde{g}_{ij}\xi\right) - \mathrm{sh}\left(\tilde{g}_{ij}\xi\right)\right] + 2 D_{2,\,ij}\tilde{g}_{ij}^2\, \mathrm{sh}\left(\tilde{g}_{ij}\xi\right)\right\} \times \\
&\qquad \times \tilde{g}_{ij}^2\left(1 - \cos\chi\right) b\, db\, d\tilde{g}_{ij}. \qquad (114)
\end{aligned}$$

В (114):

$$D_{1,\,ij} \quad = \quad \frac{2\, m_j T_i}{m_i + m_j}, \qquad (115)$$

$$D_{2,\,ij} \quad = \quad \frac{m_i m_j \left(T_i - T_j\right)}{2\left(m_i + m_j\right)^2}\sqrt{\frac{2\, T_i}{m_i} + \frac{2\, T_j}{m_j}}. \qquad (116)$$

Остальные обозначения те же, что и в (110).

Интересно отметить, что при $\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{u}_j$ интеграл (110) и первое слагаемое в (114) обращаются в нуль, а второе слагаемое в (114) пропорционально $(T_i - T_j)$, что соответствует переносу энергии от «горячих» компонент к «холодным» — см. систему уравнений многокомпонентной неравновесной газовой динамики (70)-(75). С учетом знака a_1, (104) и определения ξ (111) первое слагаемое приводит к *увеличению температуры* при $\boldsymbol{u}_i \neq \boldsymbol{u}_j$.

B. Значения интегралов столкновений для потенциала взаимодействия твердых сфер

Интегралы столкновений (110) и (114) являются сложными функциями средних скоростей и температур отдельных компонент, в основном, из-за сложной зависимости угла отклонения χ от (модуля) относительной скорости g_{ij} сталкивающихся частиц — ср. с [4], гл. 1, (5.26):

$$\chi\left(b, g_{ij}\right) = \pi - 2b \int\limits_{r_{min}}^{\infty} \frac{dr/r^2}{\sqrt{1 - \frac{2\varphi(r)}{m_{ij} g_{ij}^2} - \frac{b^2}{r^2}}}. \tag{117}$$

В (117) $m_{ij} = m_i m_j / (m_i + m_j)$ — приведенная масса сталкивающихся частиц, $\varphi(r)$ — потенциал центрального взаимодействия частиц, зависящий от расстояния r между ними.

В простейшем случае частиц, взаимодействующих как твердые сферы с диаметрами σ_i и σ_j, из (110) и (114) получаются следующие аналитические выражения для интегралов столкновений:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{J}_{p,\,ij}^{(0)\bullet} \;&=\; -n_i n_j \frac{m_i T_j + m_j T_i}{m_i + m_j} \frac{\boldsymbol{w}}{w} \frac{\sqrt{\pi}}{2\xi^2}\, \sigma_{ij}^2 \times \\ &\times \left[e^{-\xi^2/4} 2\xi \left(\xi^2 + 2\right) + \sqrt{\pi} \left(\xi^4 + 4\xi^2 - 4\right) \operatorname{erf}\left(\frac{\xi}{2}\right) \right], \end{aligned} \tag{118}$$

$$\begin{aligned} J_{E,\,ij}^{(0)\bullet} \;&=\; n_i n_j \frac{\sqrt{\pi}}{2\xi^2} \sigma_{ij}^2 e^{-\xi^2/4} \left[2D_{1,\,ij} w \xi \left(\xi^2 + 2\right) + 2D_{2,\,ij}\, \xi^2 \left(\xi^2 + 10\right) \right] + \\ &+ n_i n_j \frac{\pi}{2\xi^2} \sigma_{ij}^2 \times \\ &\times \left[D_{1,\,ij} w \left(\xi^4 + 4\xi^2 - 4\right) + D_{2,\,ij}\, \xi \left(\xi^4 + 12\xi^2 + 12\right) \right] \operatorname{erf}\left(\frac{\xi}{2}\right). \end{aligned} \tag{119}$$

В (118), (119) $\sigma_{ij} = (\sigma_i + \sigma_j)/2$ и использованы обозначения из (102), (104), (111), (115), (116).

Список литературы

[1] Гильберт Д. Основы общей теории линейных интегральных уравнений // Избранные труды. Т. 2. М.: Факториал, 1998.

[2] Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М.: ИЛ, 1960.

[3] Струминский В. В. // ПММ. 1974. Т. 38. С. 203-210.

[4] Гиршфельдер Дж., Кертисс Ч., Берд Р. Молекулярная теория газов и жидкостей. М.: ИЛ, 1961.

[5] Бурбаки Н. Элементы математики. Книга IV. Функции действительного переменного. М.: Наука, 1965.

[6] Ораевский В. Н., Коников Ю. В., Хазанов Г. В. Процессы переноса в анизотропной околоземной плазме. М.: Наука, 1985.