

ЭФФЕКТИВНЫЙ МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ УГЛОВЫХ УРАВНЕНИЙ ЧАНДРАСЕКАРА–ПЕЙДЖА

В. П. Незнамов*, И. И. Сафронов

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

С помощью преобразования Прюфера предлагается эффективный, надежный и незатратный численный метод вычисления собственных значений угловых уравнений Чандрасекара–Пейджа.

Ключевые слова: угловые уравнения, преобразование Прюфера, масс-зависимые сфероидальные гармоники спина s , собственные значения, фазовые функции.

Введение

В 1976 г. Чандрасекар [1] показал, как разделяются переменные в массивном уравнении Дирака в пространстве-времени Керра [2]. Пейдж [3] распространил этот анализ для пространства-времени Керра–Ньюмена [4]. В [1, 3] волновая функция дираковской частицы представлялась в виде

$$\psi(t, r, \theta, \phi) = e^{-i\omega t + im\phi} \Psi_{\omega m}(r, \theta). \quad (1)$$

Компоненты биспинора $\Psi_{\omega m}$ можно выразить как произведение двух радиальных и двух угловых функций $\{R_+(r), R_-(r), S_+(\theta), S_-(\theta)\}$, подчиняющихся связанным обыкновенным дифференциальным уравнениям.

За последние годы изучению свойств и методов решения угловых уравнений Чандрасекара–Пейджа посвящено достаточно много работ (см., например, [5–15]). Из литературы можно выделить работу [11], в которой авторы численно нашли решения угловых уравнений для достаточно большой области изменения параметров. Свои результаты авторы сравнили с предыдущими работами и указали на некоторые ошибки в литературе.

В данной работе мы воспроизвели некоторые собственные значения угловых уравнений, полученные в [11], применив к исходным уравнениям преобразование Прюфера [16, 17] с установлением

после преобразования соответствующих граничных условий. Этот метод оказался чрезвычайно эффективным, надежным и незатратным по времени вычислений.

В разделе 1 мы вводим основные уравнения и обозначения. Для преемственности наши обозначения совпадают с обозначениями [11]. В разделе 2 проводятся преобразования Прюфера, обсуждается метод решения преобразованных уравнений. В разделе 3 демонстрируется часть вычисленных собственных значений угловых уравнений Чандрасекара–Пейджа и проводится обсуждение полученных результатов.

1. Основные уравнения

Угловые уравнения Чандрасекара–Пейджа имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{dS_-}{d\theta} + \left(\frac{1}{2} \cot \theta + a\omega \sin \theta - m \csc \theta \right) S_- &= (\lambda + a\mu \cos \theta) S_+, \\ \frac{dS_+}{d\theta} + \left(\frac{1}{2} \cot \theta - a\omega \sin \theta + m \csc \theta \right) S_+ &= -(\lambda - a\mu \cos \theta) S_-. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $a = \frac{J}{M}$ – параметр углового момента метриков Керра и Керра–Ньюмена; ω и μ – частота и масса

* E-mail: neznamov@vniief.ru

дираковской частицы; $S_-(\theta), S_+(\theta)$ – масс-зависимые сфероидальные гармоники спина $1/2$; λ – собственные значения уравнений (2). Решения уравнений (2) зависят от двух непрерывных параметров, $a\omega$ и $a\mu$. Для заданных $a\omega, a\mu$ собственные состояния $\{S_+(\theta), S_-(\theta), \lambda\}$ могут идентифицироваться тремя дискретными числами: угловым моментом $j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$, азимутальной компонентой углового момента $m = -j, -j+1, \dots, j$ и четностью $P = \pm 1$.

Ниже мы будем отождествлять

$$S_{\pm} = {}_{\pm}1/2 S_{j,m,P}^{(a\omega, a\mu)} \quad \text{и} \quad \lambda = \lambda_{j,m,P}^{(a\omega, a\mu)}. \quad (3)$$

Уравнения (2) допускают ряд симметрий:

$$\lambda = \lambda_{j,m,P}^{(a\omega, a\mu)} = -\lambda_{j,-m,-P}^{(-a\omega, a\mu)} = -\lambda_{j,m,-P}^{(a\omega, -a\mu)} = \lambda_{j,-m,P}^{(-a\omega, -a\mu)}, \quad (4)$$

$${}_s S_{j,m,P}^{(a\omega, a\mu)} = (-1)^s {}_{-s} S_{j,m,-P}^{(a\omega, -a\mu)}(\theta), \quad (5)$$

$$= P(-1)^{m-\frac{1}{2}} {}_{-s} S_{j,-m,-P}^{(-a\omega, a\mu)}(\theta), \quad (6)$$

$$= P(-1)^{j+m} {}_{-s} S_{j,m,P}^{(a\omega, a\mu)}(\pi - \theta). \quad (7)$$

Знания спектра λ в квадранте $a\omega > 0, a\mu > 0$ достаточно для определения полного спектра. При $\mu = 0$ уравнения (2) сводятся к уравнениям для сфероидальных гармоник спина s . При отсутствии вращения $a = 0$ уравнения (2) сводятся к уравнениям для сферических гармоник спина s . Более полно материал данного раздела изложен в [11].

2. Преобразование Прюфера

Пусть

$$S_-(\theta) = S(\theta) \sin \Phi(\theta), \quad (8)$$

$$S_+(\theta) = S(\theta) \cos \Phi(\theta),$$

где

$$\frac{S_-(\theta)}{S_+(\theta)} = \operatorname{tg} \Phi(\theta), \quad (9)$$

$$S(\theta) = \left(S_-^2(\theta) + S_+^2(\theta) \right)^{1/2}. \quad (10)$$

Тогда уравнения (2) записываются в виде

$$\frac{d\Phi}{d\theta} = \lambda + a\mu \cos \theta \cos(2\Phi) + \left(\frac{m}{\sin \theta} - a\omega \sin \theta \right) \sin(2\Phi), \quad (11)$$

$$\frac{d \ln S}{d\theta} = -\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \theta + \left(a\omega \sin \theta - \frac{m}{\sin \theta} \right) \cos(2\Phi) + a\mu \cos \theta \sin(2\Phi). \quad (12)$$

Отметим, что решение уравнения (12) определяется только после вычисления решения (11). Ниже мы будем заниматься проблемой определения собственных значений λ , т. е. решением уравнения (11).

2.1. Граничные условия

Асимптотику функций $S_-(\theta), S_+(\theta)$ вблизи $\theta = 0$ и $\theta = \pi$ можно представить в виде [12, 18]

$$S_-(x) = K(x) F_{1,2}(x), \quad (13)$$

$$F_1(x) \Big|_{x \rightarrow 1} = \sum_{n=0}^{\infty} (F_1)_n (1-x)^n, \quad (14)$$

$$F_2(x) \Big|_{x \rightarrow -1} = \sum_{n=0}^{\infty} (F_2)_n (1+x)^n, \quad (15)$$

$$K(x) = (1-x)^{\frac{1}{2} |m-\frac{1}{2}|} (1+x)^{\frac{1}{2} |m+\frac{1}{2}|}. \quad (16)$$

Здесь $x = \cos \theta$.

Асимптотику $S_+(\theta)$ при $\theta \rightarrow 0$ или $\theta \rightarrow \pi$ можно легко определить из соотношения симметрии (7)

$$S_-(\theta) = P(-1)^{j+m} S_+(\pi - \theta). \quad (17)$$

С учетом (9) и (13)–(17) значение фазовой функции $\Phi(\theta)$ на полюсах $\theta = 0$ и $\theta = \pi$ равно

$$m < 0: \Phi(0) = k\pi, \quad \Phi(\pi) = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \quad (18)$$

$$m > 0: \Phi(0) = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad \Phi(\pi) = k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \quad (19)$$

При $\theta = \frac{\pi}{2}$ из (17) следует

$$S_-\left(\frac{\pi}{2}\right) = P(-1)^{j+m} S_+\left(\frac{\pi}{2}\right), \quad (20)$$

$$\operatorname{tg} \Phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = P(-1)^{j+m} = \pm 1. \quad (21)$$

2.2. Численный метод решения уравнения для фазовой функции $\Phi(\theta)$

Граничные условия (18)–(21) показывают, что для определения собственных значений λ можно использовать половину области определения функций $S_-(\theta), S_+(\theta)$: либо $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, либо $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

В первом случае, используя условие (21) при численном интегрировании (11), можно из $\theta = \frac{\pi}{2}$ обратным образом идти к $\theta = 0$ и при выполнении условия (18) получить набор собственных значений λ . Во втором случае интегрирование (11) должно идти от $\theta = \frac{\pi}{2}$ до $\theta = \pi$ и при выполнении условия (19) будет получаться одинаковый с первым случаем спектр значений λ .

Уравнение (11) имеет особенность $\frac{1}{\sin \theta}$ при $\theta \rightarrow 0$ и при $\theta \rightarrow \pi$. В расчетах достаточная степень точности определения спектра λ достигается при ограничении области определения $\theta_{\min} = 10^{-6} \div 10^{-9}$ и $\pi - \theta_{\min} = \pi - (10^{-6} \div 10^{-9})$.

Для решения уравнения (11) с граничными условиями (18)–(21) мы использовали неявный метод Рунге–Кутты пятого порядка с контролем размера шага (схема Ила трехстадийного метода Радо ПА [19]). Ниже собственные значения λ мы определяли интегрированием (11) от $\theta = \frac{\pi}{2}$ до $\theta = \theta_{\min}$.

3. Обсуждение результатов

Первоначально рассмотрим решение уравнения (11) для безмассовой дираковской частицы ($\mu = 0$). Рассмотрение проведем для значений параметров

$$j = \frac{1}{2}, l = 0, P = -1, m = +\frac{1}{2}, a\omega = 1. \quad (22)$$

В этом случае согласно (21) $\operatorname{tg}\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. В [11] (Приложение Б, таблица II) значение λ , вычисленное авторами, равно:

$$\lambda_{[11]} = -0,431544. \quad (23)$$

На рис. 1 приведена численно определенная нами функция $\Phi(\lambda)|_{\theta=\theta_{\min}}$ для значений параметров (22). В расчете рассматривался интервал $\lambda \in [-10, 0]$, $\theta_{\min} = 10^{-9}$, число счетных точек по λ ; $N_\lambda = 10^4$. Время расчета на стандартном ПК ~ 15 с. Характерной особенностью скачкообразной

функции $\Phi(\lambda)|_{\theta=\theta_{\min}}$ являются ее изменения на величину π для собственных значений λ [17]. Это хорошо видно на рис. 1, 2.

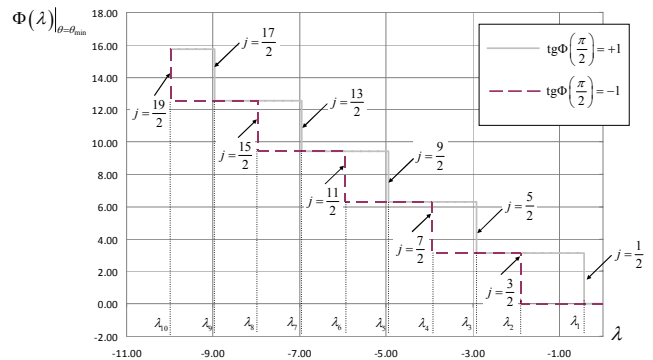


Рис. 1. Зависимости фазовой функции от параметра разделения λ . Собственные значения λ для различных j при

$$a\omega = 1, \mu = 0; P = -1, m = +\frac{1}{2}$$

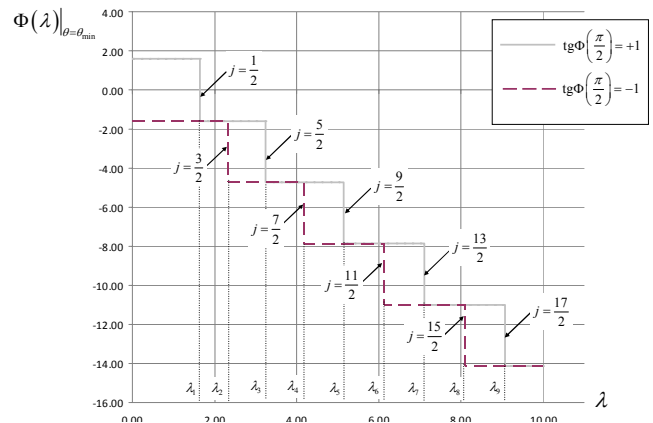


Рис. 2. Зависимости фазовой функции от параметра разделения λ . Собственные значения λ для различных j

$$\text{при } a\omega = 1, \frac{\mu}{\omega} = 0,4; P = +1, m = -\frac{1}{2}$$

Поскольку уравнение (11) явно не зависит от j , каждый расчет с заданной величиной m содержит информацию о значениях λ для всех j с одинаковым множителем $(-1)^{j+m}$. Так, на рис. 1 содержится информация о значениях λ при $m = +\frac{1}{2}$

и $j = \frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{9}{2}$ и т. д. Если изменить граничное условие $\operatorname{tg}\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = +1$ на $\operatorname{tg}\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$, то можно получить набор значений λ при $m = +\frac{1}{2}$ и $j = \frac{3}{2}, \frac{7}{2}, \frac{11}{2}$

и т. д. Этот набор также представлен на рис. 1.

и т. д. Этот набор также представлен на рис. 1.

и т. д. Этот набор также представлен на рис. 1.

и т. д. Этот набор также представлен на рис. 1.

Если смещать в расчетах начальный интервал λ в сторону больших по модулю отрицательных чисел, будем получать собственные значения λ при $m = +\frac{1}{2}$ и сколь угодно больших j .

В обсуждаемом расчете кроме отрицательных собственных значений λ , которые согласуются с расчетами [11] при четности $P = -1$, присутствуют формально скачки фазовой функции при положительных λ . Такие наборы значений λ мы не учитываем в нашей работе.

В расчете, представленном на рис. 1, значение λ при $j = \frac{1}{2}$ и $m = +\frac{1}{2}$ равно

$$\lambda_1 = -0,4315. \quad (24)$$

Значение λ в (24) совпадает с λ в (23) с точностью до четырех знаков после запятой.

Если взять начальный интервал $\lambda \in [-0,432, -0,431]$ с числом точек λ в интервале $N_\lambda = 10^4$, получим в расчете с затраченным временем на ПК ~ 10 с.

$$\lambda_1 = -0,4315440, \quad (25)$$

что совпадает со значением λ в (23), вычисленным авторами [11].

В [11] (Приложение Б, таблица VI) для значений параметров $j = \frac{3}{2}, l = 1, P = -1, m = +\frac{1}{2}, a\omega = 1$ для безмассовой дираковской частицы вычислено значение $\lambda_{[11]} = -1,883249$.

В нашем стандартном расчете с $\lambda \in [-10,0]$, $\theta_{\min} = 10^{-9}$, $N_\lambda = 10^4$, $\text{tg}\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$ получено значение $\lambda_2 = -1,8835$ (см. рис. 1). Если взять интервал $\lambda \in [-1,883, -1,884]$, то значение λ_2 в нашем расчете совпадает с $\lambda_{[11]}$ со всеми знаками после запятой.

Рассмотрим теперь решение уравнения (11) для массивной дираковской частицы ($\mu \neq 0$) на примере следующих значений параметров:

$$j = \frac{1}{2}, l = 0, P = +1, m = -\frac{1}{2}, a\omega = 1, \frac{\mu}{\omega} = 0,4. \quad (26)$$

В этом случае согласно (21) $\text{tg}\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. В [11] (Приложение Б, таблица I) вычисленное для этого случая значение λ равно

$$\lambda_{[11]} = 1,6425. \quad (27)$$

На рис. 2 приведена расчетная функция $\Phi(\lambda)\big|_{\theta=\theta_{\min}}$ для значений параметров (26). В расчете рассматривался интервал $\lambda \in [0, 10]$, $\theta_{\min} = 10^{-9}$, $N_\lambda = 10^4$. Время расчета на ПК ~ 10 с.

Полученное значение λ при $j = \frac{1}{2}, m = -\frac{1}{2}$ равно

$$\lambda_1 = 1,6425, \quad (28)$$

что совпадает со значением λ в (27), вычисленным авторами [11].

Аналогично рис. 1 на рис. 2 содержится информация о значениях λ при $m = -\frac{1}{2}$ и $j = \frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{9}{2}$ и т. д. При изменении граничного условия $\text{tg}\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = +1$ на $\text{tg}\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$ получаем набор значений λ при $m = -\frac{1}{2}$ и $j = \frac{3}{2}, \frac{7}{2}, \frac{11}{2}$ и т. д. (см. рис. 2).

В [11] (Приложение Б, таблица V) для массивной дираковской частицы со значениями параметров $j = \frac{3}{2}, l = 2, P = +1, m = -\frac{1}{2}, a\omega = 1, \frac{\mu}{\omega} = 0,4$ вычислено значение $\lambda_{[11]} = 2,343692$.

В нашем расчете с $\lambda \in [0, 10]$, $\theta_{\min} = 10^{-9}$, $N_\lambda = 10^4$, $\text{tg}\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$ получено значение $\lambda_2 = 2,34325$ (см. рис. 2). Если взять интервал $\lambda \in [2,343, 2,344]$, то значение λ_2 в нашем расчете совпадает с $\lambda_{[11]}$ со всеми знаками после запятой.

Отметим, что в расчетах определения λ с высокой степенью точности может возникнуть ситуация, когда скачок $\Phi(\lambda)\big|_{\theta=\theta_{\min}}$ вблизи собственных значений λ_k будет меньше π . Для восстановления требуемого скачка с заданной степенью точности необходимо соответствующее уменьшение величины θ_{\min} .

Подводя итоги, мы можем заключить, что преобразование Прюфера является эффективным инструментом для незатратного и надежного расчета собственных значений угловых уравнений Чандрасекара–Пейджа.

Авторы благодарят А. Л. Новоселову за существенную техническую помощь в подготовке статьи.

Список литературы

1. Chandrasekhar S. // Proc. R. Soc. London A 349, 571 (1976).
2. Kerr R. P. // Phys. Rev.Lett. 11, 237 (1963).
3. Page D. N. // Phys. Rev. D 14, 1509 (1976).
4. Newman E. T., Couch E., Chinnapared K., Exton A., Prakash A. and Torrence R., Math J. //Phys. 6, 918 (1965).
5. Kalnins E. G. and W. Miller Jr. // J. Math. Phys. 33, 286 (1992).
6. Suffern K. G., Fackerell E. D. and Cosgrove C. M. // J. Math. Phys. 24, 1350 (1983).
7. Batic D., Schmid H. and Winklmeier M. // J. Math. Phys. 46, 012504 (2005), [math-ph/0402047].
8. Chakrabarti S. K. // Proc. R. Soc. London A 391, 27 (1984).
9. Chandrasekhar S. The mathematical theory of black holes (Oxford University Press, 1983).
10. Winklmeier M. // Journal of differential equations 245. 2145 (2008), [arXiv:0806.1866].
11. Dolan S., Gair J. // Class. quantum grav. 26, 175020 (2009).
12. Leaver E. W. // Proc. R. Soc. Lond A, 402, 285-298 (1985).
13. Kiessling M. K.-H. and Tahvildar-Zadeh A. S. // J. Math. Phys. 56, 042303 (2015).
14. Shahar Hod, arxiv: 1506.04148 [gr-qc].
15. Batic D., Morgan K., Nowakowski M. and Bravo S. Medina, arxiv:1509.00452 [gr-qc].
16. Pruefer H. // Math. Ann. 95, 499 (1926).
17. Ulehla I., Horejsi J. // Phys. Lett, 113A, № 7 (1986).
18. Pekeris C. L., Frankowski K. // Phys. Rev. A (1989).
19. Hairer E., Wanner G. Solving ordinary differential equations II. Stiff and Differential-Algebraic Problems, Second Revised Edition, Springer-Verlag 1991, 1996 (Russian translation – M.: Mir, 1999)

Статья поступила в редакцию 16.11.2015