

ЧИСЛЕННОЕ И АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СДВИГОВОГО ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕМЕШИВАНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ k - ε МОДЕЛИ

В. П. Стаценко, Ю. В. Третьяченко, Ю. В. Янилкин

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Построено численное решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений, получающихся из уравнений k - ε модели для автомодельного режима задачи о сдвиговом турбулентном перемешивании. Проведено также численное моделирование задачи с использованием k - ε модели турбулентного перемешивания по коду ЭГАК на подробных сетках. Дано сравнение этих результатов с результатами 3D прямого численного моделирования и с экспериментальными данными.

Ключевые слова: турбулентное перемешивание, k - ε модель, сдвиговое перемешивание, автомодельные уравнения, численное моделирование.

Введение

Как и в любой феноменологической модели турбулентности, в k - ε модели имеется набор полуэмпирических коэффициентов. Обычно их находят, обращаясь к простейшим задачам, имеющим автомодельную стадию течения. На этой стадии исключается влияние начальных условий или других факторов, вносящих дополнительные параметры в описание течения. В работе [1] рассмотрены несколько таких течений, для которых имеются как экспериментальные данные, так и расчетные результаты, полученные прямым численным моделированием (ПЧМ), и выбраны определенные полуэмпирические коэффициенты.

Одна из таких задач – известная задача о сдвиговом перемешивании в плоском слое смешения, для которой в работе [1] для автомодельной стадии получено приближенное аналитическое решение на основе уравнений k - ε модели. В работах [3–5] данная задача исследована авторами методом прямого численного 2D и 3D моделирования и приводятся сравнения результатов моделирования с приближенным аналитическим решением и с некоторыми экспериментальными данными из работ [6–9].

В настоящей работе для автомодельного режима рассматриваемой задачи выполнено числен-

ное решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений, также получающихся из k - ε модели. Мы произвели тщательную обработку имеющихся и новых результатов 3D ПЧМ и исследовали более полный набор соответствующих экспериментальных данных [6–9].

Проведено численное моделирование задачи на достаточно подробных сетках по 2D версии кода ЭГАК [2] с использованием k - ε модели с коэффициентами из работы [1]. Результаты расчетов показали, что имеется согласие с соответствующим аналитическим решением, экспериментальными данными [6–9], а также с результатами 3D ПЧМ [4, 5].

1. Аналитическое решение для автомодельного режима

1.1. Основные уравнения k - ε модели турбулентности для случая однородного по плотности несжимаемого сдвигового течения

Рассматриваем слабосжимаемые течения с пренебрежимо малой молекулярной вязкостью (большие числа Рейнольдса). Полагаем, что имеется лишь компонента скорости u_x , изменяющаяся только по координате y . Молекулярную вязкость

считаем пренебрежимо малой. Плотность всюду $\rho = 1$. Уравнения k - ε модели [1] для этой задачи принимают следующий вид:

– уравнение неразрывности (в данном случае выполняется автоматически)

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0,$$

– уравнение движения

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y}. \quad (1)$$

Тензор напряжений Рейнольдса $\sigma_{ij} \equiv -\overline{\rho u'_i u'_j}$ аппроксимируем как обычно

$$\sigma_{xy} = D \frac{\partial u_x}{\partial y}. \quad (2)$$

Здесь кинематический коэффициент турбулентной вязкости $D = c_D k^2 / \varepsilon$, k – турбулентная энергия, ε – скорость диссипации турбулентной энергии.

Уравнение для турбулентной энергии имеет следующий вид:

$$\frac{\partial k}{\partial t} = G_1 - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial y} \left(c_k D \frac{\partial k}{\partial y} \right), \quad (3)$$

уравнение для скорости диссипации

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{k} (c_{\varepsilon 1} G_1 - c_{\varepsilon 3} \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial y} \left(c_\varepsilon D \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right), \quad (4)$$

здесь сдвиговое порождение турбулентности

$$G_1 = \sigma_{ji} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = D \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right)^2. \quad (5)$$

Система уравнений (1)–(5) содержит феноменологические коэффициенты: $c_D, c_k, c_\varepsilon, c_{\varepsilon 1}, c_{\varepsilon 3}$. Их значения, принятые в настоящее время на основе работы [1], приведены в табл. 1. Фактически имеется всего 4 коэффициента, учитывая принятое допущение: $c_k = c_\varepsilon$.

Т а б л и ц а 1

Феноменологические коэффициенты k - ε модели работы [1]

c_D	c_ε	$c_{\varepsilon 1}$	$c_{\varepsilon 3}$
0.12	4/3	1.15	1.7

1.2. Уравнения k - ε модели турбулентности для автомодельного режима сдвигового перемешивания плоского слоя раздела

Рассматриваемая модель с достаточной точностью оказывается применимой и для описания автомодельного сдвигового течения. Например, возникающего в начальном участке слоя смешения, создаваемого на краю струи, вытекающей из сопла, когда отношение скорости струи u_1 к скорости самого сопла u_2 относительно окружающей среды близко к единице: $m \equiv \frac{u_1}{u_2} \approx 1$. Другой при-

мер – однородные потоки, сходящиеся с разделительной пластины со скоростями u_1 и u_2 относительно пластины, именно такие эксперименты использовались в работах [6–11] при исследовании плоского слоя смешения.

В системе отсчета, связанной с жидкостью (с однородной плотностью), задача становится одномерной, но нестационарной – в автомодельном режиме ширина плоского слоя смешения растет линейно со временем пропорционально разности скоростей u_0 между скоростью струи и окружающей среды. Более подробно см. Приложение А.

Введем автомодельные переменные:

$$u_x \equiv \frac{dx}{dt} = u_0 f(\chi) / 2, \quad k = u_0^2 E(\chi), \quad D = u_0^2 t d(\chi), \quad \chi \equiv \frac{z}{u_0 t}. \quad (6)$$

Граничное условие для касательной скорости u_x , изменяющейся только по координате z

$$u_x = \begin{cases} u_0 / 2, & z \geq z_2 \\ -u_0 / 2, & z \leq z_1 = -z_2 \end{cases}, \quad (7)$$

где $u_0 = u_2 - u_1$.

Уравнения (1), (2) запишем для автомодельного режима, полагая $v \equiv f'$,

$$\chi v + (dv)' = 0, \quad (8)$$

Уравнения (3), (4) с учетом (5) запишем для автомодельного режима в виде

$$\chi E' + dv^2 / 4 - c_D e + c_k (dE)' = 0, \quad (9)$$

$$e + \chi e' + e(c_{\varepsilon 1} dv^2 / 4 - c_{\varepsilon 3} c_D e) / E + c_\varepsilon (de)' = 0. \quad (10)$$

Здесь

$$e \equiv E^2 / d. \quad (11)$$

1.3. Способы решения уравнений автомодельного режима

Запишем вторые производные с помощью (9), (10):

$$E'' = \frac{c_D e - \chi E' - d v^2 / 4 - c_k d' E'}{c_k d}, \quad (12)$$

$$e'' = \frac{\frac{e}{E} (c_{\varepsilon 3} c_D e - \frac{c_{\varepsilon 1}}{4} d v^2) - e - \chi e' - c_\varepsilon d' e'}{c_\varepsilon d}. \quad (13)$$

Решение уравнений (8), (12), (13) можно получить двумя способами.

а) интегрирование уравнений от $\chi = 0$ до $\chi = \chi_2$. Граничное условие в точке $\chi = 0$

$$E' = d' = 0. \quad (14)$$

Отсюда и из (8), (11) следует также $v' = e' = 0$.

В этой же точке задаем ненулевые значения (в качестве первого приближения используем приближенное аналитическое решение [1]):

$$v = v_0 > 0, \quad d = d_0 > 0, \quad E = E_0 > 0, \quad (15)$$

а также в соответствии с (12), (13) вторые производные:

$$E_0'' = \frac{c_D e_0 - d_0 v_0^2 / 4}{c_k d_0},$$

$$e_0'' = \frac{\frac{e_0}{E_0} (c_{\varepsilon 3} c_D e_0 - \frac{c_{\varepsilon 1}}{4} d_0 v_0^2) - e_0}{c_\varepsilon d_0}.$$

Интегрируем уравнения (8), (12), (13) от точки $\chi = 0$ до точки $\chi = \chi_2$, в которой обращаются в нуль величины d и E : $d(\chi_2) = E(\chi_2) = 0$. В процессе интегрирования находим d с помощью (11), а далее v , используя решение уравнения (8)

$$v = \frac{d_0 v_0}{d} \exp \left\{ - \int_0^\chi \frac{\chi}{d} d\chi \right\}.$$

Варьируя величины (15), добиваемся одновременного обращения в нуль d и E . При этом, вообще говоря, не выполняется еще одно граничное условие, следующее из (6), (7)

$$f(\chi_2) = 1.$$

Однако легко показать, что для двух решений с разными значениями $\chi = \chi_2$ и $\tilde{\chi} = \tilde{\chi}_2$ имеет место масштабное преобразование:

$$\chi = \frac{\tilde{\chi}}{\Delta}, \quad v = \tilde{v}, \quad f = \frac{\tilde{f}}{\Delta}, \quad d = \frac{\tilde{d}}{\Delta^2}, \quad E = \frac{\tilde{E}}{\Delta^2}, \quad (16)$$

$$\text{где } \Delta = \int_0^{\tilde{\chi}_2} \tilde{v} d\tilde{\chi} = \tilde{f}(\tilde{\chi}_2).$$

Итак, из решения $\tilde{v}, \tilde{d}, \tilde{E}$, дающего некое значение $\tilde{\chi} = \tilde{\chi}_2$, при котором

$$\tilde{f}(\tilde{\chi}_2) = \Delta \neq 1,$$

с помощью преобразования (16) получаем решение, удовлетворяющее условию $f(\chi_2) = 1$.

Очевидно, варьировать следует величину v_0 и отношение d_0 / E_0 , не меняющиеся при преобразовании (16);

б) интегрирование уравнений от $\chi = \chi_1$ до $\chi = 0$. Исследуем поведение на границах зоны турбулентного перемешивания (ЗТП) решения уравнений автомодельного режима с коэффициентами работы [1]. Положим, что на границе $\chi = \chi_1$ решение имеет вид:

$$E = E_1 \xi^B, \quad d = d_1 \xi^C, \quad v = v_1 \xi^D, \quad e = e_1 \xi^{2B-C}, \quad (17)$$

где $\xi \equiv \chi - \chi_1$, $e_1 \equiv E_1^2 / d_1$.

Тогда из уравнения (8) получим

$$d_1 v_1 (D + C) \xi^{D+C-1} + \chi_1 v_1 \xi^D = 0,$$

откуда следует:

$$C = 1, \quad d_1 = - \frac{\chi_1}{D+1}.$$

Из уравнений (9)–(10) с учетом последнего выражения для d_1 находим:

$$\chi_1 B E_1 \xi^{B-1} - \frac{\chi_1 v_1^2 \xi^{2D+1}}{4(D+1)} - c_D e_1 \xi^{2B-1} - c_k \frac{\chi_1 B^2 E_1 \xi^{B-1}}{(D+1)} = 0.$$

$$e_1 \xi^{2B-1} + \chi_1 (2B-1) e_1 \xi^{2B-2} + \frac{e_1}{E_1} \xi^{B-1} (-c_{\varepsilon 1} \frac{\chi_1 v_1^2 \xi^{2D+1}}{4(D+1)} - c_{\varepsilon 3} c_D e_1 \xi^{2B-1}) - c_\varepsilon \frac{e_1 \chi_1 (2B-1)^2 \xi^{2B-2}}{(D+1)} = 0.$$

Поскольку $B > 0$, то в полученных уравнениях члены, содержащие ξ^{2B-1} , имеют более высокий порядок малости, поэтому далее их опускаем:

$$\chi_1 B E_1 \xi^{B-1} - \frac{\chi_1 v_1^2 \xi^{2D+1}}{4(D+1)} - c_k \frac{\chi_1 B^2 E_1 \xi^{B-1}}{(D+1)} = 0. \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \chi_1 (2B-1) e_1 \xi^{2B-2} - c_{\varepsilon 1} \frac{e_1 \chi_1 v_1^2 \xi^{2D+B}}{E_1 4(D+1)} - \\ - c_{\varepsilon} \frac{e_1 \chi_1 (2B-1)^2 \xi^{2B-2}}{(D+1)} = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Тогда возможны два варианта:

1) $B-1 = 2D+1$, или $D+1 = B/2$

В этом случае из (18) следует

$$B = \frac{v_1}{\sqrt{2E_1(1-2c_k)}},$$

это дает условие $c_k < 1/2$, которое не согласуется со значением $c_k = \frac{4}{3}$, так что при этом значении

автомодельное решение отсутствует.

2) $B-1 < 2D+1$.

Отсюда и из (18) вытекает

$$D+1 = c_k B,$$

а из (19)

$$D+1 = c_{\varepsilon} (2B-1).$$

Очевидно, при значениях коэффициентов работы [1] $c_{\varepsilon} = c_k = 4/3$ получим:

$$B = 1, D = 1/3.$$

Итак, отсюда и из (17) окончательно имеем:

$$E = E_1 \xi, \quad d = -\frac{3}{4} \chi_1 \xi, \quad v = v_1 \xi^{1/3}, \quad e = -\frac{4}{3} \frac{E_1^2}{\chi_1} \xi. \quad (20)$$

Решение с начальными функциями (20) продолжаем до $\chi = 0$, добиваясь выполнения условий (14) с помощью вариации E_1 и v_1 .

В процессе интегрирования находим d с помощью (11), а далее находим v , используя решение уравнения (8):

$$v = -\int_0^{\chi} \chi v d\chi / d.$$

В процессе интегрирования находим также интеграл

$$\Delta = \int_{\chi_1}^0 \tilde{v} d\tilde{\chi}.$$

Из полученного решения, как и выше, с помощью преобразования (16) получаем решение, удовлетворяющее условию $f(\chi_2) = 1$.

2. Численное 2D моделирование с использованием k - ε модели

2.1. Постановка расчетов

На плоской границе раздела двух несжимаемых жидкостей имеется тангенциальный разрыв скорости $\Delta u_x \equiv u_0 = 1$ (рис. 1): выше границы раздела, соответствующей координате $z = 1$, газ движется параллельно границе раздела со скоростью $u_x = u_0/2$, ниже этой границы – со скоростью $u_x = -u_0/2$. На границе раздела скорость $u_x = 0$. На границах счетной области слева и справа задано условие периодичности, сверху и снизу – «жесткая стенка».

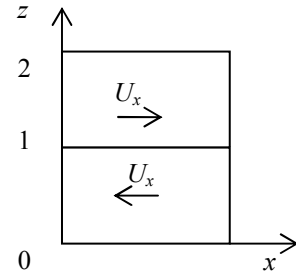


Рис. 1. Начальная геометрия задачи

В начальный момент времени обе области заполнены идеальными газами с $\gamma = 1,4$, плотностью $\rho = 1$ под давлением $P = 10$, что обеспечивает близкое к несжимаемому течение. Для проверки достаточности этого условия на сетке $N = 400$ (N – число точек в счетной области по z) выполнен также расчет с величиной $P = 50$.

В начальный момент времени на границе раздела (в двух слоях ячеек, по одной с каждой стороны границы раздела) задаются начальные значения турбулентных величин $k = 0,001$, $\varepsilon = 0,025$. В остальных ячейках начальные значения турбулентных величин $k = \varepsilon = 10^{-11}$.

Расчеты проводились на квадратной эйлеровой сетке. Вдоль оси x во всех расчетах брали 20 ячеек, вдоль оси z количество ячеек варьировалось согласно табл. 2.

Таблица 2
Варианты расчетов

Количество ячеек вдоль оси y	$N = 200$	$N = 400$	$N = 400$	$N = 1000$
Размер ячейки	$h = 0,01$	$h = 0,005$	$h = 0,005$	$h = 0,002$
Давление	10	10	50	10

2.2. Результаты численных решений уравнений автомодельного режима, сравнение с 2D расчетами и измерениями

В результате описанного в п. 1.3 решения получаем профили, показанные на рис. 2, 3, 8, 10. При этом используем число ячеек $n_\chi = 4 \cdot 10^4$ на интервал от центра ЗТП до границы в варианте «а», в варианте «б» $n_\chi = 4 \cdot 10^4$ от $\chi = \xi + \chi_1$ до $\chi = 0$, причем $|\xi/\chi_1| = 0,1$. Начальные значения величин в расчете по разделу «а» $v_0 = 15,7675$, $E_0 = 0,042$, $d_0 = 0,0023$; в расчете по разделу «б» $v_1 = 74,08$, $E_1 = 0,5312$, $\chi_1 = -0,04$.

Как видно из рис. 2, расхождение профилей по разным расчетам незначительное: оба 2D расчета практически совпадают, что говорит как о сходимости по числу счетных ячеек, так и о достаточной близости течения к несжимаемому. К этим расчетам ближе всего, как и следовало ожидать, решение по варианту «б», вариант «а» несущественно отличается на границах ЗТП.

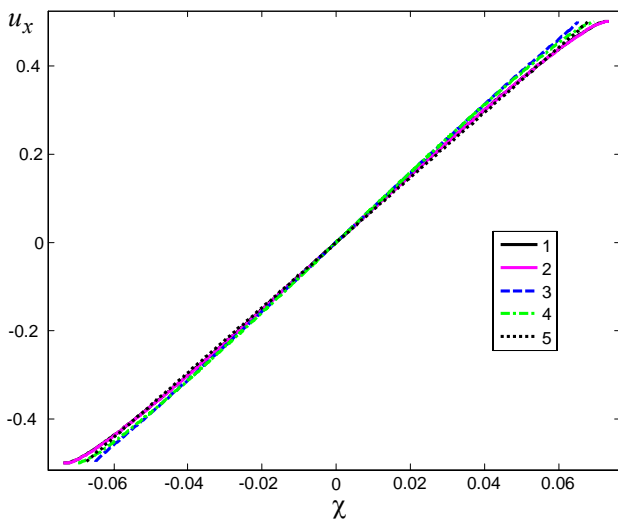


Рис. 2. Профили скорости. 2D расчеты: 1 – $N = 1000$, $P = 10$, 2 – $N = 400$, $P = 50$; 3 – решение по разделу «а», 4 – решение по разделу «б», 5 – приближенное аналитическое решение работы [1]

То же самое относится к расчетам турбулентной энергии (рис. 3): расхождение по разделам «а» и «б», наблюдающееся лишь на краях ЗТП, незначительно. Невелико и их отличие от обоих расчетов ЭГАК, которые совпадают между собой. При этом выражения (6) следует записать в виде:

$$D = u_0^2 (t - t_0) d(\chi), \quad \chi = \frac{z}{u_0 (t - t_0)}.$$

Здесь величина t_0 получается при пересечении с осью абсцисс линейного (автомодельного) участка зависимости $\hat{b}(t) = z_{0,9}(t) - z_{0,1}(t)$ (см. рис. 4 – прямая из пунктирных черных точек). По данным рис. 4 величина $t_0 = -0,064$ для расчетов с $N = 400$ и $N = 1000$, а для $N = 200$ $t_0 = 0,285$ (N – число точек в счетной области по z).

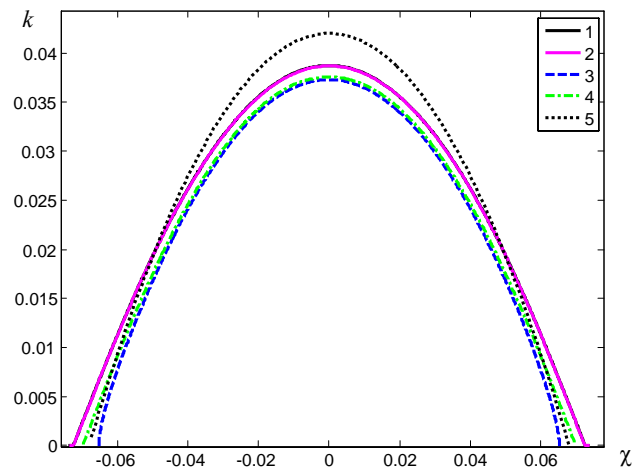


Рис. 3. Профили турбулентной энергии. 2D расчеты: 1 – $N = 1000$, $P = 10$, 2 – $N = 400$, $P = 50$; 3 – решение по разделу «а», 4 – решение по разделу «б», 5 – приближенное аналитическое решение работы [1]

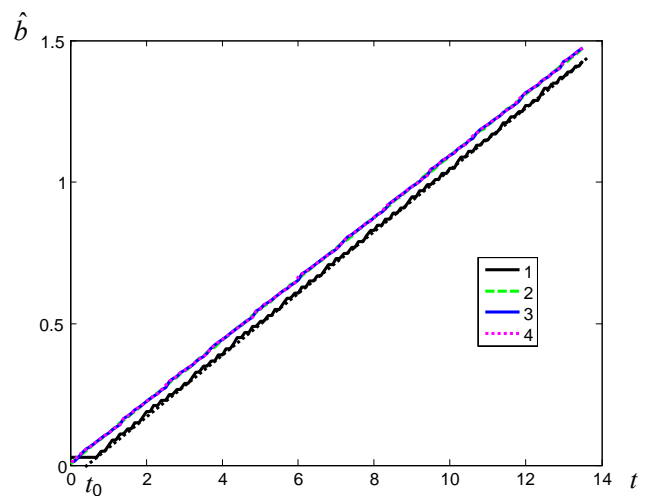


Рис. 4. Зависимость от времени ширины ЗТП \hat{b} . 2D расчеты $P = 10$: 1 – $N = 200$, 2 – $N = 1000$, 3 – $N = 400$; 4 – $P = 50$, $N = 400$

Отметим, что результаты для $N=400$ и $N=1000$ практически неотличимы друг от друга. То же самое можно сказать о зависимости от времени максимального в ЗТП значения турбулентной энергии: как видно из рис. 5, она быстро выходит на практически одно и то же постоянное значение.

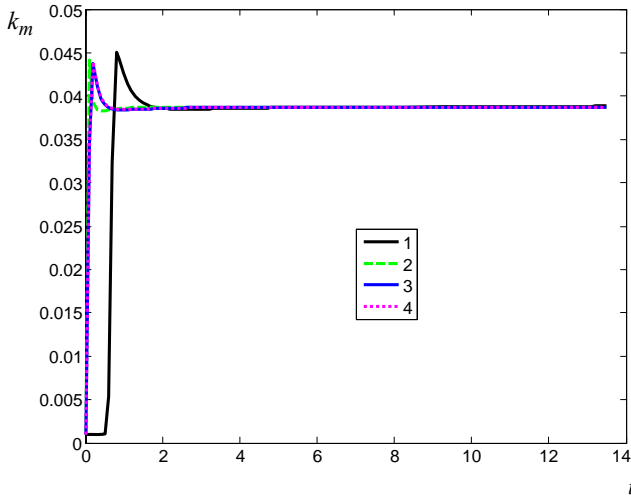


Рис. 5. Зависимость от времени максимального в ЗТП значения турбулентной энергии. 2D расчеты $P=10$: 1 – $N=200$, 2 – $N=1000$, 3 – $N=400$; 4 – $P=50$, $N=400$

На рис. 6 показана функция максимального в ЗТП значения ε_m скорости диссипации турбулентной энергии $F_\varepsilon \equiv \varepsilon_m(t-t_0)$.

Она также быстро выходит практически на одно и то же постоянное значение.

Функция максимального в ЗТП значения D_m коэффициента турбулентной вязкости приведена на рис. 7 $F_D \equiv D_m/(t-t_0)$.

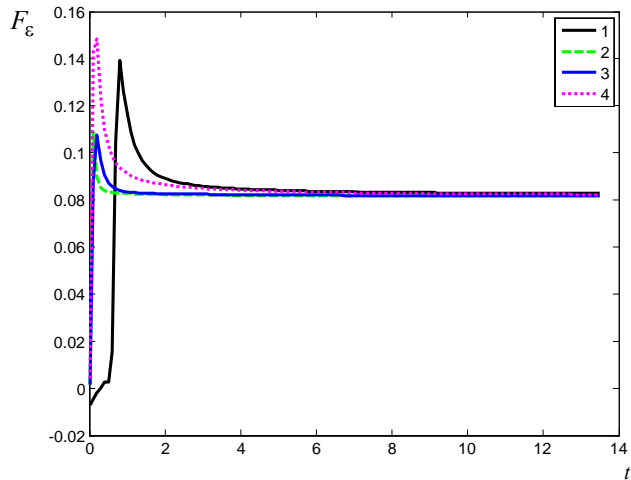


Рис. 6. Зависимость от времени максимального в ЗТП значения функции скорости диссипации турбулентной энергии. 2D расчеты $P=10$: 1 – $N=200$, 2 – $N=1000$, 3 – $N=400$; 4 – $P=50$, $N=400$

Она также быстро выходит на практически постоянное значение, близкое для разных N .

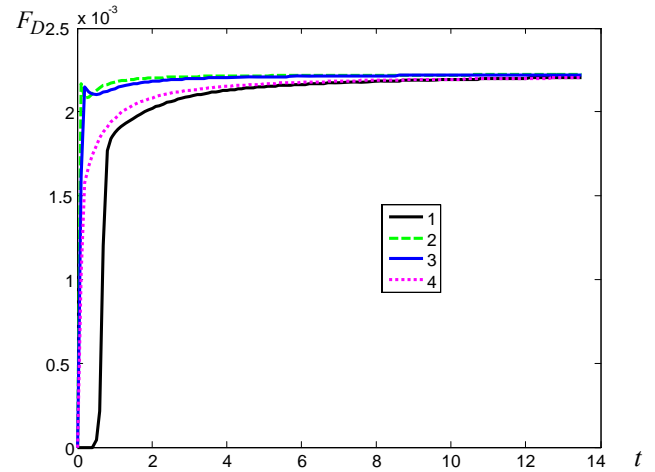


Рис. 7. Зависимость от времени максимального в ЗТП значения функции коэффициента турбулентной вязкости. 2D расчеты $P=10$: 1 – $N=200$, 2 – $N=1000$, 3 – $N=400$; 4 – $P=50$, $N=400$

Из анализа полученных данных следует, что имеет место сходимость результатов 2D моделирования при вариации расчетной сетки. Результаты расчета на сетке $N=200$ мало отличаются от $N=400$ и $N=1000$, которые, в свою очередь, практически неотличимы друг от друга.

Из рис. 8 видно, что наблюдающееся лишь на краях ЗТП расхождение профилей коэффициента турбулентной вязкости, рассчитанных по разделам «а» и «б», незначительно. Более заметно их отличие от 2D расчетов, которые совпадают между собой. Согласие с приближенным аналитическим решением работы [1] в целом можно считать удовлетворительным.

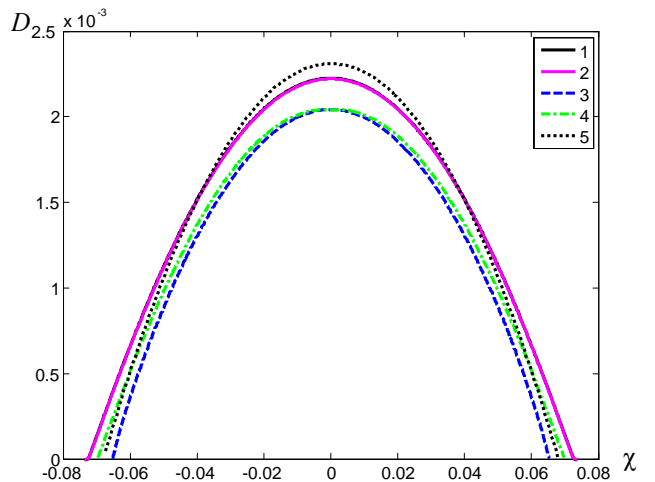


Рис. 8. Профили коэффициента турбулентной вязкости. 2D расчеты: 1 – $N=1000$, $P=10$, 2 – $N=400$, $P=50$; 3 – решение по разделу «а», 4 – решение по разделу «б», 5 – приближенное аналитическое решение работы [1]

В решении по разделу «а» на правой границе обращается в нуль как поток скорости диссипации $\tilde{\varepsilon} \equiv c_D \varepsilon$ турбулентной энергии, так и поток самой турбулентной энергии (рис. 9).

Расхождение рассчитанных по разделам «а» и «б» профилей скорости диссипации турбулентной энергии, наблюдающееся на краях ЗТП, незначительно. Незначительно их отличие и от 2D расчетов, которые практически совпадают между собой.

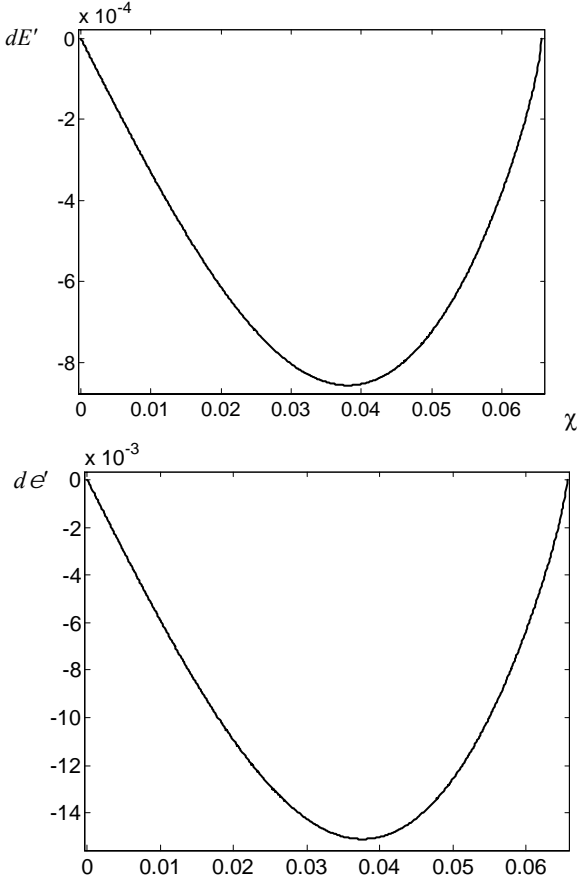


Рис. 9. Профили потока турбулентной энергии (вверху) и потока скорости диссипации (внизу) в решении по разделу «а»

Интегральные показатели задачи, полученные в результате решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (8)–(10), описывающих автомодельный режим сдвигового течения, следующие:

$$\begin{aligned} \text{по разделу «а»: } \beta &= \frac{b}{u_0 t} \equiv \Delta\chi_b = 0,1105, \\ k_m &= \max(k) = 0,0373; \\ \text{по разделу «б»: } \beta &= 0,1119, k_m = 0,0375. \end{aligned} \quad (21)$$

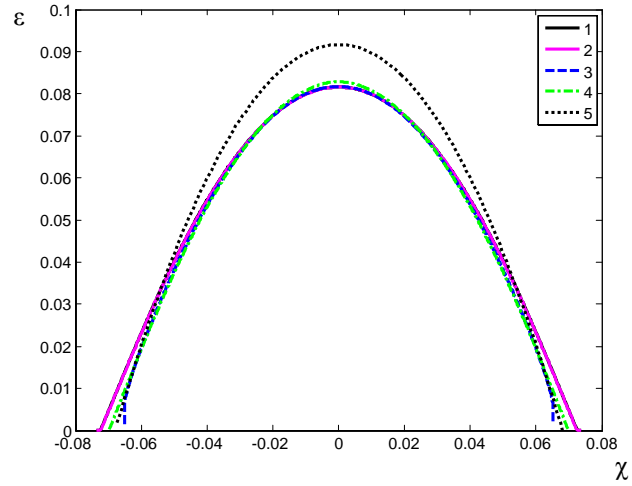


Рис. 10. Профили коэффициента скорости диссипации турбулентной энергии. Расчеты ЭГАК: 1 – $N = 1000$, $P = 10$, 2 – $N = 400$, $P = 50$; 3 – решение по разделу «а», 4 – решение по разделу «б», 5 – приближенное аналитическое решение работы [1]

Здесь в соответствии с определением [9, 10] $b = z_{0,95} - z_{0,1}$ – ширина ЗТП, определенная по

$$\begin{aligned} \text{уровню } \frac{u_x}{u_0}(z_{0,95}) &= \frac{u_x}{u_0}(\chi_{0,45}) = 0,45 \quad \text{и} \quad \frac{u_x}{u_0}(z_{0,1}) = \\ &= \frac{u_x}{u_0}(\chi_{-0,4}) = -0,4, \quad \text{или в системе отсчета, связан-} \end{aligned}$$

ной с разделительной пластиной: $\tilde{u}_x(z_{0,95}) = 0,95$

$$\text{и } \frac{\tilde{u}_x}{u_0}(z_{0,1}) = 0,1.$$

Эти величины (21) близки как к результатам 2D расчетов по $k-\varepsilon$ модели $\beta = 0,1154$ и $k_m = 0,0388$, так и к результатам приближенного аналитического решения из работы [1] $\beta = 0,1156$, $k_m = 0,042$. Значение β из (21) также близко к результатам 3D расчетов ПЧМ [4, 5] и удовлетворительно согласуется с измерениями [9] (см. Приложение А и Б). Максимумы турбулентной энергии во всех 2D расчетах близки и не противоречат измерениям.

Итак, профили скорости в 2D расчетах удовлетворительно согласуются с результатами численного интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений (8)–(10), описывающих автомодельный режим сдвигового течения, а также с приближенным аналитическим решением работы [1], как видно из рис. 2, 3, 8, 10.

Заключение

Для автомодельного режима сдвигового течения получена система обыкновенных дифференциальных уравнений, приведены способы решения этой системы. Полученные решения согласуются с приближенным аналитическим решением работы [1].

Результаты численного моделирования, выполненного в данной работе по 2D коду ЭГАК с применением $k-\varepsilon$ модели, показывают, что в расчетах происходит быстрый выход на автомодельный режим. Данный режим характеризуется линейным законом роста со временем ширины ЗТП, а также постоянством по времени максимальных в ЗТП значений турбулентной энергии k_m и функций скорости ее диссипации ε_m , а также коэффициента турбулентной вязкости D_m : $\varepsilon_m(t-t_0)$ и D_m/l . Имеет место сходимость результатов моделирования при измельчении счетной сетки.

Линейная аппроксимация экспериментальных данных дает $\beta = 0,1036 \pm 0,02$, что достаточно близко к полученным в данной работе результатам 2D расчетов $\beta = 0,1164$. Усредненные данные 3D ПЧМ на наиболее подробных счетных сетках также близки к полученным в настоящей работе результатам 2D расчетов.

Все значения турбулентной энергии, полученные в данной работе, близки между собой и согласуются с данными измерений и 3D ПЧМ.

Список литературы

1. Гужова А. Р., Павлушин А. С., Стаценко В. П. Уточнение констант $k-\varepsilon$ модели турбулентности на основе результатов прямого численного моделирования простейших турбулентных течений и измерений // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2005. Вып. 3. С. 37–48.
2. Янилкин Ю. В., Беляев С. П., Бондаренко Ю. А. и др. Эйлеровы численные методики ЭГАК и ТРЭК для моделирования многомерных течений многокомпонентной среды // Труды РФЯЦ-ВНИИЭФ. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ. 2008. Вып. 12. С. 54–65.
3. Бахрах С. М., Жмайло В. А., Стаценко В. П., Янилкин Ю. В. Численное моделирование турбулентного перемешивания в сдвиговых течениях // Числ. методы мех. спл. среды. 1983. Т. 14, № 2. С. 11–27.

4. Жмайло В. А., Стадник А. Л., Стаценко В. П., Янилкин Ю. В. Прямое численное моделирование турбулентного перемешивания в сдвиговых течениях // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 1996. Вып. 1-2. С. 43–51.

5. Жмайло В. А., Синькова О. Г., Стаценко В. П., Янилкин Ю. В. Прямое трехмерное численное моделирование сдвигового турбулентного перемешивания // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2004. Вып. 3. С. 23–39.

6. Spenser B. W., Jones B. G. Statistical investigation of pressure and velocity fields in the turbulent two-stream mixing layers // AIAA Paper. 1971. P. 613.

7. Rodi W. A. Review of experimental data of uniform density free turbulent boundary layers // Studies in convection, Acad. Press, London, 1975. Vol. 1. P. 79–166.

8. Browand F. K., Latigo B. O. Growth of the two-dimensional mixing layer // Phys. Fluids. 1979. Vol. 22. N 6. P. 1011.

9. Oster D. & Wygnanski I. The forced mixing layer between parallel streams // Journal of Fluid Mechanics. 1982. Vol. 123. P. 91–130.

10. Hussain A. K. M. F. & Zedan M. F. Effects of the initial condition on the axisymmetric free shear layer: Effect of the initial fluctuation level // Phys. Fluids. 1978. Vol. 21(9), September.

11. Weisbrot I., Einav S. & Wygnanski I. The nonunique rate of spread of the two-dimensional mixing layer // Phys. Fluids. 1982. Vol. 25(10), October.

Приложение А

Обзор экспериментальных данных для сдвигового перемешивания

Рассмотрим однородные потоки, сходящиеся с разделительной пластины со скоростями u_1 и u_2 , именно такие эксперименты использовались, в частности, в работах [9–11] при исследовании плоского слоя смешения. Задача предполагается однородной по плотности. Тогда в системе отсчета, связанной со средой, задача становится одномерной, но нестационарной – в автомодельном режиме ширина плоского слоя смешения растет линейно со временем пропорционально разности скоростей u_0 между скоростью струи и окружающей среды

$$b = \beta u_0 t.$$

Здесь в соответствии с определением [9–11] $b = y_{0,95} - y_{0,1}$ – ширина ЗТП, определенная по уровню $\frac{u_x}{u_0}(z_{0,95}) = \frac{u_x}{u_0}(\chi_{0,45}) = 0,45$ и $\frac{u_x}{u_0}(z_{0,1}) = \frac{u_x}{u_0}(\chi_{-0,4}) = -0,4$, или в системе отсчета, связанной с разделительной пластиной: $\frac{\tilde{u}_x}{u_0}(z_{0,95}) = 0,95$ и $\frac{\tilde{u}_x}{u_0}(z_{0,1}) = 0,1$.

Величину β следует выразить через непосредственно измеряемую в экспериментах величину

$$b' \equiv \frac{db}{dx} = \frac{b}{x - x_0}.$$

Учитывая, что $x - x_0 = \frac{u_1 + u_2}{2}t$ и $u_0 = u_2 - u_1$, получим

$$\beta = \frac{b'}{2\lambda},$$

где в соответствии с определением (10)–(12)

$$\lambda \equiv \frac{u_2 - u_1}{u_2 + u_1}.$$

Иначе, учитывая, что $m \equiv u_1 / u_2$, выражение для β можно записать в следующем виде

$$\beta = \frac{b'(1+m)}{2(1-m)}.$$

В работе [9] приведены экспериментальные результаты для величины b' разных авторов для различных значений λ . Мы приводим эти данные (табл. П.1) для не слишком больших значений $\lambda \lesssim 0,54$, что соответствует значениям $m \gtrsim 0,3$.

На рис. П.1 эти экспериментальные данные показаны в виде зависимости $\beta(m)$. Они аппроксимируются линейной зависимостью

$$\beta = 0,0196m + 0,084. \quad (\text{П.1})$$

При $m = 1$ $\beta = 0,1036$ (см. также рис. П.1). При этом среднее квадратичное отклонение экспериментальных данных от прямой (П.1) составляет

$\delta\beta = \left\langle \left(\langle \beta \rangle - \beta \right)^2 \right\rangle^{1/2} \approx 0,023$ (здесь знак $\langle \rangle$ означает усреднение) – оно показано на рис. П.1. Как видно, при $m \rightarrow 1$ согласие с результатами 2D расчетов удовлетворительное (напомним, что 2D расчеты соответствуют именно $m = 1$, их продолжение в область $m < 1$ сделано лишь для наглядности).

Таблица П.1
Экспериментальные данные [9]
для скорости смешения

λ	m	β
0.1474	0.743	0.120
0.2470	0.604	0.071
0.2515	0.598	0.105
0.2546	0.594	0.084
0.2553	0.593	0.095
0.2561	0.592	0.087
0.3366	0.496	0.094
0.4316	0.397	0.085
0.4324	0.396	0.094
0.4324	0.396	0.093
0.4430	0.386	0.112
0.5380	0.300	0.084
0.5418	0.297	0.094

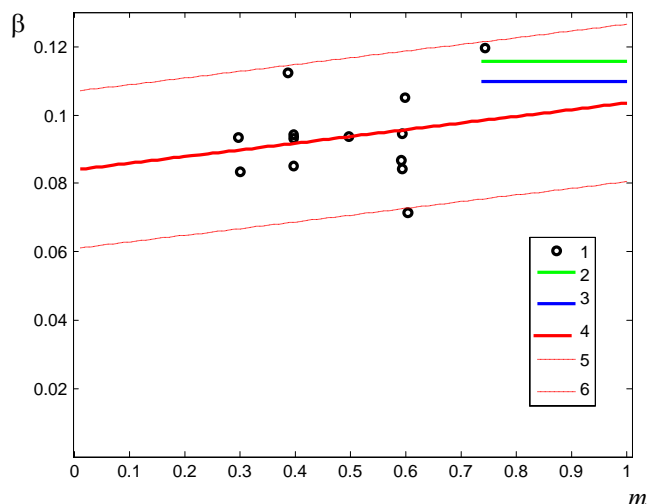


Рис. П.1. Зависимость от отношения скоростей показателя скорости развития плоского слоя смешения. 1 – экспериментальные данные разных авторов из работы [9] и их линейная аппроксимация (4); 2 – 2D расчеты; 3 – решение уравнений автомодельного режима; 5–6 – аппроксимация со средним квадратичным отклонением

В работе [9] приведены также результаты измерения разными авторами максимальных значений среднее квадратичных пульсаций различных компонент скорости, см. табл. П.2. Вычисленные по ним значения турбулентной энергии также приведены в этой таблице.

Таблица П.2

Среднее квадратичные пульсации различных компонент скорости

Авторы	u'_x / u_0	u'_y / u_0	u'_z / u_0	k_m
Spencer 1970	0.17	0.14	0.145	0.0348
Yule 1971	0.173	0.16	0.18	0.044
Oster, Wygnanski 1982	0.18	0.153	0.145	0.0384

Эти результаты согласуются со всеми расчетами, приведенными в данной работе.

Результаты 2D расчетов и решения автоматических уравнений по разделам 1.3 «а» и 1.3 «б» приведены также на рис. П.2, на котором показана величина, обратная скорости нарастания толщины слоя смешения:

$$\sigma = \frac{1,855\Delta x}{\Delta(z_{0,1} - z_{0,9})},$$

где $\Delta(z_{0,1} - z_{0,9})$ – расстояние между точками, в которых относительная скорость $\hat{u} = \frac{u - u_2}{u_1 - u_2}$ принимает соответственно значения 0,1 и 0,9.

Для результатов расчетов, как и в [3], длине струи $(x - x_0)$, фигурирующей в опытах, сопоставляется время $(t - t_0)$: $(x - x_0) = \frac{(u_1 + u_2)}{2}(t - t_0)$.

Поскольку

$$\Delta z = u_0(\chi_{0,4} - \chi_{-0,4})(t - t_0) = 2u_0\chi_{0,4}(t - t_0), \text{ то:}$$

$$\sigma = \frac{1,855(1+m)}{4(1-m)\chi_{0,4}} = \frac{1,855}{4\lambda\chi_{0,4}},$$

где $m \equiv u_1/u_2$, а скорости относятся к системе отсчета, связанной с разделительной пластиной или соплом. Аналогичным образом на рис. П.2 представлены данные измерений [8] для интервала m , соответствующего интервалу измерений λ . Различными точками на рис. П.2 показаны также экспериментальные данные разных авторов, приведенные в [7].

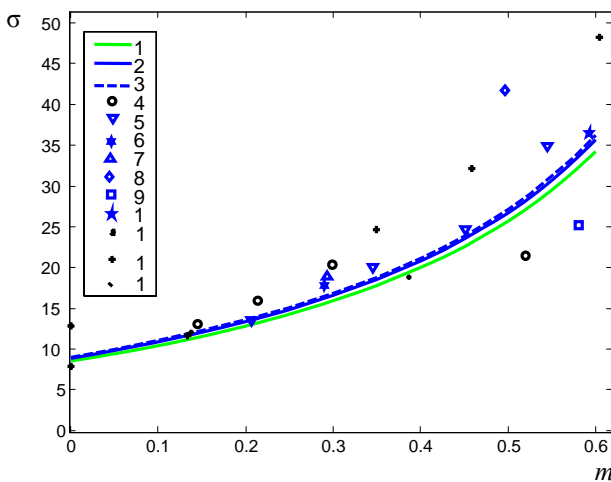


Рис. П.2. – Зависимость σ от времени в задаче о сдвиговом слое смешения: 2D расчеты: 1 – данная работа; 2 – решение по разделу 1.3 «а», 3 – решение по разделу 1.3 «б»; 4–5 – по измерениям [8], 6–13 – экспериментальные данные разных авторов, приведенные в [7]

Как видно, расчетные кривые согласуются с измерениями. При этом большие значения m наиболее соответствуют рассматриваемой нами задаче.

Приложение Б

Обзор данных прямого 3D численного моделирования сдвигового перемешивания

В работах [3–5] приведены результаты прямого 3D численного моделирования для различных значений числа ячеек N_x в направлении течения. Мы приводим эти данные (табл. П.3), сделав дополнительную обработку. В указанных работах ширина ЗТП $\Delta(z_{0,1} - z_{0,9})$ – расстояние между точками, в которых относительная скорость $\hat{u} = \frac{u - u_2}{u_1 - u_2}$ принимает соответственно значения 0,1

и 0,9. Мы же учтем, что в соответствии с определением (12), (15), (16) $b = z_{0,95} - z_{0,1}$ – ширина ЗТП,

определенная по уровню $\frac{u_x}{u_0}(z_{0,95}) = \frac{u_x}{u_0}(\chi_{0,45}) = 0,45$ и $\frac{u_x}{u_0}(z_{0,1}) = \frac{u_x}{u_0}(\chi_{-0,4}) = -0,4$, или в системе

отсчета, связанной с разделительной пластиной: $\frac{\tilde{u}_x}{u_0}(z_{0,95}) = 0,95$ и $\frac{\tilde{u}_x}{u_0}(z_{0,1}) = 0,1$. Тогда получим

величины $\beta = \frac{b}{u_0(t - t_0)}$, приведенные в табл. П.3

Таблица П.3

Интегральные величины при прямом 3D численном моделировании

Номер варианта	Количество ячеек $N_x N_y N_z$	L_z	L_x	β	k_m
1	100^3	1	1	$0.077 \div 0.09$	$0.033 - 0.037$
2	100^3	1	1	$0.07 \div 0.1$	0.027
3	100^3	1	1	0.096	0.036
4	$150^2 \times 200$	2	1.5	$0.1 \div 0.1075$	$0.038 \div 0.041$
5	$200^2 \times 400$	2	1	$0.098 \div 0.1$	$0.038 \div 0.04$
6	$300^2 \times 400$	2	1.5	$0.086 \div 0.1$	$0.033 \div 0.035$
7	$300^2 \times 400$	2	1.5	0.13-0.17	0.05

На рис. П.3 эти данные показаны в виде зависимости $\beta(N_x)$. Они аппроксимируются линейной зависимостью:

$$\beta = 1,665 \cdot 10^{-4} N_x + 0,07115. \quad (\text{П.2})$$

При $N_x = 300$ $\beta = 0,121$ (см. также рис. П.3). При этом среднеквадратичное отклонение данных от прямой (П.2) составляет $\delta\beta = \left\langle \left(\langle \beta \rangle - \beta \right)^2 \right\rangle^{1/2} \approx 0,024$ – оно показано на рис. П.3. Как видно, согласие с результатами расчета по ЭГАК и численное решение автомодельных уравнений удовлетворительное.

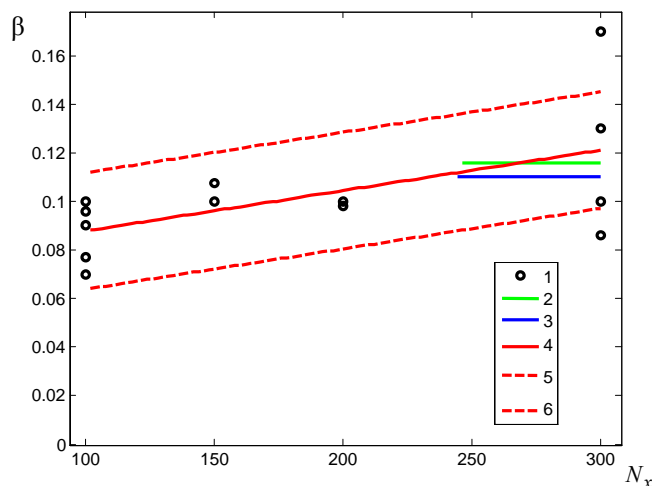


Рис. П.3. Зависимость от числа счетных ячеек показателя скорости развития плоского слоя смешения: 1 – результаты прямого 3D численного моделирования и их линейная аппроксимация (4); 2 – 2D расчеты данной работы; 3 – решение уравнений автомодельного режима; 5–6 – аппроксимация со среднеквадратичным отклонением

На рис. П.4 показаны данные 3D расчетов для максимальной турбулентной энергии в виде зависимости $k_m(N_x)$. Они аппроксимируются линейной зависимостью

$$k_m = 2,873 \cdot 10^{-5} N_x + 0,03178.$$

При этом среднеквадратичное отклонение данных от прямой (П.2) составляет $\delta k_m = \left\langle \left(\langle k_m \rangle - k_m \right)^2 \right\rangle^{1/2} \approx 0,0055$ (показано на рис. П.4).

Как видно, согласие со всеми результатами 2D расчетов и решениями автомодельных уравнений удовлетворительное.

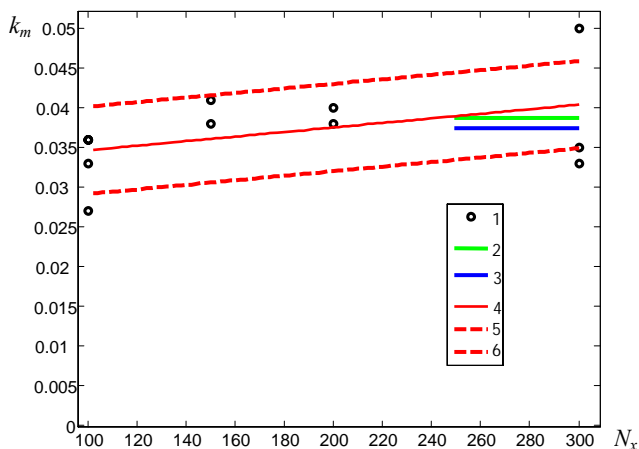


Рис. П.4. Зависимость от числа счетных ячеек максимального в ЗТП значения турбулентной энергии. Обозначения рис. П.3

Статья поступила в редакцию 16.11.2015